บทที่ 2

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ให้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ

ความนำ

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ได้เสนอขึ้นโดย Koshiba และคณะ ใน ค.ศ. 1985 ขั้นตอนของวิธีนี้เริ่มจากการจัดรูปฟังก์ชันนอลซึ่งมีคุณสมบัติเป็นนิพจน์แปรผันของสมการคลื่นในรูปของสนามแม่เหล็ก และให้คำตอบทดลองของสนามแม่เหล็กในแต่ละอีลีเมนต์อยู่ในรูปของสนามแม่เหล็กที่โนดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากจุดต่ำสุดของนิพจน์แปรผัน ซึ่งจากผลเฉลยที่ได้รับพบว่า นอกจากผลเฉลยที่ถูกต้องแล้วจะมีผลเฉลยปลอมเทียมปรากฏออกมาด้วย ผลเฉลยปลอมเทียมดังกล่าวนี้มีคุณลักษณะคือความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็กจะไม่สอดคล้องกับกฎของเกาส์ (Gauss's law) หรือเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเท่ากับศูนย์ (divergence free condition)

Koshiba และคณะ (1985ก) ได้เสนอวิธีการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้น โดยเพิ่มฟังก์ชันนอลที่อยู่ในรูปของไดเวอร์เจนซ์ของความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็กที่เรียกว่าพจน์พีนอลตี (penalty term) ให้กับนิพจน์แปรผันเดิม ผลจากการเพิ่มพจน์พีนอลตีพบว่าผลเฉลยปลอมเทียมสามารถกำจัดให้หมดไปได้ในบริเวณช่วงหนึ่ง ซึ่งบริเวณดังกล่าวนี้สามารถควบคุมได้จากสัมประสิทธิ์ที่อยู่ในพจน์พีนอลตี

เนื่องจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบที่เสนอโดย Koshiba และคณะ (1985ก) นี้ เป็นวิธีที่มีการยอมรับอย่างกว้างขวาง ในบทนี้ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จะนำวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบมาศึกษาว่า สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่น 4 ประเภทต่อไปนี้ได้หรือไม่

1. ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธุ์
2. ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง
3. ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่มีเทนเซอร์ความซาบซึมได้ $[\mu]$ อยู่ในรูปดังนี้

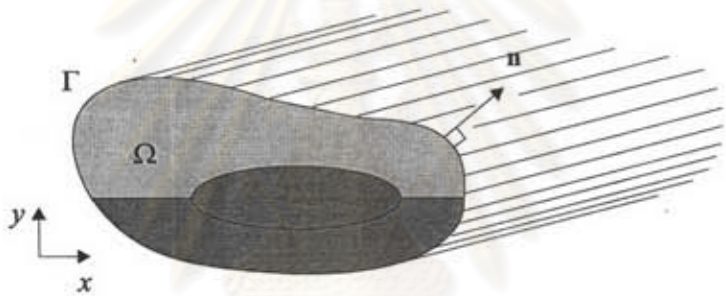
$$[\mu]=\begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & \mu_{xz} \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}$$

4. ท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าที่มีเทนเซอร์สภาพยอม $[\varepsilon]$ อยู่ในรูปดังนี้

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \text{ และ } [\varepsilon]=\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

นิพจน์แปรผัน (Variational Expression)

Koshiba และคณะ (1985ก) ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่ไม่มีการสูญเสีย และมีภาคตัดขวางรูปทรงใดๆ Ω ในระนาบ xy ดังแสดงในรูป 2.1



รูป 2.1 แสดงท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางรูปทรงใดๆ และมีความสม่ำเสมอในแนวแกน z

ท่อนำคลื่นประกอบไปด้วยตัวกลางที่มีค่าสภาพยอมอยู่ในรูปของเทนเซอร์ $[\varepsilon]$ และความซาบซึมได้ μ อยู่ในรูปสเกลาร์ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เดินทางในท่อนำคลื่นสามารถวิเคราะห์ได้จากสมการคลื่นที่อยู่ในรูปสนามแม่เหล็ก $\mathbf{H}$ ดังนี้

$$\nabla\times([\varepsilon_r]^{-1}\nabla\times\mathbf{H})-k_0^2\mu_r\mathbf{H}=0 \qquad (2.1)$$

เมื่อ $k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ คือเวฟนัมเบอร์ของอวกาศว่าง, $[\varepsilon_r]$ และ μ_r คือเทนเซอร์สภาพยอมสัมพัทธ์และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ของตัวกลาง ตามลำดับ, $[\varepsilon_r]$ และ μ_r สามารถหาได้จากสมการ

$$[\varepsilon_r]=\frac{1}{\varepsilon_0}[\varepsilon] \qquad (2.2)$$

$$\mu_r=\mu/\mu_0 \qquad (2.3)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดยที่ $[\varepsilon]$, μ คือ เทนเซอร์สภาพยอมและความซาบซึมได้ของตัวกลาง, ε_0 และ μ_0 คือสภาพยอม และความซาบซึมได้ของอวกาศว่าง ตามลำดับ

นิพจน์แปรผันของสมการ (2.1) ตามที่ Koshiba และคณะ (1985ก) เสนอไว้คือ

$$F(\mathbf{H}) = \iint_{\Omega}[(\nabla \times \mathbf{H})^* \cdot ([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) - k_0^2 \mu_r \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}]d\Omega \qquad (2.4)$$

เมื่อ * คือสังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate)

ผลเฉลย $\mathbf{H}$ ที่สอดคล้องกับสมการ (2.1) และเงื่อนไขขอบเขตของท่อนำคลื่นนี้ เป็นฟังก์ชันซึ่งทำให้ค่าของ $F(\mathbf{H})$ ในสมการ (2.4) มีค่าต่ำสุด

เมื่อใช้นิพจน์แปรผันในสมการ (2.4) วิเคราะห์ท่อนำคลื่นพบว่า มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมร่วมกับผลเฉลยที่ถูกต้อง (แสดงตัวอย่างไว้ในส่วนการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก) ซึ่งผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นมีคุณลักษณะคือ ความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก ($\mathbf{B}$) ไม่สอดคล้องกับกฎของเกาส์ หรือเงื่อนไขไดเวอร์เจนซ์ต้องเป็นศูนย์ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ และผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้นนี้สามารถแยกได้เป็น 2 กลุ่ม คือผลเฉลยปลอมเทียม S_1 ที่มีคุณลักษณะสอดคล้องกับสมการ

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0,\ \nabla \cdot \mu\mathbf{H} \neq 0 \quad \text{ที่} \quad k_0^2 = 0 \qquad (2.5)$$

และผลเฉลยปลอมเทียม S_2 ที่มีคุณลักษณะสอดคล้องกับสมการ

$$\nabla \times \mathbf{H} \neq 0,\ \nabla \cdot \mu\mathbf{H} \neq 0 \quad \text{ที่} \quad k_0^2 > 0 \qquad (2.6)$$

เพื่อที่กำจัดผลเฉลยปลอมเทียมดังกล่าวนี้ Koshiba และคณะ (1985ก) ได้ทำการปรับปรุงนิพจน์แปรผันตามสมการ (2.4) โดยเพิ่มพจน์ที่อยู่ในรูปความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็กให้กับนิพจน์แปรผันตามสมการ (2.4) ซึ่งทำให้ได้นิพจน์แปรผัน $\bar{F}(\mathbf{H})$ ดังนี้

$$\bar{F}(\mathbf{H}) = F + \frac{p^2}{\mu_r}\iint_{\Omega}(\nabla \cdot \mu_r\mathbf{H})^*(\nabla \cdot \mu_r\mathbf{H})d\Omega \qquad (2.7)$$

โดยที่ $\dfrac{p^2}{\mu_r}\iint_{\Omega}(\nabla \cdot \mu_r\mathbf{H})^*(\nabla \cdot \mu_r\mathbf{H})d\Omega$ คือ พจน์พีนอลตี

p คือ สัมประสิทธิ์พีนอลตี เป็นค่าคงที่

นิพจน์แปรผันจากสมการ (2.7) สามารถกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม S_1 และ S_2 ได้ อย่างไรก็ตาม ผลเฉลย S_3 ที่มีคุณลักษณะดังสมการ

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \ , \ \nabla \cdot \mu\mathbf{H} \neq 0 \text{ เมื่อ } k_0^2 > 0 \qquad (2.8)$$

สามารถเกิดขึ้นได้ โดยผลเฉลยปลอมเทียม S_3 ที่เกิดขึ้นสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\mu H_z = \nabla\phi \qquad (2.9a)$$

$$(p^2\nabla^2 + k_0^2)\phi = 0 \qquad (2.9b)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ บนตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ (perfect electric conductor) } \Gamma_2 \qquad (2.9c)$$

$$\phi = 0 \quad \text{บนตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ (perfect magnetic conductor) } \Gamma_1 \qquad (2.9d)$$

โดยที่ ϕ คือ ฟังก์ชันสเกลาร์ (scalar function)

เมื่อแทน ϕ ในสมการ (2.9) ด้วย H_z พบว่า ผลเฉลยปลอมเทียม S_3 ที่เกิดขึ้นจะสอดคล้องกับโมดทีอี (TE mode) ของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ $(1/p)^2$ และผลเฉลยปลอมเทียม S_3 นี้จะอยู่ในช่วง $\beta/k_0 < 1/p$ เท่านั้น

<u>วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์</u>

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม และให้คำตอบทดลองของสนามแม่เหล็กในแต่ละอีลีเมนต์อยู่ในรูปของ (Koshiba และคณะ, 1985ก)

$$\mathbf{H} = [N]\{H\}_e \exp(-j\beta z) \qquad (2.10)$$

เมื่อ β คือค่าคงตัวเฟส, $[N]$ คือเมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่างของคำตอบทดลองของสนามแม่เหล็กในทิศ x,y และ z , $\{H\}_e$ คือเมตริกซ์แถวตั้งที่องค์ประกอบคือสนามแม่เหล็กที่โนดของอีลีเมนต์ ในทิศ x,y และ z, T คือตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน

แทนสมการ (2.10) ในสมการ (2.7) และรวมทุกอีลีเมนต์ทั้งหมดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นเข้าด้วยกัน ได้นิพจน์แปรผันที่สามารถเขียนได้ดังสมการ

$$F(H) = \{H\}^T([S] + p^2[L] - k_0^2[M])\{H\} \qquad (2.11)$$

เมื่อ $\{H\}$ คือสนามแม่เหล็กที่โนดทั้งหมดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น เมตริกซ์ $[S]$, $[L]$ และ $[M]$ เป็นเมตริกซ์เฮอร์มิเชียน (hermitian matrix) (รายละเอียดของเมตริกซ์ $[S]$, $[L]$ และ $[M]$ แสดงใน ภาคผนวก ก)

คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากการพิจารณาจุดต่ำสุดของของสมการ (2.11) ซึ่งยังผลให้ได้สมการที่อยู่ในรูปเมตริกซ์เจาะจงที่มี k_0^2 เป็นค่าเจาะจง ดังนี้

$$[S]\{H\} + p^2[L]\{H\} - k_0^2[M]\{H\} = \{0\} \qquad (2.12)$$

สมการ (2.12) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของปัญหาค่าเจาะจงมาตรฐาน (standard eigenvalue problem) ได้เป็น

$$[M]^{-1}([S] + p^2[L])\{H\} - k_0^2\{H\} = 0 \qquad (2.13)$$

ตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ

ในส่วนนี้ผู้เสนอวิทยานิพนธ์จะทำการตรวจสอบว่า วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบที่เสนอโดย Koshiba และคณะ (1985ก) ดังที่ได้กล่าวมานั้น สามารถวิเคราะห์ปัญหาท่อนำคลื่นต่อไปนี้ได้หรือไม่

1. ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก (dielectric-loaded waveguide)

ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกใช้เป็นตัวอย่างเพื่อตรวจสอบว่า วิธีนี้สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธุ์ได้หรือไม่ ตัวอย่างนี้เป็นกรณีทดสอบสำหรับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้กันอย่างกว้างขวาง เช่นบทความที่เสนอโดย Angkaew และคณะ (1987), Svendin (1989) และ Fernandez และ Lu (1991)

2. ท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม (circular hollow waveguide)

ท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมใช้เป็นตัวอย่างเพื่อตรวจสอบว่า วิธีนี้สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้งได้หรือไม่

3. ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ (ferrite-loaded waveguide)

ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ที่มีการไบแอสสนามแม่เหล็กสถิต (static magnetizing field) ในแนวตามขวางใช้เป็นตัวอย่างเพื่อตรวจสอบว่า วิธีนี้สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่เทนเซอร์ $[\mu]$ อยู่ในรูปของ

$$[\mu]=\begin{bmatrix}\mu_{xx} & 0 & \mu_{xz}\\ 0 & \mu_{yy} & 0\\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz}\end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

ได้หรือไม่

4. ท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรท (embeded optical waveguide)

ท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรทที่เป็นแอนไอโซทรอปิกแนวทแยง และกรณีที่แกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวางใช้เป็นตัวอย่างเพื่อตรวจสอบว่า วิธีนี้สามารถใช้วิเคราะห์ท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าที่เทนเซอร์ $[\varepsilon]$ อยู่ในรูปของ

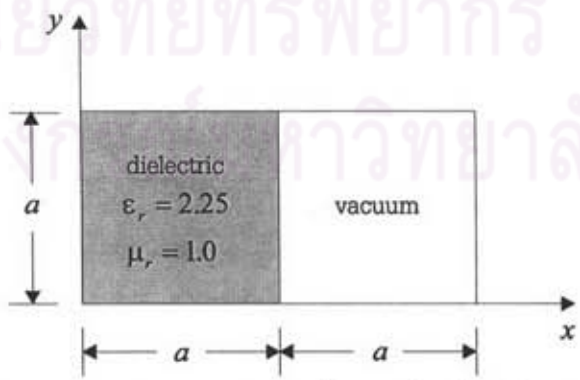
$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix} \text{ และ } [\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

ได้หรือไม่

การตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ในตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้นมีรายละเอียดดังนี้

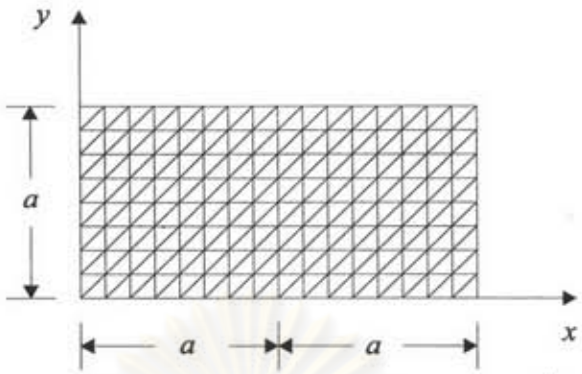
1. ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

พิจารณาท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีขนาดเป็น $2a \times a$ ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบและครึ่งหนึ่งของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์ ε_r และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ μ_r เท่ากับ 2.25 และ 1.0 ตามลำดับ ดังแสดงในรูป 2.2



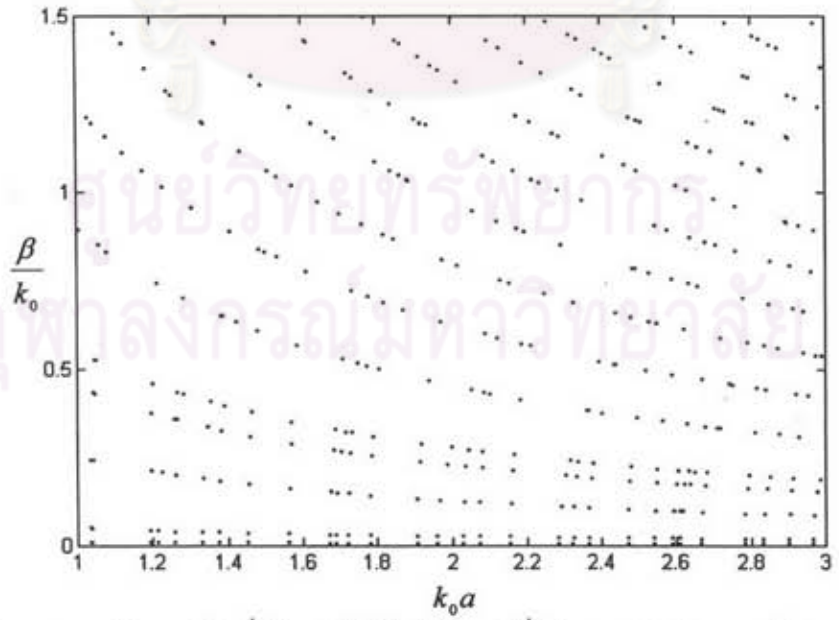
รูป 2.2 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



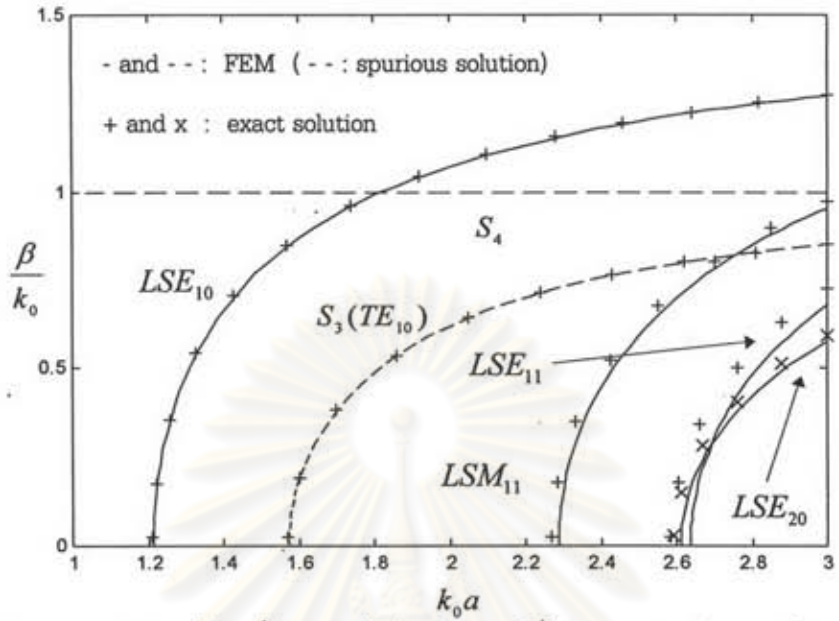
รูป 2.3 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น
บรรจุด้วยไดอิเล็กตริกออกเป็น 256 อีลีเมนต์ 153 โนด

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยมดังแสดงในรูป 2.3 โดยมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 256 และมีจำนวนโนดเท่ากับ 153 รูป 2.4 แสดงกราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์โดยปราศจากพจน์พีนอลตี ($p=0$) พบว่าเกิดผลเฉลยปลอมเทียมจำนวนมากจนทำให้ไม่สามารถแยกแยะกับผลเฉลยที่ถูกต้องได้ รูป 2.5 แสดงกราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากการวิเคราะห์โดยใช้สัมประสิทธิ์พีนอลตีเท่ากับ 1 ($p=1$) เส้นทึบและเส้นประแสดงผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ สัญลักษณ์ + และ × คือผลเฉลยแม่นตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ (Balanis, 1989)



รูป 2.4 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ
ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก เมื่อปราศจากพจน์พีนอลตี ($p=0$)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูป 2.5 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกเมื่อ $p=1$ เทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

จากรูป 2.5 พบว่าโมดมูลฐาน LSE_{10} สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ส่วนโมด LSM_{11} , LSE_{11} และ LSE_{20} ต่างจากผลเฉลยแม่นตรงไม่มากนัก อย่างไรก็ตามโมดเหล่านี้จะมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงมากขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ให้สูงขึ้น

จากรูป 2.5 นอกจากโมดที่ถูกต้องที่วิเคราะห์ได้แล้ว พบว่ามีผลเฉลยปลอมเทียมซึ่งแสดงเป็นเส้นประออกมาด้วย ผลเฉลยปลอมเทียมดังกล่าวนี้คือผลเฉลยปลอมเทียม S_3 และ S_4 ผลเฉลยปลอมเทียม S_3 สอดคล้องกับสมการ (2.9) และสมมูลกับโมด TE_{10} ของท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางเท่ากัน ซึ่งโมด TE_{10} มีความถี่ตัดเป็น (Balanis, 1989)

$$k_a a = p\frac{\pi}{2} \tag{2.16a}$$

$$= (1)\frac{\pi}{2} \approx 1.571 \tag{2.16b}$$

ผลเฉลยปลอมเทียม S_3 นี้จะปรากฏในบริเวณ $\beta/k_0 < 1$ เท่านั้น

นอกจากผลเฉลยปลอมเทียม S_3 ที่ Koshiba และคณะ ได้กล่าวถึงแล้ว ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ยังตรวจพบผลเฉลยชนิดใหม่เพิ่มขึ้นมาด้วย โดยผู้เสนอวิทยานิพนธ์เรียกผลเฉลยปลอมเทียมชนิดใหม่นี้ว่าผลเฉลยปลอมเทียม S_4 ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้ทำการตรวจสอบคุณลักษณะที่สำคัญของผลเฉลยปลอมเทียม

S_4 เปรียบเทียบกับโมดมูลฐาน (LSE_{10}) ที่ตำแหน่ง $x = 1.125a$, $y = 0.375a$ ได้ผลดังแสดงในตาราง 2.1

ตาราง 2.1 คุณลักษณะของผลเฉลยปลอมเทียม S_4 และโมดมูลฐาน (LSE_{10}) ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ $\beta a = 1.0$ ตำแหน่ง $x = 1.125a$, $y = 0.375a$ ของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 2.3 โดยที่สัมประสิทธิ์พีนอลตีเท่ากับ 1 (กำหนดให้ขนาดสูงสุดของสนามแม่เหล็กที่โนดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีค่าเท่ากับ 1)

ผลเฉลย	$\mathbf{H}$	$\nabla \times \mathbf{H}$	$\nabla \cdot \mu_0 \mathbf{H}$	$\nabla_t \cdot \mu_0 \mathbf{H}$ $(\nabla_t = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})$	$\nabla_t H_z$
โมด LSE_{10}	$-0.4531\mathbf{a}_x$ $+1.1306\times10^{-4}\mathbf{a}_y$ $-j0.3731\mathbf{a}_z$	$j($ $0.0015\mathbf{a}_x$ $+0.8990\mathbf{a}_y$ $-j0.0016\mathbf{a}_z$)	$0.0278\mu_0$	$0.4009\mu_0$	$j($ $-0.4459\mathbf{a}_x$ $+0.0014\mathbf{a}_y$)
ผลเฉลย ปลอมเทียม S_4	$-2.1714\times10^{-16}\mathbf{a}_x$ $-1.4385\times10^{-14}\mathbf{a}_y$ $+j1.0000\mathbf{a}_z$	$j10^{-14}$ ($1.4925\mathbf{a}_x$ $-2.7316\mathbf{a}_y$ $+j4.1637\mathbf{a}_z$)	$1.0000\ \mu_0$	10^{-15} $5.4522\mu_0$	$j10^{-14}$ ($2.7534\mathbf{a}_x$ $+2.9310\mathbf{a}_y$)

จากข้อมูลที่ได้ในตาราง 2.1 ผลเฉลยปลอมเทียม S_4 ที่เกิดขึ้นสามารถอธิบายได้ตามขั้นตอนและดังสมการต่อไปนี้

เมื่อพิจารณาจุดต่ำสุดของสมการ (2.7) จะได้สมการต่อไปนี้

$$\iint_{\Omega} \delta\mathbf{H}^* \cdot [\nabla \times ([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) - p^2 \nabla(\nabla \cdot \mu_r \mathbf{H}) - k_0^2 \mu_r \mathbf{H}] d\Omega$$
$$- \int_{\Gamma} \delta\mathbf{H}^* \cdot [\mathbf{n} \times ([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) - p^2 (\nabla \cdot \mu_r \mathbf{H})\mathbf{n}] d\Gamma = 0 \qquad (2.17)$$

โดยที่ $\mathbf{n}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศตั้งฉากกับผนังท่อนำคลื่น

สมการออยเลอร์ (Euler equation) ของสมการ (2.17) คือ

$$\nabla \times ([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) - p^2 \nabla(\nabla \cdot \mu_r \mathbf{H}) - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} = 0 \qquad (2.18)$$

เนื่องจาก $\nabla \times \mathbf{H}$ ของผลเฉลยปลอมเทียม S_4 มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับที่ได้จากโมดมูลฐาน (LSE_{10}) สมการ (2.18) จึงเขียนได้เป็น

$$p^2\nabla(\nabla\cdot\mu_r\mathbf{H})+k_0^2\mu_r\mathbf{H}=0 \qquad (2.19)$$

ตัวดำเนินการเดล (del operator) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปองค์ประกอบตามขวางและองค์ประกอบในแนวแกน z ได้ดังนี้

$$\nabla=\nabla_t-j\beta\mathbf{a}_z \qquad (2.20)$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (2.20) สมการ (2.19) สามารถเขียนได้เป็น

$$p^2\nabla(\nabla_t\cdot\mu_r\mathbf{H})-p^2\nabla(j\beta\mu_r H_z)+k_0^2\mu_r\mathbf{H}=0 \qquad (2.21)$$

จากตาราง 2.1 ค่าของ H_x , H_y และ $\nabla_t\cdot\mu_0\mathbf{H}$ ของผลเฉลยปลอมเทียม S_4 มีค่าน้อยมากเทียบกับที่ได้จากโมดมูลฐาน สมการ (2.21) จึงเขียนได้ดังนี้

$$-p^2(j\beta\mu_r)(\nabla_t H_z-j\beta H_z\mathbf{a}_z)+k_0^2\mu_r H_z\mathbf{a}_z=0 \qquad (2.22)$$

จากตาราง 2.1 ค่าของ $\nabla_t H_z$ ของผลเฉลยปลอมเทียม S_4 มีค่าน้อยมากเทียบกับที่ได้จากโมดมูลฐาน สมการ (2.22) จึงเขียนได้เป็น

$$[(\frac{\beta}{k_0})^2-(\frac{1}{p})^2]\mu_r H_z=0 \qquad (2.23)$$

ผลเฉลยของสมการ (2.23) คือ

$$\frac{\beta}{k_0}=\pm\frac{1}{p} \qquad (2.24)$$

เมื่อ ค่า β ที่เป็นบวกหมายถึงการแพร่กระจายในทิศ $+z$ และค่า β ที่เป็นลบหมายถึงการแพร่กระจายในทิศ $-z$ สำหรับในกรณีตัวอย่างปัญหานี้สัมประสิทธิ์พีนอลตีถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1 เพราะฉะนั้นเมื่อพิจารณาเฉพาะการแพร่กระจายในทิศ $+z$ ผลเฉลยปลอมเทียม S_4 จะปรากฏที่ $\beta/k_0=1$ ซึ่งสอดคล้องกับผลการคำนวณในกราฟดิสเพอร์ชันรูป 2.5

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากที่กล่าวมาพบว่าผลเฉลยปลอมเทียม S_3 เกิดขึ้นในช่วง $\beta/k_0 < 1/p$ และผลเฉลยปลอมเทียม S_4 เกิดขึ้นที่ $\beta/k_0 = 1/p$ เพราะฉะนั้นจึงสรุปได้ว่าผลเฉลยปลอมเทียมทั้งหมดปรากฏในบริเวณ

$$\frac{\beta}{k_0} \leq \frac{1}{p} \tag{2.25}$$

เท่านั้น

บริเวณที่เกิดผลเฉลยปลอมเทียม S_3 และ S_4 สามารถกำหนดได้จากสัมประสิทธิ์พีนอลตีกล่าวคือ บริเวณที่เกิดผลเฉลยปลอมเทียม S_3 จะแคบลงเมื่อสัมประสิทธิ์พีนอลตีมีค่าสูงขึ้น แต่การเพิ่มสัมประสิทธิ์พีนอลตีให้สูงขึ้น ทำให้ความแม่นของผลเฉลยที่ได้ลดลงไปด้วย ตัวอย่างของค่า β/k_0 และขนาดความผิดพลาดที่ $k_0a = 3.0$ จากโมดมูลฐาน (LSE_{10}) , LSM_{11} , LSE_{11} และ LSE_{20} ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 2.3 โดยที่สัมประสิทธิ์พีนอลตีเท่ากับ 1 และ 1/0.75 ตามลำดับ แสดงในตาราง 2.2

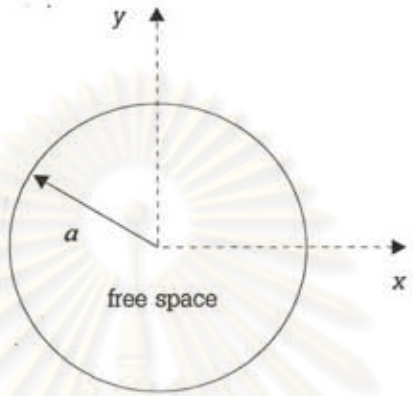
ตาราง 2.2 ตัวอย่างของค่า β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีเชิงวิเคราะห์ รวมขนาดความผิดพลาด เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 2.3 โดยที่สัมประสิทธิ์พีนอลตีเท่ากับ 1 และ 1/0.75

โมด	ผลเฉลยแม่นตรงของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$	β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์		ขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 3.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	
		$p = 1$	$p = 1/0.75$	$p = 1$	$p = 1/0.75$
LSE_{10}	1.275756	1.272433	1.270253	0.260 %	0.431 %
LSM_{11}	0.971538	0.953920	0.946630	1.813 %	2.564 %
LSE_{11}	0.728649	0.680841	0.662076	6.561 %	9.137 %
LSM_{20}	0.593897	0.575721	0.571497	3.060 %	3.772 %

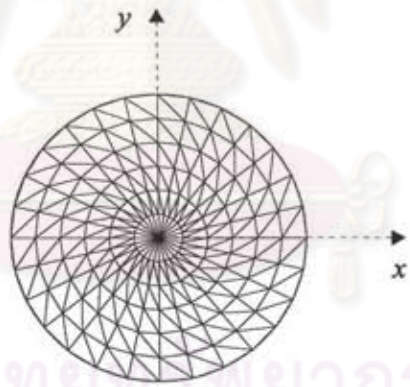
จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ที่เสนอโดย Koshiba และคณะ (1985ก) สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธุ์ได้ แต่ต้องมีการควบคุมการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียมด้วยพจน์พีนอลตี

2. ท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

พิจารณาท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ a ล้อมรอบด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ ภายในเป็นอวกาศว่าง (free space) ดังแสดงในรูป 2.6

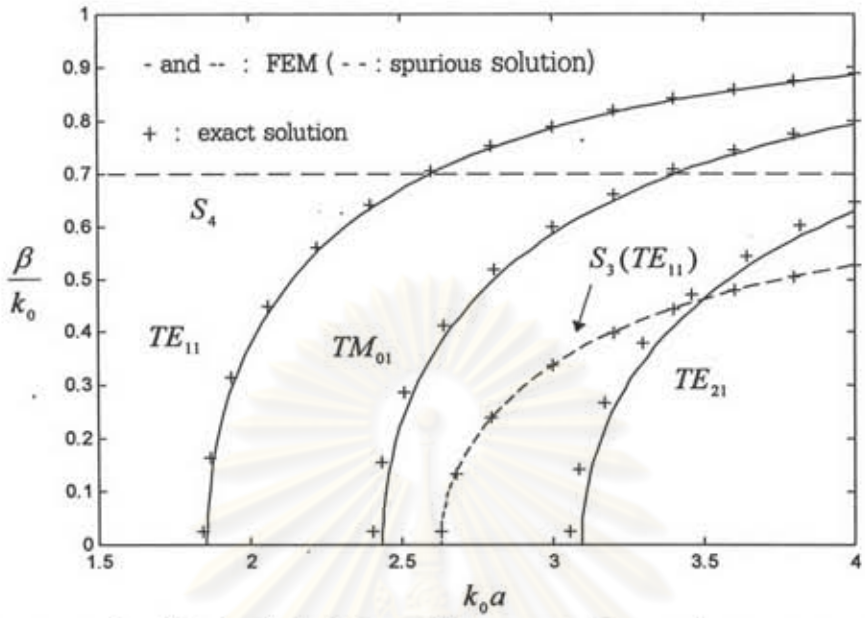


รูป 2.6 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น



รูป 2.7 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น
ออกเป็น 308 อีลีเมนต์ 169 โนด

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยม โดยมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 308 มีจำนวนโนดเท่ากับ 169 ดังแสดงในรูป 2.7 ผลการคำนวณแสดงเป็นกราฟดิสเพอร์ชันดังรูป 2.8 เส้นทึบและเส้นประแสดงผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เมื่อ $p=1/0.7$ สัญลักษณ์ + คือผลเฉลยแม่นตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ (Balanis, 1989) ตัวอย่างการเปรียบเทียบของค่า β/k_0 ที่ $k_0a=4.0$ จากโมดมูลฐาน (TE_{11}), TM_{11} และ TE_{21} ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีเชิงวิเคราะห์ แสดงในตาราง 2.3



รูป 2.8 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ ของท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม เมื่อ $p = 1/0.7$ เทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

ตาราง 2.3 ตัวอย่างของค่า β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีเชิงวิเคราะห์ รวมขนาดความผิดพลาด เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 2.7 โดยที่สัมประสิทธิ์พีนอลตีเท่ากับ 1/0.70

โมด	ผลเฉลยแม่นตรงของ β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$	β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	ขนาดความผิดพลาดของ β/k_0 ที่ $k_0a = 4.0$ จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์
TE_{11}	0.887766	0.885566	0.248 %
TM_{01}	0.799094	0.793362	0.717 %
TE_{21}	0.645738	0.628523	2.666 %

จากรูป 2.8 พบว่าโมดมูลฐาน TE_{11} สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ส่วนโมด TM_{01} และ TE_{21} ต่างจากผลเฉลยแม่นตรงไม่มากนัก อย่างไรก็ตามโมดเหล่านี้จะมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงมากยิ่งขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ให้สูงขึ้น

นอกจากโมดที่ถูกต้องที่วิเคราะห์ได้แล้ว พบว่ามีผลเฉลยปลอมเทียมซึ่งแสดงเป็นเส้นประออกมาด้วย ผลเฉลยปลอมเทียมดังกล่าวนี้คือ ผลเฉลยปลอมเทียม S_3 และผลเฉลยปลอมเทียม S_4 โดยผลเฉลย

ปลอมเทียม S_3 สอดคล้องกับสมการ (2.9) และสมมูลกับโมด TE_{11} ของท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมและบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกที่มีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 0.70^2 โมด TE_{11} มีความถี่ตัดเป็น (Balanis, 1989)

$$k_0 a = p\chi'_{nm} \tag{2.26a}$$

$$= (\frac{1}{0.70})1.8412 \approx 2.630 \tag{2.26b}$$

เมื่อ χ'_{nm} $(n = 1,2,3,\ldots)$ คือค่าที่ทำให้

$$J'_m(\chi'_{nm}) = 0 \tag{2.27}$$

โดยที่ $J'_m(\cdot) = \partial J(\cdot)/\partial(\beta_\rho a)$ เมื่อ $J_m(\cdot)$ คือฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่ง อันดับ m (m=0,1,2,...)

$$\beta_\rho = \sqrt{k^2 - \beta^2} \tag{2.28}$$

k คือเวฟนัมเบอร์

ผลเฉลยปลอมเทียม S_3 นี้จะปรากฏในบริเวณ $\beta/k_0 < 0.70$ เท่านั้น

นอกจากผลเฉลยปลอมเทียม S_3 ที่ผู้เสนอบทความนี้ได้กล่าวไว้แล้ว ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ยังตรวจพบผลเฉลยปลอมเทียม S_4 เช่นเดียวกับกรณีของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกเพิ่มขึ้นมาด้วย ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้ทำการตรวจสอบคุณลักษณะที่สำคัญของผลเฉลยปลอมเทียม S_4 เทียบกับคำตอบที่ถูกต้องของโมดมูลฐาน (TE_{11}) ที่ตำแหน่ง $x = 0.3909a$, $y = 0.3117a$ ได้ผลดังแสดงในตาราง 2.4 ผลเฉลยปลอมเทียม S_4 ที่เกิดขึ้นนี้จะมีคุณลักษณะเช่นเดียวกับที่เกิดขึ้นในกรณีของท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก และสามารถอธิบายได้โดยใช้สมการ (2.19) ถึง (2.24) สำหรับปัญหานี้ กำหนดให้สัมประสิทธิ์พีนอลตีมีค่าเท่ากับ 1/0.70 เพราะฉะนั้นเมื่อพิจารณาเฉพาะการแพร่กระจายในทิศ $+z$ ผลเฉลยปลอมเทียม S_4 ปรากฏที่ $\beta/k_0 = 0.70$

ตาราง 2.4 คุณลักษณะของผลเฉลยปลอมเทียม S_4 และโมดมูลฐาน (TE_{11}) ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ $\beta a = 1.05$ ตำแหน่ง $x = 0.3909a$, $y = 0.3117a$ ของท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม เมื่อทำการแบ่งอีลีเมนต์ดังแสดงในรูป 2.7 โดยที่สัมประสิทธิ์พีนอลตีเท่ากับ 1/0.7 (กำหนดให้ขนาดสูงสุดของสนามแม่เหล็กที่โนดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีค่าเท่ากับ 1)

ผลเฉลย	$\mathbf{H}$	$\nabla \times \mathbf{H}$	$\nabla \cdot \mu_0 \mathbf{H}$	$\nabla_t \cdot \mu_0 \mathbf{H}$ $(\nabla_t = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})$	$\nabla_t H_z$
โมด TE_{11}	$-0.3816\mathbf{a}_x$ $+0.0525\mathbf{a}_y$ $-j0.5459\mathbf{a}_z$	$j($ $1.4989\mathbf{a}_x$ $+1.3414\mathbf{a}_y$ $-j0.5141\mathbf{a}_z$ $)$	$0.0020\,\mu_0$	$0.5752\,\mu_0$	$j($ $-0.9407\mathbf{a}_x$ $+1.4438\mathbf{a}_y$ $)$
ผลเฉลยปลอมเทียม S_4	$1.0585\times10^{-14}\mathbf{a}_x$ $-4.7305\times10^{-14}\mathbf{a}_y$ $+j1.0000\mathbf{a}_z$	$j10^{-13}$ $($ $-3.1190\mathbf{a}_x$ $+1.4906\mathbf{a}_y$ $+j0.1291\mathbf{a}_z)$	$1.0500\,\mu_0$	10^{-14} $6.3313\times10^{-14}\,\mu_0$	$j10^{-13}$ $($ $-1.6018\mathbf{a}_x$ $-2.6223\mathbf{a}_y)$

จากที่กล่าวมาพบว่าผลเฉลยปลอมเทียม S_3 เกิดขึ้นในช่วง $\beta/k_0 < 1/p$ และผลเฉลยปลอมเทียม S_4 เกิดขึ้นที่ $\beta/k_0 = 1/p$ เพราะฉะนั้นจึงสรุปได้ว่าผลเฉลยปลอมเทียมทั้งหมดปรากฏในบริเวณ

$$\frac{\beta}{k_0} \le \frac{1}{p} \qquad (2.29)$$

เท่านั้น

จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบที่เสนอโดย Koshiba และคณะ (1985ก) สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้งได้ เช่นเดียวกับท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริก

3. ท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์

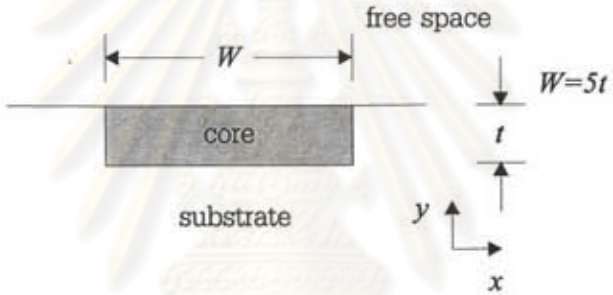
เมื่อพิจารณานิพจน์แปรผันดังแสดงในสมการ (2.7) ซึ่งเป็นผลรวมของนิพจน์แปรผันของสมการคลื่นที่อยู่ในรูปสนามแม่เหล็กและพจน์พีนอลตีที่ใช้ในการกำจัดผลเฉลยปลอมเทียม พบว่านิพจน์แปรผันนี้ ไม่สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่มีค่าความซาบซึมได้อยู่ในรูปเทนเซอร์ $[\mu]$ ได้ เนื่องจากค่าความซาบซึมได้สัมพัทธ์ μ_r ที่อยู่ในพจน์พีนอลตี $F_p(H)$ ซึ่งแสดงได้ดังสมการ

$$F_p(\mathbf{H}) = \frac{p^2}{\mu_r} \iint_{\Omega} (\nabla \cdot \mu_r \mathbf{H})^* (\nabla \cdot \mu_r \mathbf{H}) d\Omega \qquad (2.30)$$

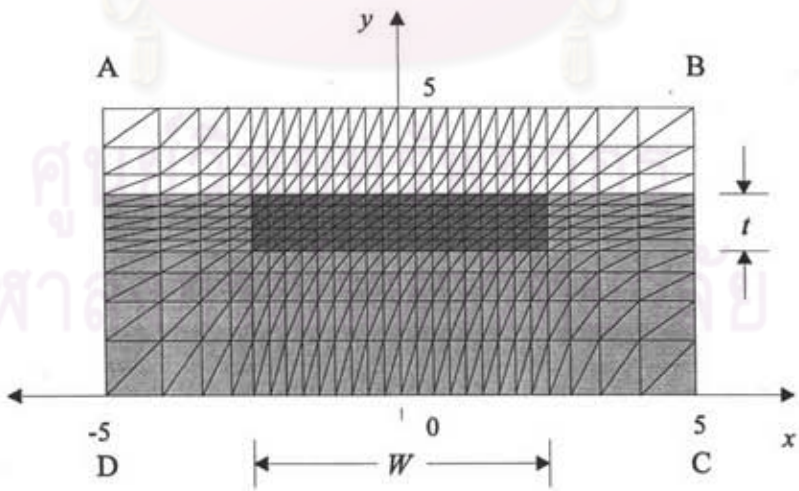
ต้องอยู่ในรูปสเกลาร์เท่านั้น

4. ท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรท

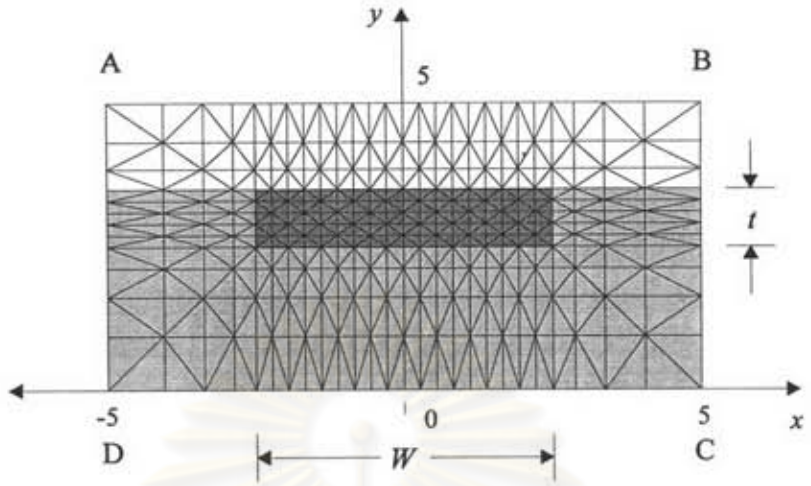
พิจารณาท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรท ที่ประกอบด้วยแกน (core) ฝังในซับสเตรท (substrate) และด้านบนของแกนเป็นอวกาศว่าง ดังแสดงในรูป 2.9 การศึกษาในส่วนนี้จะแบ่งเป็น 2 กรณีคือ กรณีที่ท่อนำแสงเป็นแอนไอโซทรอปิกแนวทแยง และกรณีที่แกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวาง ซึ่งแต่ละกรณีมีรายละเอียดดังนี้



รูป 2.9 ภาคตัดขวางของท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรท



รูป 2.10 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางท่อนำคลื่นแบบที่ 1 ออกเป็น 624 อีลีเมนต์ 351 โนด



รูป 2.11 การแบ่งอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางท่อนำคลื่นแบบที่ 2
ออกเป็น 624 อีลีเมนต์ 351 โนด

4.1. กรณีที่ท่อนำแสงเป็นแอนไอโซทรอปิกแนวทแยง (Koshiba, 1992)

พิจารณาท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรทที่มีภาคตัดขวางดังแสดงในรูป 2.9 แกนและซับสเตรทของท่อนำคลื่นนี้เป็นแอนไอโซทรอปิกเนกาทิฟยูนิแอกเชียล (negative uniaxial anisotropic) (Kong, 1986) ที่แกนทางแสงขนานกับแกน x สภาพยอมสัมพัทธ์และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ของแกนมีค่าดังนี้

$$[\varepsilon_r]=\begin{bmatrix} 2.222^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.3129^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.3129^2 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

$$\mu_r = 1.0 \tag{2.32}$$

สภาพยอมสัมพัทธ์และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ของซับสเตรทมีค่าดังนี้

$$[\varepsilon_r]=\begin{bmatrix} 2.20^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.29^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.29^2 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

$$\mu_r = 1.0 \tag{2.34}$$

แบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นสามเหลี่ยม โดยมีจำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 624 มีจำนวนโนด เท่ากับ 351 ดังแสดงในรูป 2.10 และ 2.11 ตามลำดับ โดยที่ขอบเขต AB,BC,CD และ DA คือขอบเขตเสมือน (virtual boundary) ซึ่งสมมุติให้เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

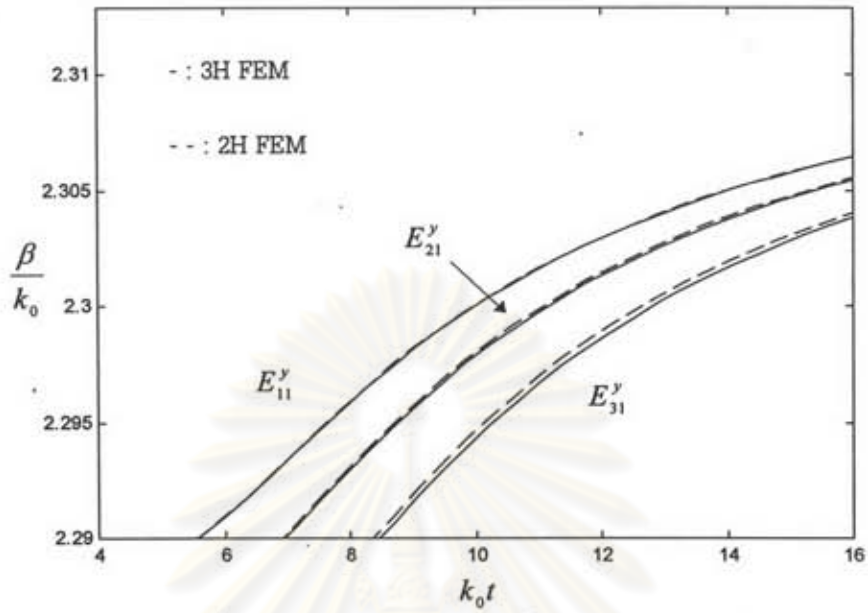
เพื่อไม่ให้มีผลเฉลยปลอมเทียม S_3 และ S_4 ในบริเวณที่ถูกนำทาง (guided region) ของกราฟดิสเพอร์ชัน สัมประสิทธิ์พีนอลตีต้องสอดคล้องกับสมการ

$$p > 1/n_{g,\min} \tag{2.35}$$

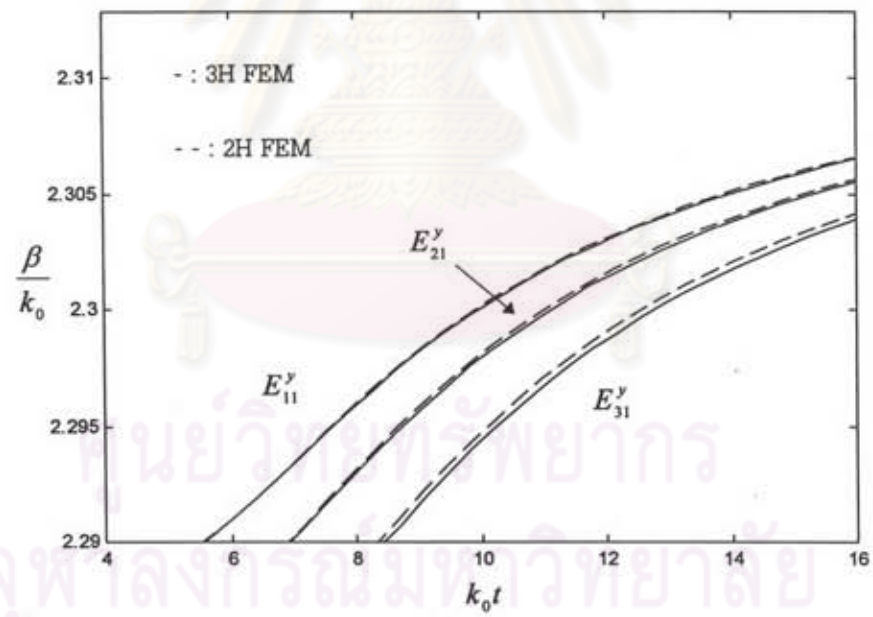
เมื่อ $n_{g,\min}$ คือดัชนีหักเหที่มีค่ามากที่สุดในซับสเตรท ด้วยเหตุนี้สัมประสิทธิ์พีนอลตีถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1/2.289

เนื่องจากท่อนำแสงในกรณีนี้ ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงจากวิธีเชิงวิเคราะห์ได้ จึงจำเป็นต้องตรวจสอบความถูกต้องโดยเทียบผลการคำนวณที่ได้กับผลการคำนวณที่ได้จากวิธีอื่น ผลการคำนวณที่นำมาเปรียบเทียบเทียบคือ ผลการคำนวณที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ (Hayata,Eguchi และ Koshiba, 1986) (รายละเอียดของวิธีนี้แสดงไว้ในบทที่ 4) รูป 2.12 (ก) และ (ข) แสดงผลการคำนวณกราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เมื่อใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 1 ดังแสดงในรูป 2.10 และแบบที่ 2 ดังแสดงในรูป 2.11 ตามลำดับ เส้นทึบแสดงผลการคำนวณที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ เมื่อสัมประสิทธิ์พีนอลตี (p) เท่ากับ 1/2.289 (เพื่อความสะดวกได้กำหนดให้ $p = 1/2.289$) เส้นประแสดงผลการคำนวณที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ก)



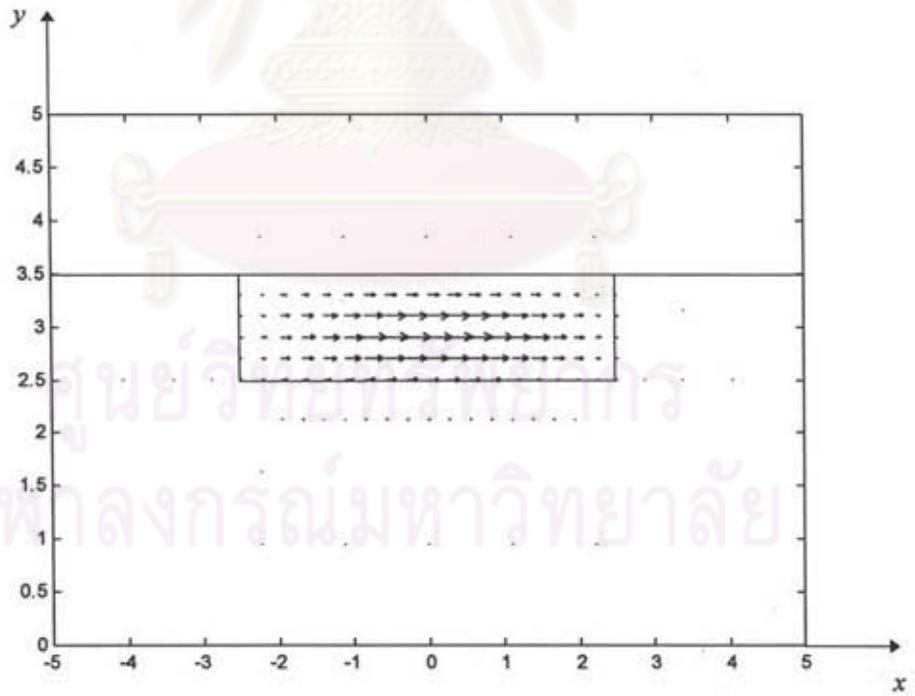
(ข)

รูป 2.12 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ เมื่อ $p = 1/2.289$ และที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ ของท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรทที่มีแกนและซับสเตรทเป็นเนกาทิฟยูนิแอกเซียล เมื่อใช้
(ก) การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 1 (ข) การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 2

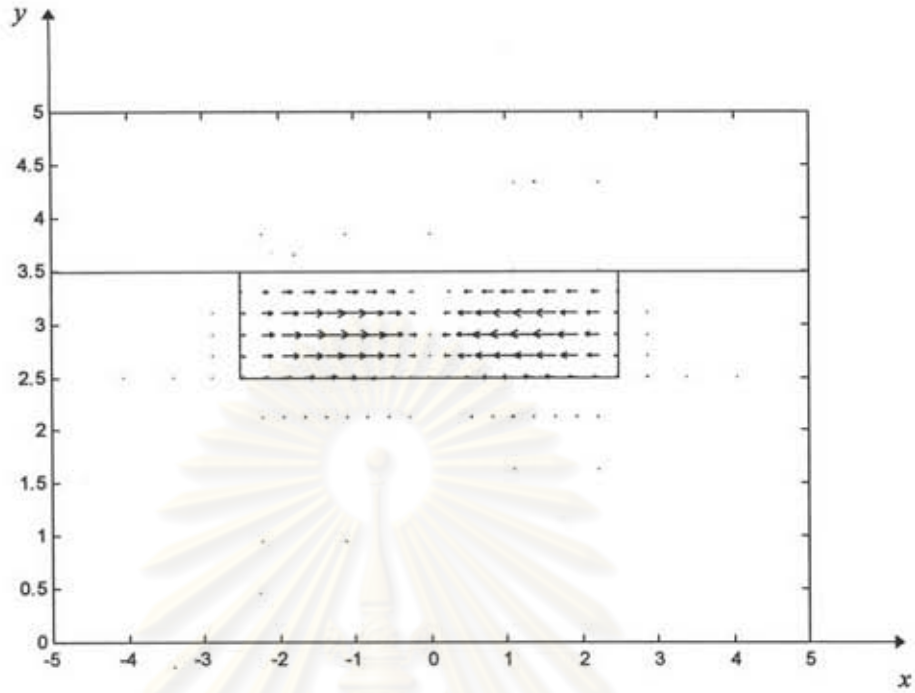
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากรูป 2.12 พบว่าโมด 3 อันดับแรกที่เลือกมาแสดงคือโมด E_{11}^{y} E_{21}^{y} ,และ E_{31}^{y} เมื่อ E_{pq}^{y} คือ โมดที่มีองค์ประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าหลักคือ E_y และ H_x ดัชนีล่าง (subscript) p และ q แทน อันดับ (order) ของโมด ทิศ x และ y ตามลำดับโดย p และ q มีค่าเท่ากับจำนวนจุดสูงสุดหรือต่ำสุด (extrema) ที่เกิดขึ้นในการการกระจายขององค์ประกอบหลักในทิศ x และ y ตามลำดับ (Marcuse, 1974; Koshiba, 1992) จะเห็นได้ว่าโมด E_{11}^{y} และ E_{21}^{y} ที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ และวิธีที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ ทั้งที่ได้จากการแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 1 และแบบที่ 2 ให้ผลเฉลยที่สอดคล้องกัน ส่วนผลการคำนวณที่ได้ในโมด E_{31}^{y} ต่างกันไม่มากนัก แต่อย่างไรก็ตาม โมด E_{31}^{y} ที่ได้จากทั้งสองวิธีนี้จะมีค่าสอดคล้องกันมากขึ้น เมื่อใช้จำนวนอีลีเมนต์ที่สูงขึ้น จากรูป 2.12 พบว่า ไม่มีการปรากฏของผลเฉลยปลอมเทียม เนื่องจากได้จำกัดให้ผลเฉลยปลอมเทียมเกิดขึ้นในช่วง $\beta/k_0 < 2.289$ ซึ่งบริเวณนี้เป็นบริเวณแผ่พลังงาน (radiation region)

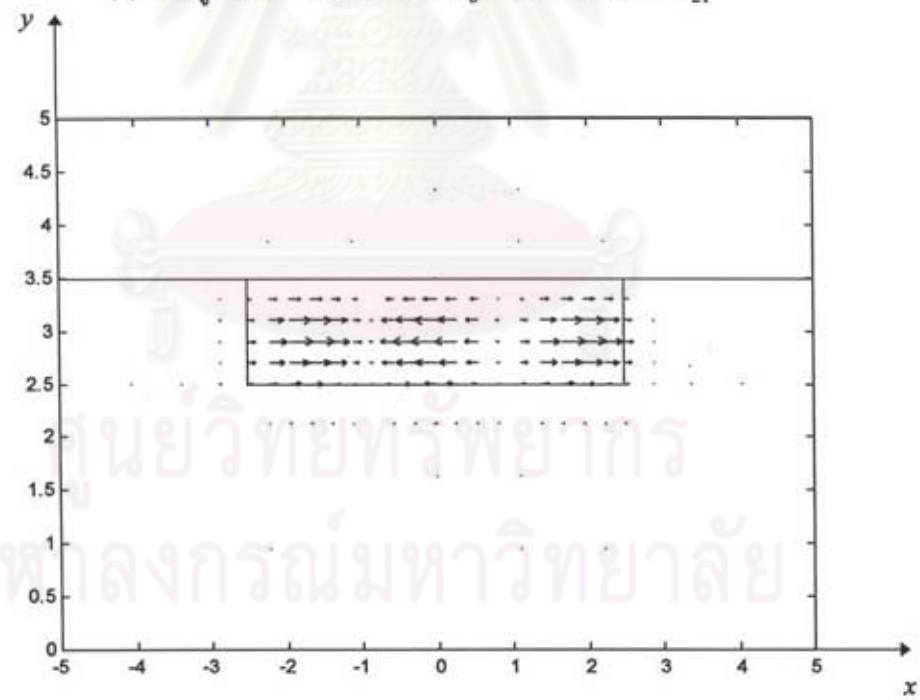
รูป 2.13 และ 2.14 แสดงแบบรูปของสนามแม่เหล็ก **H** และการกระจายของ H_x ในลักษณะ 3 มิติ ตามลำดับ ที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{11}^{y} , E_{21}^{y} และ E_{31}^{y} โดยกำหนดให้ขนาดสูงสุดของสนามแม่เหล็กที่โนด บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีค่าเท่ากับ 1



(ก) แบบรูปของสนามแม่เหล็กที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{11}^{y}



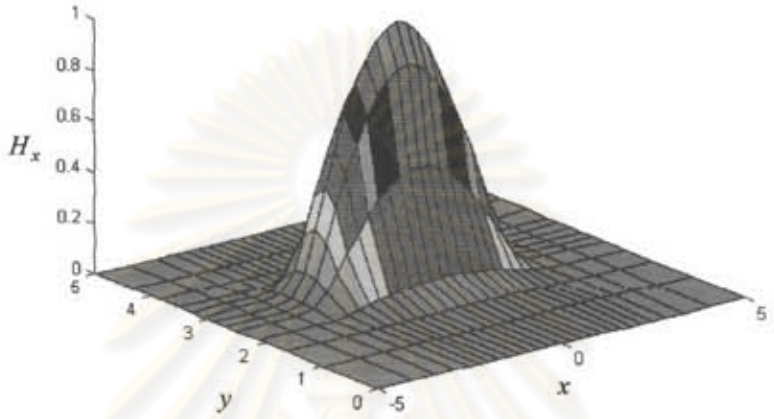
(ข) แบบรูปของสนามแม่เหล็กที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{21}^y



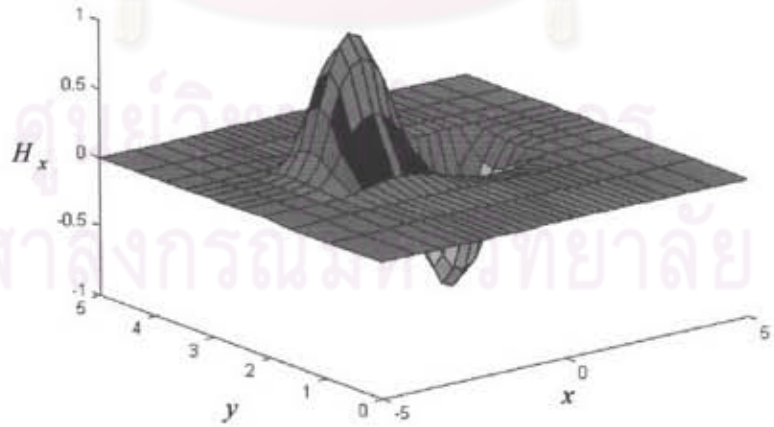
(ค) แบบรูปของสนามแม่เหล็กที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{31}^y

รูป 2.13 แบบรูปของสนามแม่เหล็กที่ $k_0 t = 16.0$ ใน (ก) โมด E_{11}^y (ข) โมด E_{21}^y (ค) โมด E_{31}^y ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ เมื่อ $p = 1/2.289$ ของท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรทที่แกนและซับสเตรทเป็นเนกาทิฟยูนิแอกเซียล โดยใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 1

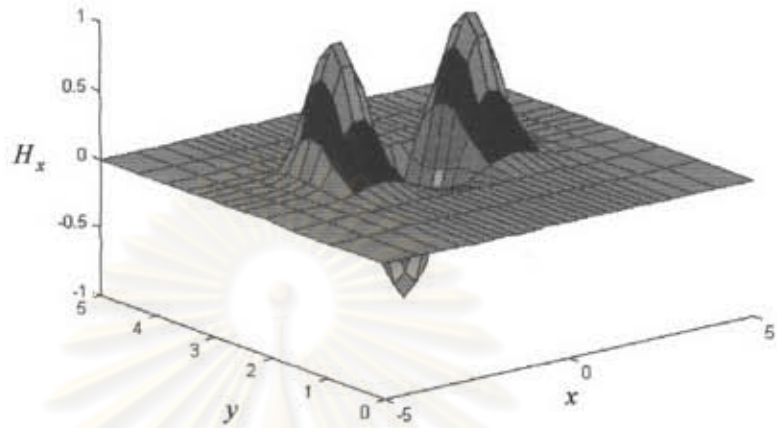
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ก) การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ H_x ที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{11}^y



(ข) การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ H_x ที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{21}^y



(ค) การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ H_x ที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{31}^y

รูป 2.14 การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ H_x ที่ $k_0 t = 16.0$ ใน (ก) โมด E_{11}^y (ข) โมด E_{21}^y (ค) โมด E_{31}^y ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ เมื่อ $p = 1/2.289$ ของท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรทที่แกนและซับสเตรทเป็นเนกาทิฟยูนิแอกเซียล โดยใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 1

จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบที่เสนอโดย Koshiba และคณะ (1985ก) สามารถวิเคราะห์ท่อนำแสงที่เป็นแอนไอโซทรอปิกแนวทแยงได้

4.2 <u>กรณีที่แกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวาง</u>

พิจารณาท่อนำแสงที่ฝังในซับสเตรทที่มีภาคตัดขวางดังแสดงในรูป 2.9 แกนของท่อนำคลื่นนี้เป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวาง โดยที่แกนทางแสงอยู่ในระนาบ xy และทำมุม $-\pi/8$ เรเดียน (radian) กับแกน x เทนเซอร์สภาพยอมสัมพัทธ์และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ของแกนคือ

$$[\varepsilon_r] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{r,xx} & \varepsilon_{r,xy} & 0 \\ \varepsilon_{r,yx} & \varepsilon_{r,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{r,zz} \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

$$\mu_r = 1.0 \tag{2.37}$$

เมื่อ องค์ประกอบของ $[\varepsilon_r]$ มีค่าดังสมการต่อไปนี้ (Koshiba, 1992)

$$\varepsilon_{xx} = n_e^2 \cos^2\theta + n_0^2 \sin^2\theta \quad (2.38a)$$

$$\varepsilon_{yy} = n_o^2 \cos^2\theta + n_e^2 \sin^2\theta \quad (2.38b)$$

$$\varepsilon_{zz} = n_0^2 \quad (2.38c)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = (n_e^2 - n_o^2)\sin\theta\cos\theta \quad (2.38d)$$

$$n_0 = 2.3129 \quad (2.38e)$$

$$n_e = 2.222 \quad (2.38f)$$

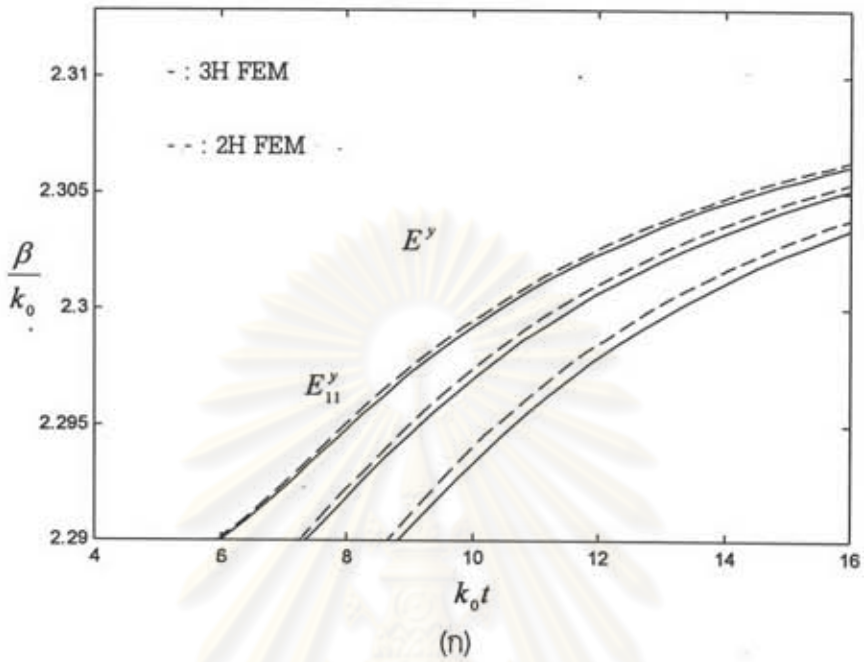
เมื่อ n คือดัชนีหักเห (refractive index), θ คือมุมระหว่างแกนทางแสงและแกน x ในที่นี้กำหนดให้มีค่าเท่ากับ $-\pi/8$ เรเดียน ซับสเตรทของท่อนำคลื่นนี้เป็นแอนไอโซทรอปิกเนกาทิฟยูนิแอกเซียลที่แกนทางแสงขนานกับแกน x สภาพยอมสัมพัทธ์และความซาบซึมได้สัมพัทธ์ของซับสเตรทคือ

$$[\varepsilon_r] = \begin{bmatrix} 2.20^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.29^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.29^2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

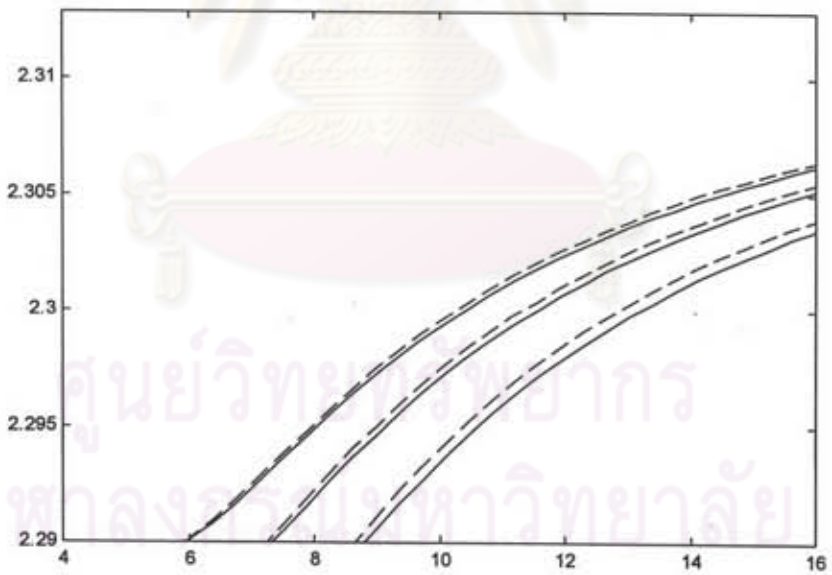
$$\mu_r = 1.0 \quad (2.40)$$

เช่นเดียวกับกรณีแรก ท่อนำแสงกรณีนี้ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงจากวิธีเชิงวิเคราะห์ได้ จึงจำเป็นต้องตรวจสอบความถูกต้องโดยเทียบผลการคำนวณที่ได้กับผลการคำนวณที่ได้จากวิธีอื่น ผลการคำนวณที่นำมาเปรียบเทียบเทียบคือ ผลการคำนวณที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ (Hayata,Eguchi และ Koshiba, 1986) รูป 2.15 (ก) และ (ข) แสดงกราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เมื่อใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 1 ดังในรูป 2.10 และแบบที่ 2 ดังในรูป 2.11 ตามลำดับ เส้นทึบแสดงผลการคำนวณที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ เมื่อสัมประสิทธิ์พีนอลตีเท่ากับ 1/2.289 ($p = 1/2.289$) เส้นประแสดงผลการคำนวณที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ

จากรูป 2.15 โมด 3 อันดับแรกเลือกมาแสดงคือโมด E_{11}^y E_{21}^y ,และ E_{31}^y จะเห็นได้ว่าโมด E_{11}^y จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ และวิธีที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบให้ผลเฉลยที่สอดคล้องกัน ส่วนผลการคำนวณในโมด E_{21}^y และ E_{31}^y ยังไม่สอดคล้องกันมากนัก แต่อย่างไรก็ตามโมด E_{21}^y E_{31}^y ที่ได้จากทั้งสองวิธีนี้จะมีค่าสอดคล้องกันมากขึ้น เมื่อใช้จำนวนอีลีเมนต์ที่สูงขึ้น จากรูป 2.15 พบว่า ไม่มีผลเฉลยปลอมเทียมออกมาเลย เนื่องจากได้จำกัดให้ผลเฉลยปลอมเทียมเกิดขึ้นในช่วง $\beta/k_0 < 2.289$ ซึ่งบริเวณนี้เป็นบริเวณแผ่พลังงาน



(ก)



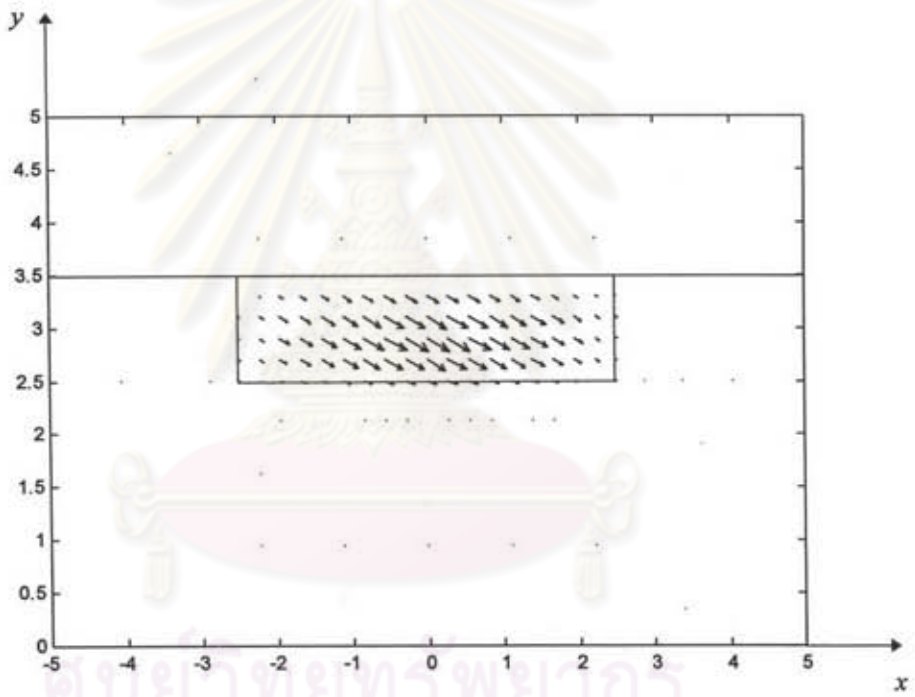
(ข)

รูป 2.15 กราฟดิสเพอร์ชันที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ เมื่อ $p = 1/2.289$ และที่ได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ ของท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรท ที่มีแกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวางเมื่อใช้

(ก) การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 1 (ข) การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 2

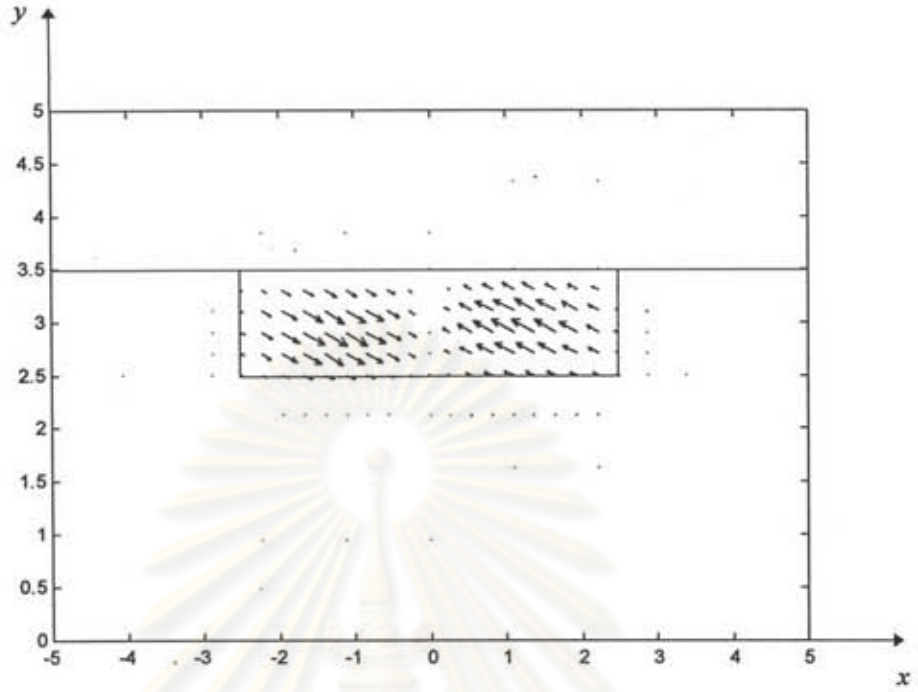
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูป 2.16 และ 2.17 แสดงแบบรูปของสนามแม่เหล็ก และการกระจายของ H_x ในลักษณะ 3 มิติ ตามลำดับ ที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{11}^y , E_{21}^y และ E_{31}^y โดยกำหนดให้ขนาดสูงสุดของสนามแม่เหล็กที่โนดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีค่าเท่ากับ 1

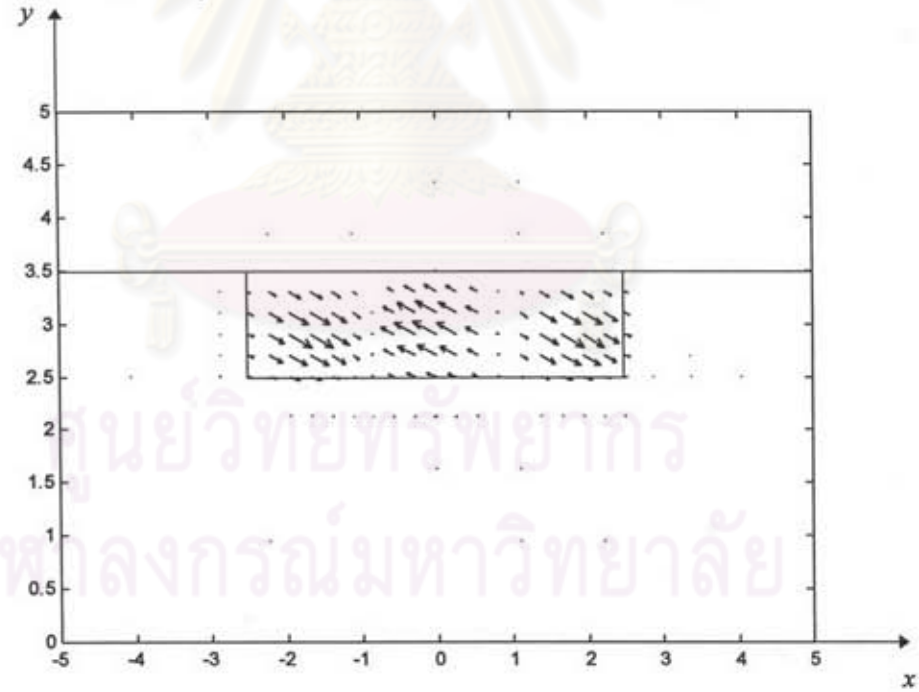


(ก) แบบรูปของสนามแม่เหล็กที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{11}^y

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



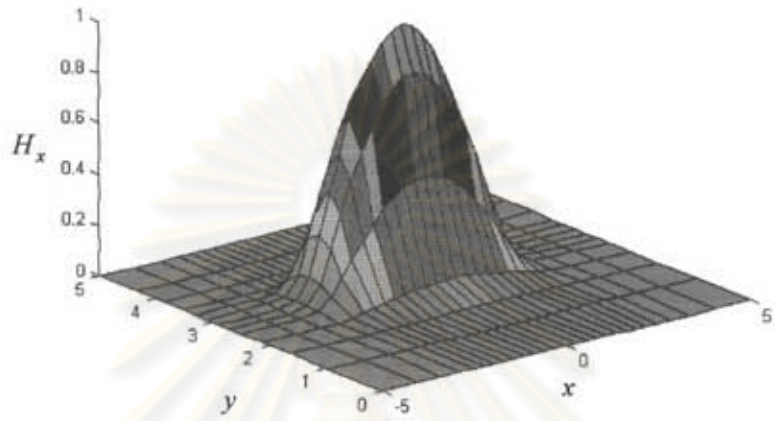
(ข) แบบรูปของสนามแม่เหล็กที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{21}^y



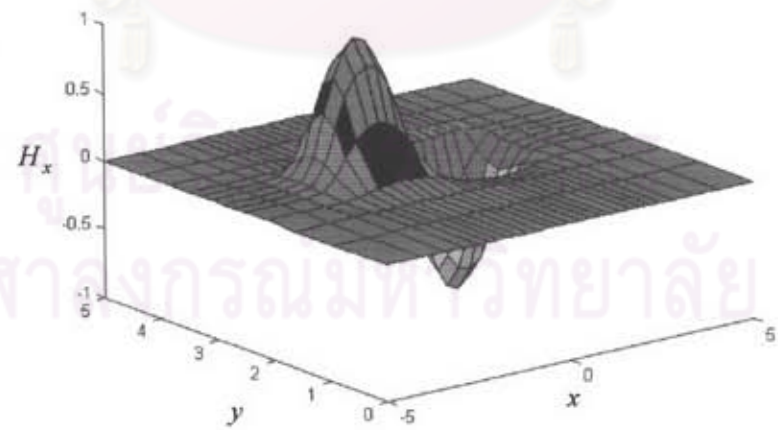
(ค) แบบรูปของสนามแม่เหล็กที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{31}^y

รูป 2.16 แบบรูปของสนามแม่เหล็กที่ $k_0 t = 16.0$ ใน (ก) โมด E_{11}^y (ข) โมด E_{21}^y (ค) โมด E_{31}^y ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ เมื่อ $p = 1/2.289$ ของท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรทที่แกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวาง และซับสเตรทเป็นเนกาทิฟยูนิแอกเซียล โดยใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 1

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

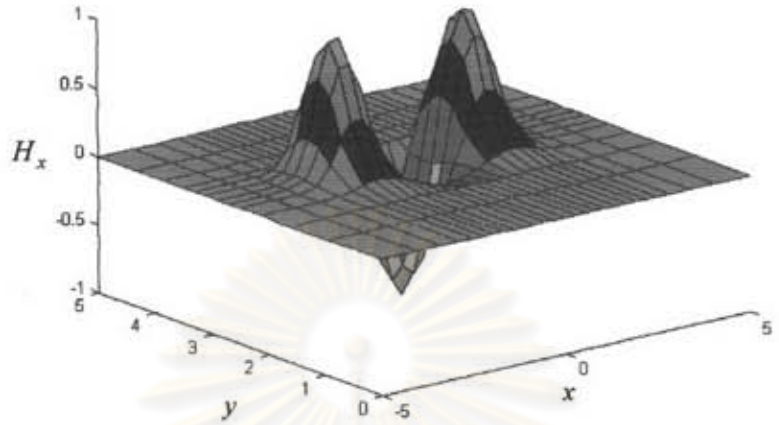


(ก) การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ H_x ที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{11}^y



(ข) การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ H_x ที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{21}^y

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ค) การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ H_x ที่ $k_0 t = 16.0$ ในโมด E_{31}^y

รูป 2.17 การกระจายในลักษณะ 3 มิติของ H_x ที่ $k_0 t = 16.0$ ใน (ก) โมด E_{11}^y (ข) โมด E_{21}^y (ค) โมด E_{31}^y ที่คำนวณจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ เมื่อ $p = 1/2.289$ ของท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรทที่แกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวาง และซับสเตรทเป็นเนกาทิฟยูนิแอกเซียล โดยใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบที่ 1

จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงให้เห็นว่า วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบที่เสนอโดย Koshiba และคณะ (1985ก) สามารถวิเคราะห์ท่อนำแสงที่เป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวางได้

สรุป

ผลจากการตรวจสอบความสามารถในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบที่เสนอโดย Koshiba และคณะ (1985ก) สามารถสรุปได้ดังนี้

1. ในปัญหาท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธุ์ ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำคลื่นบรรจุด้วยไดอิเล็กตริกพบว่า วิธีนี้สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกไม่เอกพันธุ์ได้

2. ในปัญหาท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้ง ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม พบว่าวิธีนี้สามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นผิวโค้งได้

3. ในปัญหาท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่เทนเซอร์ความซาบซึมได้ $[\mu]$ อยู่ในรูปของ

$$[\mu]=\begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & \mu_{xz} \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ \mu_{zx} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}$$

ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำคลื่นบรรจุด้วยเฟอร์ไรต์ที่มีการไบแอสสนามแม่เหล็กสถิตในแนวตามขวางของท่อนำคลื่น พบว่าวิธีนี้ไม่สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวนี้ได้ เนื่องจากความซาบซึมได้สัมพัทธ์ที่อยู่ในพจน์พีนอลตีต้องอยู่ในรูปสเกลาร์เท่านั้น ไม่สามารถใช้กับความซาบซึมได้สัมพัทธ์ที่อยู่ในรูปเทนเซอร์ได้

4. ในปัญหาท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าที่เทนเซอร์สภาพยอม $[\varepsilon]$ อยู่ในรูปของ

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \text{ และ } [\varepsilon]=\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

ซึ่งตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือท่อนำแสงแบบฝังในซับสเตรทที่เป็นแอนไอโซทรอปิกแนวทแยง และกรณีที่แกนเป็นแอนไอโซทรอปิกตามขวาง พบว่าวิธีนี้สามารถวิเคราะห์ท่อนำแสงแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าที่เทนเซอร์ $[\varepsilon]$ อยู่ในรูปดังที่กล่าวมาข้างต้นได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

I17113554