

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ

ความนำ

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ได้ถูกเสนอขึ้นโดย Koshiba และคณะ ใน ค.ศ. 1985 ขั้นตอนของวิธีนี้เริ่มจากการจัดรูปฟังก์ชันนอลซึ่งมีคุณสมบัติเป็นนิพจน์แปรผันของสมการคลื่นในรูปของสนามไฟฟ้า และให้คำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าในแต่ละอีลีเมนต์อยู่ในรูปของสนามไฟฟ้าที่โนดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากการพิจารณาจุดต่ำสุดของนิพจน์แปรผัน ซึ่งจากผลเฉลยที่ได้รับพบว่า นอกจากผลเฉลยที่ถูกต้องแล้วจะมีผลเฉลยปลอมเทียมปลอมเทียมปรากฏออกมาด้วย ผลเฉลยปลอมเทียมดังกล่าวนี้มีคุณลักษณะคือความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าจะไม่สอดคล้องกับกฎของเกาส์ หรือเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเป็นศูนย์

Koshiba และคณะ (1985ข) ได้เสนอวิธีการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้น โดยเพิ่มฟังก์ชันนอลที่อยู่ในรูปของไดเวอร์เจนซ์ของความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าที่เรียกว่าพจน์พินอลติ ให้กับนิพจน์แปรผันเดิม ผลจากการเพิ่มพจน์พินอลติพบว่า ผลเฉลยปลอมเทียมสามารถกำจัดให้หมดไปได้ในบริเวณช่วงหนึ่ง ซึ่งบริเวณดังกล่าวนี้สามารถควบคุมได้จากสัมประสิทธิ์ที่อยู่ในพจน์พินอลติ

เนื่องจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบที่เสนอโดย Koshiba และคณะ (1985ข) เป็นวิธีที่มีการยอมรับอย่างกว้างขวาง ในบทนี้ผู้เสนอนิพจน์พินอลติจะนำวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบมาศึกษาว่า สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่น 4 ประเภทต่อไปนี้ได้หรือไม่

1. ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์
2. ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง
3. ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่มีเทนเซอร์ความซบซิมได้ $[\mu]$ อยู่ในรูป

ดังนี้

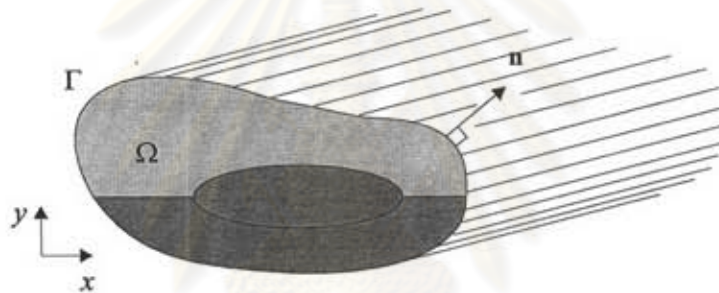
$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & \mu_{xz} \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}$$

4. ท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าที่เทนเซอร์สภาพยอม $[\varepsilon]$ อยู่ในรูปดังนี้

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \text{ และ } [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

นิพจน์แปรผัน

Koshiba และคณะ (1985) ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์ที่ท่อนำคลื่นที่ไม่มีการสูญเสีย และมีภาคตัดขวางรูปทรงใดๆ Ω ในระนาบ xy ดังแสดงในรูป 3.1



รูป 3.1 ท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางรูปทรงใดๆ และมีความสม่ำเสมอในแนวแกน z

ท่อนำคลื่นที่ประกอบไปด้วยตัวกลางที่มีความซับซ้อนได้อยู่ในรูปของเทนเซอร์ $[\mu]$ และสภาพยอม ε อยู่ในรูปสเกลาร์ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เดินทางในท่อนำคลื่นนี้สามารถวิเคราะห์ได้จากสมการคลื่นที่อยู่ในรูปสนามไฟฟ้า \mathbf{E} ดังนี้

$$\nabla \times ([\mu_r]^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = 0 \quad (3.1)$$

เมื่อ $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ คือเวฟนัมเบอร์ของอวกาศว่าง, $[\mu_r]$ และ ε_r คือเทนเซอร์ความซับซ้อนได้สัมพัทธ์และสภาพยอมสัมพัทธ์ของตัวกลาง ตามลำดับ, $[\mu_r]$ และ ε_r สามารถหาได้จากสมการ

$$[\mu_r] = \frac{1}{\mu_0} [\mu] \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0 \quad (3.3)$$

โดยที่ $[\mu]$, ε คือ เทนเซอร์ความขบขี้มได้และสภาพยอมของตัวกลาง, ε_0 และ μ_0 คือสภาพยอม และความขบขี้มได้ของอวกาศว่าง ตามลำดับ

นิพจน์แปรผันของสมการ (3.1) ตามที่ Koshiba และคณะ (1985) เสนอไว้ คือ

$$F(\mathbf{E}) = \iint_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{E})^* \cdot ([\mu_r]^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}] d\Omega \quad (3.4)$$

เมื่อ * คือสังยุคเชิงซ้อน

ผลเฉลย \mathbf{E} ที่สอดคล้องกับสมการ (3.1) และเงื่อนไขขอบเขตของท่อนำคลื่นนี้ จะเป็นฟังก์ชันซึ่งทำให้ค่าของ $F(\mathbf{E})$ ในสมการ (3.4) มีค่าต่ำสุด

เมื่อใช้นิพจน์แปรผันในสมการ (3.4) วิเคราะห์ท่อนำคลื่นพบว่า มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมร่วมกับผลเฉลยที่ถูกต้อง (แสดงตัวอย่างไว้ในส่วนการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก) ซึ่งผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นมีคุณลักษณะคือ ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า (\mathbf{D}) ไม่สอดคล้องกับกฎของเกาส์ หรือเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเป็นศูนย์ $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ และผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นนี้สามารถแยกได้เป็น 2 กลุ่มคือผลเฉลยปลอมเทียม S_1 ที่มีคุณลักษณะสอดคล้องกับสมการ

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} \neq 0 \quad \text{ที่ } k_0^2 = 0 \quad (3.5)$$

และผลเฉลยปลอมเทียม S_2 ที่มีคุณลักษณะสอดคล้องกับสมการ

$$\nabla \times \mathbf{E} \neq 0, \nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} \neq 0 \quad \text{ที่ } k_0^2 > 0 \quad (3.6)$$

เพื่อกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมดังกล่าว Koshiba และคณะ (1985) ได้ปรับปรุงนิพจน์แปรผันตามสมการ (3.4) โดยเพิ่มพจน์ที่อยู่ในรูปความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าให้กับนิพจน์แปรผัน สมการ (3.4) ซึ่งทำให้ได้นิพจน์แปรผัน $\tilde{F}(\mathbf{E})$ ดังนี้

$$\tilde{F}(\mathbf{E}) = F + \frac{P^2}{\varepsilon_r} \iint_{\Omega} (\nabla \cdot \varepsilon_r \mathbf{E})^* (\nabla \cdot \varepsilon_r \mathbf{E}) d\Omega \quad (3.7)$$

โดยที่ $\frac{P^2}{\varepsilon_r} \iint_{\Omega} (\nabla \cdot \varepsilon_r \mathbf{E})^* (\nabla \cdot \varepsilon_r \mathbf{E}) d\Omega$ คือ พจน์พีนอลติ

p คือ สัมประสิทธิ์พีนอลติ เป็นค่าคงที่

นิพจน์แปรผันจากสมการ (3.7) สามารถกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม S_1 และ S_2 ได้ อย่างไรก็ตาม ผลเฉลย S_3 ที่มีคุณลักษณะดังสมการ

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} \neq 0 \quad \text{เมื่อ } k_0^2 > 0 \quad (3.8)$$

สามารถเกิดขึ้นได้ โดยผลเฉลยปลอมเทียม S_3 ที่เกิดขึ้นจะสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\epsilon \mathbf{E} = \nabla \psi \quad (3.9a)$$

$$(p^2 \nabla^2 + k_0^2) \psi = 0 \quad (3.9b)$$

$$\psi = 0 \quad \text{บนตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ } \Gamma_2 \quad (3.9c)$$

$$\partial \psi / \partial n = 0 \quad \text{บนตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ } \Gamma_1 \quad (3.9d)$$

โดยที่ ψ คือ ฟังก์ชันสเกลาร์

เมื่อแทน ψ ในสมการ (3.9) ด้วย E_z พบว่า ผลเฉลยปลอมเทียม S_3 ที่เกิดขึ้นจะสอดคล้องกับ โมดที่เอ็ม (TM mode) ของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ $(1/p)^2$ และ ผลเฉลยปลอมเทียม S_3 นี้จะถูกจำกัดให้อยู่ในช่วง $\beta/k_0 < 1/p$ เท่านั้น

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม และให้คำตอบทดลองของสนามแม่เหล็กในแต่ละอีลีเมนต์อยู่ในรูปของ (Koshiba และคณะ, 1985)

$$\mathbf{E} = [N]^T \{E\}_e \exp(-j\beta z) \quad (3.10)$$

เมื่อ β คือค่าคงตัวเฟส, $[N]$ คือเมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่างของคำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าในทิศ x, y และ z , $\{E\}_e$ คือเมตริกซ์แถวตั้งที่องค์ประกอบคือสนามไฟฟ้าที่โนดของอีลีเมนต์ ในทิศ x, y และ z , T คือตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน

แทนสมการ (3.10) ในสมการ (3.7) และรวมทุกอีลีเมนต์ทั้งหมดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นเข้าด้วยกัน ได้นิพจน์แปรผันที่สามารถเขียนได้ดังสมการ

$$F(\mathbf{E}) = \{E\}^T ([S] + p^2[L] - k_0^2[M])\{E\} \quad (3.11)$$

เมื่อ $\{E\}$ คือสนามไฟฟ้าที่โนดทั้งหมดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น เมตริกซ์ $[S]$, $[L]$ และ $[M]$ เป็นเมตริกซ์เฮอร์มิเชียน (รายละเอียดของเมตริกซ์ $[S]$, $[L]$ และ $[M]$ แสดงไว้ในภาคผนวก ข)

คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากการพิจารณาจุดต่ำสุดของของสมการ (3.11) ซึ่งยังผลให้ได้สมการที่อยู่ในรูปเมตริกซ์เจาะจงที่มี k_0^2 เป็นค่าเจาะจง ดังนี้

$$[S]\{E\} + p^2[L]\{E\} - k_0^2[M]\{E\} = \{0\} \quad (3.12)$$

สมการ (3.12) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐานได้เป็น

$$[M]^{-1}([S] + p^2[L])\{E\} - k_0^2\{E\} = 0 \quad (3.13)$$

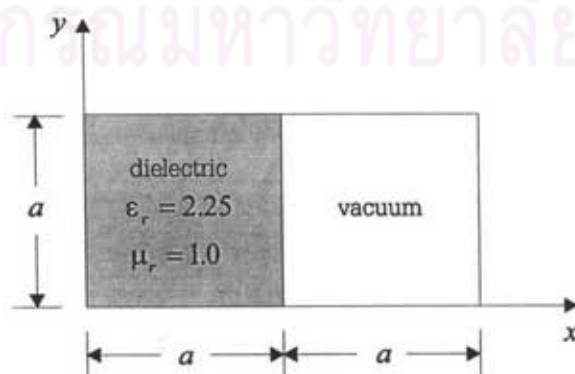
ตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ

เช่นเดียวกับในบทที่ 2 ในส่วนนี้ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จะทำการตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ในปัญหาท่อนำคลื่น 4 ประเภท คือ ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก ท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ และท่อนำแสงแบบฝังในชั้นสเตรท

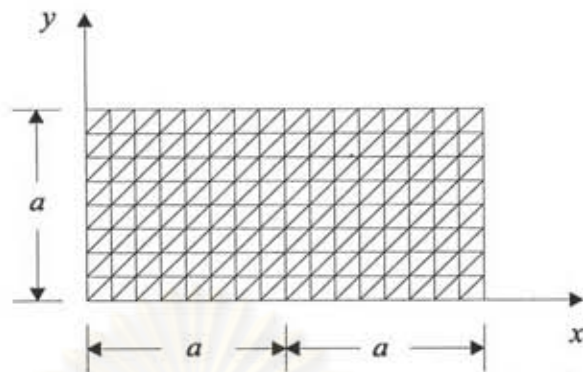
การตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ในตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้นมีรายละเอียดดังนี้

1. ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

พิจารณาท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีขนาดเป็น $2a \times a$ ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบและครึ่งหนึ่งของท่อนำคลื่นถูกบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ ϵ_r และ ความซบซิมได้สัมพัทธ์ μ_r เท่ากับ 2.25 และ 1.0 ตามลำดับ ดังแสดงในรูป 3.2

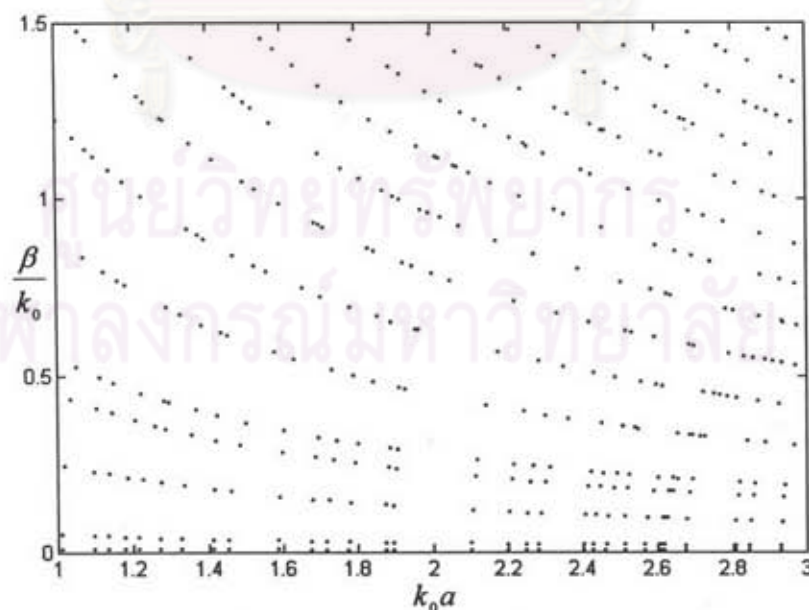


รูป 3.2 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

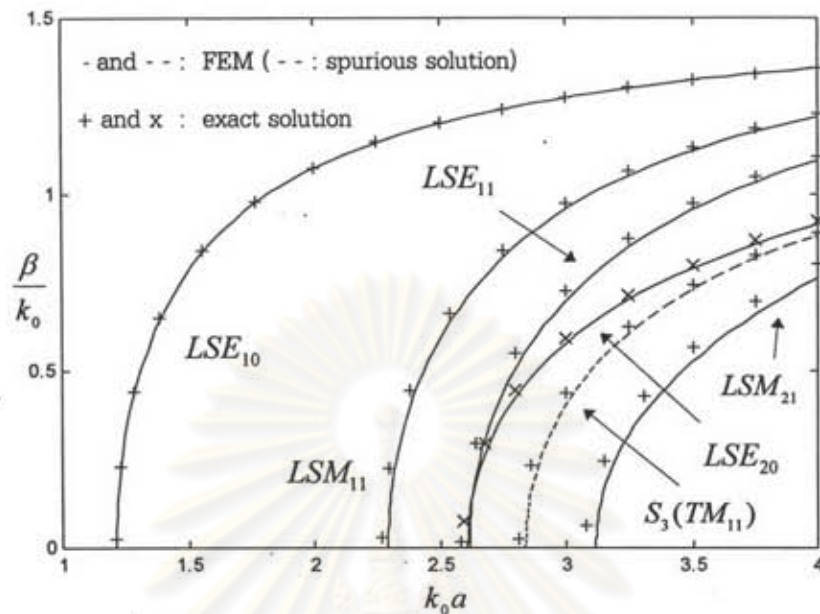


รูป 3.3 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น
บรรจุด้วยไดอิเล็กทริกออกเป็น 256 อีลีเมนต์ 153 โหนด

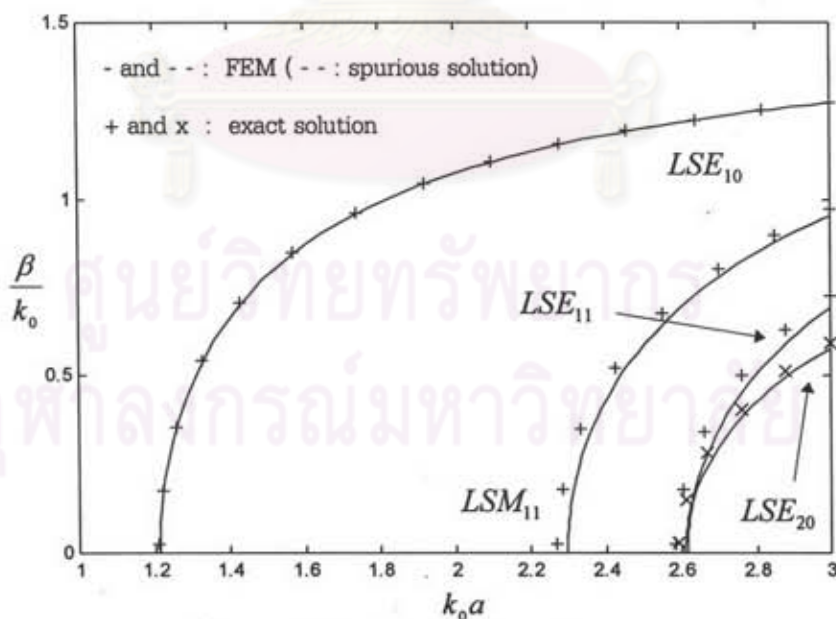
แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยม ดังแสดงในรูป 3.3 โดยมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 256 และมีจำนวนโหนดเท่ากับ 153 รูป 3.4 แสดงผลการคำนวณกราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ โดยปราศจากพจน์พีนอลตี ($p=0$) พบว่าเกิดผลเฉลยปลอมเทียมจำนวนมากจนทำให้ไม่สามารถแยกแยะกับผลเฉลยที่ถูกต้องได้ รูป 3.5 และ 3.6 แสดงผลการคำนวณของกราฟดิสเพอร์ชันโดยใช้สัมประสิทธิ์พีนอลตีเท่ากับ $1/1.25$ ($p=1/1.25$) และ 1 ($p=1$) ตามลำดับ เส้นทึบและเส้นประแสดงผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ สัญลักษณ์ $+$ และ \times คือผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ (Balanis, 1989)



รูป 3.4 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ
ของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อปราศจากพจน์พีนอลตี ($p=0$)



รูป 3.5 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กทริกเมื่อ $p=1/1.25$ เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์



รูป 3.6 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กทริกเมื่อ $p=1$ เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

จากรูป 3.5 พบว่าโมดมูลฐาน (LSE_{10}), LSM_{11} , LSE_{11} และ LSE_{20} สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ส่วนโมด LSM_{21} ต่างจากผลเฉลยแม่นยำไม่มากนัก อย่างไรก็ตามโมดนี้จะมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ให้สูงขึ้น

จากรูป 3.5 นอกจากโมดที่ถูกต้องที่วิเคราะห์ได้แล้ว พบว่ามีผลเฉลยปลอมเทียมซึ่งแสดงเป็นเส้นประออกมาด้วย ผลเฉลยปลอมเทียมดังกล่าวนี้คือ ผลเฉลยปลอมเทียม S_3 ที่สอดคล้องกับสมการ (3.9) และสมมูลกับโมด TM_{11} ของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กทริกที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ $1.25^2 = 1.5625$ ที่มีภาคตัดขวางเท่ากับ โมด TM_{11} มีความถี่ตัดเป็น (Balanis, 1989)

$$k_0 a = p \frac{\sqrt{5}}{2} \pi \quad (3.14a)$$

$$= \left(\frac{1}{1.25}\right) \frac{\sqrt{5}}{2} \pi \approx 2.810 \quad (3.14b)$$

ผลเฉลยปลอมเทียมนี้ปรากฏในบริเวณ $\beta/k_0 < 1.25$ เท่านั้น

รูป 3.6 แสดงผลที่ได้จากการวิเคราะห์โดยใช้สัมประสิทธิ์พินอลติเท่ากับ 1.0 พบว่าโมดมูลฐาน (LSE_{10}) สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ส่วนโมด LSM_{11} , LSE_{11} และ LSE_{20} ต่างจากผลเฉลยแม่นยำไม่มากนัก อย่างไรก็ตามโมดเหล่านี้จะมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ให้สูงขึ้น

จากรูป 3.6 พบว่า ภายในช่วง $k_0 a$ ตั้งแต่ 1.0 ถึง 3.0 ไม่มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมเนื่องจากผลเฉลยปลอมเทียม S_3 ที่สมมูลกับโมด TM_{11} ของท่อนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางเท่ากับ โมด TM_{11} มีความถี่ตัดที่ $k_0 a = \sqrt{5}\pi/2 \approx 3.512$

เช่นเดียวกับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ บริเวณที่เกิดผลเฉลยปลอมเทียม S_3 สามารถกำหนดได้จากสัมประสิทธิ์พินอลติกล่าวคือ บริเวณที่เกิดผลเฉลยปลอมเทียม S_3 จะแคบลงเมื่อสัมประสิทธิ์พินอลติมีค่าสูงขึ้น แต่การเพิ่มสัมประสิทธิ์พินอลติให้สูงขึ้น ทำให้ความแม่นยำของผลเฉลยที่ได้ลดลงไปด้วย ตัวอย่างของค่า β/k_0 และขนาดความผิดพลาดที่ $k_0 a = 3.0$ จากโมดมูลฐาน (LSE_{10}), LSM_{11} , LSE_{11} และ LSM_{20} ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 3.3 โดยที่สัมประสิทธิ์พินอลติเท่ากับ 1 และ 1/0.75 ตามลำดับ แสดงในตาราง 3.1

ตาราง 3.1 ตัวอย่างของค่า β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และวิธีเชิงวิเคราะห์ รวมขนาดความผิดพลาด เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 3.3 โดยที่สัมประสิทธิ์พินอลดี เท่ากับ 1 และ 1/0.75

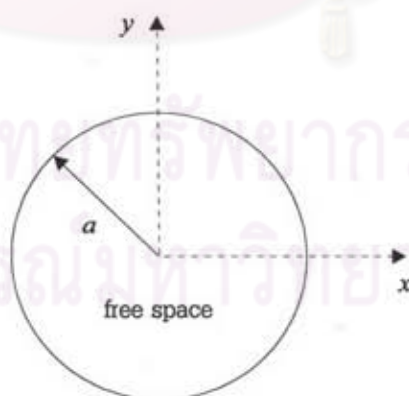
โมด	ผลเฉลยแม่นยำตรงของ β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$	β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ จาก วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์		ขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ จาก วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	
		$p=1$	$p=1/0.75$	$p=1$	$p=1/0.75$
LSE_{10}	1.275756	1.273979	1.273977	0.1393 %	0.1394 %
LSM_{11}	0.971538	0.953976	0.948868	1.808 %	2.333 %
LSE_{11}	0.728649	0.693969	0.685617	4.760 %	5.906 %
LSE_{20}	0.593897	0.579794	0.579768	2.375 %	2.379 %

จากรูป 3.5 และ 3.6 แสดงให้เห็นว่า ไม่มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียม S_4 ในกราฟ ดิสเพอร์ชัน ดังเช่นที่เกิดขึ้นในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ

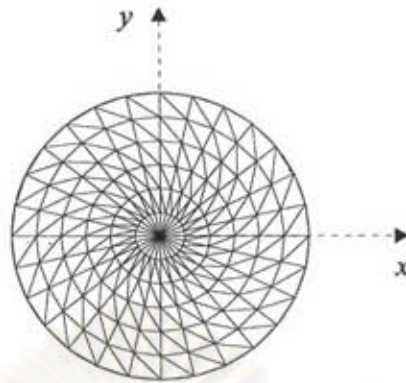
จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบที่เสนอ โดย Koshiba และคณะ (1985) สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบไม่เอกพันธ์ได้

2. ท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

พิจารณาท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ a ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้า สมบูรณ์แบบ ภายในเป็นอวกาศว่าง ดังแสดงในรูป 3.7



รูป 3.7 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น

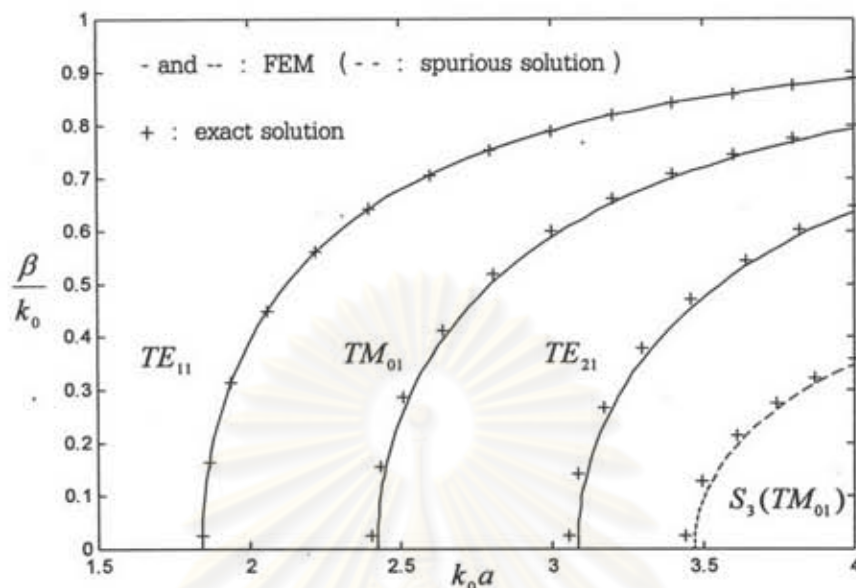


รูป 3.8 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น
ออกเป็น 308 อีลีเมนต์ 169 โหนด

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยม โดยมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 308 มีจำนวน โหนดเท่ากับ 169 ดังแสดงในรูป 3.8 ผลการคำนวณของกราฟดิสเพอร์ชันแสดงในรูป 3.9 เส้นทึบและเส้นประแสดงผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เมื่อ $p=1/0.7$ สัญลักษณ์ + คือผลเฉลยแม่นยำที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ (Balanis, 1989)

จากรูป 3.9 พบว่าโหมดมูลฐาน TE_{11} สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ส่วนโหมด TM_{01} และ TE_{21} ต่างจากผลเฉลยแม่นยำไม่มากนัก อย่างไรก็ตามโหมดเหล่านี้จะมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำมากขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ให้สูงขึ้น ตัวอย่างการเปรียบเทียบของค่า β/k_0 ที่ $k_0 a = 4.0$ ของโหมดมูลฐาน (TE_{11}), TM_{01} และโหมด TE_{21} ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีเชิงวิเคราะห์ เมื่อแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 3.8 โดยที่สัมประสิทธิ์พินอลดีเท่ากับ $1/0.70$ แสดงในตาราง 3.2

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูป 3.9 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ ของท่อนำคลื่นกลวง ที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมเมื่อ $p = 1/0.70$ เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

ตาราง 3.2 ตัวอย่างของค่า β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ และวิธีเชิงวิเคราะห์ รวมขนาดความผิดพลาด เมื่อทำการแบ่งอีลิเมนต์ดังแสดงในรูป 3.8 โดยที่สัมประสิทธิ์พินอลดี เท่ากับ $1/0.70$

โหมด	ผลเฉลยแม่นยำตรง ของ β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$	β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์	ขนาดความผิดพลาด β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์
TE_{11}	0.887766	0.887649	0.013 %
TM_{01}	0.799094	0.793403	0.712 %
TE_{21}	0.645738	0.637040	1.347 %

นอกจากโหมดที่ถูกต้องที่วิเคราะห์ได้แล้ว พบว่ามีผลเฉลยปลอมเทียมซึ่งแสดงเป็นเส้นประออกมาด้วย ผลเฉลยปลอมเทียมดังกล่าวนี้คือ ผลเฉลยปลอมเทียม S_3 ที่สอดคล้องกับสมการ (3.9) และสมมูลกับโหมด TM_{01} ของท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมและบรรจด้วยไดอิเล็กทริกที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 0.70^2 โหมด TM_{01} มีความถี่ตัดเป็น (Balanis, 1989)

$$k_0 a = p x_{m,n} \quad (3.15a)$$

$$= \left(\frac{1}{0.70}\right) 2.4049 \approx 3.436 \quad (3.15b)$$

เมื่อ $x_{m,n}$ ($n=1,2,3,\dots$) คือค่าที่ทำให้

$$J_m(x_{m,n}) = 0 \quad (3.16)$$

โดยที่ $J_m(\cdot)$ คือฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ m

ผลเฉลยปลอมเทียบนี้ปรากฏในบริเวณ $\beta/k_0 < 0.70$ เท่านั้น

จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบที่เสนอ โดย Koshiba และคณะ (1985) สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้งได้

3. ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์

เมื่อพิจารณานิพจน์แปรผันตามสมการ (3.7) พบว่า นิพจน์แปรผันนี้ไม่สามารถใช้วิเคราะห์ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ซึ่งเป็นท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟได้ เนื่องจากอยู่ในรูปของ E และ k_0 และที่จุดต่ำสุดจะให้ k_0^2 เป็นคำตอบเมื่อระบุค่าคงตัวเฟส β สำหรับกรณีนี้ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้ปรับปรุงนิพจน์แปรผันตามขั้นตอนต่อไปนี้

3.1 การปรับปรุงนิพจน์แปรผันสำหรับท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟ

เพื่อให้ให้นิพจน์แปรผันนี้สามารถใช้วิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟได้ ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้ปรับปรุงนิพจน์แปรผันสมการ (3.7) ให้อยู่ในรูปของ E และ β

เริ่มจากนิพจน์แปรผันในสมการ (3.7) จัดรูปนิพจน์แปรผันนี้ให้อยู่ในรูปของ β ผลที่ได้คือ

$$\bar{F}(E, \beta) = \{E\}^T (\beta^2 [C^2] + \beta [C^1] + [C^0]) \{E\} \quad (3.17)$$

(รายละเอียดของเมตริกซ์ $[C^2]$, $[C^1]$ และ $[C^0]$ แสดงในภาคผนวก ข)

คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถทำได้จากการพิจารณาจุดต่ำสุดของสมการ (3.17) ซึ่งยังผลให้ได้สมการที่อยู่ในรูปเมตริกซ์เจาะจงมาตรฐานดังนี้

$$[C] \{\psi_2\} - \beta \{\psi_2\} = \{0\} \quad (3.18)$$

เมื่อ
$$[C] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [C_{21}] & [C_{22}] \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$[I]$ คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ (unit matrix)

$$[C_{21}] = -[C^2]^{-1}[C^0] \quad (3.20)$$

$$[C_{22}] = -[C^2]^{-1}[C^1] \quad (3.21)$$

$$\{\psi_2\} = \begin{bmatrix} \{E\} \\ \beta \{E\} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

จากสมการ (3.18) พบว่าสมการนี้ต้องใช้จำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าประมาณ $6N_p$ เทียบกับสมการ (3.13) ที่ใช้เพียงประมาณ $3N_p$ เท่านั้น (N_p คือจำนวนโนดทั้งหมดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น)

3.2 ผลการวิเคราะห์

พิจารณาท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ซึ่งเป็นอุปกรณ์ทางไมโครเวฟที่มีคุณสมบัติไร้ภาวะย้อนกลับ (nonreciprocal) ที่มีโครงสร้างดังแสดงในรูป 3.10 โดยเฟอร์ไรต์บรรจุในท่อนำคลื่นในลักษณะไม่สมมาตร และได้รับการไบแอสด้วยสนามแม่เหล็กสถิตในแนว y เทนเซอร์ความซบซิมได้ $[\mu]$ ซึ่งขึ้นอยู่กับความถี่ และสภาพยอม ε มีค่าดังนี้ (Collin, 1992)

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu & 0 & j\kappa \\ 0 & \mu_0 & 0 \\ -j\kappa & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

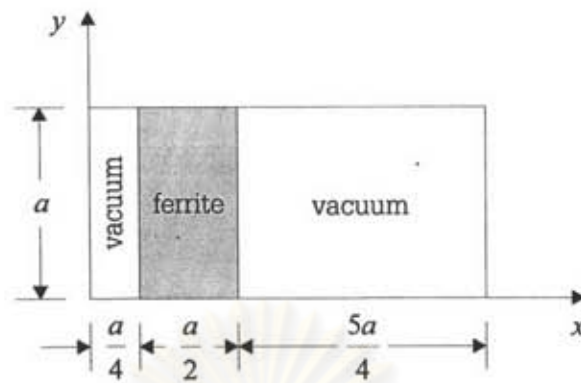
$$\varepsilon = 10\varepsilon_0 \quad (3.24)$$

เมื่อ ε_0 , μ_0 คือสภาพยอม และความซบซิมได้ของอวกาศว่าง ตามลำดับ

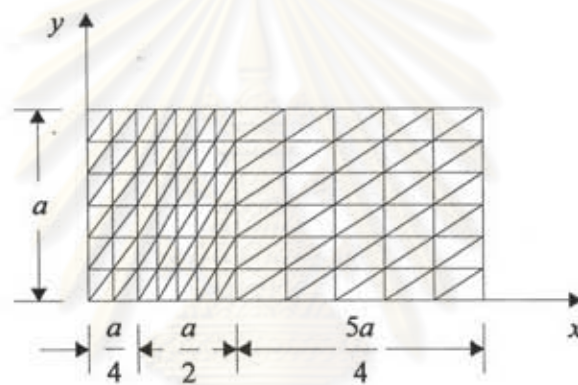
$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (3.25)$$

$$\kappa = \mu_0 \frac{\omega_m \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.26)$$

$$\omega_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} a = \omega_m \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} a = 0.5 \quad (3.27)$$

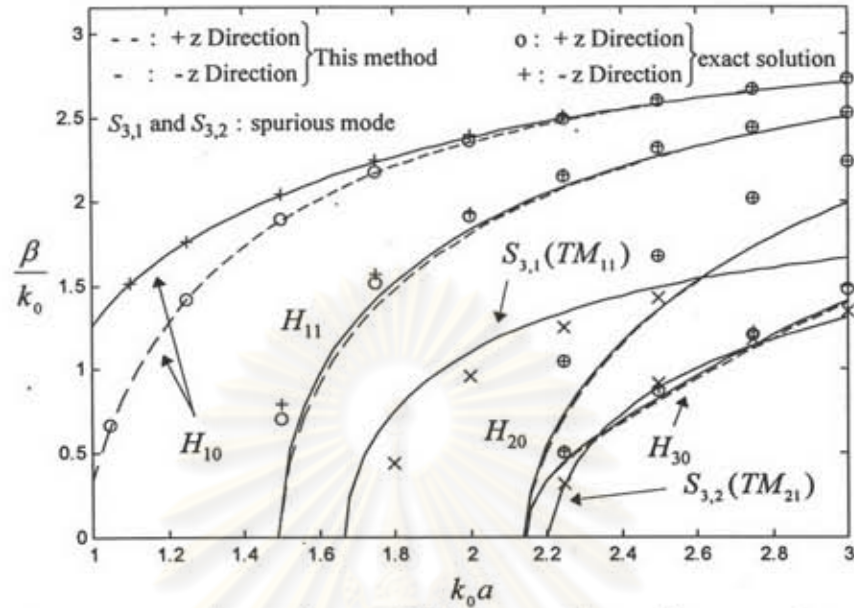


รูป 3.10 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์



รูป 3.11 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น
บรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ออกเป็น 144 อีลีเมนต์ 91 โหนด

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยม ดังแสดงในรูป 3.11 โดยมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 144 และมีจำนวนโหนดเท่ากับ 91 ผลการคำนวณกราฟดิสเพอร์ชันแสดงได้ดังรูป 3.12 เมื่อใช้สัมประสิทธิ์พื้นนอลติเท่ากับ $1/2$ ในที่นี้กราฟของการแพร่กระจายในทิศ $+z$ และ $-z$ แสดงด้วยเส้นประและเส้นทึบ ตามลำดับ (เมื่อ $S_{3,1}$ และ $S_{3,2}$ คือผลเฉลยปลอมเทียม) สัญลักษณ์ $+$, o และ \times คือผลเฉลยแม่นยำที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ (Collin, 1991) ตัวอย่างการเปรียบเทียบของค่า β/k_0 ที่ $k_0 a = 3.0$ ของโหมดมูลฐาน (H_{10}) และ H_{11} ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีเชิงวิเคราะห์ เมื่อแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 3.11 โดยที่สัมประสิทธิ์พื้นนอลติเท่ากับ $1/2$ ($p = 1/2$) แสดงในตาราง 3.3



รูป 3.12 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ เมื่อ $p = 1/2$ เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

ตาราง 3.3 ตัวอย่างของค่า β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีเชิงวิเคราะห์ รวมขนาดความผิดพลาด เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 3.14 โดยที่สัมประสิทธิ์พื้นอลดีเท่ากับ $1/2$

ทิศการแพร่กระจาย	โหมด	ผลเฉลยแม่นยำตรงของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$	β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	ขนาดความผิดพลาด β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์
+z	H_{10}	2.733965	2.715961	0.659 %
	H_{11}	2.524651	2.506929	0.702 %
-z	H_{10}	2.736537	2.713006	0.860 %
	H_{11}	2.527221	2.505065	0.877 %

จากรูป 3.12 พบว่าโหมดมูลฐานของการแพร่กระจายในทิศ +z และ -z สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ส่วนโหมดที่สูงกว่าโหมดมูลฐานต่างจากผลเฉลยแม่นยำตรง อย่างไรก็ตามโหมดเหล่านี้จะมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ให้สูงขึ้น

จากรูป 3.12 นอกจากโหมดที่ถูกตัดทอนที่วิเคราะห์ได้แล้ว พบว่ามีผลเฉลยปลอมเทียม $S_{3,1}$ และ $S_{3,2}$ ออกมาด้วย ผลเฉลยปลอมเทียมทั้งสองนี้สอดคล้องกับสมการ (3.9) โดยผลเฉลยปลอมเทียม $S_{3,2}$ สมมูล

กับโหมด $TM_{2,1}$ ของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กทริกที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ $2^2 = 4$ ที่มีภาคตัดขวางเท่ากัน โดยโหมด $TM_{2,1}$ มีความถี่ตัดเป็น (Balanis, 1989)

$$k_0 a = p\sqrt{2}\pi \quad (3.28a)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \approx 2.221 \quad (3.28b)$$

ผลเฉลยปลอมเทียม $S_{3,1}$ จะสมมูลกับโหมด $TM_{1,1}$ ของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กทริกที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 4 ที่มีภาคตัดขวางเท่ากัน โดยโหมด $TM_{1,1}$ มีความถี่ตัดดังนี้

$$k_0 a = p \frac{\sqrt{5}}{2} \pi \quad (3.29a)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{5}}{2} \pi \approx 1.756 \quad (3.29b)$$

เมื่อพิจารณารูป 3.12 พบว่าผลเฉลยปลอมเทียม $S_{3,1}$ ไม่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากนักในช่วงประมาณ $k_0 a = 1.7$ ถึง $k_0 a = 2.2$ ผลเฉลยปลอมเทียม $S_{3,1}$ และ $S_{3,2}$ นี้ปรากฏในบริเวณ

$$\beta/k_0 < 2 \text{ เท่านั้น}$$

จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า เมื่อทำการปรับปรุงตามขั้นตอนที่ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้เสนอไว้ข้างต้น ทำให้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบที่เสนอโดย Koshiba และคณะ (1985) สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่มีเทนเซอร์ความขابซึมได้อยู่ในรูปแบบเทนเซอร์ตั้งสมการ

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & \mu_{xz} \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

ได้

2. ท่อนำแสงแบบฝังในฉนวน

เมื่อพิจารณานิพจน์แปรผันในสมการ (3.7) ซึ่งเป็นผลรวมของนิพจน์แปรผันของสมการคลื่นที่อยู่ในรูปสนามไฟฟ้าและพจน์พินอลติที่ใช้ในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม พบว่านิพจน์แปรผันสมการ (3.7) ไม่สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแสงแบบฝังในฉนวนที่มีสภาพยอมอยู่ในรูปเทนเซอร์ $[\epsilon]$ ได้ เนื่องจาก ϵ_r ที่อยู่ในพจน์พินอลติ $F_p(\mathbf{E})$

$$F_p(\mathbf{E}) = \frac{P^2}{\varepsilon_r} \iint_{\Omega} (\nabla \cdot \varepsilon_r \mathbf{E})^* (\nabla \cdot \varepsilon_r \mathbf{E}) d\Omega \quad (3.31)$$

ต้องอยู่ในรูปสเกลาร์เท่านั้น

สรุป

ผลจากการตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ที่หอนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบที่เสนอโดย Koshiba และคณะ (1985) สามารถสรุปได้ดังนี้

1. ในปัญหาหอนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือหอนำคลื่นบรรจด้วยไดอิเล็กทริกพบว่า วิธีนี้สามารถวิเคราะห์หอนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธ์ได้
2. ในปัญหาหอนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือหอนำคลื่นกลางที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม พบว่าวิธีนี้สามารถวิเคราะห์หอนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้งได้
3. ในปัญหาหอนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่แทนเซอร์ความซับซ้อนได้ $[\mu]$ อยู่ในรูปของ

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & \mu_{xz} \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}$$

ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือหอนำคลื่นบรรจด้วยเฟอร์ไรต์ที่มีการไบแอสสนามแม่เหล็กสถิตในแนวตามขวางของหอนำคลื่น พบว่าวิธีนี้ไม่สามารถวิเคราะห์หอนำคลื่นในกรณีนี้ได้โดยตรง ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จึงได้ทำการปรับปรุงเพิ่มเติม ซึ่งผลของการปรับปรุงดังกล่าวทำให้วิธีนี้สามารถวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวข้างต้นได้

3. ในปัญหาหอนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าที่แทนเซอร์สภาพยอม $[\varepsilon]$ อยู่ในรูปของ

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \text{ และ } [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

พบว่าวิธีนี้ไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวนี้ได้ เนื่องจากสภาพยอมสัมพันธ์ในพจน์ที่นอกสี่ต้องเป็นสเกลาร์เท่านั้น ไม่สามารถใช้กับสภาพยอมที่อยู่ในรูปเทนเซอร์ได้