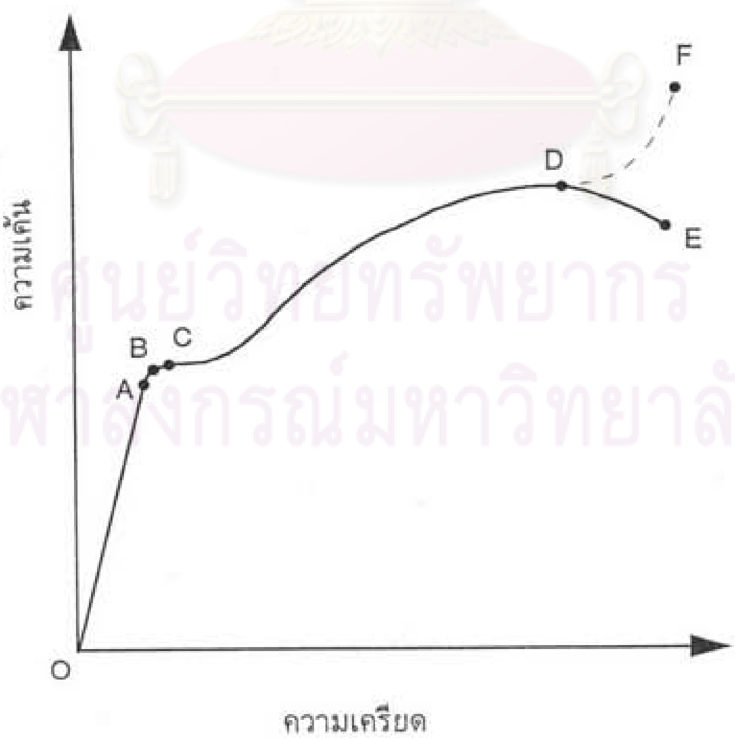
บทที่ 2

ทฤษฎี

<u>บทนำ</u>

ในการวิเคราะห์ปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในการขึ้นรูปวัสดุแผ่น จำเป็นต้องอาศัยความรู้พื้นฐานทางกลศาสตร์ของของแข็ง (solid mechanics) โดยอาศัยความสัมพันธ์ของความเค้น (stress) และความเครียด (strain) ความสัมพันธ์นี้ได้มาจากการทดลองดึงชิ้นงาน แล้วทำการบันทึกข้อมูลเกี่ยวกับแรงดึงและการเปลี่ยนแปลงความยาวของชิ้นงาน ซึ่งจะได้เส้นโค้งความสัมพันธ์ ระหว่างความเค้น และ ความเครียด ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แสดงเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

จากรูปที่ 2.1 เริ่มจากจุด O ถึงจุด A เป็นช่วงซึ่งความเค้นและความเครียดมีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น จุด B เป็นขีดจำกัดของความยืดหยุ่น (elastic limit) ซึ่งถ้าชิ้นงานถูกดึงเกินจุดนี้ไปแล้วจะไม่สามารถกลับคืนสู่สภาพเดิมหลังจากเอาภาระออกแล้วแต่จะคงรูปเป็นเช่นนั้นอย่างถาวร จุด C เป็นจุดคลาก (yield point) ซึ่งที่จุดนี้ชิ้นงานจะถูกยืดออกไปอีกแม้ว่าจะไม่มีการเพิ่มภาระให้กับชิ้นงาน จุด D เป็นจุดที่บอกถึงความเค้นประลัยซึ่งเป็นความเค้นสูงสุดก่อนที่ชิ้นงานจะถูกดึงจนขาดจากกัน จุด E เป็นจุดที่ชิ้นงานขาดจากกัน

ในการลากขึ้นรูปโลหะแผ่น ลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดจะอยู่ในช่วงของจุด B และจุด D เรียกว่าช่วงพลาสติค (plastic) ซึ่งต้องใช้ทฤษฎีทางพลาสติคซิตี้ (plasticity) ในการอธิบาย

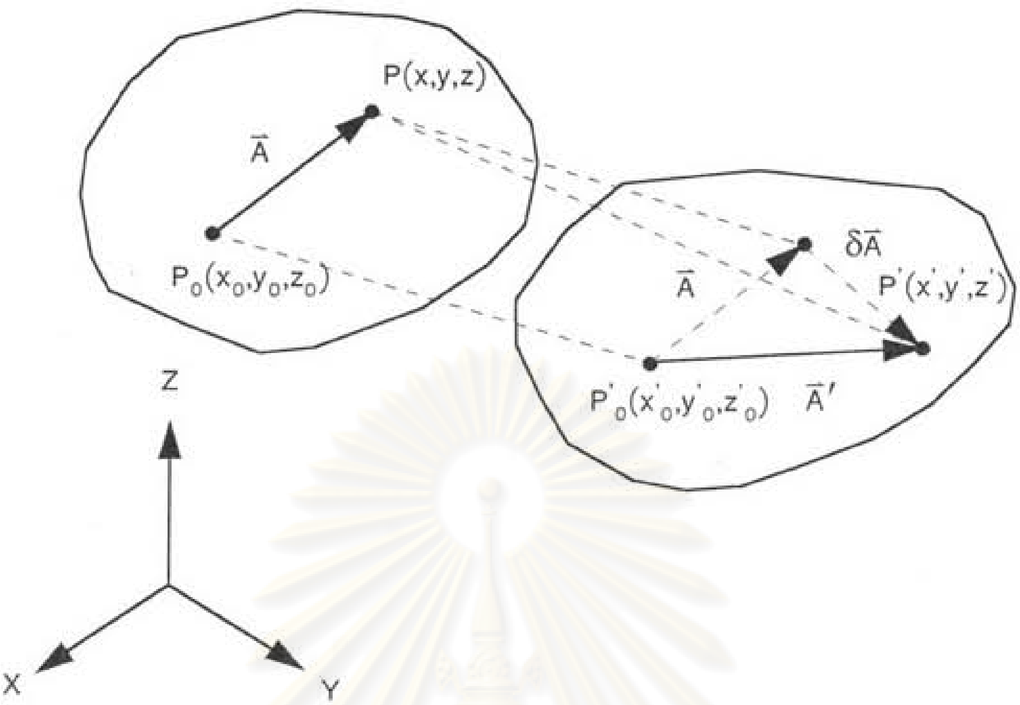
<u>การเสียรูปแบบจำกัด (finite deformation)</u>

ในการขึ้นรูปวัสดุ วัสดุมีการเสียรูปมากทำให้ทฤษฎีความยืดหยุ่น ซึ่งมีพื้นฐานมาจากการเสียรูปน้อยๆ (infinitesimal deformation) ไม่สามารถนำมาใช้อธิบายได้ การอธิบายการเสียรูปแบบจำกัดมีวิธีการอธิบายอยู่ 2 วิธี คือ ลากรานเจียน (lagrangian) และออยเลอเรียน (eulerian)

วิธีการลากรานเจียนจะใช้จุดอ้างอิงในสภาวะเริ่มต้นในการอธิบายการเสียรูป ส่วนวิธีการออยเลอเรียนจะใช้จุดอ้างอิงในสภาวะเสียรูป ในที่นี้จะใช้วิธีการลากรานเจียน ในการหาความสัมพันธ์ระหว่าง ความเครียด (strain) และระยะเคลื่อนตัว (displacement) ในการอ้างตำแหน่งแบบลากรานเจียน จะใช้ E แทนความเครียด และ S แทนความเค้น เพื่อให้แตกต่างจาก $\in$ และ σ ซึ่งใช้การอ้างตำแหน่งแบบออยเลอเรียน

พิจารณา จุด P_0 และ P เป็นจุดใดๆ ในวัสดุที่ยังไม่มีการเสียรูป ส่วน P_0' และ P' เป็นจุดใดๆ ในวัสดุที่มีการเสียรูปแล้ว จากรูปที่ 2.2 จะเห็นว่า $\bar{A}$ มีการเปลี่ยนแปลงไปเป็น $\bar{A}'$ โดยมี $\delta\bar{A}$ เป็นเวคเตอร์ของการเปลี่ยนแปลง ให้ $\bar{A}$ มีส่วนประกอบทางแกน x , y , z คือ A_x , A_y , A_z ดังนั้น $\bar{A}'$ จะมีส่วนประกอบดังนี้

$$A_x' = A_x + \delta A_x$$
$$A_y' = A_y + \delta A_y$$
$$A_z' = A_z + \delta A_z \tag{2.1}$$



รูปที่ 2.2 แสดงจุดใดๆในวัสดุก่อนและหลังการเสียรูป

ส่วนประกอบของการเคลื่อนตัวของจุด P_0 จะเป็น

$$
\begin{aligned}
u_0 &= x_0' - x_0 \\
v_0 &= y_0' - y_0 \\
w_0 &= z_0' - z_0
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

และส่วนประกอบของการเคลื่อนตัวของจุด P จะเป็น

$$
\begin{aligned}
u &= x' - x \\
v &= y' - y \\
w &= z' - z
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

ค่าเคลื่อนตัว u , v , w สามารถกระจายโดยใช้ การกระจายแบบอนุกรมของเทย์เลอร์ (Taylor's series expansion) โดยละทิ้งเทอมอันดับสูง (higher - order term) ได้ดังนี้

$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} A_x + \frac{\partial u}{\partial y} A_y + \frac{\partial u}{\partial z} A_z$$

$$v = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x}A_x + \frac{\partial v}{\partial y}A_y + \frac{\partial v}{\partial z}A_z$$

$$w = w_0 + \frac{\partial w}{\partial x}A_x + \frac{\partial w}{\partial y}A_y + \frac{\partial w}{\partial z}A_z \qquad (2.4)$$

แทนค่า u, v, w และ u_0, v_0, w_0 จาก (2.2) และ (2.3) ใน (2.4)

$$\begin{aligned}
(x'-x)-(x'_0-x_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}A_x + \frac{\partial u}{\partial y}A_y + \frac{\partial u}{\partial z}A_z \\
(y'-y)-(y'_0-y_0) &= \frac{\partial v}{\partial x}A_x + \frac{\partial v}{\partial y}A_y + \frac{\partial v}{\partial z}A_z \\
(z'-z)-(z'_0-z_0) &= \frac{\partial w}{\partial x}A_x + \frac{\partial w}{\partial y}A_y + \frac{\partial w}{\partial z}A_z
\end{aligned} \qquad (2.5)$$

ส่วนประกอบของ $\delta\bar{A}$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\delta A_x &= A'_x - A_x = (x'-x'_0)-(x-x_0) = (x'-x)-(x'_0-x_0) \\
\delta A_y &= A'_y - A'_y = (y'-y'_0)-(y-y_0) = (y'-y)-(y'_0-y_0) \\
\delta A_z &= A'_z - A_z = (z'-z'_0)-(z-z_0) = (z'-z)-(z'_0-z_0)
\end{aligned}$$

$$(2.6)$$

แทนค่าจาก (2.6) ใน (2.5)

$$\begin{aligned}
\delta A_x &= \frac{\partial u}{\partial x}A_x + \frac{\partial u}{\partial y}A_y + \frac{\partial u}{\partial z}A_z \\
\delta A_y &= \frac{\partial v}{\partial x}A_x + \frac{\partial v}{\partial y}A_y + \frac{\partial v}{\partial z}A_z \\
\delta A_z &= \frac{\partial w}{\partial x}A_x + \frac{\partial w}{\partial y}A_y + \frac{\partial w}{\partial z}A_z
\end{aligned} \qquad (2.7)$$

หาค่าส่วนประกอบของ เวคเตอร์ $\overline{A}'$ โดย

$$
\begin{aligned}
A'_x &= A_x + \delta A_x \\
A'_y &= A_y + \delta A_y \\
A'_z &= A_z + \delta A_z
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

แทนค่า $\delta A_x, \delta A_y, \delta A_z$ จาก (2.7) ใน (2.8)

$$
\begin{aligned}
A'_x &= \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)A_x + \frac{\partial u}{\partial y}A_y + \frac{\partial u}{\partial z}A_z \\
A'_y &= \frac{\partial v}{\partial x}A_x + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)A_y + \frac{\partial v}{\partial z}A_z \\
A'_z &= \frac{\partial w}{\partial x}A_x + \frac{\partial w}{\partial y}A_y + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)A_z
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

ให้ $\overline{A}'$ เป็นขนาดของ $\overline{A}'$ และ $\overline{A}$ เป็นขนาดของ $\overline{A}$

ขั้นตอนต่อไปจะเป็นการหา $\dfrac{\overline{A}'}{\overline{A}}$ เพื่อใช้ในการหาความเครียดเชิงวิศวกรรม (engineering strain) โดยเริ่มจาก การหาร (2.8) ด้วย $\overline{A}'$

$$
\frac{A'_x}{\overline{A}'} = l' = \left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)l + \frac{\partial u}{\partial y}m + \frac{\partial u}{\partial z}n\right]\frac{\overline{A}}{\overline{A}'}
$$

$$
\frac{A'_y}{\overline{A}'} = m' = \left[\frac{\partial v}{\partial x}l + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)m + \frac{\partial v}{\partial z}n\right]\frac{\overline{A}}{\overline{A}'}
$$

$$
\frac{A'_z}{\overline{A}'} = n' = \left[\frac{\partial w}{\partial x}l + \frac{\partial w}{\partial y}m + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)n\right]\frac{\overline{A}}{\overline{A}'}
\tag{2.10}
$$

โดย l',m',n' เป็นโคซายบอกทิศทาง (direction cosines) หลังการเสียรูปและ l,m,n เป็นโคซายบอกทิศทางก่อนการเสียรูป

สมการ (2.10) นำมาเขียนใหม่ ได้เป็น

$$l' = A\cdot\frac{\bar{A}}{\bar{A}'} \quad , \quad m' = B\cdot\frac{\bar{A}}{\bar{A}'} \quad , \quad n' = C\cdot\frac{\bar{A}}{\bar{A}'}$$

และเพื่อที่จะกำจัด l',m',n' ใน (2.10)

$$l'^2+m'^2+n'^2 = 1 = \left(A^2+B^2+C^2\right)\left(\frac{\bar{A}}{\bar{A}'}\right)^2$$

ซึ่งจะได้ $\left(\dfrac{\bar{A}'}{\bar{A}}\right)^2 = A^2+B^2+C^2$

$$\begin{aligned}
= {} & l^2\left[1+2\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] + \\
& m^2\left[1+2\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] + \\
& n^2\left[1+2\frac{\partial w}{\partial z}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \\
& 2lm\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \\
& 2ln\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \\
& 2mn\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.11}$$

ความเครียดเชิงวิศวกรรมถูกกำหนดให้เท่ากับ $\left(\dfrac{\overline{A}' - \overline{A}}{\overline{A}}\right) = e_r$ ดังนั้นจะเขียน (2.11) ใหม่โดยย้าย $l^2+m^2+n^2=1$ ใน 3 เทอมแรกด้านขวาของสมการ มาไว้ด้านซ้ายของสมการ ดังนี้

$$\left(\frac{\overline{A}'}{\overline{A}}\right)^2 - 1 = G$$

$$\left[\left\{\frac{\overline{A}' - \overline{A}}{\overline{A}}\right\}+1\right]^2 - 1 = G$$

$$(e_r+1)^2 - 1 = G$$

$$e_r^2 + 2e_r = G$$

ต่อไปจะทำการกำหนดเทนเซอร์ของความเครียดแบบจำกัด (finite strain tensor) โดย กำหนดให้

$$e_r^2 + 2e_r = 2\left[E_x l^2 + E_y m^2 + E_z n^2 + E_{xy}\, lm + E_{yz}\, mn + E_{zx}\, ln\right] \qquad (2.12)$$

โดย
$$E_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$E_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$E_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$E_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$E_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$E_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.13}$$

และกำหนดให้เทนเซอร์ของความเครียดแบบจำกัด (finite strain tensor) คือ E_{ij}

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} E_x & \frac{1}{2}E_{xy} & \frac{1}{2}E_{xz} \\ \frac{1}{2}E_{xy} & E_y & \frac{1}{2}E_{yz} \\ \frac{1}{2}E_{xz} & \frac{1}{2}E_{zy} & E_z \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

<u>เงื่อนไขการคลาก (yield criteria)</u>

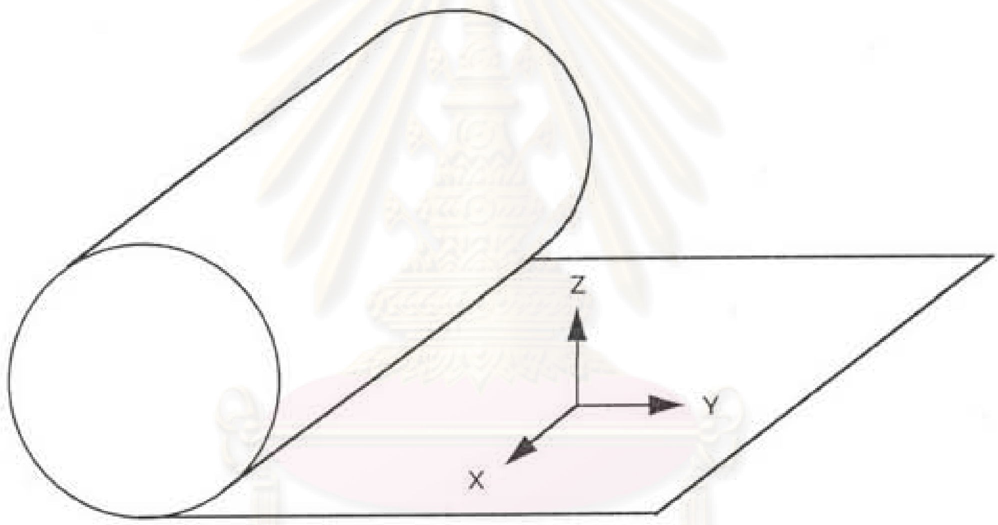
เงื่อนไขของการคลากเป็นตัวบอกถึงขอบเขตของความเค้นในเนื้อของวัสดุว่าจะถึงจุดคลาก (yield) เมื่อใด ในกรณีของการลากขึ้นรูปวัสดุแผ่น วัสดุแผ่นจะมีคุณสมบัติภายในเนื้อวัสดุไม่เท่ากันในแต่ละทิศทาง ซึ่งเรียกว่า แอนไอโซทรอปิค (anisotropic) ซึ่งเงื่อนไขของการคลากของวัสดุแบบแอนไอโซทรอปิค (anisotropic) ได้มีการเสนอไว้โดยฮิลล์(Hill) ซึ่งมีการกำหนดเงื่อนไขการคลาก (yield criterion) แบบง่ายที่สุด ดังนี้

$$2f\left(S_{ij}\right) \equiv F\left(S_y - S_z\right)^2 + G\left(S_z - S_x\right)^2 + H\left(S_x - S_y\right)^2 + 2LS_{yz}^2 + 2MS_{zx}^2 + 2NS_{xy}^2 = 1$$

(2.15)

โดย F, G, H, L, M, N เป็นค่าที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติของวัสดุแบบแอนไอโซโทรปี

ในกรณีของวัสดุแผ่น แกนหลักของแอนไอโซโทรปี (principal direction of anisotropy) จะมีแกน y ชี้ไปตามทิศทางการม้วนของวัสดุแผ่น แกน x อยู่ในแนวระนาบของแผ่นวัสดุและตั้งฉากกับแกน y ส่วนแกน z อยู่ในทิศทางความหนาของวัสดุแผ่น



รูปที่ 2.3 แสดงแกนหลักของวัสดุแผ่น

ค่า F , G , H มีความเกี่ยวพันกับความเค้นคลาก (yield stress) ในทิศทางของแกนหลัก ซึ่งสามารถแสดงได้โดยการ กำหนดให้ Y_x , Y_y , Y_z เป็นค่าความเค้นคลาก ในทิศทาง X , Y , Z ตามลำดับ จากสมการ (2.15) หากแทนค่า S_x ด้วย Y_x พบว่า S_y , S_z , S_{xy} , S_{yz} , S_{zx} จะเท่ากับศูนย์ทำให้สมการ (2.15) เหลือเพียง $G + H = \frac{1}{Y_x^2}$ และในทำนองเดียวกันกับการแทนค่า S_y ด้วย Y_y และ S_z ด้วย Y_z ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$G + H = \frac{1}{x^2}$$

$$F + H = \frac{1}{y^2}$$

$$F + G = \frac{1}{z^2} \qquad (2.16)$$

สมการที่ (2.16) สามารถนำมาจัดรูปแบบใหม่ได้เป็น

$$2F = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$2G = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

$$2H = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} \qquad (2.17)$$

ในกรณีวัสดุ แอนไอโซโทรปี ซึ่งมีคุณสมบัติของวัสดุสมมาตรกันในแนวแกน z หรือเรียกว่า พลานาร์ไอโซโทรปี (planar isotropy) บนระนาบ x-y จะได้ว่า

$$N = F + 2H = G + 2H$$

และ

$$L = M \qquad (2.18)$$

และในกรณีที่วัสดุเป็น ไอโซโทรปี (isotropy) จะได้ว่า

$$L = M = N = 3$$

$$F = G = H = 1 \qquad (2.19)$$

หากแทน (2.19) ใน (2.15) จะได้เงื่อนไขการคลากของวอนมิส (Von Mises)

$$\left(s_y - s_z\right)^2 + \left(s_x - s_y\right)^2 + \left(s_z - s_x\right)^2 + 6\left(s_{yz}^2 + s_{zx}^2 + s_{xy}^2\right) = 6k^2 \qquad (2.20)$$

<u>ความสัมพันธ์ของความเค้น และความเครียด เชิงพลาสติค</u>

โดยทั่วไปเมื่อวัสดุมีการเสียรูปอยู่ในช่วงอีลาสติค ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด จะมีลักษณะเชิงเส้น (linear) และการหาค่าความเครียดสามารถหาได้จากสถานะของความเค้นในขณะนั้นโดยไม่คำนึงถึงสภาวะก่อนหน้า (previous) ส่วนการเสียรูปในช่วงพลาสติค ความเครียดจะขึ้นอยู่กับเส้นทางของความเค้น ดังนั้นเพื่อที่จะหาความเครียดรวม (total strain) จึงจำเป็นต้องพิจารณาความเครียดในรูปของความเครียดขั้นเพิ่ม (incremental plastic strain) ซึ่งสามารถหาความเครียดรวม ได้โดยการอินทีเกรด (integrate)

ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดเชิงพลาสติคในที่นี้จะใช้แนวคิดเกี่ยวกับ พลาสติคโพเทนเชียล (plastic potential) ซึ่งมีสมมุติฐานว่า พลาสติคโพเทนเชียลเป็นฟังก์ชั่นเชิงเส้น (scalar function) ของความเค้นเขียนได้ว่า $g(s_{ij})$ ซึ่งสามารถนำไปหาส่วนประกอบของความเครียดขั้นเพิ่มเชิงพลาสติค (plastic strain increment) , dE_{ij}^{p} โดยการหาอนุพันธ์ของ $g(s_{ij})$ เทียบกับความเค้น (s_{ij})

$$dE_{ij}^{p} = \frac{\partial g(s_{ij})}{\partial s_{ij}} d\lambda' \qquad (2.21)$$

โดย $d\lambda'$ เป็นค่าคงที่บวก (non-negative constant)

g เป็น ฟังก์ชั่นของการคลาก (yield function)

สำหรับวัสดุแอนไอโซทรอปิค ซึ่งมีฟังก์ชั่นการคลากเป็น $f(s_{ij})$ และมีสมการตาม (2.15) คือ

$$2f(s_{ij}) = F(s_y - s_z)^2 + G(s_z - s_x)^2 + H(s_x - s_y)^2 + 2LS_{yz}^2 + 2MS_{zx}^2 + 2NS_{xy}^2$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$dE_{ij}^{p} = \frac{\partial f(s_{ij})}{\partial s_{ij}} d\lambda' \qquad (2.22)$$

ตัวห้อยบน p แสดงว่าเป็น ความเครียดเชิงพลาสติค ซึ่งมีความสัมพันธ์กับความเครียดเชิงอีลาสติค ดังสมการ $dE_{ij} = dE_{ij}^{e} + dE_{ij}^{p}$ ในกรณีการเสียรูปมาก ค่า dE_{ij}^{e} จะน้อยมากเมื่อเทียบกับ dE_{ij}^{p} ดังนั้น จึงสามารถละทิ้งได้

$$dE_{ij} = dE_{ij}^{p} \tag{2.23}$$

ซึ่งมีส่วนประกอบดังนี้

$$\begin{aligned}
dE_{x} &= \left[H\left(S_{x} - S_{y}\right) + G\left(S_{x} - S_{z}\right)\right] d\lambda' \\
dE_{y} &= \left[F\left(S_{y} - S_{z}\right) + H\left(S_{y} - S_{x}\right)\right] d\lambda' \\
dE_{z} &= \left[G\left(S_{z} - S_{x}\right) + H\left(S_{z} - S_{y}\right)\right] d\lambda' \\
dE_{yz} &= LS_{yz}\, d\lambda' \\
dE_{zx} &= MS_{zx}\, d\lambda' \\
dE_{xy} &= NS_{xy}\, d\lambda'
\end{aligned} \tag{2.24}$$

หากนำ 3 เทอมแรกมาบวกกัน จะเห็นว่า $dE_{x} + dE_{y} + dE_{z} = 0$ แสดงว่า (2.24) อยู่ในเงื่อนไข ของการอัดตัวไม่ได้ (incompressibility)

ฮิลล์ (Hill) ได้ตั้งข้อสันนิษฐานไว้ 3 ข้อ สำหรับการกำหนดความเค้นประสิทธิผล (effective stress) ดังนี้

1. ไม่คำนึงถึงผลของบาวซิงเจอร์ (Bauschinger 's effect)
2. ความเค้นไฮโดรสแตติก (hydrostatic stress) ไม่มีผลต่อการคลาก (yield)
3. อัตราส่วนของค่าพารามิเตอร์ของแอนไอโซทรอปิค (anisotropic parameter) มีค่าคงที่และสามารถหาค่าได้โดยการทดลอง

ด้วยข้อสันนิษฐานข้างต้น ฮิลล์ ได้กำหนดความเค้นประสิทธิผล (effective stress) เป็น

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left\{\frac{F\left(S_{y} - S_{z}\right)^{2} + G\left(S_{z} - S_{x}\right)^{2} + H\left(S_{x} - S_{y}\right)^{2} + 2LS_{yz}^{2} + 2MS_{zx}^{2} + 2NS_{xy}^{2}}{F + G + H}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.25}$$

และนอกจากนี้ฮิลล์ยังได้สันนิษฐานเพิ่มเติมว่าในกรณีของวัสดุแข็งเกร็งเชิงพลาสติค (rigid plastic) $\overline{S}$ เป็นฟังก์ชั่น (function) ของงานพลาสติค (plastic work) ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ งานพลาสติคขั้นเพิ่ม (plastic work increment) ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ดังนี้

$$dw \;=\; S_{ij}\,dE_{ij} \;=\; \overline{S}d\overline{E} \qquad (2.26)$$

จากความสัมพันธ์ของสมการ (2.26) ทำให้สามารถกำหนดค่าความเครียดประสิทธิผลขั้นเพิ่ม (effective strain increment) , $d\overline{E}$, ได้ดังนี้

$$d\overline{E} = \sqrt{\frac{3}{2}[F+G+H]}\left\{ C1 + \frac{2dE_{yz}^2}{L} + \frac{2dE_{zx}^2}{M} + \frac{2dE_{xy}^2}{N}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$C1 = F\left[\frac{GdE_y - HdE_z}{FG+GH+HF}\right]^2 + G\left[\frac{HdE_z + FdE_x}{FG+GH+HF}\right]^2 + H\left[\frac{FdE_x - GdE_y}{FG+GH+HF}\right]^2 \qquad (2.27)$$

เนื่องจากการขึ้นรูปวัสดุแผ่นความเค้นที่กระทำจะอยู่ในแนวระนาบของวัสดุแผ่นเป็นหลัก ดังนั้นจึงสามารถใช้หลักการของ ความเค้นระนาบ (plane stress) ซึ่งละทิ้งความเค้นในแนวความหนา ในการอธิบายได้ ด้วยเหตุนี้เองฟังก์ชั่นของการคลาก (yield function) ในสมการ (2.15) จึงถูกลดรูปมาเป็น

$$2f\left(S_{ij}\right) = (G+H)S_x^2 - 2HS_xS_y + (H+F)S_y^2 + 2NS_{xy}^2 \;=\; 1 \qquad (2.28)$$

และกำหนดให้ $R_0 = \frac{H}{G}$, $R_{90} = \frac{H}{F}$, $R_{45} = \frac{2N-(F+G)}{2(F+G)}$

โดย R_0 , R_{45} , R_{90} เป็นค่าอัตราส่วน แอนไอโซทรอปิค ตามทิศทางขนาน , 45° และตั้งฉากกับทิศทางการม้วนของวัสดุแผ่น เรียกว่า R-Value ซึ่งถูกกำหนดโดยอัตราส่วนของ ความเครียดในแนวความกว้างและความเครียดในแนวความหนา

$$R = \frac{\ln(w_0 / w)}{\ln(t_0 / t)} = \frac{\ln(w_0 / w)}{\ln(wl / w_0 l_0)} \tag{2.29}$$

โดยที่ w_0 เป็นความกว้างเริ่มต้นของชิ้นงานทดสอบ

l_0 เป็นความยาวเริ่มต้นของชิ้นงานทดสอบ

t_0 เป็นความหนาเริ่มต้นของชิ้นงานทดสอบ

w เป็นความกว้างปัจจุบันของชิ้นงานทดสอบ

l เป็นความยาวปัจจุบันของชิ้นงานทดสอบ

t เป็นความหนาปัจจุบันของชิ้นงานทดสอบ

ในกรณีของการลากขึ้นรูปวัสดุแผ่น จะพิจารณาว่าวัสดุมีความสมมาตรของแอนไอโซโทรปี รอบแกน Z ในระนาบ X-Y ซึ่งเรียกว่า พลานาร์แอนไอโซโทรปีซึ่งจะทำให้

$$N = F + 2H = G + 2H$$

และ

$$G = F \tag{2.30}$$

ส่วน R-Value R_0, R_{45}, R_{90} จะถูกแทนด้วย R ดังนั้น สมการ (2.24) จะลดรูปเป็น

$$\begin{aligned} dE_x &= \left[(H+G)S_x - HS_y\right]d\lambda' \\ dE_y &= \left[(H+G)S_y - HS_x\right]d\lambda' \\ dE_{xy} &= (G+2H)S_{xy}\, d\lambda' \end{aligned} \tag{2.31}$$

จาก R-Value ที่กำหนดไว้ รวมกับสมการ (2.30) , สมการ (2.31) สามารถเขียนในเทอมของ R-Value ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} dE_x &= \left[(1+R)S_x - RS_y\right]d\lambda \\ dE_y &= \left[(1+R)S_y - RS_x\right]d\lambda \\ dE_z &= -\left(dE_x + dE_y\right) \\ dE_{xy} &= (1+2R)S_{xy}\, d\lambda \end{aligned} \tag{2.32}$$

โดย $d\lambda = Fd\lambda' = Gd\lambda'$

หรือ

$$\frac{dE_x}{(1+R)S_x - RS_y} = \frac{dE_y}{(1+R)S_y - RS_x} = \frac{dE_{xy}}{(1+2R)S_{xy}} = d\lambda \qquad (2.33)$$

ความเค้นประสิทธิผล (effective stress) ในสมการ (2.25) สามารถเขียนใหม่ได้ในรูป

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{3\,(1+R)}{2\,(2+R)}} \cdot \sqrt{S_x^2 + S_y^2 - \frac{2R}{1+R} S_x S_y + \frac{2(1+2R)}{1+R} S_{xy}^2} \qquad (2.34)$$

จากสมการ (2.30) , (2.32) และ (2.34)

$$d\lambda = \frac{1}{(1+R)} \cdot \frac{d\bar{E}}{\bar{S}} \qquad (2.35)$$

และความเครียดประสิทธิผลขั้นเพิ่ม (effective strain increment)

$$d\bar{E} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{(1+R)(2+R)}{(1+2R)}} \cdot \sqrt{dE_x^2 + dE_y^2 + \frac{2R}{1+R} \cdot dE_x dE_y + \frac{2}{1+R} \cdot dE_{xy}^2} \qquad (2.36)$$

เนื่องจาก $\sqrt{\frac{3\,(1+R)}{2\,(2+R)}}$ ใน (2.34) มีค่าใกล้เคียง 1 ดังนั้น เพื่อความสะดวกในการคำนวณ จะละทิ้งค่านี้ไป ดังนั้น สมการ (2.32) จะเป็น

$$\bar{S} = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 - \frac{2R}{1+R} \cdot S_x S_y + \frac{2(1+2R)}{(1+R)} \cdot S_{xy}^2} \qquad (2.37)$$

หรือเขียนในรูปเมตริกซ์

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \{S\}^T [D_1] \{S\}}$$

โดยที่

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{Bmatrix}$$

และ

$$[D_1] = \frac{2}{3(1+R)} \begin{bmatrix} 1+R & -R & 0 \\ -R & 1+R & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+2R) \end{bmatrix}$$

ส่วนความเครียดประสิทธิผลขั้นเพิ่ม (effective strain increment) ก็จะเปลี่ยนรูปเป็น

$$d\bar{E} = \frac{(1+R)}{\sqrt{1+2R}} \cdot \sqrt{dE_x^2 + dE_y^2 + \frac{2R}{1+R} dE_x dE_y + \frac{2}{1+R} \cdot dE_{xy}^2} \qquad (2.38)$$

หรือเขียนในรูปเมตริกซ์

$$d\bar{E} = \sqrt{\frac{2}{3} \{dE\}^T [D] \{dE\}}$$

โดยที่

$$\{dE\} = \begin{Bmatrix} dE_x \\ dE_y \\ dE_{xy} \end{Bmatrix}$$

และ

$$[D] = \frac{3}{2} \frac{(1+R)}{(1+2R)} \begin{bmatrix} 1+R & R & 0 \\ R & 1+R & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ค่า R-Value ที่ใช้ในการคำนวณ จะหาจากค่าเฉลี่ยของ R_0, R_{45} และ R_{90}

$$R = \frac{1}{4}\left(R_0 + 2R_{45} + R_{90}\right) \tag{2.39}$$

<u>สมการความสมดุล (equilibrium equation)</u>

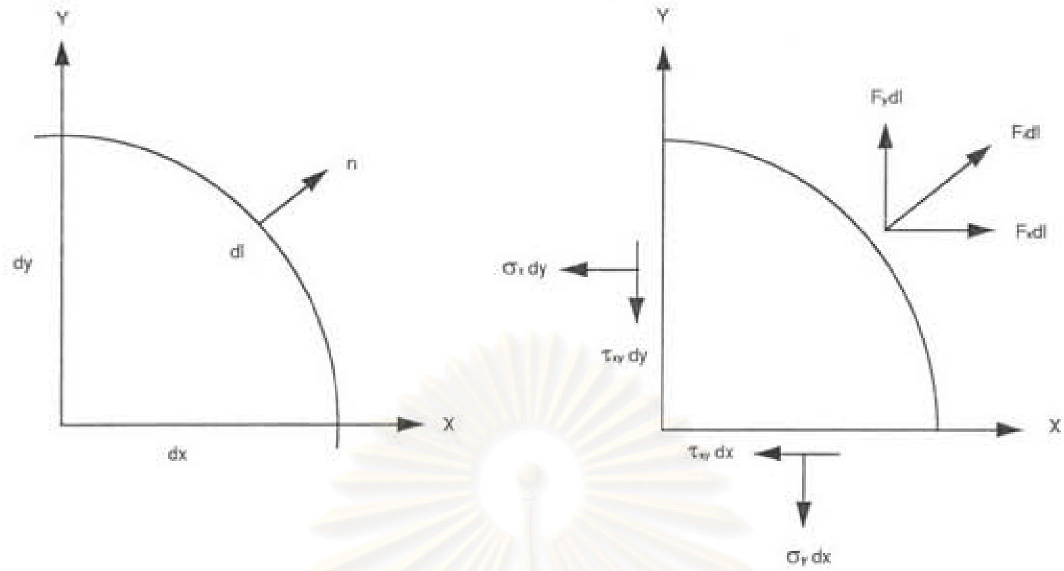
ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (cartesian coordinate system) สามารถแสดงสมการความสมดุลของวัสดุที่ถูกแรงกระทำ โดยละทิ้งแรงจากตัววัสดุ (body force) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \delta_z}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{2.40}$$

หรือเขียนในรูป เทนเซอร์ (tensor) ได้เป็น

$$\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x_i} = 0$$

สมการ (2.40) เป็นสมการความสมดุล (equilibrium equation) ภายในเนื้อวัสดุ ส่วนภายนอกพื้นผิวของวัสดุ (boundary surface) ก็จะมีความสมดุลกับแรงภายนอกที่มากระทำเช่นกัน ดังแสดงในรูปแบบ 2 มิติ ดังนี้



รูปที่ 2.4 แสดงความสมดุลของแรงภายนอก

$$F_x = \sigma_x\left(\frac{dy}{dl}\right) + \tau_{xy}\left(\frac{dx}{dl}\right)$$

$$F_y = \tau_{yx}\left(\frac{dy}{dl}\right) + \sigma_y\left(\frac{dx}{dl}\right) \qquad (2.41)$$

หรือ เขียนในรูป เทนเซอร์ (tensor) ได้เป็น

$$F_i = \sigma_{ij} n_{ij}$$

โดย $n_j = \left[n_x, n_y\right]$

และ $n_x = \frac{dy}{dl}$, $n_y = \frac{dx}{dl}$

กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ความเค้น และ ความเครียด

โดยทั่วไป กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด ในการวิเคราะห์ทางทฤษฎี มีอยู่ 2 รูปแบบใหญ่ๆ คือ

1. สมการรูปแบบ พาราโบลิค (the parabolic work-hardening law)

$$\bar{\sigma} = K\bar{\epsilon}^{n} \tag{2.42}$$

โดย K เป็นค่าคงที่

n เป็นสัมประสิทธิ์ของความเครียด (strain hardening coeffieient)

$\bar{\sigma}$ เป็นความเค้นจริงประสิทธิผล (effective true stress)

$\bar{\epsilon}$ เป็นความเครียดจริงประสิทธิผล (effective true strain)

2. สมการ สวิฟท์ (the swift equation)

$$\bar{\sigma} = A\left(B + \bar{\epsilon}\right)^{n} \tag{2.43}$$

โดย $0 \leq n \leq 1$ และ A.B,n เป็นค่าคงที่

สมการที่กล่าวถึงข้างต้น เป็นสมการที่เกี่ยวพันกับการเสียรูปน้อยๆ (infinitesimal deformation) ส่วนการเสียรูปแบบจำกัด (finite deformation) สมการความสัมพันธ์มีพื้นฐานมาจากการกระจายของพลังงานในขณะที่มีการเสียรูป สมการความสัมพันธ์จะอยู่ในรูป

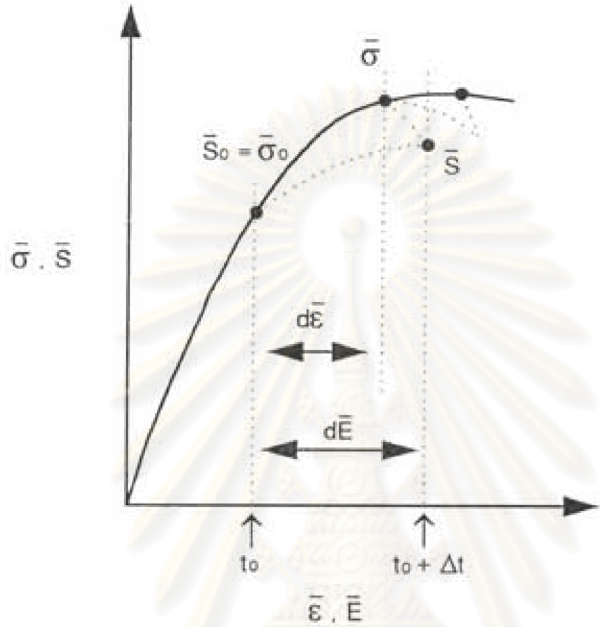
$$\bar{S} = \bar{S}_0 + H_0\left(d\bar{E}\right) \tag{2.44}$$

โดย $\bar{S}_0$ เป็นความเค้นประสิทธิผล (effective stress) ที่เวลา $t = t_0$

$H_0 = \dfrac{d\bar{S}}{d\bar{E}}$ ที่ตำแหน่ง $t = t_0$

$d\bar{E}$ เป็นความเครียดประสิทธิผลขั้นเพิ่ม (effective strain increment)

ความสัมพันธ์ระหว่าง $\dfrac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}}$ และ $\dfrac{d\bar{S}}{d\bar{E}}$ สามารถหาได้โดยการพิจารณาเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด ดังรูป



รูปที่ 2.5 เส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

สมมุติว่าในแต่ละขั้นของการเสียรูป การกระจายของพลังงาน มีค่าเท่ากัน ดังนั้น

$$\int_{\bar{\epsilon}_0}^{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma}\, d\bar{\epsilon} \;=\; \int_{\bar{E}_0}^{\bar{E}} \bar{S}\, d\bar{E} \qquad (2.45)$$

หรือประมาณได้ว่า

$$\left(\bar{\sigma}+\bar{\sigma}_0\right)\left(d\bar{\epsilon}\right) \;=\; \left(\bar{S}+\bar{S}_0\right)\left(d\bar{E}\right) \qquad (2.46)$$

แทนค่า $\bar{S}_0$ ด้วย $\bar{\sigma}_0$ แล้วจัดเรียงใหม่

$$\bar{S} \;=\; \left[\frac{d\bar{\epsilon}}{d\bar{E}}-1\right]\bar{\sigma}_0+\left[\frac{d\bar{\epsilon}}{d\bar{E}}\right]\bar{\sigma} \qquad (2.47)$$

โดยการใช้การกระจายแบบอนุกรมของเทย์เลอร์ (Taylor's series expansion) และละทิ้งเทอมอันดับสูง สามารถกระจาย $\bar{S}, \bar{\sigma}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \bar{S}_0 + H_0\left(d\bar{E}\right) \\ \bar{\sigma} &= \bar{\sigma}_0 + h_0\left(d\bar{\epsilon}\right) \end{aligned} \tag{2.48}$$

โดย $h_0 = \dfrac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}}$ ที่ $t = t_0$ แทนค่า (2.48) ใน (2.47)

$$H_0 = \left[\frac{d\bar{\epsilon}}{d\bar{E}}\right]^2 h_0 + 2\left[\frac{d\bar{\epsilon} - d\bar{E}}{d\bar{E}^2}\right]\bar{\sigma}_0 \tag{2.49}$$

เนื่องจากความเครียดจริงประสิทธิผลขั้นเพิ่ม (effective true strain increment) ถูกกำหนดโดย

$$d\bar{\epsilon} = \ln\left[1 + \frac{dl}{l_0}\right] = \frac{dl}{l_0} - \frac{1}{2}\left[\frac{dl}{l_0}\right]^2 + \ldots \tag{2.50}$$

และความเครียดลากรานเจียนประสิทธิผลขั้นเพิ่ม (effective lagrangian strain increment)

$$d\bar{E} = \frac{dl}{l_0} + \frac{1}{2}\left[\frac{dl}{l_0}\right]^2 \tag{2.51}$$

โดย $\dfrac{dl}{l_0}$ เป็นความเครียดเชิงวิศวกรรม (engineering strain) ซึ่งหาได้จากการทดลองดึงชิ้นงานตามแนวแกน แทนค่าสมการ (2.50) และ (2.51) ลงใน (2.49) โดยละทิ้งเทอมอันดับสูง สมการ (2.49) สามารถลดรูปลงได้เป็น

$$H_0 = h_0 - 2\bar{\sigma}_0 \tag{2.52}$$

จากสมการ (2.50) และสมการ (2.51) สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง $d\bar{\in}$ และ $d\bar{E}$ ได้ดังนี้

$$d\bar{\in} = \ln\left[1+\frac{dl}{l_0}\right]$$

$$= \ln\left[\sqrt{1+2d\bar{E}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(1+2d\bar{E}\right) \qquad (2.53)$$

ค่าความเครียดจริงประสิทธิผลรวม (total effective true strain) , $\bar{\in}$, สามารถหาค่าได้จาก

$$\bar{\in} = \bar{\in}_0 + d\bar{\in}$$

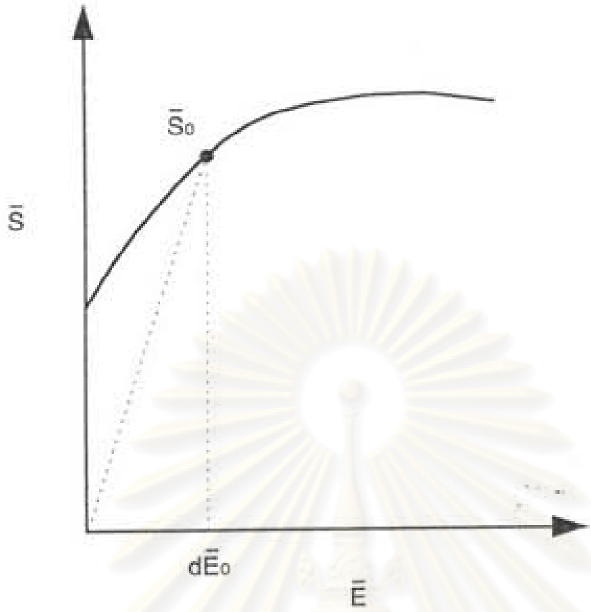
โดย $\bar{\in}_0$ เป็นความเครียดรวมที่ตำแหน่งการเสียรูปอ้างอิง ซึ่งในที่นี้หมายถึงตำแหน่งการเสียรูปก่อนหน้านี้ (previous step)

สมการ (2.44) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบใหม่โดยนำสมการ (2.52) ไปแทนค่า ดังนี้

$$\bar{S} = \bar{\sigma}_0 + \left(h_0 - 2\bar{\sigma}_0\right)d\bar{E} \qquad (2.54)$$

สมการนี้เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดโดยแสดงในเทอมของความเค้นจริง ซึ่งนำมาจากการทดลอง สำหรับบริเวณใดที่มีการเคลื่อนตัวของวัสดุน้อยมาก จะไม่สามารถใช้สมการนี้ได้ เรียกบริเวณนี้ว่า บริเวณแข็งเกร็ง (rigid zone) ซึ่งจะพิจารณาบริเวณนี้ให้มีการเสียรูปอยู่ในช่วงอีลาสติค (elastic) โดยมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\bar{S} = \frac{\bar{S}_0}{d\bar{E}_0}d\bar{E} \quad ; \quad d\bar{E} \le d\bar{E}_0 \qquad (2.55)$$



รูปที่ 2.6 แสดงความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดบริเวณแข็งเกร็ง