

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ

ความนำ

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ ได้เสนอขึ้นโดย Hayata, Eguchi และ Koshiba ใน ค.ศ. 1989 โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อ ปรับปรุงความสามารถในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม และกำจัดความยุ่งยากที่ต้องกำหนดค่าสัมประสิทธิ์พินอลติ (p) ในพจน์พินอลติให้เหมาะสม ซึ่งสัมประสิทธิ์พินอลติจะเป็นตัวกำหนดบริเวณที่ไม่ให้มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียม (รายละเอียดแสดงไว้ในบทที่ 3)

ขั้นตอนของวิธีนี้เริ่มจากการจัดรูปฟังก์ชันนอลที่มีคุณสมบัติเป็นนิพจน์แปรผันของสมการคลื่นที่อยู่ในรูปสนามไฟฟ้า และทำการสร้างคำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าในอีลีเมนต์ให้อยู่ในรูปสนามไฟฟ้าที่โนดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากจุดต่ำสุดของนิพจน์แปรผัน ซึ่งจากผลเฉลยที่ได้นี้พบว่านอกจากผลเฉลยที่ถูกต้องแล้วจะมีผลเฉลยปลอมเทียมปรากฏออกมาด้วย ผลเฉลยปลอมเทียมดังกล่าวนี้มีคุณลักษณะคือความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า (\mathbf{D}) ไม่สอดคล้องกับกฎของเกาส์หรือเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเท่ากับศูนย์ ($\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$)

Hayata และคณะ (1989) ได้เสนอวิธีการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้น ด้วยการบังคับเงื่อนไข $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ ให้กับนิพจน์แปรผันดังกล่าวข้างต้น โดยใช้ความสัมพันธ์ในเงื่อนไข $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ แปลงนิพจน์แปรผันที่อยู่ในรูปสนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ให้อยู่ในรูปสนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ

เนื่องจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ ที่เสนอโดย Hayata และคณะ (1989) เป็นวิธีที่เสนอขึ้นเพื่อปรับปรุงข้อบกพร่องของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบที่เสนอโดย Koshiba และคณะ (1985) และเป็นวิธีที่มีการยอมรับอย่างกว้างขวาง ในบทนี้จะนำวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ มาศึกษาว่า สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่น 4 ประเภทต่อไปนี้ ได้หรือไม่

1. ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์
2. ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง
3. ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่เทนเซอร์ความซาชิมได้ $[\mu]$ อยู่ในรูป

ดังนี้

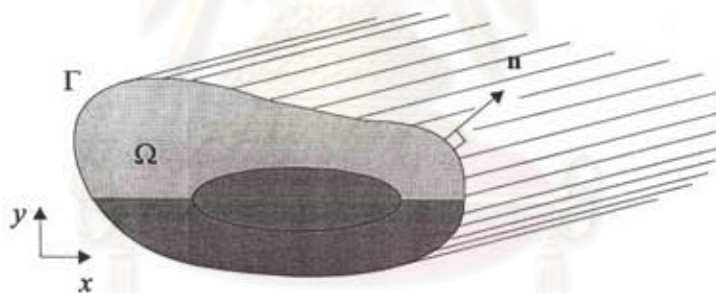
$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & \mu_{xz} \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}$$

4. ท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าที่เทนเซอร์สภาพยอม $[\varepsilon]$ อยู่ในรูปดังนี้

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \text{ และ } [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

นิพจน์แปรผัน

Hayata และคณะ (1989) ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่ไม่มีการสูญเสีย และมีภาคตัดขวางรูปทรงใดๆ Ω ในระนาบ xy ดังแสดงในรูป 5.1



รูป 5.1 ท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางรูปทรงใดๆ และมีความสม่ำเสมอในแนวแกน z

ท่อนำคลื่นประกอบไปด้วยตัวกลางที่มีความซับซ้อนได้อยู่ในรูปเทนเซอร์ $[\mu]$ และสภาพยอม ε อยู่ในรูปสเกลาร์ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เดินทางในท่อนำคลื่นนี้สามารถวิเคราะห์ได้จากสมการคลื่นที่อยู่ในรูปสนามไฟฟ้า \mathbf{E} ดังนี้

$$\nabla \times ([\mu_r]^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = 0 \quad (5.1)$$

เมื่อ $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ คือเวฟนัมเบอร์ของอวกาศว่าง, $[\mu_r]$ และ ε_r คือเทนเซอร์ความซับซ้อนได้สัมพัทธ์และสภาพยอมสัมพัทธ์ของตัวกลาง ตามลำดับ, $[\mu_r]$ และ ε_r สามารถหาได้จากสมการ

$$[\mu_r] = \frac{1}{\mu_0} [\mu] \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0 \quad (5.3)$$

โดยที่ $[\mu]$, ε คือ เทนเซอร์ความซึมได้และสภาพยอมของตัวกลาง, μ_0 และ ε_0 คือความซึมได้และสภาพยอมของอวกาศว่าง ตามลำดับ

นิพจน์แปรผันของสมการ (5.1) ตามที่ Hayata และคณะ (1989) เสนอไว้ คือ

$$F(\mathbf{E}) = \iint_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{E})^* \cdot ([\mu_r]^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}] d\Omega \quad (5.4)$$

เมื่อ * คือสังยุคเชิงซ้อน

วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นอีลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม และให้คำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าในแต่ละอีลิเมนต์อยู่ในรูปของ

$$\mathbf{E} = [N]^T \{E\}_e \exp(-j\beta z) \quad (5.5)$$

เมื่อ β คือค่าคงตัวเฟส, $[N]$ คือเมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่างของคำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าในทิศ x, y และ z ตามลำดับ, $\{E\}_e$ คือเมตริกซ์แถวตั้งที่องค์ประกอบคือสนามไฟฟ้าที่โนดของอีลิเมนต์ ในทิศ x, y และ z , T คือตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน (Hayata และคณะ, 1989)

แทนสมการ (5.5) ในสมการ (5.4) และรวม $F(\mathbf{E})$ ทุกอีลิเมนต์ทั้งหมดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นเข้าด้วยกัน ได้นิพจน์แปรผันที่สามารถเขียนได้ดังสมการ

$$F(\mathbf{E}) = \{E\}^T ([S] - k_0^2 [M]) \{E\} \quad (5.6)$$

เมื่อ $\{E\}$ คือสนามไฟฟ้าที่โนดทั้งหมดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น เมตริกซ์ $[S]$ และ $[M]$ เป็นเมตริกซ์เฮอร์มิเทียน (รายละเอียดของเมตริกซ์ $[S]$ และ $[M]$ แสดงในภาคผนวก ง) คุณสมบัติและการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากการพิจารณาจุดต่ำสุดของของสมการ (5.6) ซึ่งยังผลให้ได้สมการที่อยู่ในรูปเมตริกซ์เจาะจงที่มี k_0^2 เป็นค่าเจาะจง ดังนี้

$$[S]\{E\} - k_0^2[M]\{E\} = \{0\} \quad (5.7)$$

สมการ (5.7) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของปัญหาค่าเฉพาะจางมาตรฐาน ได้เป็น

$$[M]^{-1}[S]\{E\} - k_0^2\{E\} = 0 \quad (5.8)$$

เมื่อใช้สมการ (5.8) วิเคราะห์ที่ท่อนำคลื่นพบว่า มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียบกับผลเฉลยที่ถูกต้อง (แสดงตัวอย่างไว้ในส่วนการวิเคราะห์ที่ท่อนำคลื่นบรรจด้วยไดอิเล็กทริก) ซึ่งผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นมีคุณลักษณะคือ ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า (\mathbf{D}) ไม่สอดคล้องกับกฎของเกาส์ หรือเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเป็นศูนย์ $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ Hayata และคณะ (1989) ได้เสนอวิธีการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นดังกล่าวในหัวข้อถัดไป

การกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม

Hayata และคณะ (1989) ได้เสนอวิธีการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้น โดยการให้เงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเป็นศูนย์ แก่ฟังก์ชันแปรผันในสมการ (5.6) ตามขั้นตอนดังนี้

จากเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเป็นศูนย์ $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน z สามารถเขียนให้อยู่ในรูปองค์ประกอบตามขวางได้เป็น

$$\epsilon E_z = (j\beta)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \epsilon E_x + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon E_y \right) \quad (5.9)$$

เมื่อ E_x , E_y และ E_z คือสนามไฟฟ้าในทิศ x , y และ z ตามลำดับ

รูปกาเลขิณของสมการ (5.9) ในรูปเมตริกซ์คือ

$$[D_z]\{E_z\} = [D_r]\{E_r\} \quad (5.10)$$

$$\text{เมื่อ} \quad [D_z] = \sum_c \iint_c \epsilon \{N\} \{N\}^T dx dy \quad (5.11)$$

$$[D_r] = - \sum_c \iint_c \left[\epsilon \{N\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \quad \epsilon \{N\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \right] dx dy \quad (5.12)$$

$$\bar{x} = \beta x \quad (5.13)$$

$$\bar{y} = \beta y \quad (5.14)$$

$$\{E_i\} = \begin{bmatrix} \{E_x\} \\ \{E_y\} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

โดยที่ $\{E_x\}$ และ $\{E_y\}$ คือเมตริกซ์แถวตั้งที่องค์ประกอบคือ สนามแม่เหล็กที่โนดในทิศ x และ y ตามลำดับ

โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (5.10) สนามไฟฟ้าที่โนดทั้ง 3 องค์ประกอบ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปองค์ประกอบตามขวางได้เป็น

$$\{E\} = [D]\{E_i\} \quad (5.16)$$

เมื่อ
$$[D] = \begin{bmatrix} [I] \\ [D_z]^{-1}[D,1] \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$[I]$ คือเมตริกซ์เอกลักษณ์

โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (5.16) นิพจน์แปรผันในสมการ (5.6) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบได้ดังนี้

$$F(E_i) = \{E_i\}^T \left([S_n] - \left(\frac{k_0}{\beta}\right)^2 [M_n] \right) \{E_i\} \quad (5.18)$$

เมื่อ
$$[S_n] = [D]^T [S] [D] \quad (5.19)$$

$$[M_n] = [D]^T [\bar{M}] [D] \quad (5.20)$$

$$[\bar{M}] = \sum_e \iint \epsilon_r [N]^* [N]^T dx dy \quad (5.21)$$

คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากการพิจารณาจุดต่ำสุดของสมการ (5.18) ซึ่งยังผลให้ได้สมการที่อยู่ในรูปเมตริกซ์เจาะจงดังนี้

$$[S_n]\{E_i\} - \left(\frac{k_0}{\beta}\right)^2 [M_n]\{E_i\} = \{0\} \quad (5.22)$$

สมการ (5.22) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐานได้เป็น

$$[M_n]^{-1}[S_n]\{E_i\} - \left(\frac{k_0}{\beta}\right)^2 \{E_i\} = \{0\} \quad (5.23)$$

ตามขั้นตอนที่เสนอโดย Hayata และคณะ (1989) ดังที่กล่าวมา เงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเท่ากับ ศูนย์จะถูกบังคับอยู่ในสมการ (5.6) โดยอัตโนมัติ และสมการนี้ใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าประมาณ $2/3$ ของจำนวนตัวแปรที่ใช้ในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ (Koshiba และคณะ, 1985) ดังกล่าวไว้แล้วในบทที่ 3

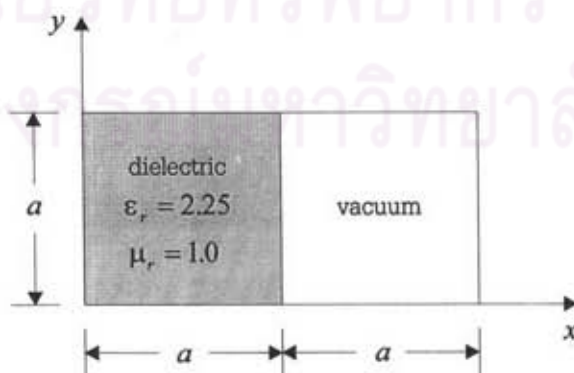
ตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ

เช่นเดียวกับในบทที่ 2 ในส่วนนี้ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จะทำการตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ ในปัญหาท่อนำคลื่น 4 ประเภทคือ ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก ท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปร่างกลม ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ และท่อนำแสงแบบฝังในซิปสเตรท

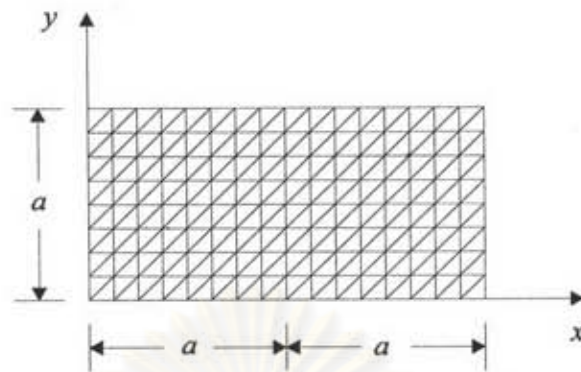
การตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ ในตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้นมีรายละเอียดดังนี้

1. ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

พิจารณาท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีขนาดเป็น $2a \times a$ ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบและครึ่งหนึ่งของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ ϵ_r และ ความซบซิมได้สัมพัทธ์ μ_r เท่ากับ 2.25 และ 1.0 ตามลำดับ ดังแสดงในรูป 5.2



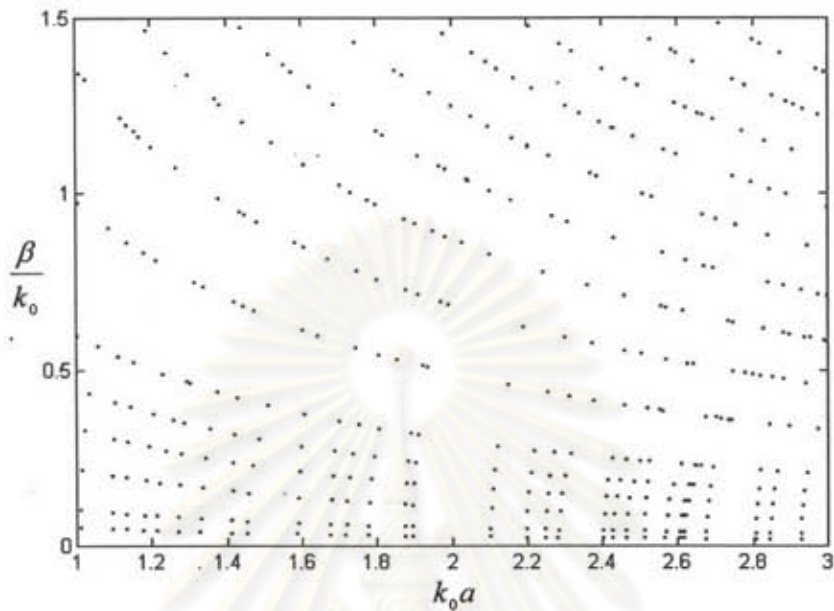
รูป 5.2 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก



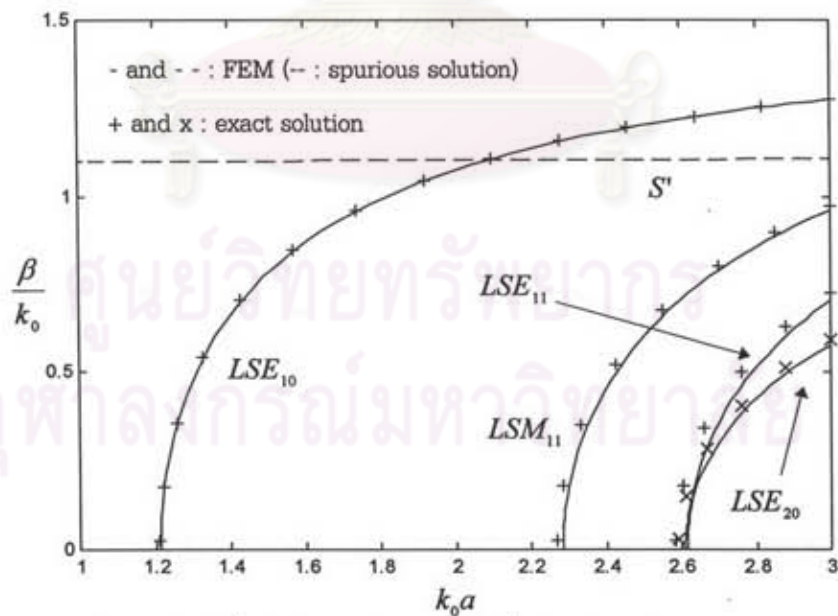
รูป 5.3 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นบรรจุด้วย ไดอิเล็กทริกออกเป็น 256 อีลีเมนต์ 153 โหนด

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยม ดังแสดงในรูป 5.3 โดยมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 256 และมีจำนวนโหนดเท่ากับ 153 รูป 5.4 แสดงผลการคำนวณกราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ โดยปราศจากการบังคับเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเท่ากับศูนย์ พบว่าเกิดผลเฉลยปลอมเต็มจำนวนมากจนทำให้ไม่สามารถแยกแยะกับผลเฉลยที่ถูกต้องได้ รูป 5.5 แสดงผลการคำนวณกราฟดิสเพอร์ชันที่ได้ โดยเส้นทึบและเส้นประแสดงผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า เมื่อได้รับเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเท่ากับศูนย์แล้ว สัญลักษณ์ + และ \times คือผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ (Balanis, 1989) ตัวอย่างการเปรียบเทียบค่า β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ ของโมดมูลฐาน LSE_{10} , LSM_{11} , LSE_{11} และ LSE_{20} ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีเชิงวิเคราะห์ เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 5.3 แสดงในตาราง 5.1

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูป 5.4 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า ของท่อนำคลื่น บรรจด้วยไดอิเล็กตริกเมื่อปราศจากการบังคับเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเป็นศูนย์



รูป 5.5 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ ของท่อนำคลื่นบรรจด้วยไดอิเล็กตริก เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

ตาราง 5.1 ตัวอย่างของค่า β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีเชิงวิเคราะห์ รวมขนาดความผิดพลาด เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 5.3

โมด	ผลเฉลยแม่นยำตรง ของ β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$	β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	ขนาดความผิดพลาด β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์
LSE_{10}	1.275756	1.273983	0.014 %
LSM_{11}	0.971538	0.960821	1.103 %
LSE_{11}	0.728649	0.705319	3.202 %
LSM_{20}	0.593897	0.579804	2.373 %

จากรูป 5.5 พบว่าโมดมูลฐาน (LSE_{10}) สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ส่วนโมด LSM_{11} , LSE_{11} และ LSE_{20} ต่างจากผลเฉลยแม่นยำตรงไม่มากนัก อย่างไรก็ตามโมดนี้จะมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ให้สูงขึ้น

จากรูป 5.5 นอกจากโมดที่ถูกต้องที่ได้แล้ว พบว่ามีผลเฉลยปลอมเทียม S' ซึ่งแสดงเป็นเส้นประ ออกมาด้วยซึ่งผลการวิเคราะห์ตัวอย่างปัญหาของท่อนำคลื่น ในบทความที่ได้เสนอโดย Hayata และคณะ (1989) นี้ ไม่มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมแต่อย่างใด เนื่องจากได้ใช้ความสมมาตรของท่อนำคลื่นและทำการบังคับให้ระนาบของความสมมาตรนี้เป็นตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ จากนั้นทำการวิเคราะห์เพียงครึ่งหนึ่งของภาคตัดขวางทั้งหมดเท่านั้น

ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้ทำการตรวจสอบค่าของไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้า $\nabla \cdot E$ ของผลเฉลยปลอมเทียม และโมดมูลฐาน (LSE_{10}) ได้ผลดังแสดงในตาราง 5.2 และ 5.3

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตาราง 5.2 ค่าไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้า $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ของผลเฉลยปโลมเทียม S' ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ $\beta\alpha = 1.10$ ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 5.3 (กำหนดให้ขนาดสูงสุดของสนามไฟฟ้าที่โนดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีค่าเท่ากับ 1)

ผลเฉลย	ค่าไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้า $\nabla \cdot \mathbf{E}$						ผลรวมของ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ จากทุกโนดบนภาคตัดขวาง ของท่อนำคลื่น (ยกเว้นโนด ที่อยู่บนผนังของท่อนำคลื่น)
	ตำแหน่ง y	ตำแหน่ง x					
		$1.25a$	$1.375a$	$1.50a$	$1.625a$	$1.75a$	
ผลเฉลย	$0.75a$	-0.0057	15.9002	-0.0569	15.9054	-0.0741	-0.0148
ปโลมเทียม	$0.625a$	-15.9114	0.0601	-15.9118	0.0814	-15.9384	
S'	$0.50a$	-0.0627	15.9168	-0.0843	15.9328	-0.0611	
	$0.375a$	-15.9208	0.0856	-15.9282	0.0623	-15.9367	

ตาราง 5.3 ค่าไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้า $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ของโมด LSE_{10} ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ $\beta\alpha = 1.10$ ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 5.3 (กำหนดให้ขนาดสูงสุดของสนามไฟฟ้าที่โนดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีค่าเท่ากับ 1)

ผลเฉลย	ค่าไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้า $\nabla \cdot \mathbf{E}$						ผลรวมของ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ จากทุกโนดบนภาคตัดขวาง ของท่อนำคลื่น (ยกเว้นโนด ที่อยู่บนผนังของท่อนำคลื่น)
	ตำแหน่ง y	ตำแหน่ง x					
		$1.25a$	$1.375a$	$1.50a$	$1.625a$	$1.75a$	
โมด LSE_{10}	$0.75a$	2.2415×10^{-2}	7.1133×10^{-3}	7.6832×10^{-3}	-3.2884×10^{-3}	2.4889×10^{-3}	-0.0180
	$0.625a$	-9.7163×10^{-3}	-9.1831×10^{-3}	2.4649×10^{-3}	-3.0412×10^{-3}	6.1578×10^{-3}	
	$0.50a$	1.0855×10^{-2}	-1.9895×10^{-3}	3.8041×10^{-3}	-5.9238×10^{-3}	4.9983×10^{-4}	
	$0.375a$	7.4025×10^{-4}	-4.8645×10^{-3}	4.8866×10^{-3}	-9.1459×10^{-4}	7.0720×10^{-3}	

เมื่อพิจารณาเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเท่ากับศูนย์ ดังแสดงได้ดังสมการ

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = 0 \quad (5.24)$$

สำหรับท่อนำคลื่นประกอบด้วยตัวกลางที่มี ϵ เป็นสเกลาร์ สมการ (5.24) สามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (5.25)$$

แทนคำตอบทดลองตามสมการ (5.5) ในสมการ (5.25) และให้ฟังก์ชันให้น้ำหนักของสมการ (5.25) มีค่าเท่ากับ $\{N\}$ รูปภาคินของสมการ (5.25) สำหรับแต่ละอีลีเมนต์คือ

$$\iint_e \{N\} \{N\}^T \{E_z\}_e dx dy = - \iint_e \frac{1}{\beta} \{N\} \partial \{N\}^T / \partial x \{E_x\}_e dx dy - \iint_e \frac{1}{\beta} \{N\} \partial \{N\}^T / \partial y \{E_y\}_e dx dy \quad (5.26)$$

จากสมการ (5.26) แสดงให้เห็นว่า เมื่อท่อนำคลื่นประกอบด้วยตัวกลางที่มี ϵ เป็นสเกลาร์ สนามไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นต้องสอดคล้องกับ เงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้าเท่ากับศูนย์ด้วย

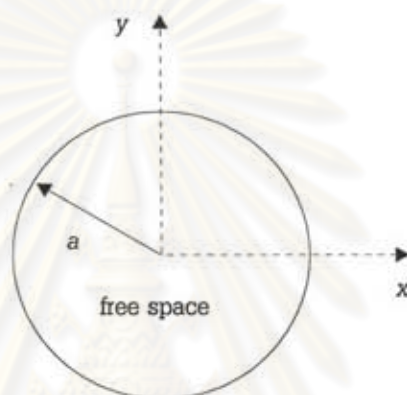
จากข้อมูลที่ได้ในตาราง 5.2 พบว่า ค่าของไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้า ($\nabla \cdot \mathbf{E}$) ของผลเฉลยป्लอมเทียม S' ที่บางตำแหน่งบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีค่าต่างจากที่ได้จากโมดมูลฐาน (LSE_{10}) มาก เช่นที่ตำแหน่ง $x = 0.625a$, $y = 1.50a$ ค่าของ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ มีค่าเท่ากับ -15.9188 เทียบกับ 2.4649×10^{-3} ที่ได้จากโมดมูลฐาน ซึ่งแสดงว่าค่าของ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ของ S' ไม่สอดคล้องกับสมการ (5.25) แม้ว่าเงื่อนไขนี้ได้ถูกบังคับให้กับสมการระบบตามแนวทางที่ได้กล่าวมาแล้ว เมื่อพิจารณาค่าตัวอย่างของ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ จากข้อมูลที่ได้ที่ตำแหน่งต่างๆพบว่า ค่าของ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่เกิดขึ้นนี้ จะได้รับการชดเชยกับ ค่าของ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่อยู่ใกล้เคียงกัน ซึ่งเมื่อทำการรวมทุกอีลีเมนต์ประกอบเป็นทั้งโดเมนพบว่า ค่าของ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ที่ได้ มีค่าอยู่ในอันดับเดียวกับที่ได้จากโมดมูลฐานที่สอดคล้องกับสมการ (5.25) (ดังแสดงในตาราง 5.3) จากที่กล่าวมาแสดงให้เห็นว่า ถึงแม้ว่าเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเป็นศูนย์ได้รับการบังคับให้กับสมการของระบบแล้วก็ตาม ผลเฉลยป्लอมเทียมยังสามารถเกิดขึ้นได้

จากรูป 5.5 พบว่าผลเฉลยป्लอมเทียม S' ที่เกิดขึ้นนี้จะอยู่ในแนวขนานกับแกนความถี่ $k_0 a$ และมีจุดตัดแกน β/k_0 ที่ค่าประมาณ $\beta/k_0 = 1.10$ แต่อย่างไรก็ตามผลเฉลยป्लอมเทียม S' ที่เกิดขึ้นนี้สามารถแยกแยะกับผลเฉลยที่ถูกต้องได้โดยง่าย

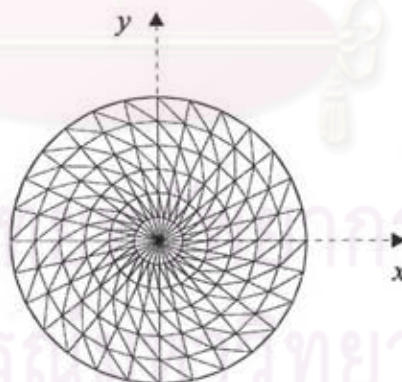
จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบที่เสนอโดย Hayata และคณะ (1989) สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ได้ แต่ยังมีปัญหาเล็กน้อยในเรื่องผลเฉลยปลอมเทียม

2. ท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

พิจารณาท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ a ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ ภายในเป็นอวกาศว่าง ดังแสดงในรูป 5.6



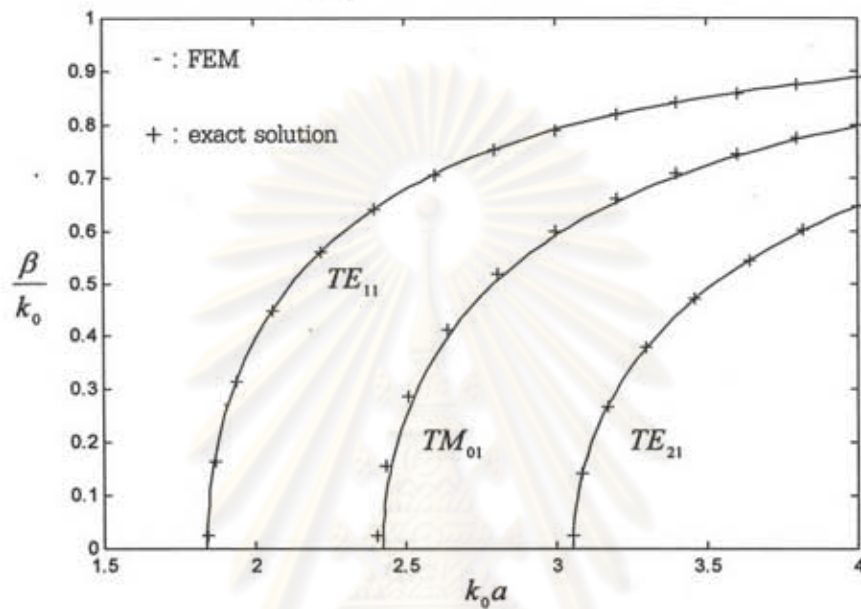
รูป 5.6 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น



รูป 5.7 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น
ออกเป็น 308 อีลีเมนต์ 169 โหนด

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยม ดังแสดงในรูป 5.7 โดยมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 308 มีจำนวนโหนดเท่ากับ 169 ผลการคำนวณกราฟดิสเพอร์ชันที่ได้แสดงในรูป 5.8 เส้นทึบแสดงผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ สัญลักษณ์ $+$ คือผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

(Balanis, 1989) ตัวอย่างการเปรียบเทียบค่า β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ ของโหมดมูลฐาน (TE_{10}), TM_{01} และ TE_{21} ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์และวิธีเชิงวิเคราะห์ เมื่อทำการแบ่งอีลิเมนต์ดังแสดงในรูป 5.7 แสดงในตาราง 5.4



รูป 5.8 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ ของท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

ตาราง 5.4 ตัวอย่างของค่า β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์และวิธีเชิงวิเคราะห์ รวมขนาดความผิดพลาดเมื่อทำการแบ่งอีลิเมนต์ดังแสดงในรูป 5.7

โหมด	ผลเฉลยแม่นยำตรง ของ β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$	β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์	β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์
TE_{11}	0.887766	0.887902	0.015 %
TM_{01}	0.799094	0.796092	0.376 %
TE_{21}	0.645738	0.645734	0.00056 %

จากรูป 5.8 พบว่าโหมดมูลฐาน (TE_{11}) และ TE_{21} สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ส่วนโหมด TM_{01} เมื่อพิจารณาในช่วงประมาณ $\beta/k_0 = 0$ ถึง $\beta/k_0 = 0.5$ ต่างจากผลเฉลย

แม่นยำไม่มาก อย่างไรก็ตามโมเดลนี้จะมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำมากขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ให้สูงขึ้น และผลการคำนวณที่ได้พบว่าไม่มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียบแต่อย่างใด

จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบที่เสนอโดย Hayata และคณะ (1989) สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้งได้

3. ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์

นิพจน์แปรผันที่อยู่ในรูปเมตริกซ์ในสมการ (5.6) ไม่สามารถใช้วิเคราะห์ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ซึ่งเป็นท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กได้ เนื่องจากอยู่ในรูปของ E , และ k_0 เพื่อให้ให้นิพจน์แปรผันนี้สามารถใช้วิเคราะห์ท่อนำคลื่นดังกล่าวนี้ได้ ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้ทำการปรับปรุงนิพจน์แปรผันตามสมการ (5.6) เพิ่มเติมดังที่จะเสนอในหัวข้อถัดไป

3.1 การปรับปรุงนิพจน์แปรผันสำหรับท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟ

เพื่อให้ให้นิพจน์แปรผันนี้สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟได้ ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้ปรับปรุงนิพจน์แปรผันตามสมการ (5.6) ให้อยู่ในรูปของ E , และ β ดังนี้

เมื่อให้คำตอบทดลองของสนามไฟฟ้า และฟังก์ชันให้น้ำหนักในแต่ละอีลีเมนต์อยู่ในรูปตามสมการ (5.5) และมีค่าเท่ากับ $\{N\}$ ตามลำดับ รูปกาเลอกินของเวกเตอร์เจเนอรัลต้องเท่ากับศูนย์ เมื่อรวมทุกอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นเข้าด้วยกัน สามารถเขียนได้เป็น

$$[\bar{D}_z]\{E_z\} = \frac{1}{\beta}[\bar{D}_t]\{E_t\} \quad (5.27)$$

$$\text{เมื่อ} \quad [\bar{D}_z] = \sum \iint \varepsilon\{N\}\{N\}^T dx dy \quad (5.28)$$

$$[\bar{D}_t] = \sum \iint [\varepsilon\{N\} \partial\{N\}^T / \partial x \quad \varepsilon\{N\} \partial\{N\}^T / \partial y] dx dy \quad (5.29)$$

$$\{E_t\} = \begin{bmatrix} \{E_x\} \\ \{E_y\} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

จากสมการ (5.27) สนามไฟฟ้าที่โนดทั้ง 3 องค์ประกอบ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปองค์ประกอบตามขวางได้เป็น

$$\{E\} = [\bar{D}]\{E_t\} \quad (5.31)$$

เมื่อ
$$[\hat{D}] = \begin{bmatrix} [I] \\ \frac{1}{\beta} [\hat{D}_1]^{-1} [\hat{D}_1] \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$[I]$ คือเมตริกซ์เอกลักษณ์

จัดรูปนิพจน์แปรผันในสมการ (5.6) ให้อยู่ในรูปของ (รายละเอียดของเมตริกซ์ $[C^2]$, $[C^1]$ และ $[C^0]$ แสดงไว้ใน ภาคผนวก ง)

$$F(E, k_0) = \{E\}^T (\beta^2 [C^2] + \beta [C^1] + [C^0] - k_0^2 [M]) \{E\} \quad (5.33)$$

แทนสมการ (5.31) ในสมการ (5.33) สมการ (5.33) สามารถเขียนได้เป็น

$$F(E, k_0) = \{E, \}_T (\beta^4 [G^4] + \beta^3 [G^3] + \beta^2 [G^2] + \beta [G^1] + [G^0]) \{E, \} \quad (5.34)$$

คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากการพิจารณาจุดต่ำสุดของสมการ (5.34) ซึ่งยังผลให้ได้สมการต่อไปนี้ (รายละเอียดของเมตริกซ์ $[G^4]$, $[G^3]$, $[G^2]$, $[G^1]$ และ $[G^0]$ แสดงไว้ใน ภาคผนวก ง)

$$(\beta^4 [G^4] + \beta^3 [G^3] + \beta^2 [G^2] + \beta [G^1] + [G^0]) \{E, \} = 0 \quad (5.35)$$

สมการ (5.35) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปปัญหาค่าเฉพาะจางมาตรฐานได้เป็น

$$[G] \{\psi_4\} - \beta \{\psi_4\} = \{0\} \quad (5.36)$$

เมื่อ
$$\{\psi_4\} = \begin{bmatrix} \{E, \} \\ \beta \{E, \} \\ \beta^2 \{E, \} \\ \beta^3 \{E, \} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} [0] & [I] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [I] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [I] \\ [G_{41}] & [G_{42}] & [G_{43}] & [G_{44}] \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$[I]$ คือเมตริกซ์เอกลักษณ์

$$[G_{41}] = -[G^4]^{-1} [G^0] \quad (5.39)$$

$$[G_{42}] = -[G^4]^{-1}[G^1] \quad (5.40)$$

$$[G_{43}] = -[G^4]^{-1}[G^2] \quad (5.41)$$

$$[G_{44}] = -[G^4]^{-1}[G^3] \quad (5.42)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (5.36) พบว่า สมการนี้ต้องใช้ตัวแปรไม่ทราบค่าประมาณเท่ากับ $8N_p$ เทียบกับสมการ (5.7) ซึ่งใช้เพียงประมาณ $2N_p$ เท่านั้น เมื่อ N_p คือจำนวนโนดทั้งหมดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น

3.2 ผลการวิเคราะห์

พิจารณาท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ซึ่งเป็นอุปกรณ์ทางไมโครเวฟที่มีคุณสมบัติไร้ภาวะย้อนกลับ ที่มีโครงสร้างดังแสดงในรูป 5.9 โดยเฟอร์ไรต์บรรจุในท่อนำคลื่นในลักษณะไม่สมมาตร และได้รับการไบแอสด้วยสนามแม่เหล็กสถิตในแนว y เทนเซอร์ความซึมได้ $[\mu]$ ซึ่งขึ้นอยู่กับความถี่ และสภาพยอม ε มีค่าดังนี้ (Collin, 1992)

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu & 0 & j\kappa \\ 0 & \mu_0 & 0 \\ -j\kappa & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

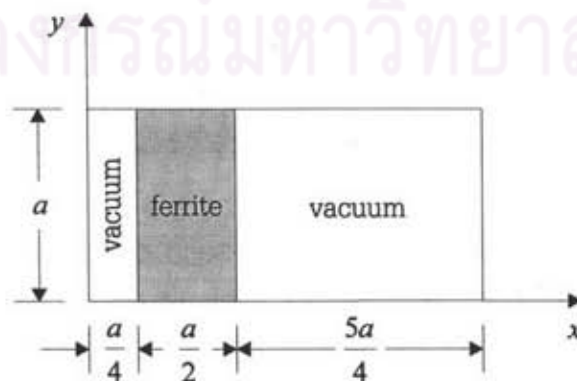
$$\varepsilon = 10\varepsilon_0 \quad (5.44)$$

เมื่อ ε_0 และ μ_0 คือ สภาพยอมและความซึมได้ของอวกาศว่าง ตามลำดับ

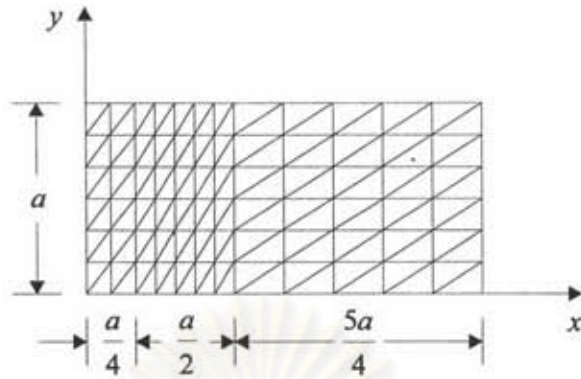
$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (5.45)$$

$$\kappa = \mu_0 \frac{\omega_m \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (5.46)$$

$$\omega_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} a = \omega_m \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} a = 0.5 \quad (5.47)$$

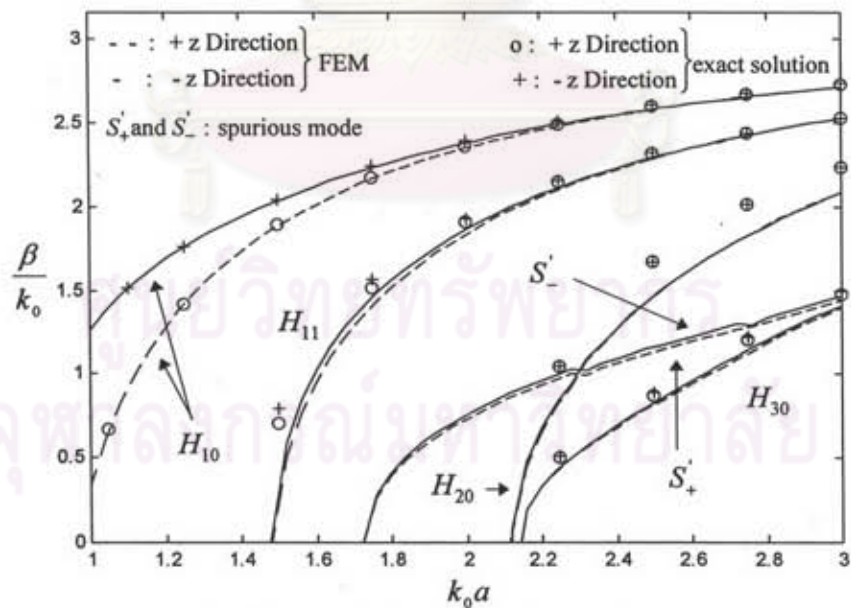


รูป 5.9 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์



รูป 5.10 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น
บรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ออกเป็น 144 อีลีเมนต์ 91 โหนด

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยม ดังแสดงในรูป 5.10 โดยมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 144 และมีจำนวนโหนดเท่ากับ 91 รูป 5.11 แสดงผลการคำนวณกราฟดิสเพอร์ชันของการแพร่กระจายในทิศ +z และ -z เส้นทึบและเส้นประแสดงผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ สัญลักษณ์ + และ x คือผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ (Collin, 1991)



รูป 5.11 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ
ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

จากรูป 5.11 พบว่านอกจากโมดที่ถูกตัดที่ได้แล้ว ยังมีผลเฉลยปลอมเทียม S' ซึ่งแสดงเป็นเส้นประเกิดขึ้นด้วย ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้ทำการตรวจสอบค่าของไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้า $\nabla \cdot E$ ของผลเฉลยปลอมเทียมและ โมดมูลฐาน (H_{10}) ได้ผลดังแสดงในตาราง 5.5 และ 5.6

ตาราง 5.5 ค่าไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้า $\nabla \cdot E$ ของผลเฉลยปลอมเทียม S' ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ $\beta a = 2.239$ ของการแพร่กระจายในทิศ $+z$ ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 5.10 (กำหนดให้ขนาดสูงสุดของสนามไฟฟ้าที่โนดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีค่าเท่ากับ 1)

ผลเฉลย	ค่าไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้า $\nabla \cdot E$					ผลรวมของ $\nabla \cdot E$ จากทุกโนดบนภาคตัดขวาง ของท่อนำคลื่น (ยกเว้นโนด ที่อยู่บนผนังของท่อนำคลื่น)
	ตำแหน่ง y	ตำแหน่ง x				
		$1.0a$	$1.25a$	$1.50a$	$1.75a$	
ผลเฉลย ปลอมเทียม S'	$0.833a$	-3.6891	-2.7810	-1.9350	-1.9928	0.2637
	$0.667a$	2.1335	3.2107	0.8638	2.3377	
	$0.50a$	-2.7113	-1.9482	-1.3679	-1.6018	
	$0.333a$	1.6550	2.0422	0.8593	1.6576	
	$0.167a$	-1.9731	-1.3940	-1.1357	-1.2004	

ตาราง 5.6 ค่าไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้า $\nabla \cdot E$ ของโมดมูลฐาน (H_{10}) ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ $\beta a = 2.239$ ของการแพร่กระจายในทิศ $+z$ ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 5.10 (กำหนดให้ขนาดสูงสุดของสนามไฟฟ้าที่โนดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีค่าเท่ากับ 1)

ผลเฉลย	ค่าไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้า $\nabla \cdot E$					ผลรวมของ $\nabla \cdot E$ จากทุกโนดบนภาคตัดขวาง ของท่อนำคลื่น (ยกเว้นโนด ที่อยู่บนผนังของท่อนำคลื่น)
	ตำแหน่ง y	ตำแหน่ง x				
		$1.0a$	$1.25a$	$1.50a$	$1.75a$	
โมด H_{10}	$0.833a$	0.0163	0.0172	-0.0149	0.0284	-0.2920
	$0.667a$	0.0056	-0.0098	0.0045	-0.0291	
	$0.50a$	-0.0237	0.0238	-0.0041	0.0435	
	$0.333a$	0.0165	-0.0222	-0.0116	-0.0393	
	$0.167a$	-0.0081	0.0405	0.0116	0.0401	

เช่นเดียวกับในกรณีของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก จากข้อมูลที่ได้ในตาราง 5.5 แสดงให้เห็นว่า ค่าของไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้า ($\nabla \cdot \mathbf{E}$) ของผลเฉลยป्लอมเทียม S' ที่บางตำแหน่งบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีค่าต่างจากที่ได้จากโมดมูลฐานมาก เช่นที่ตำแหน่ง $x = 0.667a$, $y = 1.25a$ ค่าของ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ มีค่าเท่ากับ 3.2107 เทียบกับ -0.0098 ที่ได้จากโมดมูลฐาน ซึ่งแสดงว่าค่าของ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ของ S' ไม่สอดคล้องกับสมการ (5.25) แม้ว่าเงื่อนไขนี้ได้ถูกบังคับให้กับสมการระบบตามแนวทางที่ได้กล่าวมาแล้ว เมื่อพิจารณาตัวอย่างของ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ จากข้อมูลที่ได้ที่ตำแหน่งต่างๆพบว่า ค่าของ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่เกิดขึ้นนี้ จะถูกชดเชยกับ ค่าของ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่อยู่ใกล้เคียงกัน ซึ่งเมื่อทำการรวมทุกอัสซิเมนต์ประกอบเป็นทั้งโดเมนพบว่า ค่าของ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ที่ได้มีค่าอยู่ในอันดับเดียวกับที่ได้จากโมดมูลฐานที่สอดคล้องกับสมการ (5.25) (ดังแสดงในตาราง 5.6) จากที่กล่าวมาแสดงให้เห็นว่า ถึงแม้ว่าเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ว่างของความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าได้รับการบังคับให้กับสมการของระบบแล้วก็ตาม ผลเฉลยป्लอมเทียมยังสามารถเกิดขึ้นได้

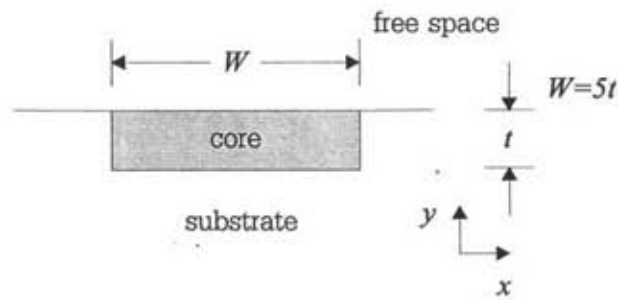
จากรูป 5.11 พบว่าผลเฉลยป्लอมเทียมทั้ง S'_+ และ S'_- ที่เกิดขึ้นนี้จะไม่ได้อยู่ในแนวขนานกับแกนความถี่ $k_0 a$ ดังเช่น S' ที่เกิดขึ้นในกรณีของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก ผลเฉลยที่เกิดขึ้นนี้ไม่สามารถแยกแยะกับโมดที่ต้องการได้โดยง่าย โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับปัญหาที่ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงจากวิธีเชิงวิเคราะห์ได้ จึงทำให้วิธีไฟไนต์อัสซิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบที่เสนอโดย Hayata และคณะ (1989) ไม่สามารถใช้วิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่เทนเซอร์ความซัพซิมได้ $[\mu]$ อยู่ในรูปดังสมการ

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & \mu_{xz} \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

ได้

4. ท่อนำแสงแบบฝังในฉัปลสเตรท

สำหรับกรณีของท่อนำแสงแบบฝังในฉัปลสเตรท ที่ประกอบด้วยแกนฝังในฉัปลสเตรทและด้านบนของแกนเป็นอวกาศว่าง ดังแสดงในรูป 5.12 พบว่า วิธีนี้ไม่สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นดังกล่าวนี้ได้ เนื่องจากไม่สามารถให้เงื่อนไขขอบเขตสำหรับสนามไฟฟ้าที่อยู่บนรอยต่อระหว่างตัวกลางที่มีความไม่ต่อเนื่องของสภาพยอม ϵ ทั้งในแนว x และ y ได้



รูป 5.12 ภาคตัดขวางของท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรท

สรุป

ผลจากการตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ ที่เสนอโดย Hayata และคณะ (1989) สามารถได้สรุปดังนี้

1. ในปัญหาท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กทริกพบว่า วิธีนี้สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ได้
2. ในปัญหาท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือ ท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม พบว่าวิธีนี้สามารถใช้วิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้งได้
3. ในปัญหาท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่แทนเซอร์ความขบขี้มได้ $[\mu]$ อยู่ในรูปของ

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & \mu_{xz} \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}$$

ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือ ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ที่มีการไบแอสสนามแม่เหล็กสถิตในแนวตามขวางของท่อนำคลื่น พบว่าวิธีนี้ไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหานี้ได้ เนื่องจากเกิดผลเฉลยปลอมเทียมที่ไม่สามารถแยกแยะกับโหมดที่ถูกต้องได้

4. ในปัญหาท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้า ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือ ท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรท พบว่าวิธีนี้ไม่สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวนี้ได้ เนื่องจากไม่สามารถทำการให้เงื่อนไขขอบเขตของสนามไฟฟ้าที่อยู่บนรอยต่อระหว่างตัวกลางที่มีความไม่ต่อเนื่องของสภาพพยอม ϵ ทั้งในแนว x และ y ได้