

การศึกษาเปรียบเทียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในปัญหาท่อนำคลื่น

ความนำ

ในบทที่ 2 ถึงบทที่ 7 เป็นการศึกษาวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เพื่อตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ ท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิก ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง รวมถึงการปรับปรุงรูปสมการระบบสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิก ซึ่งผลจากการตรวจสอบความสามารถของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ได้กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปดังตาราง 8.1 ได้ดังนี้

ตาราง 8.1 ความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหาท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

วิธี		ความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่น		
		ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง	ท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิก	
			ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็ก	ท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้า
วิธีที่ 1	วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ [บทที่ 2] (Koshiba, 1985ก)	สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้	ไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้	สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหานี้ได้
วิธีที่ 2	วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ [บทที่ 3] (Koshiba, 1985ข)	สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้	ไม่สามารถวิเคราะห์ได้โดยตรง ต้องทำการปรับปรุงสมการระบบเพิ่มเติม จึงจะทำให้วิธีนี้สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหานี้ได้	ไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้
วิธีที่ 3	วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ [บทที่ 4] (Hayata และคณะ, 1986)	สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้	ไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้	สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้

ตาราง 8.1 (ต่อ) ความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหาที่พหุนามของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

วิธี		ความสามารถในการวิเคราะห์ที่พหุนาม		
		พหุนามที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง	พหุนามแบบแอนไอโซทรอปิก	
			พหุนามแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็ก	พหุนามแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้า
วิธีที่ 4	วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ [บทที่ 5] (Hayata และคณะ, 1989)	สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้	ไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้	ไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้
วิธีที่ 5	วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน [บทที่ 6] (Lee, 1994)	สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้	ไม่สามารถวิเคราะห์ได้โดยตรง ต้องทำการปรับปรุงสมการระบบเพิ่มเติม จึงจะทำให้วิธีนี้สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหานี้ได้	ไม่สามารถวิเคราะห์ได้โดยตรง ต้องทำการปรับปรุงสมการระบบเพิ่มเติม จึงจะทำให้วิธีนี้สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหานี้ได้
วิธีที่ 6	วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง [บทที่ 7] (Angkaew และคณะ, 1987)	สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้	สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้	สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้

ในบทนี้เป็นการศึกษาเปรียบเทียบความแม่นยำและการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับเปรียบเทียบจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในสมการของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน และเปรียบเทียบความสามารถในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม และเปรียบเทียบความสปีร์สของเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจง

เปรียบเทียบความแม่นยำและการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ทั้ง 6 วิธีที่ได้กล่าวมานี้จะนำมาเปรียบเทียบความแม่นยำและการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับ ในปัญหาต่อไปนี้

1. พหุนามแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์
2. พหุนามที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง
3. พหุนามแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็ก ที่เทนเซอร์ $[\mu]$ อยู่ในรูปของ

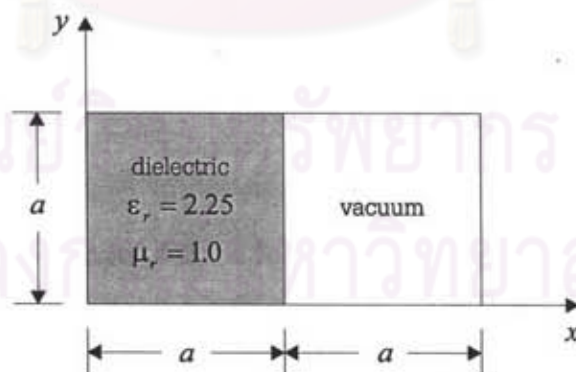
$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & \mu_{xz} \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}$$

การศึกษาเปรียบเทียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ทั้ง 6 วิธี ในปัญหาข้างต้น จะอยู่บนพื้นฐานดังนี้

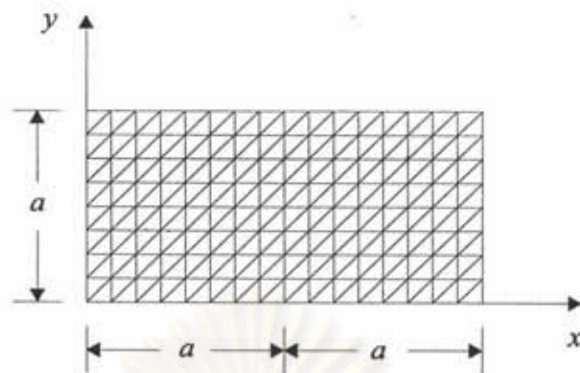
1. เมช (mesh) ของอีลีเมนต์และการให้หมายเลขโนด (node numbering) แบบเดียวกัน
2. ใช้โปรแกรมย่อย (subroutine) ในการคำนวณค่าเจาะจงจากสมการเมตริกซ์ (Eigenmatrix) ของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน โปรแกรมเดียวกัน
3. ผู้เสนอนิพนธ์ได้เขียนโปรแกรมขึ้นเองทั้งหมดโดยใช้ภาษาคำนวณของโปรแกรมแมทเล็บ (MATLAB) 4.2c1 และทำการประมวลผลบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล ที่ใช้หน่วยประมวลผลกลาง (CPU) เพนเทียม (pentium) 120 เมกะเฮิร์ตซ์ และหน่วยความจำ (RAM) ขนาด 49,152 กิโลไบต์ ตัวเดียวกันผลจากการศึกษาในแต่ละปัญหาของท่อนำคลื่นมีดังนี้

1. ความแม่นยำและการรู้เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงในปัญหาท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์

ตัวอย่างของท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีขนาดเป็น $2a \times a$ ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ และครึ่งหนึ่งของท่อนำคลื่นนี้บรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ $\epsilon_r = 2.25$ และความซบซิมได้สัมพัทธ์ $\mu_r = 1.0$ เท่ากับ 2.25 และ 1.0 ตามลำดับ ดังแสดงในรูป 8.1 ค่า β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ ในโมดมูลฐาน (LSE_{10}) ที่ได้จากไฟไนต์อีลีเมนต์จะถูกใช้ในการศึกษาความแม่นยำและการรู้เข้าผลเฉลยแม่นยำตรง



รูป 8.1 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก



รูป 8.2 การแบ่งภาคตัดขวางบนท่อ ناقลีน
ออกเป็น 256 อีลีเมนต์ 153 โหนด

แบ่งภาคตัดขวางของท่อ ناقลีนออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ด้วยจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 256 และจำนวนโหนดเท่ากับ 153 ดังแสดงในรูป 8.2 ผลการเปรียบเทียบค่า β/k_0 ที่ได้จากการคำนวณที่ $k_0 a = 3.0$ จากโมดมูลฐาน แสดงได้ดังตาราง 8.2

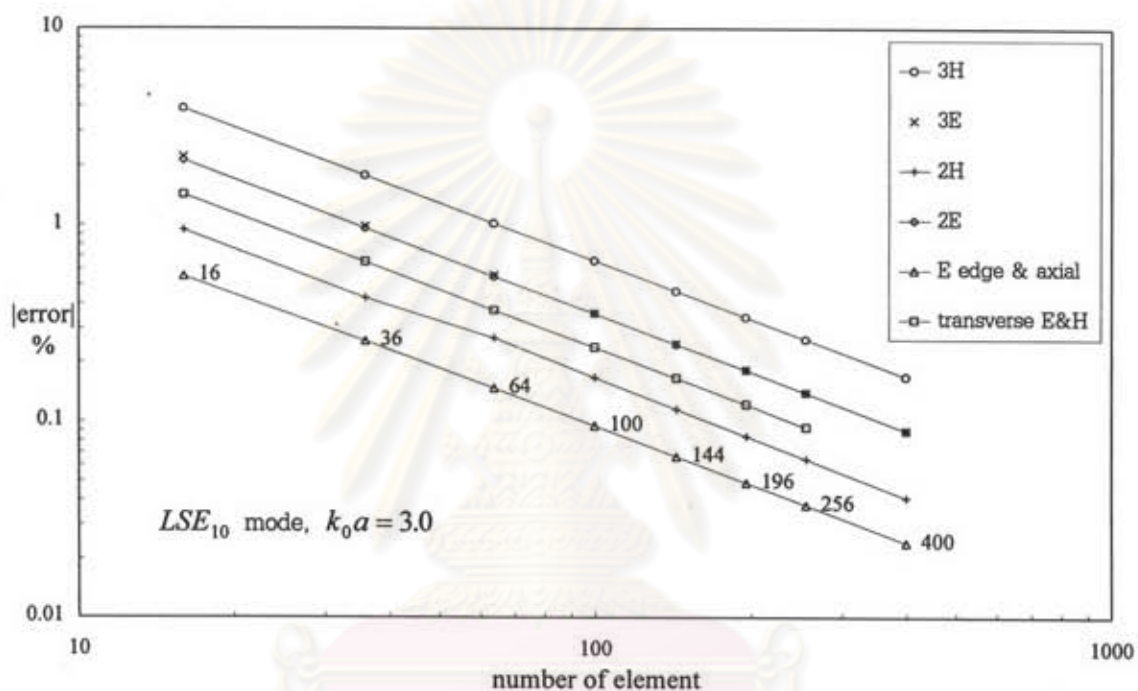
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตาราง 8.2 ค่า β/k_0 ที่ $k_0a=3.0$ จากโมดมูลฐาน (LSE_{10}) ของท่อนำคลื่นบรรจด้วย ไดอิเล็กทริก จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ เปรอ์เซ็นต์ความผิดพลาดเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ และอันดับของความแม่นยำ เมื่อแบ่งอีลิเมนต์ดังแสดงในรูป 8.2

วิธี	ผลเฉลย แม่นยำ ของ β/k_0 ที่ $k_0a=3.0$	β/k_0 ที่ $k_0a=3.0$ จาก วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์	เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a=3.0$ จาก วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์	อันดับของ ความแม่นยำ หมายเหตุ : 1 คือ ความแม่นยำสูงสุด
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ($p=1$)	1.275756	1.272433	0.2605%	6
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ($p=1$)	1.275756	1.273979	0.1393%	5
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ	1.275756	1.274936	0.0064%	2
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ	1.275756	1.273983	0.1390%	4
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้าในแนว สัมผัสและในแนวแกน	1.275756	1.275278	0.0037%	1
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้าและสนาม แม่เหล็กตามขวาง	1.275756	1.274570	0.0093%	3

ตาราง 8.2 แสดงให้เห็นว่าที่ $k_0a=3.0$ ในโมดมูลฐาน วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง ให้ความแม่นยำในอันดับที่หนึ่งถึงสามตามลำดับ และความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ มีค่าใกล้เคียงกันมาก กล่าวคือมีค่าเท่ากับ 0.1390% และ 0.1393% โดยให้ความแม่นยำในอันดับที่สี่และห้า ตามลำดับ ส่วนวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบจะให้ความแม่นยำของค่า β/k_0 ในโมดมูลฐานต่ำที่สุด

แบ่งภาคตัดขวางออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม จากจำนวน 16 อีลีเมนต์ ถึง 400 อีลีเมนต์ (จำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้ในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง จะถูกจำกัดที่ 256 อีลีเมนต์เท่านั้น เนื่องจากจำนวนหน่วยความจำไม่เพียงพอที่จะประมวลผลที่ 400 อีลีเมนต์) โดยมีเมชของอีลีเมนต์ดังเช่นรูป 8.2 ความสัมพันธ์ระหว่างขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a=3.0$ จากโมดมูลฐานที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์แสดงดังรูป 8.3



รูป 8.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a=3.0$ จากโมดมูลฐาน (LSE_{10}) จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ของท่อนำคลื่นบรรจด้วยไดอิเล็กตริก และจำนวนอีลีเมนต์

จากรูป 8.3 เมื่อพิจารณาที่จำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 144 และ 256 อีลีเมนต์ เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 และอัตราการลู่อ้างซึ่งหาได้จากอัตราส่วนระหว่างการเปลี่ยนแปลงของความแม่นยำและการเปลี่ยนแปลงของจำนวนอีลีเมนต์ (ในสเกลลอการิทึม (logarithm)) (Svendin, 1989) แสดงได้ดังตาราง 8.3

ตาราง 8.3 เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a=3.0$ ในโมเดลฐาน (LSE_{10}) ของท่อนำคลื่น บรรจุด้วยไดอิเล็กตริก จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ เมื่อใช้จำนวนอีลิเมนต์เท่ากับ 144 และ 256 และขนาดของอัตราการรู้เข้าของค่า β/k_0 ที่ได้รับ

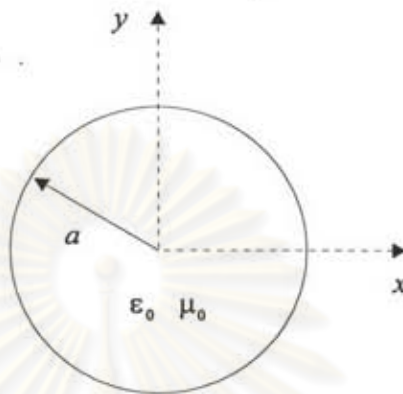
วิธี	เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a=3.0$ เมื่อ จำนวนอีลิเมนต์เท่ากับ 144	เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a=3.0$ เมื่อ จำนวนอีลิเมนต์เท่ากับ 256	ขนาดของอัตราการรู้เข้า ผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับ
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ($p=1$)	0.459803%	0.260452%	0.988
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ($p=1$)	0.247054%	0.139253%	0.996
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ	0.114942%	0.064255%	1.011
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ	0.246004%	0.138981%	0.992
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้าในแนว สัมผัสและในแนวแกน	0.066213%	0.037443%	0.991
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้าและสนาม แม่เหล็กตามขวาง	0.164831%	0.092926%	0.996

จากตาราง 8.3 พบว่าขนาดอัตราการรู้เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับจากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ทั้ง 6 วิธีอยู่ในช่วง 0.988 ถึง 1.011 ซึ่งไม่มีวิธีใดที่ให้อัตราการรู้เข้าที่แตกต่างจากวิธีอื่นอย่างเห็นได้ชัด จึงสรุปได้ว่าวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ทั้ง 6 วิธี ให้อัตราการรู้เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับในระดับเดียวกัน

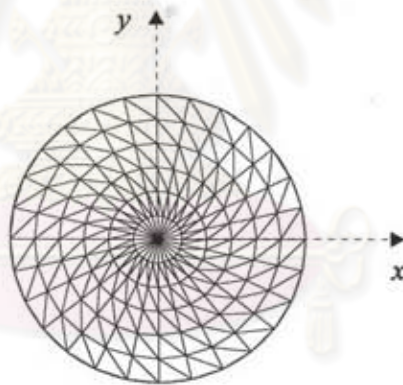
2. ความแม่นยำและการรู้เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงในปัญหาท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง

ตัวอย่างของท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้งที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ a ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ ดังแสดงในรูป 8.4 ค่า β/k_0 ที่

$k_0 a = 4.0$ ในโหมดมูลฐาน (TE_{11}) ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ทั้ง 6 วิธี จะใช้ในการศึกษาความแม่นยำและการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรง



รูป 8.4 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น



รูป 8.5 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น
ออกเป็น 308 อีลีเมนต์ 169 โหนด

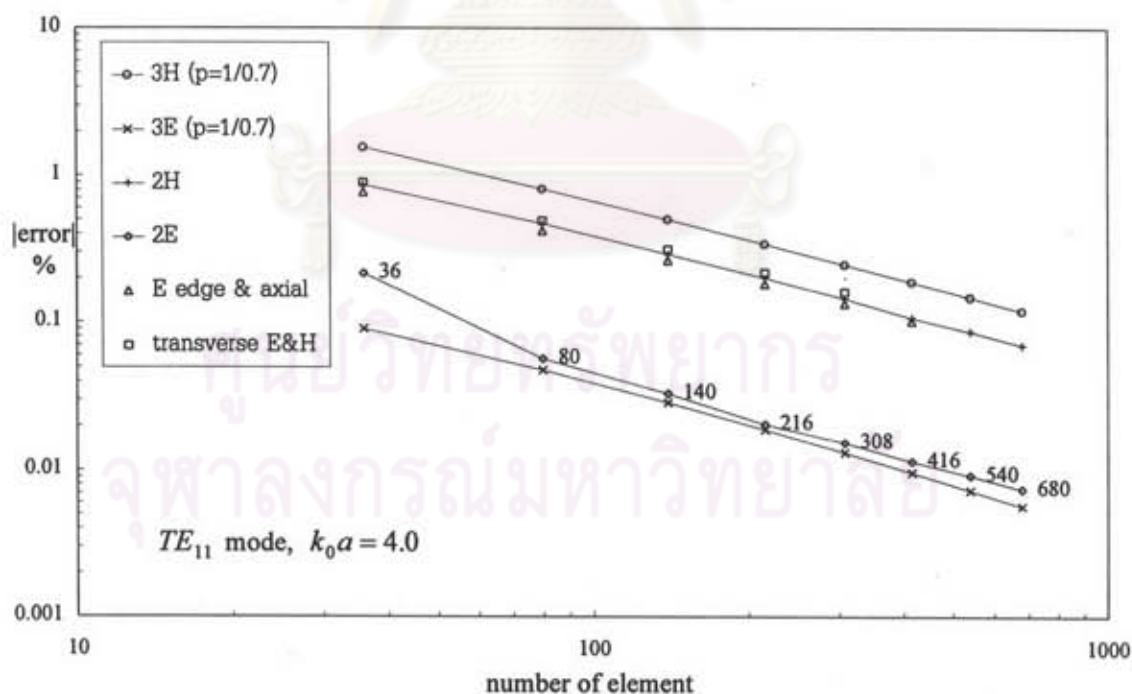
แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม โดยมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 308 และมีจำนวนโหนดเท่ากับ 169 ดังแสดงในรูป 8.5 ค่า β/k_0 ที่ $k_0 a = 4.0$ จากโหมดมูลฐานที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ทั้ง 6 วิธี เปรอ์เซ็นต์ความผิดพลาดเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจากวิธีเชิงวิเคราะห์ และอันดับของความแม่นยำ แสดงได้ดังตาราง 8.4

ตาราง 8.4 ค่า β/k_0 ที่ $k_0a=4.0$ จากโหมดมูลฐาน (TE_{11}) ของท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ขนาดความผิดพลาดเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจากวิธีเชิงวิเคราะห์ และอันดับของความแม่นยำ เมื่อแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 8.5

วิธี	ผลเฉลยแม่นยำตรงของ β/k_0 ที่ $k_0a=4.0$	β/k_0 ที่ $k_0a=4.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a=4.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	อันดับของความแม่นยำ หมายเหตุ: 1 คือความแม่นยำสูงสุด
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ($p=1/0.7$)	0.887766	0.885566	0.248%	6
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ($p=1/0.7$)	0.887766	0.887649	0.013%	1
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ	0.887766	0.886476	0.145%	4
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ	0.887766	0.887902	0.015%	2
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน	0.887766	0.886579	0.134%	3
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง	0.887766	0.886344	0.160%	5

จากตาราง 8.4 แสดงให้เห็นว่า ที่ $k_0 a = 4.0$ ในโมดมูลฐาน วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ ให้ความแม่นยำในอันดับที่หนึ่ง และสองตามลำดับ โดยขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ได้จากทั้งสองวิธีนี้มีค่าใกล้เคียงกันมาก กล่าวคือมีค่าเท่ากับ 0.013% และ 0.015% เมื่อเทียบกับวิธีอื่นพบว่า ขนาดความผิดพลาดที่ได้นี้จะต่างจากที่ได้จากวิธีอื่นอย่างเห็นได้ชัด ส่วนวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง จะให้ความแม่นยำในอันดับที่สามถึงห้าตามลำดับ ส่วนวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบจะให้ความแม่นยำของค่า β/k_0 ที่ $k_0 a = 4.0$ ในโมดมูลฐานต่ำที่สุด

แบ่งภาคตัดขวางออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม จากจำนวน 36 อีลีเมนต์ถึง 680 อีลีเมนต์ (จำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้ในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวางจะถูกจำกัดที่ 416 และ 308 อีลีเมนต์เท่านั้น เนื่องจากจำนวนหน่วยความจำไม่เพียงพอที่จะประมวลผลที่จำนวนอีลีเมนต์สูงกว่านี้) โดยมีเมชของอีลีเมนต์ดังเช่นรูป 8.5 ความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0 a = 4.0$ จากโมดมูลฐาน ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ทั้ง 6 วิธี และจำนวนอีลีเมนต์ แสดงดังรูป 8.6



รูป 8.6 ความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0 a = 4.0$ จากโมดมูลฐาน (TE_{11}) จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ของท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม และจำนวนอีลีเมนต์

จากรูป 8.6 เมื่อพิจารณาที่จำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 140 และ 308 ขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 และขนาดของอัตราการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับ แสดงได้ดังตาราง 8.5

ตาราง 8.5 เปอร์เซนต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0 a = 4.0$ ในโหมดมูลฐาน (TE_{11}) ของท่อนำคลื่น กลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เมื่อจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 140 และ 308 และขนาดของอัตราการลู่เข้าของค่า β/k_0 ที่ได้รับ

วิธี	เปอร์เซนต์ความผิดพลาด ของ β/k_0 ที่ $k_0 a = 4.0$ เมื่อจำนวน อีลีเมนต์เท่ากับ 140	เปอร์เซนต์ความผิดพลาด ของ β/k_0 ที่ $k_0 a = 4.0$ เมื่อจำนวน อีลีเมนต์เท่ากับ 308	ขนาดของอัตราการลู่เข้า ผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับ
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ($p=1/0.7$)	0.501253 %	0.247784 %	0.894
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ($p=1/0.7$)	0.028761 %	0.013122 %	0.995
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ	0.291498 %	0.145302 %	0.883
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ	0.033174 %	0.015350 %	0.977
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้าในแนว สัมผัสและในแนวแกน	0.246588 %	0.133629 %	0.866
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้าและสนาม แม่เหล็กตามขวาง	0.312321 %	0.160074 %	0.848

จากรูป 8.6 เมื่อพิจารณาที่จำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 308 และ 680 ขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 และขนาดของอัตราการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับ แสดงได้ดังตาราง 8.6

ตาราง 8.6 เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ ในโมดมูลฐาน (TE_{11}) ของท่อนำคลื่น กลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เมื่อจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 308 และ 680 และขนาดของอัตราการลู่เข้าของค่า β/k_0 ที่ได้รับ

วิธี	เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ เมื่อจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 308	เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ เมื่อจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 680	ขนาดของอัตราการลู่เข้า ผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับ
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ($p=1/0.7$)	0.247784 %	0.118978 %	0.926
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ($p=1/0.7$)	0.013122 %	0.005674 %	1.059
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ	0.145302 %	0.070212 %	0.918
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ	0.015350 %	0.007412 %	0.919
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน	0.133629 %	0.006512 %	0.908

จากตาราง 8.5 พบว่าที่ $k_0a = 4.0$ ในโมดมูลฐาน วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ และวิธีที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ ให้ขนาดของอัตราการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับ ในอันดับที่หนึ่งและสองตามลำดับ ด้วยขนาดของอัตราการลู่เข้าที่ใกล้เคียงกันมาก คือมีค่าเท่ากับ 0.995 และ 0.977 ส่วนผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง พบว่าให้ขนาดของอัตราการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของ β/k_0 ที่ได้รับใกล้เคียงกัน

เมื่อพิจารณาที่จำนวนอิเล็กตรอนที่มากขึ้นคือที่จำนวนอิเล็กตรอนเท่ากับ 308 และ 680 พบว่า วิธีไฟไนต์อิเล็กตรอนที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ให้ขนาดของอัตราการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของ β/k_0 ที่ได้รับเท่ากับ 1.059 ซึ่งมากกว่าที่ได้จากวิธีไฟไนต์อิเล็กตรอนที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ วิธีไฟไนต์อิเล็กตรอนที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อิเล็กตรอนที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน ที่ให้ขนาดของอัตราการลู่เข้าของ β/k_0 ที่ได้รับใกล้เคียงกัน

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า วิธีไฟไนต์อิเล็กตรอนที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ วิธีไฟไนต์อิเล็กตรอนที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ วิธีไฟไนต์อิเล็กตรอนที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ วิธีไฟไนต์อิเล็กตรอนที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและองค์ประกอบในแนวแกน และวิธีไฟไนต์อิเล็กตรอนที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง ให้ขนาดของอัตราการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับ ในระดับเดียวกัน ส่วนวิธีไฟไนต์อิเล็กตรอนที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบนั้น จะให้ขนาดของอัตราการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับมากกว่าวิธีทั้งห้าที่กล่าวมาเล็กน้อย

3. ความแม่นยำและการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงในปัญหาท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็ก

ตัวอย่างของท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่ใช้ในการศึกษาคือ ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ที่มีโครงสร้างดังแสดงในรูป 8.7 โดยเฟอร์ไรต์บรรจุในท่อนำคลื่นในลักษณะที่ไม่สมมาตร และได้รับการไบแอสด้วยสนามแม่เหล็กสถิตในแนว y เทนเซอร์ความขابซึมได้ $[\mu]$ และสภาพยอม ε ของเฟอร์ไรต์มีค่าดังนี้

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & \mu_{xz} \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

$$\varepsilon = 10\varepsilon_0 \quad (8.2)$$

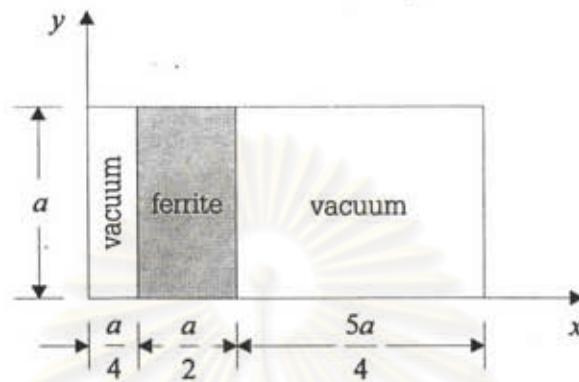
เมื่อ ε_0 และ μ_0 คือสภาพยอม และความขابซึมได้ของอวกาศว่าง ตามลำดับ โดยที่องค์ประกอบของเทนเซอร์ $[\mu]$ มีค่าเป็น

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (8.3)$$

$$\kappa = \mu_0 \frac{\omega_m \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (8.4)$$

$$\omega_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \omega_m \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 0.5 \quad (8.5)$$

ค่า β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ ในโมดมูลฐาน (H_{10}) ของการแพร่กระจายในทิศ $+z$ ที่ได้จากไฟไนต์อิลีเมนต์จะใช้ในการศึกษาความแม่นยำและการรูดเข้าผลเฉลยแม่นยำตรง



รูป 8.7 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์



รูป 8.8 การแบ่งอิลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น
บรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ออกเป็น 144 อิลีเมนต์ 91 โหนด

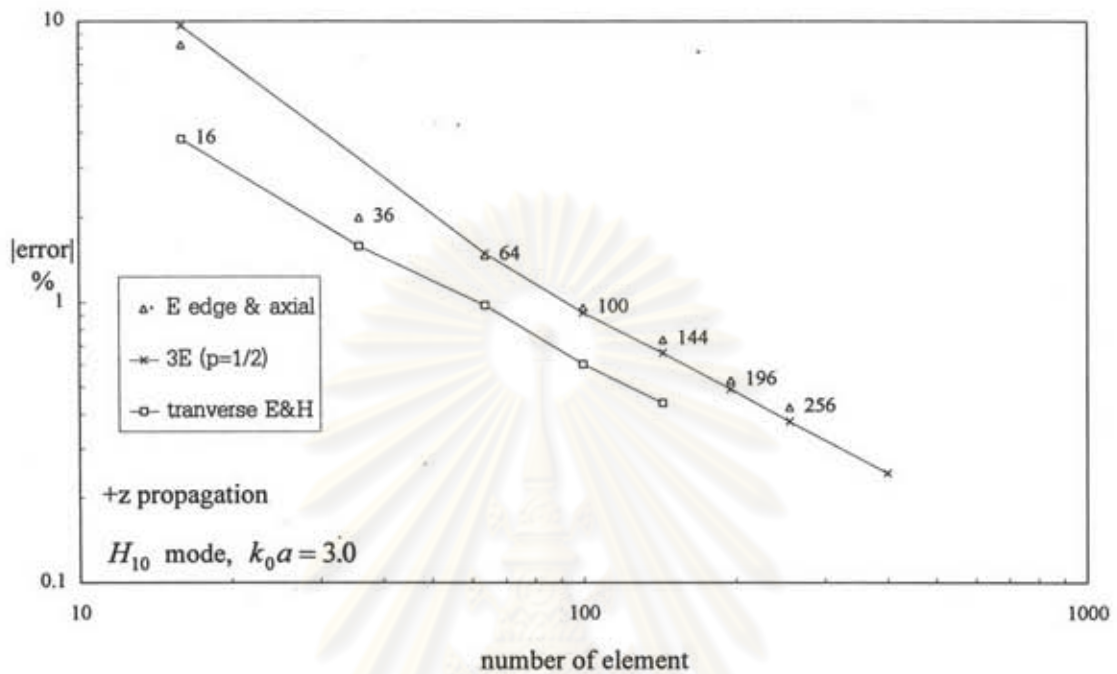
แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นอิลีเมนต์สามเหลี่ยม โดยมีจำนวนอิลีเมนต์เท่ากับ 144 และจำนวนโหนดเท่ากับ 91 ดังแสดงในรูป 8.8 ค่า β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ จากโมดมูลฐาน (H_{10}) ของการแพร่กระจายในทิศ $+z$ จากวิธีไฟไนต์อิลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ วิธีไฟไนต์อิลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน และวิธีไฟไนต์อิลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ และอันดับของความแม่นยำ แสดงได้ดังตาราง 8.7

ตาราง 8.7 ค่า β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากโมดมูลฐาน (H_{10}) ของการแพร่กระจายในทิศ $+z$ ของท่อนำคลื่นบรรจด้วยเฟอร์ไรต์ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจากวิธีเชิงวิเคราะห์ และอันดับของความแม่นยำ เมื่อแบ่งอีลีเมนต์ ดังแสดงในรูป 8.8

วิธี	ผลเฉลยแม่นยำตรงของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$	β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	อันดับของความแม่นยำ หมายเหตุ: 1 คือความแม่นยำสูงสุด
วิธีที่ 2 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ($p=1/2$)	2.733965	2.715961	0.658 %	2
วิธีที่ 5 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัส และในแนวแกน	2.733965	2.713889	0.734 %	3
วิธีที่ 6 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง	2.733965	2.722038	0.436 %	1

จากตาราง 8.7 พบว่า ที่ $k_0a = 3.0$ ในโมดมูลฐาน วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน ให้ความแม่นยำในอันดับที่หนึ่งถึงสามตามลำดับ โดยที่เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน มีค่าใกล้เคียงกัน คือมีค่าเท่ากับ 0.659% และ 0.734% ตามลำดับ

เมื่อแบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม จากจำนวน 16 ถึง 400 อีลีเมนต์ (จำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้สำหรับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง จะถูกจำกัดที่ 256 และ 144 อีลีเมนต์เท่านั้น เนื่องจากจำนวนหน่วยความจำไม่เพียงพอที่จะประมวลผลที่จำนวนอีลีเมนต์ที่สูงกว่านี้) โดยมีเมชของอีลีเมนต์ดังเช่นรูป 8.8 เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากโมดมูลฐาน ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ทั้ง 3 วิธี แสดงดังรูป 8.9



รูป 8.9 ความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ จากโมดมูลฐาน (H_{10}) ของการแพร่กระจายในทิศ $+z$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ และจำนวนอีลีเมนต์

จากรูป 8.9 เมื่อพิจารณาที่จำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 100 และ 144 เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 และขนาดของอัตราการใช้ผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับ ของการแพร่กระจายในทิศ $+z$ แสดงได้ดังตาราง 8.8

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตาราง 8.8 เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ ในโมเดลฐาน (H_{10}) ของการแพร่กระจายในทิศ +z ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เมื่อใช้จำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 100 และ 144 และขนาดของอัตราการลู่ออกผลเฉลยแม่นยำตรงของ β/k_0 ที่ได้รับ

	วิธี	เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ เมื่อจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 100	เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ เมื่อจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 144	ขนาดของอัตราการลู่ออกผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับ
วิธีที่ 2	วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ($p=1/2$)	0.917721 %	0.658553 %	0.910
วิธีที่ 5	วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน	0.952689 %	0.734421 %	0.714
วิธีที่ 6	วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง	0.601289 %	0.436262 %	0.880

จากรูป 8.9 เมื่อพิจารณาที่จำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 144 และ 256 เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 และขนาดของอัตราการลู่ออกผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับ ของการแพร่กระจายในทิศ +z แสดงได้ดังตาราง 8.9

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตาราง 8.9 เปอร์เซนต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ ในโมดมูลฐาน (H_{10}) ของการแพร่กระจายในทิศ +z ของท่อนำคลื่นบรรจด้วยเฟอร์ไรต์ จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ เมื่อใช้จำนวนอีลิเมนต์เท่ากับ 144 และ 256 และขนาดของอัตราการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของ β/k_0 ที่ได้รับ

วิธี		เปอร์เซนต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ เมื่อจำนวนอีลิเมนต์เท่ากับ 144	เปอร์เซนต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ เมื่อจำนวนอีลิเมนต์เท่ากับ 256	ขนาดของอัตราการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับ
วิธีที่ 2	วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ($p=1/2$)	0.658553 %	0.373869 %	0.984
วิธีที่ 5	วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน	0.734321 %	0.420936 %	0.967

จากตาราง 8.8 พบว่าที่โมดมูลฐาน วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง ให้ขนาดของอัตราการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ใกล้เคียงกัน คือมีค่าเท่ากับ 0.910 และ 0.880 ตามลำดับ และผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน พบว่าวิธีนี้ให้ขนาดของการลู่เข้าต่ำที่สุดคือมีค่าเท่ากับ 0.714

เมื่อพิจารณาที่จำนวนอีลิเมนต์ที่สูงขึ้นคือที่จำนวนอีลิเมนต์เท่ากับ 144 และ 256 ดังแสดงในตาราง 8.9 พบว่า ที่ β/k_0 ในโมดมูลฐาน วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน จะให้ขนาดของอัตราการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ใกล้เคียงกัน คือมีค่าเท่ากับ 0.984 และ 0.967 ตามลำดับ

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน และวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าตามขวาง ให้อัตราการลู่เข้าผลเฉลยแม่นยำตรงของค่า β/k_0 ที่ได้รับ ในระดับเดียวกัน

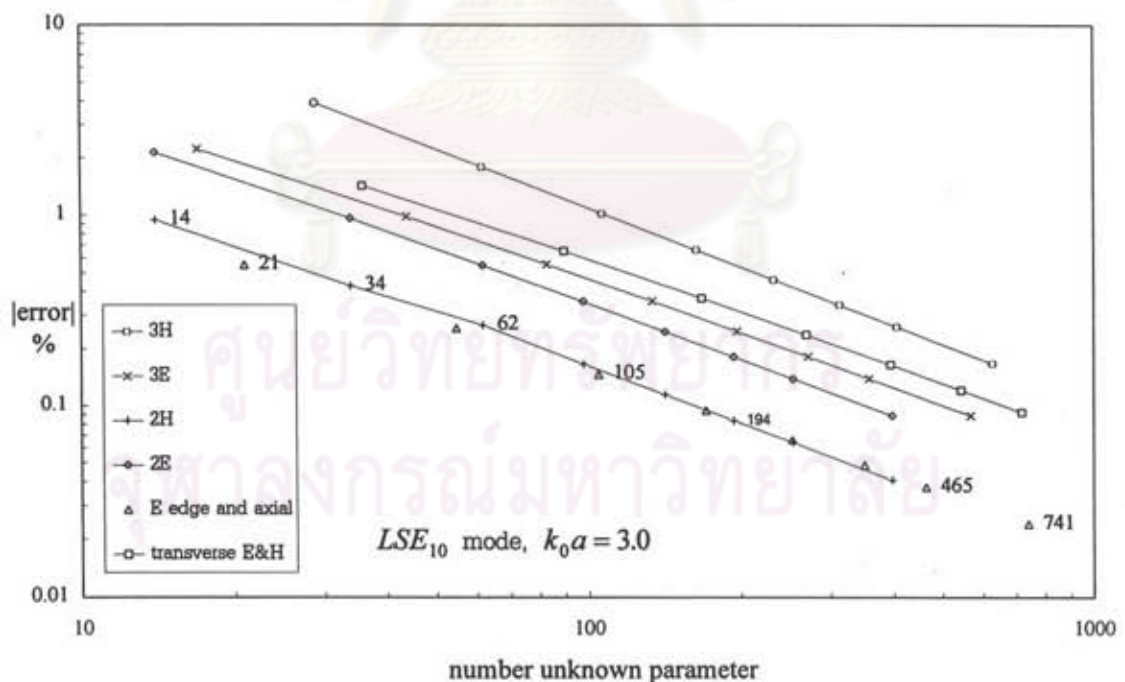
เปรียบเทียบการใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในสมการเมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน

ในส่วนนี้จะทำการเปรียบเทียบการใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ทั้ง 6 วิธี ในสมการของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน $[A]\{x\} - \lambda\{x\} = \{0\}$ เมื่อ λ คือค่าเจาะจง และ $\{x\}$ คือตัวแปรไม่ทราบค่า จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าเป็นพารามิเตอร์ที่กำหนดขนาดของหน่วยความจำและเวลาที่ใช้ในการประมวลผล โดยที่จะศึกษาในปัญหาที่อ่อนแอและตามข้อกำหนดเช่นเดียวกับในส่วนของการเปรียบเทียบความแม่นยำและการรู้ค่าผลเฉลยแม่นยำตรง ซึ่งผลจากการศึกษาในแต่ละปัญหาของที่อ่อนแอมีดังนี้

1. จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในสมการเมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐานในปัญหาที่อ่อนแอโอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์

ตัวอย่างของของที่อ่อนแอโอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ที่ใช้ในการศึกษาคือ ที่อ่อนแอเส้นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีโครงสร้างดั่งที่กล่าวไว้ข้างต้น แบ่งภาคตัดขวางของที่อ่อนแอออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม จากจำนวน 16 อีลีเมนต์ถึง 400 อีลีเมนต์ โดยมีเมชของอีลีเมนต์ ดังเช่นรูป 8.2

ความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ ในโมดมูลฐาน (LSE_{10}) จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในสมการเมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน (เมื่อให้เงื่อนไขขอบเขตบนผนังที่อ่อนแอแล้ว) แสดงได้ดังรูป 8.10



รูป 8.10 ความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากโมดมูลฐาน (LSE_{10}) ของที่อ่อนแอบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในสมการเมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน

เมื่อพิจารณาที่เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 เท่ากับ 0.20% ที่ $k_0\alpha = 3.0$ ในโมเดลมาตรฐาน การใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าสำหรับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ แสดงได้ดังตาราง 8.10

ตาราง 8.10 จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าที่ใช้ในสมการเมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน ที่เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 เท่ากับ 0.20% ที่ $k_0\alpha = 3.0$ ในโมเดลมาตรฐาน (LSE_{10}) ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

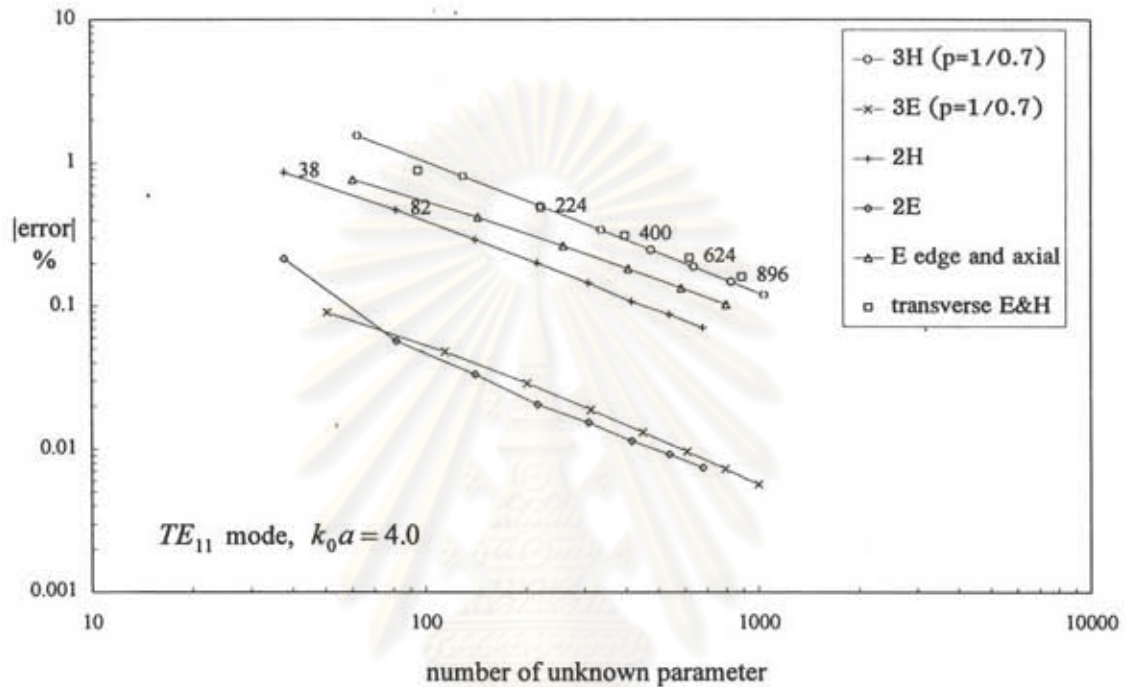
วิธี	ค่าประมาณของจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าที่เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 เท่ากับ 0.20%	อันดับของการใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่า หมายเหตุ : 1 คือใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าน้อยที่สุด
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ	528	6
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ	246	4
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก ตามขวาง 2 องค์ประกอบ	82	2
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า ตามขวาง 2 องค์ประกอบ	176	3
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า ในแนวสัมผัสและในแนวแกน	73	1
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กตามขวาง	323	5

จากตาราง 8.10 พบว่าที่เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 เท่ากับ 0.20% ที่ $k_0\alpha = 3.0$ ในโมเดลมาตรฐาน วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน เป็นวิธีที่ใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าน้อยที่สุด และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบจะอยู่ในอันดับรองลงมา คือมีการใช้ตัวแปรไม่ทราบค่าเท่ากับ 73 และ 82 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าการใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในทั้งสองวิธีนี้จะมีค่าใกล้เคียงกันมาก

2. จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในสมการเมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐานในปัญหาท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง

ตัวอย่างของท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้งที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมที่มีโครงสร้างดังที่กล่าวไว้ข้างต้น แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม จากจำนวน 36 อีลีเมนต์ ถึง 680 อีลีเมนต์ โดยมีเมซของอีลีเมนต์ดังเช่นรูป 8.5 ความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์

ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a=4.0$ (พิจารณาที่ $k_0a=4.0$ เนื่องจากค่า β/k_0 ที่ได้รับเริ่มมีค่าคงที่แล้ว) จากโมดมูลฐาน (TE_{11}) จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในสมการเมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน (เมื่อให้เงื่อนไขขอบเขตบนผนังท่อนำคลื่นแล้ว) แสดงในรูป 8.11



รูป 8.11 ความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a=4.0$ จากโมดมูลฐาน (TE_{11}) ของท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่า ในสมการเมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน

เมื่อพิจารณาที่เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 เท่ากับ 0.20% ที่ $k_0a=4.0$ ในโมดมูลฐาน การใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าสำหรับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ แสดงได้ดังตาราง 8.11

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตาราง 8.11 จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในสมการเมตริกซ์เจาะจงมาตรฐาน ที่เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 เท่ากับ 0.20% ที่ $k_0 a = 4.0$ ในโมดมูลฐาน (TE_{11}) ของท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

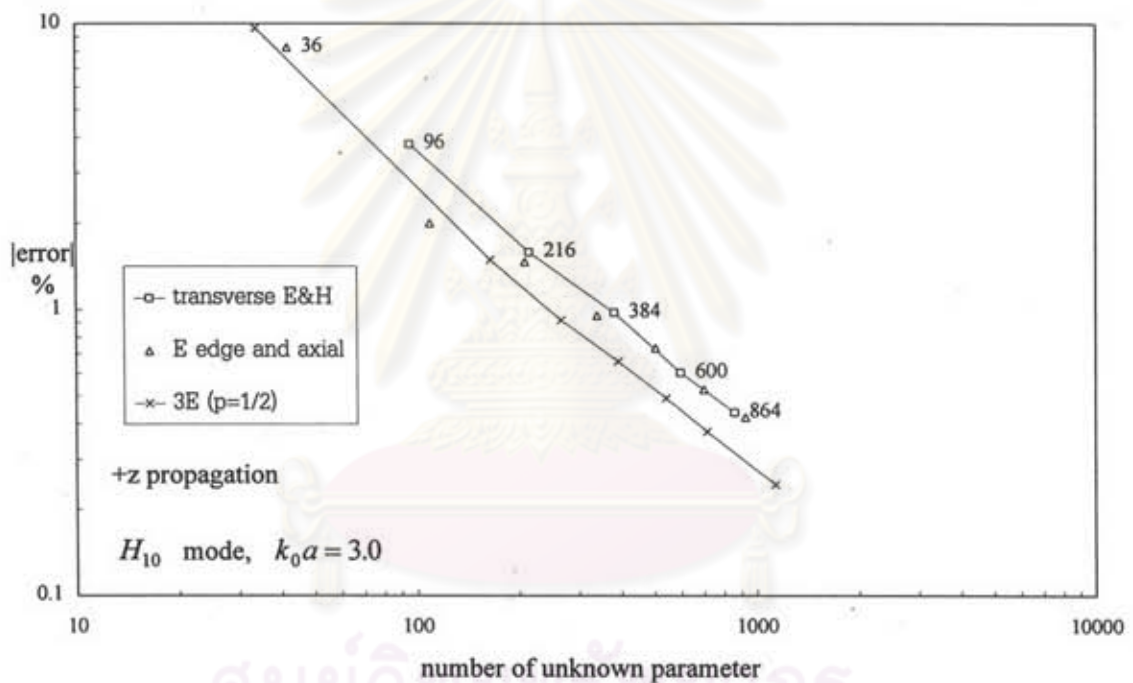
วิธี	ค่าประมาณของจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าที่เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 เท่ากับ 0.20%	อันดับของการใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่า หมายเหตุ: 1 คือใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าน้อยที่สุด
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ	602	5
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ	<30	1
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ	218	3
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ	<50	2
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน	366	4
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง	688	6

ตาราง 8.11 พบว่าที่เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 เท่ากับ 0.20% ที่ $k_0 a = 4.0$ ในโมดมูลฐาน วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ เป็นวิธีที่ใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าน้อยที่สุด และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ จะอยู่ในอันดับถัดมา โดยมีการใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าน้อยกว่า 30 และ 50 ตามลำดับ

3. จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในสมการเมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐานในปัญหาท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็ก

ตัวอย่างของท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ที่มีโครงสร้างดังที่กล่าวไว้ข้างต้น แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม จากจำนวน 16 อีลีเมนต์ ถึง 400 อีลีเมนต์ โดยมีเมชดังเช่นรูป 8.8

ความสัมพันธ์ระหว่างขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ ของการแพร่กระจายในทิศ $+z$ ในโหมดมูลฐาน (H_{10}) จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในสมการเมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน แสดงในรูป 8.12



รูป 8.12 ความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ จากโหมดมูลฐาน (H_{10}) การแพร่กระจายในทิศ $+z$ ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ และจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าในสมการเมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน

จากรูป 8.12 เมื่อพิจารณาที่ขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 เท่ากับ 0.5% จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าที่ใช้สำหรับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง ที่ $k_0 a = 3.0$ ในโหมดมูลฐาน แสดงได้ดังตาราง 8.12

ตาราง 8.12 จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าที่ใช้ในสมการเมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน ที่ขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 เท่ากับ 0.5% ของการแพร่กระจายในทิศ $+z$ ที่ $k_0 a = 3.0$ ในโมเดลฐานของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์

วิธี	วิธี	ค่าประมาณของจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าที่เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ β/k_0 เท่ากับ 0.50%	อันดับของการใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่า หมายเหตุ: 1 คือใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าน้อยที่สุด
วิธีที่ 2	วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ($p=1/2$)	532	1
วิธีที่ 5	วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน	748	3
วิธีที่ 6	วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง	740	2

จากตาราง 8.12 ที่ขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 เท่ากับ 0.50% ที่ $k_0 a = 3.0$ ในโมเดลฐานวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าน้อยที่สุด วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน จะอยู่ในอันดับรองลงมา คือมีการใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าเท่ากับ 740 และ 748 ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นได้ว่าทั้งสองวิธีมีการใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าใกล้เคียงกันมาก

เปรียบเทียบความสามารถในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม

ปัญหาของการใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์วิเคราะห์คุณลักษณะของการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นที่สำคัญอย่างหนึ่งคือ การปรากฏผลเฉลยที่ไม่สอดคล้องกับผลเฉลยทางกายภาพพร้อมกับผลเฉลยที่ถูกต้อง หรือที่เรียกว่าผลเฉลยปลอมเทียม ผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นนี้มีสาเหตุจากความไม่เหมาะสมของการประมาณนัลสเปซของตัวดำเนินการเคิร์ลในสมการของแมกซ์เวลล์ หรือสมการคลื่น (Wong และ Cendes, 1988; Sun และคณะ, 1995)

วิธีการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนาม 3 องค์ประกอบคือ การเพิ่มพจน์พินอลติซึ่งเป็นพจน์ที่อยู่ในรูปของไดเวอร์เจนซ์ของความหนาแน่นฟลักซ์ให้กับนิพจน์วาริเอชันนอลของสมการคลื่น ดังสมการ

$$\bar{F} = F + \frac{P^2}{\kappa} \iint (\nabla \cdot \kappa \bar{\phi})^* (\nabla \cdot \kappa \bar{\phi}) d\Omega \quad (8.6)$$

เมื่อ F คือ นิพจน์วาริเอชันนอลของสมการคลื่น, พจน์ที่สองทางขวาของสมการ (8.6) คือพจน์พีนอลติ, p คือสัมประสิทธิ์พีนอลติ, ϕ คือสนามไฟฟ้า \mathbf{E} หรือ สนามแม่เหล็ก \mathbf{H} , κ คือสภาพยอมสัมพัทธ์ เมื่อ $\phi = \mathbf{E}$ และ κ คือความขบขี้มได้สัมพัทธ์เมื่อ $\phi = \mathbf{H}$

การเพิ่มพจน์พีนอลติให้กับนิพจน์วาริเอชันนอลของสมการคลื่น F ทำให้ผลเฉลยปลอมเทียมที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ว่าง ดังสมการ

$$\nabla \times \phi = 0, \quad \nabla \cdot \kappa \phi \neq 0 \quad \text{เมื่อ } k_0^2 = 0 \quad (8.7)$$

และ $\nabla \times \phi \neq 0, \quad \nabla \cdot \kappa \phi \neq 0 \quad \text{เมื่อ } k_0^2 \neq 0 \quad (8.8)$

ถูกกำจัดให้หมดไปได้ แต่อย่างไรก็ตามผลเฉลยที่เคิร์ลเท่ากับศูนย์ที่สอดคล้องกับสมการ

$$\nabla \times \phi = 0, \quad \nabla \cdot \kappa \phi \neq 0 \quad \text{เมื่อ } k_0^2 > 0 \quad (8.9)$$

สามารถเกิดขึ้นได้ โดยผลเฉลยปลอมเทียมกลุ่มนี้จะเกิดในบริเวณ $\beta/k_0 < 1/p$ เท่านั้น นอกจากนั้นแล้ว สำหรับกรณีที่ $\phi = \mathbf{H}$ จะเกิดผลเฉลยปลอมเทียมที่ $\beta/k_0 = 1/p$ เมื่อ $k_0^2 > 0$ เพิ่มขึ้นมาอีกด้วย เพราะฉะนั้นในทางปฏิบัติพบว่า การกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมให้หมดไปจึงทำได้ยาก รวมถึงอาจต้องมีการทำซ้ำโดยเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์พีนอลติ (p) เพื่อหาโหมดที่ถูกต้องที่เกิดขึ้นภายในท่อนำคลื่น อีกทั้งในการวิเคราะห์ท่อนำแสงต้องกำหนดค่า p ให้เหมาะสม เพื่อที่จะกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นในบริเวณโหมดที่ถูกนำ (guided mode) ให้หมดไป

วิธีการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมของวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามตามขวาง 2 องค์ประกอบคือการใช้ความสัมพันธ์ของเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ว่างของความหนาแน่นฟลักซ์ $\nabla \cdot \kappa \phi = 0$ ลดจำนวนองค์ประกอบของสนามที่ใช้ในนิพจน์วาริเอชันนอลของสมการคลื่นที่อยู่ในรูปเมตริกซ์จาก 3 องค์ประกอบให้เหลือเพียง 2 องค์ประกอบตามขวาง 2 องค์ประกอบ จากการศึกษาในกรณีที่ $\phi = \mathbf{H}$ พบว่าวิธีที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ สามารถกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมให้หมดไปได้ แต่สำหรับกรณีที่ $\phi = \mathbf{E}$ พบว่า ผลการวิเคราะห์ในปัญหาท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ และท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็ก พบว่ายังมีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมร่วมกับผลเฉลยที่ถูกต้อง โดยผลเฉลยปลอมเทียมที่พบในผลการวิเคราะห์ของท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ สามารถแยกแยะจากผลเฉลยที่ถูกต้องได้ง่าย ส่วนผลเฉลยที่พบในผลการวิเคราะห์ของท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กนั้น พบว่าผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นแยกแยะจากโหมดที่ถูกต้องได้ยาก สำหรับผลการวิเคราะห์ในท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง จะไม่มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมแต่อย่างใด

สำหรับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน ทั้งสองวิธีนี้ไม่ต้องการเทคนิคเพิ่มเติมเพื่อใช้กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมแต่อย่างใด จากการศึกษาวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง พบว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้ของท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง และท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็ก จะไม่มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียม แต่ในกรณีของท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้า พบว่ายังมีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมร่วมกับผลเฉลยที่ถูกต้อง แต่ผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นนี้สามารถแยกแยะจากโหมดที่ถูกต้องได้โดยง่าย และจากการศึกษาวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน พบว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้ของท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็ก และท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้า จะไม่มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียม

จากที่กล่าวมา ความสามารถในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมสามารถสรุปเป็นตารางได้ ดังแสดงในตาราง 8.13

ตาราง 8.13 ความสามารถในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

วิธี	ความสามารถในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมในปัญหาท่อนำคลื่น			
	ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิก		ท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิก	
	ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์	ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง	ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็ก	ท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้า
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมให้หมดไป ได้ยาก อาจต้องทำซ้ำ โดยเปลี่ยนค่า p เพื่อหาโหมดที่ถูกต้องที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่น	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมให้หมดไป ได้ยาก อาจต้องทำซ้ำ โดยเปลี่ยนค่า p เพื่อหาโหมดที่ถูกต้องที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่น	ไม่สามารถวิเคราะห์ได้	สามารถกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมให้หมดไป ได้ โดยเลือกค่า p ให้เหมาะสม
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมให้หมดไป ได้ยาก อาจต้องทำซ้ำ โดยเปลี่ยนค่า p เพื่อหาโหมดที่ถูกต้องที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่น	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมให้หมดไป ได้ยาก อาจต้องทำซ้ำ โดยเปลี่ยนค่า p เพื่อหาโหมดที่ถูกต้องที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่น	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมให้หมดไป ได้ยาก อาจต้องทำซ้ำ โดยเปลี่ยนค่า p เพื่อหาโหมดที่ถูกต้องที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่น	ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

ตาราง 8.13 (ต่อ) ความสามารถในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมของวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์

วิธี	ความสามารถในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมในปัญหาท่อนำคลื่น			
	ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิก		ท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิก	
	ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์	ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง	ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็ก	ท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้า
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมได้ทั้งหมด	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมได้ทั้งหมด	ไม่สามารถวิเคราะห์ได้	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมได้ทั้งหมด
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ	ไม่สามารถกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมให้หมดไปได้ แต่ผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นสามารถแยกแยะจากโมดที่ถูกต้องได้โดยง่าย	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมได้ทั้งหมด	ไม่สามารถกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมให้หมดไปได้ และผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นไม่สามารถแยกแยะจากโมดที่ถูกต้องได้ง่าย ทำให้วิธีนี้ไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้	ไม่สามารถวิเคราะห์ได้
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมได้ทั้งหมด	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมได้ทั้งหมด	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมได้ทั้งหมด	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมได้ทั้งหมด
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมได้ทั้งหมด	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมได้ทั้งหมด	กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมได้ทั้งหมด	ไม่สามารถกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมให้หมดไปได้ แต่ผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นสามารถแยกแยะจากโมดที่ถูกต้องได้โดยง่าย

ในความเห็นของผู้เสนอวิทยานิพนธ์ อันดับของความสามารถในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม ในปัญหาท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟ

แอนไอโซทรอปิกแม่เหล็ก และท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้า แสดงได้ดังตาราง 8.14 โดยผู้เสนอ
วิทยานิพนธ์พิจารณาลำดับความสำคัญดังนี้

1. วิธีที่กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมได้ทั้งหมดจะได้รับการจัดอันดับให้อยู่ในอันดับที่ 1
2. วิธีที่ไม่สามารถกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมได้ทั้งหมด แต่ผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นสามารถแยก
แยะจากคำตอบที่ถูกต้องได้โดยง่ายจะได้รับการจัดให้อยู่ในอันดับรองลงมา
3. วิธีที่ต้องมีการทำซ้ำ (เช่นมีการเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์พินอลติ) เพื่อหาโมดที่ต้องการในท่อนำคลื่น
จะได้รับการจัดอันดับให้อยู่ในอันดับสุดท้าย

ตาราง 8.14 อันดับของความสามารถในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

วิธี	อันดับของความสามารถในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม			
	ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิก		ท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิก	
	ท่อนำคลื่นแบบ ไอโซทรอปิก ไม่เอกพันธ์	ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขต เป็นผิวโค้ง	ท่อนำคลื่นแบบ ดิสเพอร์ซีฟ แอนไอโซทรอปิก แม่เหล็ก	ท่อนำแสงแบบ แอนไอโซทรอปิก ไฟฟ้า
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ	อยู่ในอันดับเดียวกัน	อยู่ในอันดับเดียวกัน	ไม่สามารถวิเคราะห์ได้	2
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ	คือ อันดับที่ 3	คือ อันดับที่ 2	2	ไม่สามารถวิเคราะห์ได้
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ ใช้สนามแม่เหล็ก ตามขวาง 2 องค์ประกอบ	1	อยู่ในอันดับเดียวกับ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ ใช้สนามไฟฟ้าในแนว สัมผัส และในแนว แกน	ไม่สามารถวิเคราะห์ได้	อยู่ในอันดับเดียวกับ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ ใช้สนามไฟฟ้าในแนว สัมผัส และในแนว แกน
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ ใช้สนามไฟฟ้า ตามขวาง 2 องค์ประกอบ	2			ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

ตาราง 8.14 (ต่อ) อันดับของความสามารถในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

	อันดับของความสามารถในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม			
	ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิก		ท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิก	
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ที่ใช้สนามไฟฟ้า ในแนวสัมผัส และในแนวแกน	อยู่ในอันดับเดียวกัน กับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ที่ใช้สนามแม่เหล็ก	1	อยู่ในอันดับเดียวกัน คืออันดับที่ 1	1
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ที่ใช้สนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็ก ตามขวาง	ตามขวาง 2 องค์ประกอบ			3

เปรียบเทียบความสปีร์สของเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจง

ในส่วนนี้จะทำการเปรียบเทียบความสปีร์สของเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจง เพื่อเป็นแนวทางในการพิจารณาเลือกวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ไปประมวลผลบนคอมพิวเตอร์ที่สามารถรองรับเมตริกซ์ที่อยู่ในรูปเมตริกซ์สปีร์สได้ เมตริกซ์ที่มีความสปีร์สสูงจะส่งผลให้ขนาดของหน่วยความจำและเวลาที่ใช้ในการประมวลผลลดลงเป็นอย่างมาก สำหรับความสปีร์สของเมตริกซ์สามารถหาได้จากสมการ

$$\text{ความสปีร์สของเมตริกซ์} = 1 - \text{ความหนาแน่นของเมตริกซ์} \quad (8.10ก)$$

$$= \text{จำนวนองค์ประกอบที่เท่ากับศูนย์/องค์ประกอบทั้งหมด}$$

$$(8.10ข)$$

ผลจากการศึกษาในแต่ละปัญหาของท่อนำคลื่นมีดังนี้

1. ความสปีร์สของเมตริกซ์ในปัญหาท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์

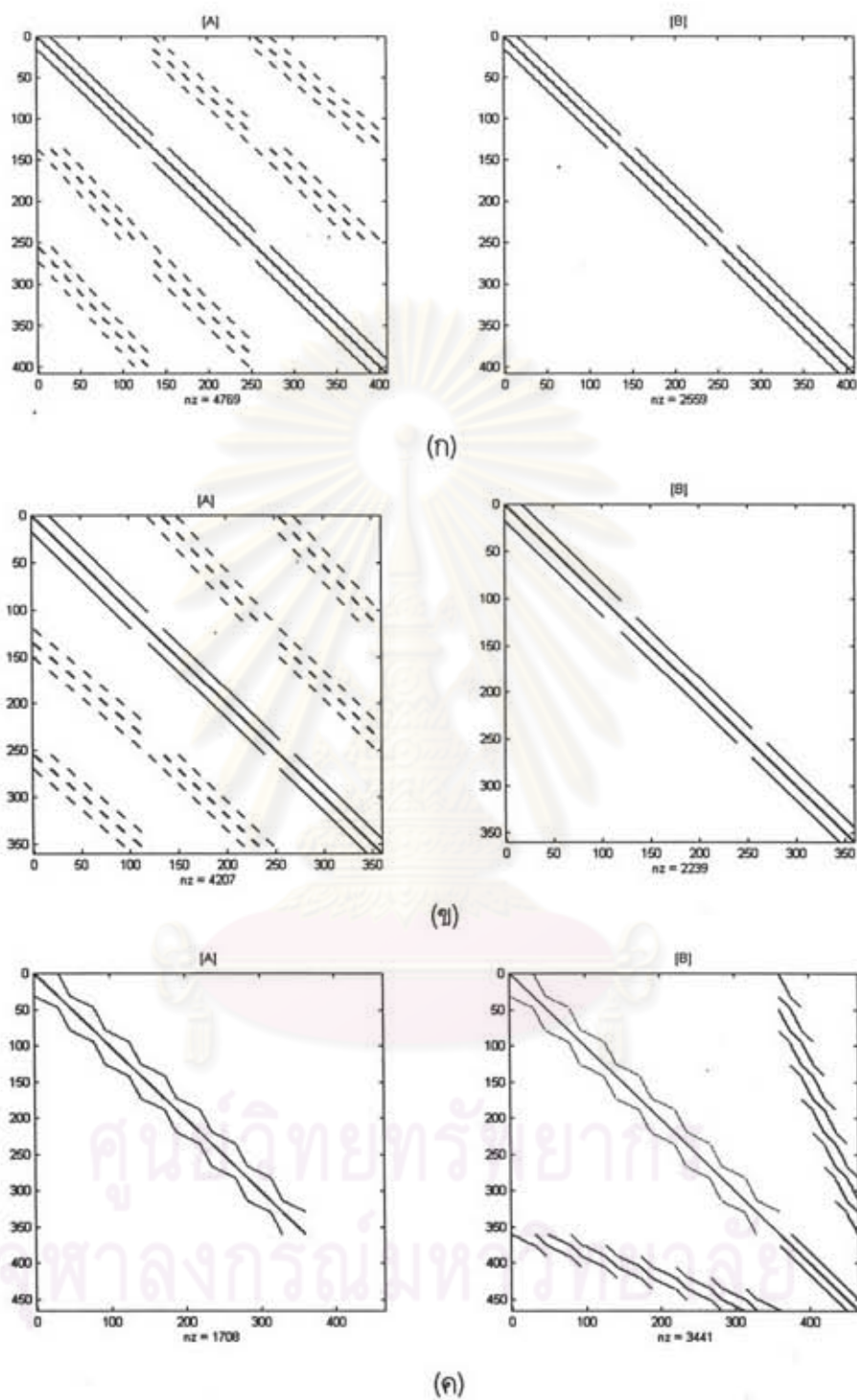
ตัวอย่างของท่อนำคลื่นแบบไม่เอกพันธ์ที่ใช้ในการศึกษาคือ ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีโครงสร้างดั่งที่กล่าวไว้ข้างต้น แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นนี้เป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ด้วยจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 256 และจำนวนโนดเท่ากับ 153 ดังแสดงในรูป 8.2 ความสปีร์สของเมตริกซ์ในสมการปัญหาค่าเจาะจง และอันดับของความสปีร์ส แสดงได้ดังตาราง 8.15

ตาราง 8.15 ความสปีร์ส และอันดับของความสปีร์สของเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจง
ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก เมื่อแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 8.2

วิธี	ความสปีร์ส ของ $[A]$	ความสปีร์ส ของ $[B]$	สมการของปัญหา ค่าเจาะจง และพารามิเตอร์เข้า	อันดับของความสปีร์ส ของเมตริกซ์ หมายเหตุ: 1 คือเมตริกซ์ ที่มีความสปีร์ส สูงสุด
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ($p=1$)	0.9712	0.9846	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $\beta\alpha = 3.82$	2
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ($p=1$)	0.9674	0.9826	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $\beta\alpha = 3.82$	3
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ	0	0	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $\beta\alpha = 3.82$	อยู่ในอันดับเดียวกับวิธี ไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ	0	0	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $\beta\alpha = 3.82$	สนามไฟฟ้าและสนาม แม่เหล็กตามขวาง
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัส และในแนวแกน	0.9921	0.9841	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $k_0\alpha = 3.0$	1
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้าและสนาม แม่เหล็กตามขวาง	0	-	$[A]\{x\} = \lambda\{x\}$, $k_0\alpha = 3.0$	4

จากตาราง 8.15 พบว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ให้อันดับของความสปีร์สของเมตริกซ์อยู่ในอันดับที่หนึ่งถึงสามตามลำดับ ส่วนวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง ให้ความสปีร์สของเมตริกซ์เท่ากับศูนย์

ตำแหน่งขององค์ประกอบที่ไม่เท่ากับศูนย์ในเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจง แสดงในรูป 8.13 เมื่อจุดดำคือองค์ประกอบที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ และหมายเลขโนดเรียงลำดับจากซ้ายไปขวา และจากล่างขึ้นบน



รูป 8.13 ตำแหน่งขององค์ประกอบที่ไม่เท่ากับศูนย์ในเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจงของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก (ก) วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ (ข) วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ (ค) วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน

2. ความสปร้าสของเมตริกซ์ในปัญหาท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง

ตัวอย่างของท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้งที่ใช้ในการศึกษาคือ ท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมซึ่งมีโครงสร้างดังที่กล่าวไว้ข้างต้น แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นนี้เป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ด้วยจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 308 และจำนวนโนดเท่ากับ 169 ดังแสดงในรูป 8.5 ความสปร้าสของเมตริกซ์ในสมการปัญหาค่าเจาะจง และอันดับของความสปร้าส แสดงได้ดังตาราง 8.16

ตาราง 8.16 ความสปร้าส และอันดับของความสปร้าสของเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจงของท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม เมื่อทำแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 8.5

วิธี	ความสปร้าสของ $[A]$	ความสปร้าสของ $[B]$	สมการของปัญหาค่าเจาะจงและพารามิเตอร์เข้า	อันดับของความสปร้าสของเมตริกซ์ หมายเหตุ: 1 คือเมตริกซ์ที่มีความสปร้าส สูงสุด
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ($p=1/0.7$)	0.9601	0.9858	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $\beta a = 3.54$	2
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ($p=1/0.7$)	0.9578	0.9849	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $\beta a = 3.54$	3
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ	0	0	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $\beta a = 3.54$	อยู่ในอันดับเดียวกับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ	0	0	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $\beta a = 3.54$	
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน	0.9937	0.9815	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $k_0 a = 4.0$	1
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง	0	-	$[A]\{x\} = \lambda\{x\}$, $k_0 a = 4.0$	4

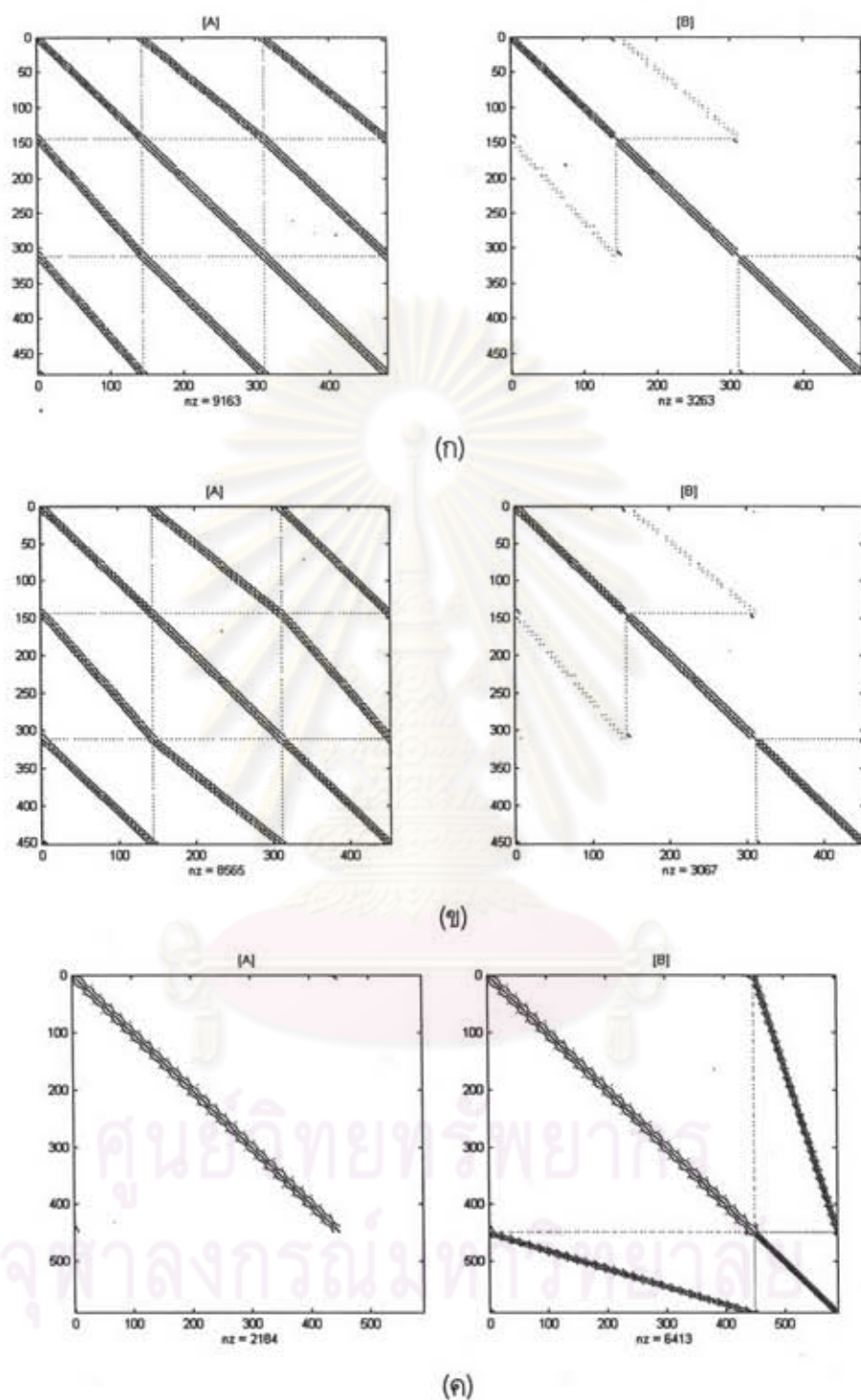
เช่นเดียวกับในกรณีของท่อนำคลื่นบรรจด้วยไดอิเล็กตริก จากตาราง 8.16 แสดงให้เห็นว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ให้อันดับของความสปร้าสของเมตริกซ์อยู่ในอันดับที่

หนึ่งถึงสามตามลำดับ ส่วนวิธีไฟในต้อลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์กรประกอบ วิธีไฟในต้อลิเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์กรประกอบ และวิธีไฟในต้อลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง ให้ความสปรัสของเมตริกซ์เท่ากับศูนย์

ตำแหน่งขององค์กรประกอบที่ไม่เท่ากับศูนย์ในสมการเมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจง แสดงในรูป 8.14 เมื่อจุดดำคือองค์กรประกอบที่ไม่เท่ากับศูนย์ หมายเลขโนดเรียงลำดับจากจุดศูนย์กลางจากซ้ายไปขวา และในทิศ ทิศทวนเข็มนาฬิกา



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูป 8.14 ตำแหน่งขององค์ประกอบที่ไม่เท่ากับศูนย์ในเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจงของท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม (ก) วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ (ข) วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ (ค) วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน

3. ความสปีร์สของเมตริกซ์ในปัญหาท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็ก

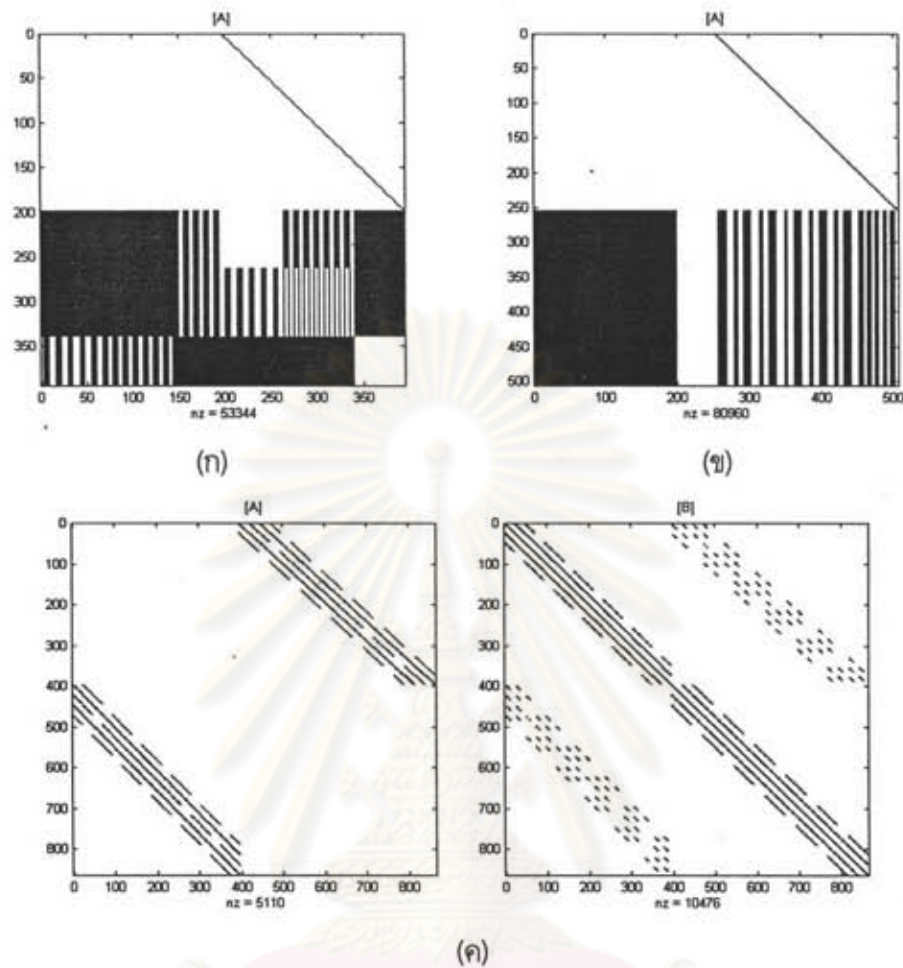
ตัวอย่างของท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ที่มีโครงสร้างดังที่กล่าวไว้ข้างต้น แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยมด้วยจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 144 และจำนวนโนดเท่ากับ 91 ดังแสดงในรูป 8.8 ความสปีร์สของเมตริกซ์ในสมการปัญหาค่าเจาะจง และอันดับของความสปีร์ส แสดงได้ดังตาราง 8.17

ตาราง 8.17 ความสปีร์ส และอันดับของความสปีร์สของเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจงของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ เมื่อทำแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 8.8

วิธี	ความสปีร์สของ $[A]$	ความสปีร์สของ $[B]$	สมการของปัญหาค่าเจาะจงและพารามิเตอร์เข้า	อันดับของความสปีร์สของเมตริกซ์ หมายเหตุ: 1 คือเมตริกซ์ที่มีความสปีร์ส สูงสุด
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ	0.6564	-	$[A]\{x\} = \lambda\{x\}$, $k_0 a = 3.0$	3
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน	0.6838	-	$[A]\{x\} = \lambda\{x\}$, $k_0 a = 3.0$	2
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง	0.9932	0.9860	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $k_0 a = 3.0$	1

จากตาราง 8.17 แสดงให้เห็นว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวางให้อันดับของความสปีร์สของเมตริกซ์อยู่ในอันดับที่หนึ่ง ส่วนวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ให้อันดับของความสปีร์สในอันดับที่สองและสามตามลำดับ

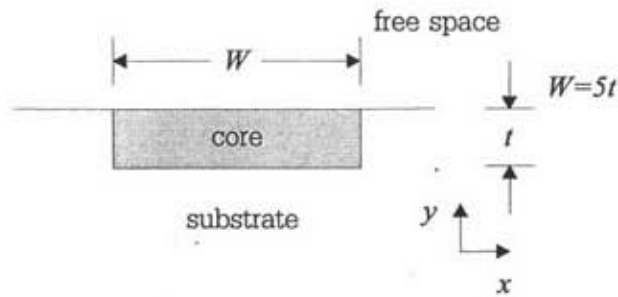
ตำแหน่งขององค์ประกอบที่ไม่เท่ากับศูนย์ในเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจง แสดงในรูป 8.15



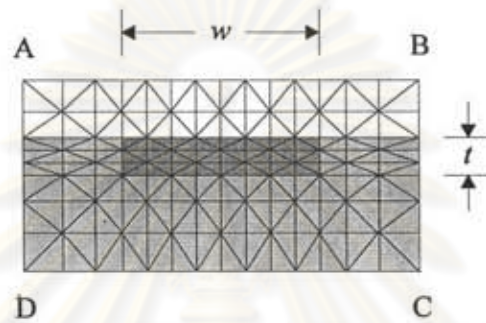
รูป 8.15 ตำแหน่งขององค์ประกอบที่ไม่เท่ากับศูนย์ในเมทริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจงของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ (ก) วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ (ข) วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน (ค) วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง

4. ความสปร้าของเมทริกซ์ในปัญหาท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้า

ตัวอย่างของท่อนำแสงแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรทโครงสร้างของท่อนำคลื่นนี้ประกอบด้วยแกนซึ่งฝังอยู่ในชั้นสเตรท และด้านบนเป็นอวกาศว่าง ดังแสดงในรูป 8.16 การศึกษาในส่วนนี้จะแบ่งออกเป็น 2 กรณีคือ กรณีที่ท่อนำแสงเป็นแอนไอโซทรอปิกแนวทแยง และกรณีที่แกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวาง



รูป 8.16 ภาคตัดขวางของท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรท



รูป 8.17 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น

ออกเป็น 224 อีลีเมนต์ 135 โหนด

1. กรณีที่ท่อนำแสงเป็นแอนไอโซทรอปิกแนวทแยง

พิจารณาท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรทที่มีภาคตัดขวางดังแสดงในรูป 8.16 แกนและชั้นสเตรทของท่อนำคลื่นนี้เป็นแอนไอโซทรอปิกเนกาทีฟยูนิแอกเซียล (Kong, 1986) โดยที่แกนทางแสงขนานกับแกน x สภาพยอมสัมพัทธ์ $[\epsilon_r]$ และความขบขี้มได้สัมพัทธ์ μ_r ของแกนมีค่าดังนี้

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} 2.222^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.3129^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.3129^2 \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

$$\mu_r = 1.0 \quad (8.12)$$

สภาพยอมสัมพัทธ์ และความขบขี้มได้สัมพัทธ์ของชั้นสเตรทมีค่าดังนี้

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} 2.20^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.29^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.29^2 \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

$$\mu_r = 1.0 \quad (8.14)$$

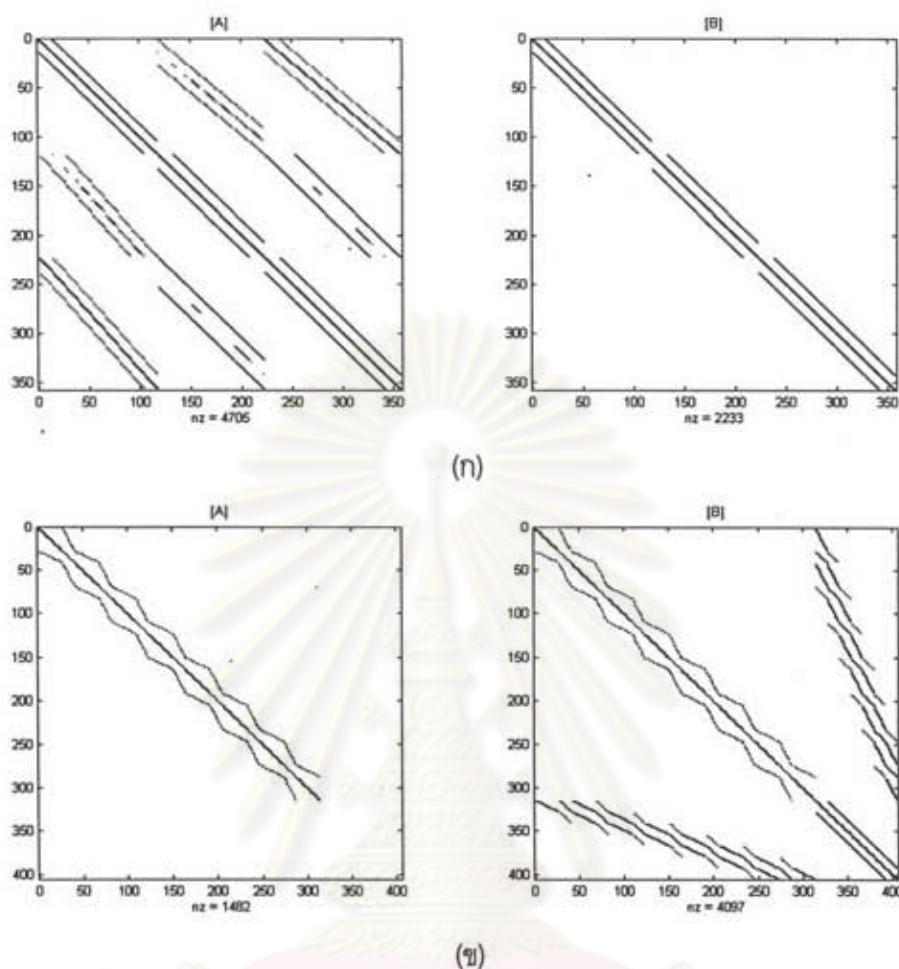
แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม โดยมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 224 จำนวนโนดเท่ากับ 135 ดังแสดงในรูป 8.17 โดยที่ขอบเขต AB,BC,CD และ DA คือขอบเขตเสมือนซึ่งสมมุติให้เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ ความสปาร์สของเมตริกซ์ในสมการปัญหาค่าเจาะจง และอันดับของความสปาร์ส แสดงได้ดังตาราง 8.18

ตาราง 8.18 ความสปาร์ส และอันดับของความสปาร์สของเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจงของท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรทที่มีแกนและชั้นสเตรทเป็นเนกาทีฟยูนิแอกเซียล เมื่อแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 8.17

วิธี	ความสปาร์สของ $[A]$	ความสปาร์สของ $[B]$	สมการของปัญหา ค่าเจาะจง และพารามิเตอร์เข้า	อันดับของความสปาร์ส ของเมตริกซ์ หมายเหตุ: 1 คือเมตริกซ์ ที่มีความสปาร์ส สูงสุด
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ($p=1/2.289$)	0.9631	0.9825	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $\beta a = 36.8$	2
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ	0	0	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $\beta a = 36.8$	3
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัส และในแนวแกน	0.9910	0.9750	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $k_0 a = 16.0$	1
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ สนามไฟฟ้าและสนาม แม่เหล็กตามขวาง	0	-	$[A]\{x\} = \lambda\{x\}$, $k_0 a = 16.0$	อยู่ในอันดับเดียวกับวิธี ไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ

จากตาราง 8.18 พบว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ให้อันดับของความสปาร์สของเมตริกซ์อยู่ในอันดับที่หนึ่งและสองตามลำดับ ส่วนวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง ให้ความสปาร์สของเมตริกซ์เท่ากับศูนย์

ตำแหน่งขององค์ประกอบที่ไม่เท่ากับศูนย์ในเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจง แสดงในรูป 8.18



รูป 8.18 ตำแหน่งขององค์ประกอบที่ไม่เท่ากับศูนย์ในเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจงของท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรทที่มีแกนและชั้นสเตรทเป็นเนกาทีฟยูนิแอกเซียล
 (ก) วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ
 (ข) วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน

2. กรณีที่แกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวาง

พิจารณาท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรทที่มีภาคตัดขวางดังแสดงในรูป 8.16 แกนของท่อนำคลื่นนี้เป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวาง โดยที่แกนทางแสงอยู่ในระนาบ xy และทำมุม $-\pi/8$ เรเดียนกับแกน x เทนเซอร์สภาพยอมสัมพันธ์ $[\epsilon_r]$ และความซึมได้สัมพันธ์ μ_r ของแกนคือ

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} \epsilon_{r,xx} & \epsilon_{r,xy} & 0 \\ \epsilon_{r,yx} & \epsilon_{r,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{r,zz} \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

$$\mu_r = 1.0 \tag{8.16}$$

เมื่อองค์ประกอบของเทนเซอร์สภาพยอมสัมพัทธ์มีค่าดังสมการต่อไปนี้ (Koshiba, 1992)

$$\varepsilon_{r,xx} = n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta \quad (8.17ก)$$

$$\varepsilon_{r,yy} = n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta \quad (8.17ข)$$

$$\varepsilon_{r,zz} = n_o^2 \quad (8.17ค)$$

$$\varepsilon_{r,xy} = \varepsilon_{r,yx} = (n_e^2 - n_o^2) \sin \theta \cos \theta \quad (8.17ง)$$

$$n_o = 2.3129 \quad (8.17จ)$$

$$n_e = 2.222 \quad (8.17ฉ)$$

n คือดัชนีหักเห, θ คือมุมระหว่างแกนทางแสงและแกน x ในที่นี้กำหนดให้มีค่าเท่ากับ $-\pi/8$ เรเดียน
 ชั้นสเตรทของท่อนำคลื่นนี้เป็นแอนไอโซทรอปิกเนกาทีฟยูนิแอกเซียลที่แกนทางแสงขนานกับแกน x โดยที่มี
 สภาพยอมสัมพัทธ์ และความซึมได้สัมพัทธ์เป็น

$$[\varepsilon_r] = \begin{bmatrix} 2.20^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.29^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.29^2 \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

$$\mu_r = 1.0 \quad (8.19)$$

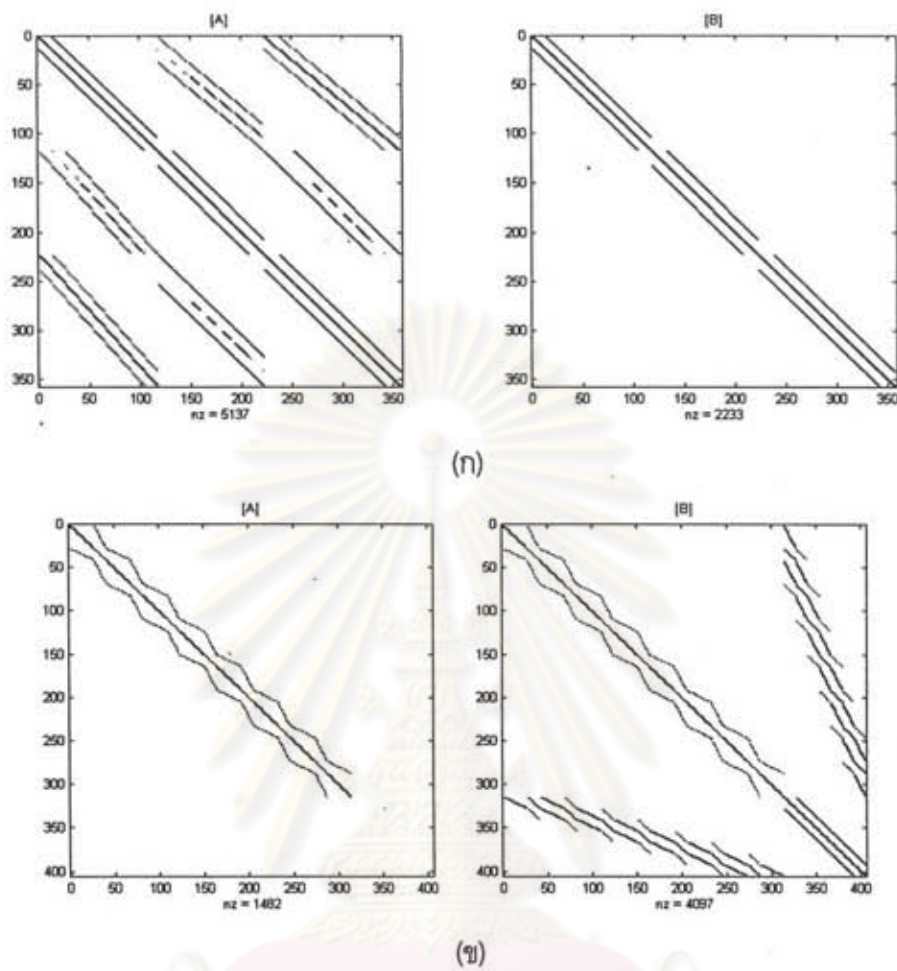
แบ่งภาคตัดขวางออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม และให้เงื่อนไขขอบเขตเช่นเดียวกับกรณีแรก ความ
 สปาร์สของเมตริกซ์ในสมการปัญหาค่าเจาะจง และอันดับของความสปาร์ส แสดงได้ดังตาราง 8.19

ศูนย์วิทยทรัพยากร
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตาราง 8.19 ความสปราร์ส และอันดับของความสปราร์สของเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจงของท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรทที่มีแกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวางและชั้นสเตรทเป็นเนกาทิฟยูนิเอกเซียล เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 8.17

วิธี	ความสปราร์สของ $[A]$	ความสปราร์สของ $[B]$	สมการของปัญหาค่าเจาะจงและพารามิเตอร์เข้า	อันดับของความสปราร์สของเมตริกซ์ หมายเหตุ: 1 คือเมตริกซ์ที่มีความสปราร์ส สูงสุด
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ($p=1/2.289$)	0.9631	0.9825	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $\beta\alpha = 36.8$	2
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ	0	0	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $\beta\alpha = 36.8$	3
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน	0.9910	0.9750	$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$, $k_0\alpha = 16.0$	1
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง	0	-	$[A]\{x\} = \lambda\{x\}$, $k_0\alpha = 16.0$	อยู่ในอันดับเดียวกับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ

เช่นเดียวกับในกรณีแรก จากตาราง 8.19 พบว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ให้อันดับของความสปราร์สของเมตริกซ์อยู่ในอันดับที่หนึ่งและสองตามลำดับ ส่วนวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวาง ให้ความสปราร์สของเมตริกซ์เท่ากับศูนย์ ตำแหน่งขององค์ประกอบที่ไม่เท่ากับศูนย์ในเมตริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเจาะจง แสดงในรูป 8.19



รูป 8.19 ตำแหน่งขององค์ประกอบที่ไม่เท่ากับศูนย์ในเมทริกซ์ในสมการของปัญหาค่าเฉพาะของท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรทที่มีแกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวางและชั้นสเตรทเป็นเนกาทิฟยูนิแอกเซียล (ก) วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ (ข) วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย