หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 3

วิธีการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอเลเมนต์

<u>บทนำ</u>

ในการแก้ปัญหาทางด้านกลศาสตร์ของของแข็ง (solid mechanics) โดยทั่วไปจะเริ่มมาจากการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) หรือ สมการอินทิกรัล (integral equation) ที่สามารถอธิบายสถานะของความสมดุลภายใต้แรงกระทำทั้งจากภายนอกและภายใน การที่จะหาผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) จากสมการเหล่านี้โดยวิธีการเชิงวิเคราะห์ (analytical method) อาจทำได้ยาก หรือทำไม่ได้เลย ดังนั้นจึงได้มีการคิดค้นวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximate methods) ซึ่งมีอยู่หลายวิธีการ แต่ในที่นี้จะใช้วิธีการที่เรียกว่า ไฟไนต์เอเลเมนต์ (finite element method)

ในปัญหาใด ๆ จะประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ และเงื่อนไขที่ขอบเขต (boundary condition) ซึ่งมีค่าผลเฉลยแม่นตรงที่ประกอบไปด้วยค่าของตัวแปรต่าง ๆกัน ตามตำแหน่งต่าง ๆบนรูปร่างลักษณะของปัญหานั้น ๆ ค่าเหล่านี้มีจำนวนมากถึงอนันต์ค่า ซึ่งในทางปฏิบัติไม่สามารถทำได้ ดังนั้น หลักการของไฟไนต์เอเลเมนต์ จึงถูกคิดค้นขึ้นมาเพื่อเปลี่ยนค่าที่มีจำนวนอนันต์มาเป็นค่าโดยประมาณที่มีจำนวนนับได้ (finite) โดยการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยเอเลเมนต์ (elements) ขนาดต่าง ๆกัน ในวิธีการนี้ค่าผลเฉลยของแต่ละเอเลเมนต์จำเป็นต้องสอดคล้อง (satisfy) กับสมการเชิงอนุพันธ์ และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ในปัญหานั้น ๆหลักการของวิธีการไฟไนต์เอเลเมนต์จะเริ่มต้นจากการพิจารณา เอเลเมนต์ทีละเอเลเมนต์ และทำการสร้างสมการสำหรับแต่ละเอเลเมนต์ โดยมีพื้นฐานที่ว่า สมการที่สร้างขึ้นมานั้น จำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น จากนั้นจึงนำสมการของแต่ละเอเลเมนต์มารวมกันเป็นระบบสมการใหญ่ ซึ่งในความหมายทางกายภาพก็คือการนำทุกเอเลเมนต์มารวมกันเป็นรูปร่างลักษณะทั้งหมดของปัญหา จานั้นจึงทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ให้มาเข้าไปในระบบสมการ

ใหญ่นี้ แล้วทำการแก้สมการ

จากหลักการของวิธีการไฟไนต์เอเลเมนต์ จะเห็นได้ว่า ความแม่นยำของค่าผลเฉลยโดยประมาณที่คำนวณได้นั้น จะขึ้นอยู่กับขนาดและจำนวนของเอเลเมนต์ที่ใช้ และนอกจากนั้นยังขึ้นอยู่กับรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายใน (interpolation function) ที่ใช้กับแต่ละเอเลเมนต์

<u>การสร้างสมการอินทิกรัล</u>

การสร้างสมการอินทิกรัลในที่นี้จะใช้หลักการของงานเสมือน (virtual work) จาก

สมการความสมดุล (2.40) $\dfrac{\partial s_{ij}}{\partial x_i} = 0 = A(\bar{u})$ โดย $\{\bar{u}\}$ เป็นระยะเคลื่อนตัว (displacement) กำหนดให้ $\delta\bar{u}_i$ เป็นฟังก์ชั่นถ่วงน้ำหนัก (weighting function)

$$\{\delta\bar{u}\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix} \qquad (3.1)$$

$$\int_V \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_i}\delta\bar{u}_i\, dV = 0 \qquad (3.2)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร

อินทีเกรตบายพาส (by pass)

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\int_V s_{ij}\frac{\partial\left(\delta\bar{u}_i\right)}{\partial x_i}dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x_i}\left(s_{ij}\,\delta\bar{u}_i\right)dV = 0 \qquad (3.3)$$

ใช้ทฤษฎีไดเวอเจน (divergence theorem)

$$\int_V S_{ij}\delta E_{ij}\, dV - \int_S F_i\, \delta \bar{u}_i\, dS \quad = \quad 0 \qquad (3.4)$$

ในที่นี้จะพิจารณา $\bar{u}_i$ เป็นระยะเคลื่อนตัวขั้นเพิ่ม (increment) ดังนั้นสมการ (3.4) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\int_V S_{ij}\,\delta\left(dE_{ij}\right) dV - \int_S F_i\, \delta\, \bar{u}_i\, dS \quad = \quad 0 \qquad (3.5)$$

และจากงานพลาสติคขั้นเพิ่ม (plastic work increment) , สมการ (2.26)

$$dw = S_{ij}\, dE_{ij} = \bar{S} d\bar{E}$$

$$\int_V \bar{S}\delta\left(d\bar{E}\right) dV - \int_S F_i\, \delta\, \bar{u}_i\, dS \quad = \quad 0 \qquad (3.6)$$

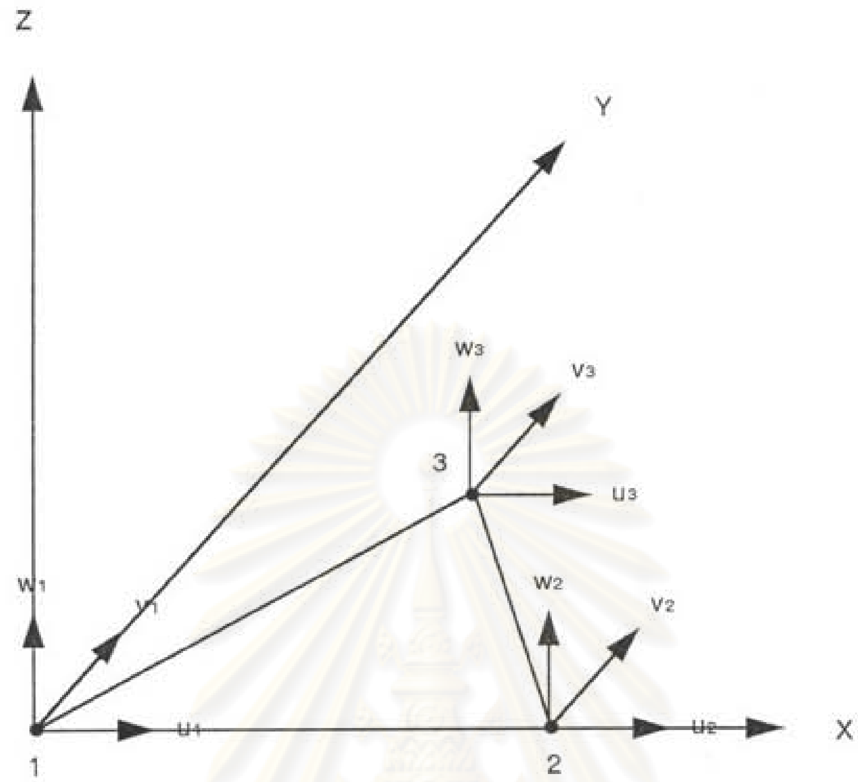
สมการนี้เป็นสมการอินทีกรัล ซึ่งจะถูกใช้ในการแปลงเป็นสมการไฟไนต์เอเลเมนต์ต่อไป

<u>การสร้างสมการไฟไนต์เอเลเมนต์</u>

การสร้างสมการในที่นี้จะใช้เอเลเมนต์แบบสามเหลี่ยม (triangular element) โดยแต่ละเอเลเมนต์มีแกนพิกัดของตัวเอง (local coordinate) ระยะเคลื่อนตัวของแต่ละเอเลเมนต์ถูกกำหนดโดยค่า u , v , w และสมมุติให้มีการเปลี่ยนแปลงเป็นแบบเชิงเส้นในแต่ละเอเลเมนต์ ดังนี้

$$\begin{aligned} u &= a_1 + b_1 x + c_1 y \\ v &= a_2 + b_2 x + c_2 y \\ w &= a_3 + b_3 x + c_3 y \end{aligned} \qquad (3.7)$$

ที่จุดต่อแต่ละจุดในแต่ละเอเลเมนต์ จะกำหนดให้ค่าเคลื่อนตัวเป็น u_i, v_i, w_i $\left(i = 1,2,3\right)$ ดังแสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แสดงค่าเคลื่อนตัวของจุดต่อในแต่ละเอเลเมนต์

สมมุติลักษณะการกระจายของการเคลื่อนตัวในแกน x , y , z เป็นแบบเชิงเส้น ดังนี้

$$\underset{(3\times1)}{\{U\}} = \underset{(3\times9)}{[N]} \; \underset{(9\times1)}{\{u\}} \qquad (3.8)$$

โดยที่ $\{U\}^T = [U, V, W]$

$$\{u\}^T = \left[u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3\right]$$

และ

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

[N] เป็นเมตริกซ์ของฟังก์ชั่นการประมาณภายใน เอเลเมนต์ (interpolation matrix)

โดยที่

$$N_i = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i x + c_i y\right) \qquad i = 1,2,3 \tag{3.9}$$

A เป็นพื้นที่เอเลเมนต์สามเหลี่ยม

$$= \frac{1}{2}\left\{x_2\left(y_3 - y_1\right) + x_1\left(y_2 - y_3\right) + x_3\left(y_1 - y_2\right)\right\} \tag{3.10}$$

และ

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 \quad, b_1 = y_2 - y_3 \quad, c_1 = x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3 \quad, b_2 = y_3 - y_1 \quad, c_2 = x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 \quad, b_3 = y_1 - y_2 \quad, c_3 = x_2 - x_1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

จากสมการ (3.8) สามารถแสดงค่าเกรเดียนของระยะเคลื่อนตัว (displacement gradient) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2A}\left(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A}\left(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left(b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2A}\left(c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3\right) \tag{3.12}$$

หรือเขียนในรูปเมตริกซ์

$$\left\{\begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{matrix}\right\} \tag{3.13}$$

ส่วนประกอบของความเครียดลากรานเจียน (lagrangian strain) มีความสัมพันธ์กับเกรเดียนของระยะเคลื่อนตัวดังสมการที่ (2.13) ในการพิจารณา จะให้ u,v,w เป็นระยะเคลื่อนตัวขั้นเพิ่ม (incremental displacement) ทำให้สมการ (2.13) เขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} dE_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\} \\ dE_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} \\ dE_{xy} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right\} \\ dE_z &= -\left(dE_x + dE_y\right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

หรือเขียนในรูปเมตริกซ์

$$\underset{3\times1}{\{dE\}} = \underset{3\times9}{[B]}\ \underset{9\times1}{\{u\}} \tag{3.15}$$

[B] เรียกว่า เมตริกซ์ของความเครียด - ระยะเคลื่อนตัว ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของระยะเคลื่อนตัว ,{u}, และประกอบด้วย เทอมที่เป็นเชิงเส้น และไม่เชิงเส้นดังนี้

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ \frac{c_1}{2} & \frac{b_1}{2} & 0 & \frac{c_2}{2} & \frac{b_2}{2} & 0 & \frac{c_3}{2} & \frac{b_3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{8A^2}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} & B_{17} & B_{18} & B_{19} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} & B_{27} & B_{28} & B_{29} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} & B_{37} & B_{38} & B_{39} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

ค่า B_{ij} $(i = 1,2,\ldots,9)$ $(j = 1,2,3)$ ถูกกำหนดโดย

$$\begin{aligned}
B_{11} &= (XBU)b_1 , & B_{21} &= (XCU)c_1 , & B_{31} &= (XBU)c_1 \\
B_{12} &= (XBV)b_1 , & B_{22} &= (XCV)c_1 , & B_{32} &= (XBV)c_1 \\
B_{13} &= (XBW)b_1 , & B_{23} &= (XCW)c_1 , & B_{33} &= (XBW)c_1 \\
B_{14} &= (XBU)b_2 , & B_{24} &= (XCU)c_2 , & B_{34} &= (XBU)c_2 \\
B_{15} &= (XBV)b_2 , & B_{25} &= (XCV)c_2 , & B_{35} &= (XBV)c_2 \\
B_{16} &= (XBW)b_2 , & B_{26} &= (XCW)c_2 , & B_{36} &= (XBW)c_2 \\
B_{17} &= (XBU)b_3 , & B_{27} &= (XCU)c_3 , & B_{37} &= (XBU)c_3 \\
B_{18} &= (XBV)b_3 , & B_{28} &= (XCV)c_3 , & B_{38} &= (XBV)c_3 \\
B_{19} &= (XBW)b_3 , & B_{29} &= (XCW)c_3 , & B_{39} &= (XBW)c_3
\end{aligned} \tag{3.17}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดย

$$\begin{aligned}
XBU &= b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 \\
XBV &= b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 \\
XBW &= b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3 \\
XCU &= c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 \\
XCV &= c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \\
XCW &= c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3
\end{aligned} \tag{3.18}$$

จากสมการ (2.38) $d\overline{E} = \sqrt{\frac{2}{3}\{dE\}^T[D]\{dE\}}$ หาแวริเอชั่น (variation) ของ $d\overline{E}$ เทียบกับ dE ได้ว่า

$$\frac{\delta\left(d\overline{E}\right)}{\delta\left(dE\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\{dE\}^T[D]\{dE\}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3}\left(\{dE\}^T[D]\{1\} + \{1\}^T[D]\{dE\}\right)$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\delta\left(d\overline{E}\right) = \frac{2}{3}\left(d\overline{E}\right)^{-1}\{dE\}^T[D]\delta(dE) \tag{3.19}$$

หาแวริเอชั่น (Variation) ของ dE เทียบกับ {u} ได้ว่า

$$\frac{\delta\left(dE\right)}{\{\delta u\}} = [B] + \left[[B]_{,\{u\}}\{u\}\right]$$

$$\delta\left(dE\right) = [B]\{\delta u\} + \left[[B]_{,\{u\}}\{u\}\right]\{\delta u\} \tag{3.20}$$

แทนค่า สมการ (3.19), (3.20) ใน (3.6) จะได้สมการอินทีกรัลของเอเลเมนต์ย่อย

$$\delta\phi^{(e)} = \int_V \overline{S}\frac{2}{3}\left(d\overline{E}\right)^{-1}\{dE\}^T[D]\left([B] + \left[[B]_{,\{u\}}\{u\}\right]\right)\{\delta u\}dV - \int_S \{\delta u\}^T[N]^T\{F\}dS$$

$$
= \int_V \frac{2}{3}\cdot\frac{\bar{S}}{d\bar{E}}\left(\{u\}^T[B]\right)[D]\left([B]+\left[[B]_{,\{u\}}\{u\}\right]\right)\{\delta u\}dV
$$

$$
-\int_S \{\delta u\}^T[N]^T\{F\}dS
$$

$$
= \int_V \frac{2}{3}\cdot\frac{\bar{S}}{d\bar{E}}\Big[\left(\{u\}^T[B][D][B]\{\delta u\}\right)
$$

$$
+\left(\{u\}^T[B][D]\left[[B]_{,\{u\}}\{u\}\right]\{\delta u\}\right)\Big]dV-\int_S \{\delta u\}^T[N]^T\{F\}dS
$$

$$
= \int_V \frac{2}{3}\cdot\frac{\bar{S}}{d\bar{E}}\Big[\{\delta u\}^T[B]^T[D][B]\{u\}
$$

$$
+\left(\{\delta u\}^T\left[[B]_{,\{u\}}\{u\}\right]^T[D][B]\{u\}\right)\Big]dV-\int_S \{\delta u\}^T[N]^T\{F\}dS
$$

$$
= \int_V \frac{2}{3}\cdot\frac{\bar{S}}{d\bar{E}}\{\delta u\}^T\left[[B]+\left[[B]_{,\{u\}}\{u\}\right]\right]^T[D][B]\{u\}dV
$$

$$
-\int_S \{\delta u\}^T[N]\{F\}dS \qquad (3.21)
$$

สมการ (3.21) เป็น สมการของแต่ละเอเลเมนต์ โดยอ้างอิงกับพิกัดของเอเลเมนต์นั้นๆ หากต้องการนำสมการของแต่ละเอเลเมนต์มารวมกัน จำเป็นต้องแปลงพิกัด ให้อยู่ในการอ้างอิงของระบบรวมก่อน ดังแสดงในรูปที่ 3.2 ในการแปลงพิกัดจะใช้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$
\bar{A} = [\lambda]\{\bar{B}-\bar{C}\} \qquad (3.22)
$$

โดยที่

$\bar{A}$ เป็นเวคเตอร์ บอกตำแหน่งของจุดใดๆ P เทียบกับแกนอ้างอิง (x, y, z)

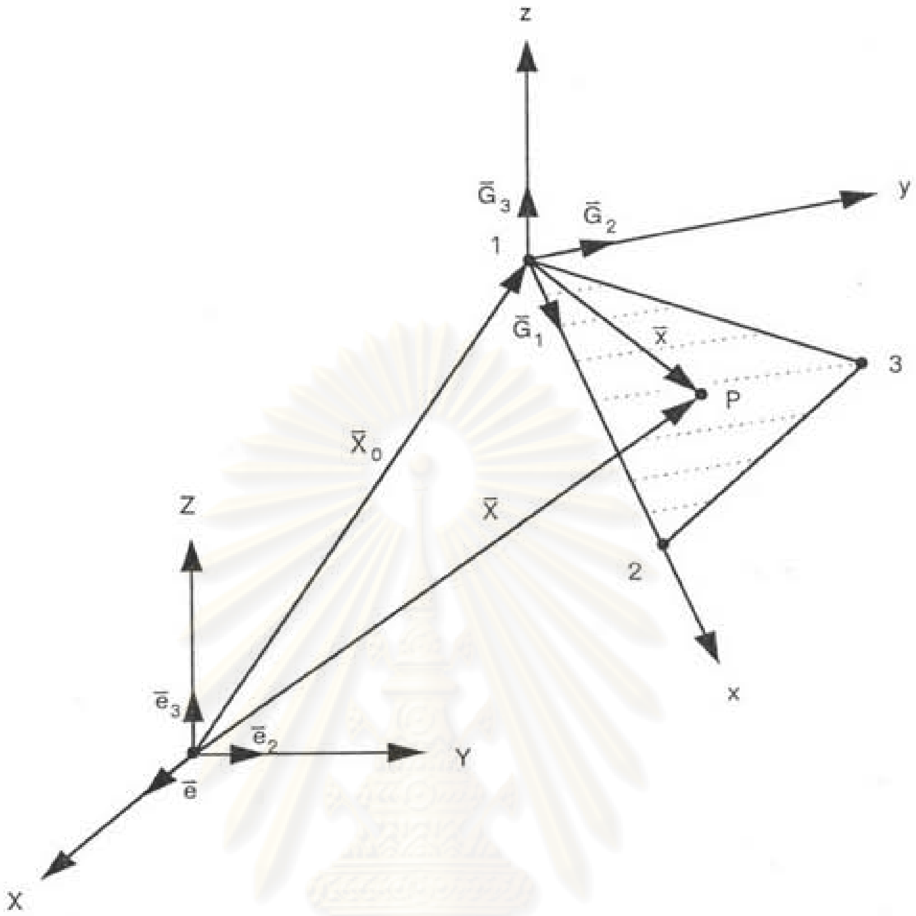
$\bar{B}$ เป็นเวคเตอร์ บอกตำแหน่งของจุดใดๆ P เทียบกับแกนอ้างอิง (x, y, z)

$\bar{C}$ เป็นเวคเตอร์ บอกตำแหน่งของแกนอ้างอิง (X,Y,Z) เทียบกับแกนอ้างอิง (x,y,z)

$[\lambda]$ เป็น เมตริกซ์ของการแปลงพิกัด ประกอบด้วยค่าโคซายบอกทิศทางดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

i17012679



รูปที่ 3.2 แสดงแกนอ้างอิงของแต่ละเอเลเมนต์และแกนอ้างอิงของระบบรวม

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \vec{G}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{G}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{G}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{G}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{G}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{G}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{G}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{G}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{G}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{bmatrix} \qquad (3.23)$$

จากรูปที่ 3.2 เวคเตอร์หนึ่งหน่วยของแกนอ้างอิง (x , y , z) สามารถแสดงในเทอมของแกนอ้างอิง (X , Y , Z) ได้ดังนี้

$$\vec{G}_1 = \frac{\vec{R}_{12}}{\left|\vec{R}_{12}\right|}$$

$$\vec{G}_3 = \frac{\vec{R}_{12} \times \vec{R}_{13}}{\left|\vec{R}_{12} \times \vec{R}_{13}\right|}$$

$$\vec{G}_2 = \vec{G}_3 \times \vec{G}_1 \qquad (3.24)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดยที่ $\vec{R}_{12}, \vec{R}_{13}$ เป็น เวคเตอร์บอกตำแหน่งของจุด 2, 3 ตามลำดับ

$$\vec{R}_{12} = (x_2 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - y_1)\vec{e}_2 + (z_2 - z_1)\vec{e}_3$$

$$\vec{R}_{13} = (x_3 - x_1)\vec{e}_1 + (y_3 - y_1)\vec{e}_2 + (z_3 - z_1)\vec{e}_3 \qquad (3.25)$$

จากสมการ (3.24) และ (3.25) สามารถหาค่าโคซายบอกทิศทาง (direction cosine) ในสมการ (3.23) ได้ดังนี้

$$\vec{G}_1 \cdot \vec{e}_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \lambda_1$$

$$\vec{G}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \lambda_2$$

$$\vec{G}_1 \cdot \vec{e}_3 = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \lambda_3$$

$$\vec{G}_3 \cdot \vec{e}_1 = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + T^2}} = \lambda_7$$

$$\vec{G}_3 \cdot \vec{e}_2 = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + T^2}} = \lambda_8$$

$$\vec{G}_3 \cdot \vec{e}_3 = \frac{T}{\sqrt{P^2 + Q^2 + T^2}} = \lambda_9$$

โดย

$$A = x_2 - x_1$$

$$B = y_2 - y_1$$

$$C = z_2 - z_1$$

$$P = (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1)$$

$$Q = (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1)$$

$$T = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$$

และ

$$\vec{G}_2 \cdot \vec{e}_1 = \lambda_8 \lambda_3 - \lambda_9 \lambda_2 = \lambda_4$$

$$\vec{G}_2 \cdot \vec{e}_2 = \lambda_9 \lambda_1 - \lambda_7 \lambda_3 = \lambda_5$$

$$\vec{G}_2 \cdot \vec{e}_3 = \lambda_7 \lambda_2 - \lambda_8 \lambda_1 = \lambda_6 \qquad (3.26)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากสมการ (3.22) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_B - X_C \\ Y_B - Y_C \\ Z_B - Z_C \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

ในทำนองเดียวกันกับการแปลงค่าระยะเคลื่อนตัว (displacement)

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

หรือในรูปเมตริกซ์ $\{\bar{u}\} = [\lambda]\{\bar{U}\}$

ในการแปลงพิกัดของระยะเคลื่อนตัวในแต่ละเอเลเมนต์ ซึ่งประกอบด้วย 3 จุด ต่อเมตริกซ์ของการเปลี่ยนพิกัด ถูกกำหนดเป็น $\underset{(9\times9)}{[\Lambda]}$

$$\underset{(9\times9)}{[\Lambda]} = \begin{bmatrix} [\lambda] & [\lambda] & [\lambda] \\ [\lambda] & [\lambda] & [\lambda] \\ [\lambda] & [\lambda] & [\lambda] \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

ให้ $[Q] = [B] + \Big[[B]_{,\{u\}}\{u\}\Big]$ และแปลงพิกัดของสมการ (3.21) จะได้

$$\psi^{(e)} = \delta\phi^{(e)} = \int_V \frac{2}{3}\frac{\bar{S}}{d\bar{E}}\{\delta U\}^T[\Lambda]^T[Q]^T[D][B][\Lambda]\{U\}dV - \int_S \{\delta U\}^T[\Lambda]^T[N]^T\{F\}dS \tag{3.30}$$

สมการที่ (3.30) เป็นสมการแบบไม่เชิงเส้นเนื่องมาจาก [B] เป็นฟังก์ชั่นของ {U} ดังนั้นในการแก้สมการจึงต้องใช้วิธีการแบบไม่เชิงเส้นในที่นี้จะใช้วิธีการของนิวตันราฟสัน (Newton Raphson) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีทางเชิงเลข (numerical method)

<u>การแก้สมการ</u>

การแก้สมการแบบไม่เชิงเส้น (non-linear) โดยวิธีการของนิวตันราฟสัน มีหลักการคือ การประมาณสมการแบบไม่เชิงเส้น โดยการกระจายเทอมออกเป็นอนุกรมของเทย์เลอร์ (Taylor's series expansion) ดังสมการ

$$F(u) \;=\; f\left(u^{*}\right)+\left[\frac{\partial f(u)}{\partial u}\right]^{*}\Delta u+\ldots \;=\; 0 \qquad (3.31)$$

โดย $F(u)$ เป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ (differentiable)

$\Delta u \;=\; u-u^{*}$

u^{*} เป็นค่าคาดเดาเริ่มต้น (initial guess)

จากสมการที่ (3.30) โดยใช้วิธีการกระจายของเทยเลอร์ จะได้ว่า

$$\psi^{(e)} \;=\; \psi^{(e)^{*}}+\left[\frac{d\psi^{(e)}}{dU}\right]\{\Delta U\}+\ldots \qquad (3.32)$$

โดยที่

$$\psi^{(e)^{*}} \;=\; \left[\int_{V}\frac{2}{3}\cdot\frac{\overline{S}}{d\overline{E}}\{\delta U\}^{T}[\Lambda]^{T}[Q]^{T}[D][B][\Lambda]\{u\}\,dV-\int_{S}\{\delta U\}^{T}[\Lambda]^{T}[N]^{T}\{F\}\,dS\right]^{*}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\left[\frac{d\psi^{(e)}}{dU}\right]^* = \left[\frac{d}{du}\left\{\int_V \frac{2}{3}\cdot\frac{\bar{S}}{d\bar{E}}\{\delta u\}^T[Q]^T[D][B]\{u\}\,dV - \int_S \{\delta u\}^T[N]^T\{F\}\,dS\right\}\frac{du}{dU}\right]^*$$

เนื่องจาก $\quad \dfrac{du}{dU} = [\Lambda]$

$$\frac{d}{du}\left[\frac{\bar{S}}{d\bar{E}}\right] = -\frac{1}{3}\bar{S}_0\left[\frac{2}{3}\{u\}^T[B]^T[D][B]\{u\}\right]^{-\frac{3}{2}}\{dE\}^T[D][Q]$$

$$\frac{d}{du}\Big[[Q]^T[D][B]\{u\}\Big] = [Q]^T[D][B] + [Q]^T[D]\Big[[B]_{,\{u\}}\{u\}\Big] + \Big[[Q]_{,\{u\}}\Big]^T[D][B]\{u\}$$

ดังนั้น

$$\psi^{(e)*} = \frac{2}{3}\frac{\bar{S}}{dE}\{\delta U\}^T[\Lambda]^T[Q]^T[D][E][\Lambda]\{U\}\,tA - \{\delta U\}^T[\Lambda]^T[N]^T\{F\}A$$

และ

$$\begin{aligned}\left[\frac{d\psi^{(e)}}{dU}\right]^* = \frac{2}{3}\frac{\bar{S}}{d\bar{E}}\{\delta U\}^T\Bigg\{ & \Big[\;[Q]^T[D]\Big[[B]_{,\{u\}}\{u\}\Big] \\ & + [Q]^T[D][B] + \Big[[Q]_{,\{u\}}\Big]^T[D][B]\{u\}\Big] \\ & - \sqrt{\frac{3}{2}}\bar{S}_0\Big[\{dE\}^T[D]\{dE\}\Big]^{-\frac{3}{2}}\{dE\}^T[D][Q][Q]^T[D][B]\{u\}\Bigg\}[\Lambda]tA\end{aligned}$$

t เป็นความหนาของแต่ละเอเลเมนต์

A เป็นพื้นที่ของแต่ละเอเลเมนต์

สมการที่ (3.32) เป็นสมการย่อยของแต่ละเอเลเมนต์ ในการสร้างระบบสมการรวมจะทำการรวมสมการย่อยทั้งหมดเข้าด้วยกัน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i^{(e)}(U) = 0 \qquad (3.33)$$

n เป็น จำนวนเอเลเมนต์ทั้งหมด

จากสมการที่ (3.32) สามารถเขียนสมการ (3.33) ได้เป็น

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\psi_i^{(e)}(U)\right]^* + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d\psi_i^{(e)}}{dU}\right]^* \left\{\Delta U\right\} = 0 \qquad (3.34)$$

$\left\{\Delta U\right\}$ เป็นค่าที่ได้จากการแก้สมการ (3.34) สมการที่ (3.34) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$[P]^* \left\{\Delta U\right\} = \left\{\{F\} - \{H\}^*\right\} \qquad (3.35)$$

สมการที่ (3.35) เป็นสมการเชิงเส้น ซึ่งสามารถใช้วิธีการแก้สมการเชิงเส้นโดยทั่วไปได้ แต่ก่อนที่จะแก้สมการ จำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขที่ขอบเขตเข้าไปในสมการก่อน โดยเงื่อนไขที่ขอบเขตมีอยู่ 2 แบบคือ ระยะเคลื่อนตัว (displacement) และ แรงที่กระทำ (traction) บริเวณใดที่รู้ระยะเคลื่อนตัว $\left\{\Delta U\right\}$ จะเท่ากับ ศูนย์ ส่วนบริเวณใดที่รู้แรงที่กระทำ ค่าของแรงกระทำจะถูกใส่เข้าไปใน {F} การแก้สมการ (3.25) จะเป็นแบบการทำซ้ำ (iteration) ซึ่งในการคำนวณครั้งแรกได้ค่า $\left\{\Delta U\right\}$ ออกมา แล้วนำไปปรับปรุง (update) ค่าคาดเดาเริ่มต้น $\{U\}^1$ คือ $\{U\}^2 = \{U\}^1 + \left\{\Delta U\right\}$ หลังจากนั้น ค่า $\{U\}^2$ จะถูกนำไปเป็นค่าคาดเดาเริ่มต้น สำหรับการแก้สมการในครั้งที่สอง การแก้สมการแบบการทำซ้ำจะหยุดก็ต่อเมื่อ ค่าอัตราส่วนนอร์ม (fractional norm) มีค่าน้อยกว่าที่กำหนด ซึ่งเรียกว่าเป็นการลู่เข้าหาคำตอบ (convergence)

การลู่เข้าหาคำตอบ สามารถกำหนดได้โดยค่า อัตราส่วนนอร์ม, $\dfrac{\|\Delta U\|}{\|U\|}$, ต้องมีค่าเท่ากับหรือน้อยกว่า 10^{-5} ซึ่งการคำนวณซ้ำจะหยุดและคำตอบที่ได้จะมีความแม่นยำ (accuracy) พอเพียง ค่านอร์ม (norm) ถูกกำหนดดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\|U\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} U_i^2}$$

$$\|\Delta U\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\Delta U_i\right)^2} \tag{3.36}$$

โดยที่ n เป็นจำนวนของสมการทั้งหมด

<u>การเพิ่มประสิทธิภาพวิธีการไฟไนต์เอเลเมนต์ด้วยการจัดเอเลเมนต์โดยอัตโนมัติ</u>

เนื่องจากความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีการไฟไนต์เอเลเมนต์ขึ้นอยู่กับขนาดของเอเลเมนต์ที่ใช้ ยิ่งเอเลเมนต์มีขนาดเล็กมากเท่าใด ความแม่นยำก็จะมากขึ้นเท่านั้น แต่ในขณะเดียวกัน ยิ่งเอเลเมนต์มีจำนวนมากเท่าใด ก็จะใช้หน่วยความจำของคอมพิวเตอร์มากขึ้น และเวลาที่ใช้การคำนวณก็จะมากขึ้นด้วย ดังนั้นหากต้องการความแม่นยำของผลลัพธ์ และการใช้หน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์น้อย ก็สามารถทำได้โดยการใช้เอเลเมนต์ขนาดเล็กเฉพาะในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์มาก ส่วนบริเวณใดที่มีการเปลี่ยนแปลงไม่มาก ก็ใช้เอเลเมนต์ขนาดใหญ่

การที่จะหาว่าบริเวณไหนควรมีเอเลเมนต์ขนาดใด จำเป็นต้องทราบว่าพารามิเตอร์ (parameter) ตัวไหนเป็นตัวหลัก (key) เช่น ปัญหาเกี่ยวกับ กลศาสตร์ของของแข็ง (solid mechanics) ความเค้น (stress) เป็นพารามิเตอร์หลัก หรือปัญหาทางด้านความร้อน หรือความเย็น อุณหภูมิ เป็นพารามิเตอร์หลัก ขั้นตอนต่อไปคือ การหาอนุพันธ์อันดับ 2 ของพารามิเตอร์หลัก ในที่นี้ คือ $\varnothing$ โดยเทียบกับพิกัดอ้างอิง x และ y ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \varnothing}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \varnothing}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \varnothing}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 \varnothing}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

ค่า λ_1, λ_2 ตัวใดที่มีค่ามากที่สุด จะถูกเลือกเพื่อใช้หาระยะห่างระหว่างจุดต่อที่น้อยที่สุด (minimum nodal spacing) ตามสมการ

$$\lambda h^2 = \text{constant} = \lambda_{max} h^2_{min} \tag{3.38}$$

h_{min} เป็นค่าระยะห่างระหว่างจุดต่อที่น้อยที่สุดซึ่งค่านี้จะถูกนำไปสร้างขนาดเอเลเมนต์ใหม่ การหาอนุพันธ์อันดับ 2 ของ $\varnothing$ สามารถหาได้จาก การหาอนุพันธ์อันดับ 1 ของ $\varnothing$ คือ

$$\frac{\partial \varnothing}{\partial x} = [N]\left\{\frac{\partial \varnothing}{\partial x}\right\} \tag{3.39}$$

[N] เป็นฟังก์ชั่นประมาณภายในของเอเลเมนต์

$\left\{\frac{\partial \varnothing}{\partial x}\right\}$ เป็นเวคเตอร์ที่ประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าของอนุพันธ์อันดับ 1

$\left\{\frac{\partial \varnothing}{\partial x}\right\}$ สามารถหาได้จากสมการ

$$\int_A \{N\}[N]\,dA \left\{\frac{\partial \varnothing}{\partial x}\right\} = \int_A \{N\}\,dA\,\frac{\hat{\partial} \varnothing}{\partial x} \tag{3.40}$$

$\frac{\hat{\partial} \varnothing}{\partial x}$ เป็นค่าคงที่เกรเดียน (gradient) ของเอเลเมนต์

อนุพันธ์อันดับ 2 หาได้โดยการใช้สมการ (3.39) อีกครั้งหนึ่ง โดยให้ $\varnothing$ แทน $\frac{\partial \varnothing}{\partial x}$ ซึ่งทราบค่าแล้ว จากสมการ (3.39) และ (3.40)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย