

บทที่ 1

บทนำ



ที่มาและความสำคัญของปัญหา

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวแบบเชิงเส้นที่มีผลกระทบเชิงสุ่มความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนจะต้องมีค่าเท่ากัน การพิจารณาว่าค่าประมาณจะมีความเชื่อถือได้มากน้อยเพียงใดนั้นโดยทั่วไปมักพิจารณาจากค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสอง(Mean Square Error: MSE) แต่ในกรณีที่ตัวแบบเชิงเส้นมีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่เท่ากัน จะต้องประมาณค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสองของตัวประมาณมาใช้เพื่อประเมินความเชื่อถือได้ของค่าประมาณดังกล่าว ถ้าตัวแบบเชิงเส้นที่สนใจศึกษาคือ

$$y_{ij} = \mu_{i\cdot} + e_{ij} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

$$\text{เมื่อ } \mu_{i\cdot} \sim N(\mu, \tau), (e_{ij} / \sigma_{i\cdot}) \sim N(0, \sigma_{i\cdot}), \sigma_{i\cdot} \sim \chi^2(\beta, \alpha)$$

โดยที่ $\mu_{i\cdot}$ และ e_{ij} มีการแจกแจงเป็นอิสระที่กำหนดโดย $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)'$ นอกจากนี้ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม $\sigma_{i\cdot}$ จะเป็นตัวแปรที่มีค่าไม่เป็นลบ มีการแจกแจงเหมือนและเป็นอิสระด้วยค่าเฉลี่ย β และความแปรปรวน α ซึ่งตัวแบบนี้ใช้จำแนกข้อมูลตามปัจจัย โดยที่วิธีทดลองของปัจจัยถูกสุ่มมาศึกษา

ถ้าวิธีทดลองที่นำมาศึกษาเป็นแบบสุ่ม (Random - effects) นั่นคือ กลุ่ม พวกหรือระดับของปัจจัยที่นำมาศึกษาถูกสุ่มเลือกมาจากกลุ่ม พวกหรือระดับต่างๆ ทั้งหมดของปัจจัยที่มีอยู่ ในกรณีนี้ผลสรุปที่ได้ไม่ใช่เป็นเฉพาะของวิธีทดลองที่นำมาศึกษาเท่านั้นแต่เป็นของกลุ่ม พวกหรือระดับต่างๆ ของปัจจัยนั้นทั้งหมด (ที่ไม่พิจารณาหมดทุกระดับเนื่องจากความสะดวกในการวิเคราะห์และเชื่อว่าระดับที่นำมาศึกษาเป็นตัวแทนของระดับทั้งหมดได้)¹

¹ สมจิต วัฒนาชยากุล, การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงสถิติ (กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ประกายพรึก, 2527), หน้า 35,36

โดยทั่วไปข้อกำหนดเกี่ยวกับข้อมูลสำหรับการวิเคราะห์ เมื่อใช้แผนการทดลองปัจจัยเดียว (Single - Factor Analysis of Variance) มีดังนี้

1. หน่วยทดลองของแต่ละระดับของปัจจัยเดียว จัดเป็นแต่ละชุดตัวอย่างสุ่มจากแต่ละประชากรของวิธีทดลองแต่ละระดับทั้งหมด m ชุดตัวอย่าง

2. แต่ละค่าข้อมูลของตัวแปรตาม y เก็บรวบรวมจากแต่ละหน่วยทดลอง ในแต่ละการทดลอง

3. ค่าข้อมูลตัวแปรตามจากแต่ละชุดตัวอย่างสุ่มนั้น ถือว่ามาจากแต่ละประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution) ด้วยค่าเฉลี่ย μ_{i0} ; $i = 1, 2, \dots, m$ ซึ่งสามารถเขียนเป็นรูปแบบทางสถิติของตัวแปรตาม y_{ij} ได้ดังนี้

$$y_{ij} = \mu_{i0} + e_{ij} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

$$\text{นั่นคือ } E(y_{ij}) = \mu_{i0}$$

$$\text{และจะได้ว่า } E(e_{ij}) = 0 \text{ ทุก } i \text{ และ } j$$

4. การแจกแจงของข้อมูลตัวแปร y จากแต่ละประชากร มีการแจกแจงด้วยความแปรปรวนเท่ากัน (Common Variance) นั่นคือ

$$\text{Var}(y_{ij}) = \text{Var}(e_{ij}) = \sigma^2 \quad \text{ทุก } i \text{ และ } j^2$$

จากข้อกำหนดที่ 3 และ 4 ความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง (Experimental Error) จะต้องมีการกระจายแบบปกติ ข้อจำกัดนี้จำเป็นโดยเฉพาะในการตรวจสอบนัยสำคัญ ถ้าข้อมูลมีค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าไม่เท่ากันก็จำเป็นต้องแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้น

การใช้ค่าประมาณค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (MSE) เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องโดยเน้นตัวแบบทั่วไปซึ่งจะมีความเป็นไปได้ในทางปฏิบัติ จะได้ขอบเขตความเชื่อมั่นได้ $(1 - \alpha)100$ เปอร์เซ็นต์ของค่าเฉลี่ยสำหรับวิธีทดลองที่ i คือ

$$\hat{\mu}_{i0} \pm t_{(\alpha/2, n_i - 1)} \sqrt{MSE(\hat{\mu})}$$

$\hat{\mu}_{i0}$ เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของค่าเฉลี่ยสำหรับวิธีทดลองที่ i

$t_{(\alpha/2, n_i - 1)}$ เป็นค่าวิกฤตที่ได้จากการแจกแจงที ที่ระดับนัยสำคัญ α และองศาความเป็นอิสระ $n_i - 1$ เมื่อ n_i คือ จำนวนซ้ำสำหรับวิธีทดลองที่ i

² สุพล ทรงควัฒนา, การวิเคราะห์เชิงสถิติ การวิเคราะห์ความแปรปรวน (กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2537), หน้า 31.

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาวิธีประมาณค่าเฉลี่ย (Mean) ของตัวแบบเชิงเส้นเมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนสุ่มไม่เท่ากัน 3 วิธี คือ
 1. วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least - Square Method หรือ OLS)
 2. วิธีประมาณอันดับที่สอง (Second - order Approximation) ของเคลฟฟีและราว (KLEFFE and RAO)
 3. วิธีประมาณที่ปรับปรุงจากวิธีของเคลฟฟีและราว (Adaptive KLEFFE and RAO's Method)
2. เพื่อเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าเฉลี่ยโดยพิจารณาจากค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสองภายใต้สถานการณ์ที่กำหนด

ข้อตกลงเบื้องต้น

1. ตัวแบบเชิงเส้นที่ใช้ในการศึกษาค้างนี้ มีรูปแบบคือ

$$y_{ij} = \mu_i + e_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

เมื่อ y_{ij} คือตัวแปรที่สนใจศึกษาของหน่วยที่ j ของวิธีทดลองที่ i

μ_i คือค่าเฉลี่ยของวิธีทดลองที่ i ซึ่งนำมาศึกษา

$$\mu_i \sim N(\mu, \tau)$$

e_{ij} คือค่าความคลาดเคลื่อนของหน่วยที่ j ของวิธีทดลองที่ i

m คือจำนวนวิธีทดลอง

n_i คือจำนวนซ้ำของวิธีทดลองที่ i

2. ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

$$(e_{ij} / \sigma_{i.}) \sim N(0, \sigma_{i.}), \quad \sigma_{i.} \sim \chi^2(\beta, \alpha)$$

สมมติฐานการวิจัย

การประมาณค่าเฉลี่ยของตัวแบบเชิงเส้นโดยวิธีประมาณอันดับที่สองของเคลฟพีและราว (KLEFFER and RAO) จะมีความถูกต้องเชื่อถือได้มากกว่าวิธีอื่นสำหรับทุกสถานการณ์ที่กำหนด

ขอบเขตการวิจัย

ขอบเขตการวิจัย มีดังนี้

1. ตัวแบบคือ $y_{ij} = \mu_{i.} + e_{ij}$
ค่าเฉลี่ยของวิธีทดลองคือ $\mu_{i.} \sim N(\mu, \tau)$,
ค่าความคลาดเคลื่อนของตัวแบบคือ $(e_{ij} / \sigma_{i.}) \sim N(0, \sigma_{i.})$,
ค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนคือ $\sigma_{i.} \sim \chi^2(\beta, \alpha)$
2. ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ใช้ คือ $\beta = 2, 3, 4, 5, 6$, $\mu = 1$, $\tau = 0.5, 1.0, 1.5$
3. จำนวนวิธีทดลอง (m) ที่ใช้ในการศึกษาเท่ากับ 3, 5, 7, 9, 25, 30, 35 จำนวนซ้ำ

ในแต่ละวิธีทดลองมีอัตราส่วน 4 แบบ คือ

1. 3: 3: 3: ... : 3
2. 10: 10: 10: ... : 10
3. 3: 10: 10: ... : 10
4. 10: 3: 3: ... : 3

4. การวิจัยครั้งนี้ได้จำลองข้อมูลให้มีสถานการณ์ตามที่กำหนดข้างต้น โดยใช้เทคนิคการจำลองแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation Technique) จากเครื่องคอมพิวเตอร์ AMDAHL 5860 โดยใช้โปรแกรมภาษาฟอร์แทรน ทำการจำลองข้อมูลซ้ำประมาณ 5,000 รอบในแต่ละสถานการณ์

เกณฑ์การคัดเลือก

เกณฑ์การคัดเลือกเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีประมาณค่าเฉลี่ยทั้งสามวิธี พิจารณาจากค่าประมาณค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสองสำหรับวิธีประมาณแต่ละวิธี ดังนี้

1. วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

ค่าประมาณค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสอง $E(MSE(\hat{\mu}_1))$ เท่ากับ

$$E\left(\sum_{j=1}^k (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 / ((n_i - 1)n_i)\right) \quad (\text{ดูรายละเอียดจากหน้าที่ 15})$$

2. วิธีประมาณอันดับที่สองของเคลฟฟีและราว

ค่าประมาณค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดยกกำลังสองของวิธีประมาณอันดับที่สองมี 2 ตัวประมาณคือ ตัวประมาณไม่เอนเอียงเชิงเส้นที่ดีที่สุดอย่างง่าย (EBLUE) และตัวประมาณอย่างง่าย (Naive) ซึ่งมีเงื่อนไขว่าจำนวนซ้ำต้องเท่ากันในทุกวิธีทดลอง โดยที่ตัวประมาณ EBLUE จะใช้เมื่อจำนวนวิธีทดลองมีน้อยและตัวประมาณอย่างง่าย (Naive) จะใช้เมื่อจำนวนวิธีทดลองมีมาก

ค่าประมาณค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสอง $E(MSE(\hat{\mu}_2))$ เท่ากับ

$$E(\hat{\mu}_2 - \mu_2)^2 \quad (\text{ดูรายละเอียดจากหน้าที่ 18})$$

ค่าประมาณค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสองอย่างง่าย $E(MSE_N(\hat{\mu}_2))$ เท่ากับ

$$E(\hat{c}(\hat{c} + \hat{\beta} / nm)) \quad (\text{ดูรายละเอียดจากหน้าที่ 26})$$

3. วิธีปรับปรุงจากวิธีของเคลฟฟีและราว

ค่าประมาณค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดยกกำลังสอง $E(MSE(\hat{\mu}_3))$ เท่ากับ

$$E(\hat{c}_i^*(\hat{c}_i^* + \hat{\beta}_i^* / n_i m)) \quad (\text{ดูรายละเอียดจากหน้าที่ 28})$$

แบ่งเป็นสถานการณ์ตามที่สนใจศึกษาจากวิธีการทดลองซึ่งมีทั้งหมด 420 สถานการณ์ คือ 1. ส่วนของจำนวนซ้ำและวิธีทดลอง แบ่งได้ 4 กรณี คือ 1.1. กรณีจำนวนวิธีทดลองตั้งแต่ 7 วิธีทดลองและจำนวนซ้ำเท่ากันซึ่งมีทั้งหมด 150 สถานการณ์ 1.2. กรณีจำนวนวิธีทดลองน้อยกว่า 7 วิธีทดลองและจำนวนซ้ำเท่ากัน ซึ่งมีทั้งหมด 60 สถานการณ์ 1.3. กรณีจำนวนวิธีทดลองตั้งแต่ 7 วิธีทดลองและจำนวนซ้ำไม่เท่ากัน ซึ่งมีทั้งหมด 150 สถานการณ์ 1.4. กรณีจำนวนวิธีทดลองน้อยกว่า 7 วิธีทดลองและจำนวนซ้ำเท่ากัน ซึ่งมีทั้งหมด 60 สถานการณ์

2. ส่วนของความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน (เบต้า) ทั้งหมด 5 ค่า คือ 2, 3, 4, 5 และ 6 โดยที่พิจารณาเบต้าคิกลุ่มอยู่กับกรณีของจำนวนวิธีทดลองและแบบจำนวนซ้ำ นั่นคือ

2.1.จำนวนวิธีทดลองตั้งแต่ 7 วิธีทดลองและจำนวนซ้ำเท่ากันกับเบต้ามี 5 กรณีกรณีละ 30 สถานการณ์ 2.2.จำนวนวิธีทดลองน้อยกว่า 7 วิธีทดลองและจำนวนซ้ำเท่ากันกับเบต้ามี 5 กรณีกรณีละ 12 สถานการณ์ 2.3.จำนวนวิธีทดลองตั้งแต่ 7 วิธีทดลองและจำนวนซ้ำไม่เท่ากันกับเบต้ามี 5 กรณีกรณีละ 30 สถานการณ์ 2.4.จำนวนวิธีทดลองน้อยกว่า 7 วิธีทดลองและจำนวนซ้ำไม่เท่ากันกับเบต้ามี 5 กรณี กรณีละ 12 สถานการณ์

3. ส่วนของความแปรปรวนของวิธีทดลอง 3 ค่า คือ 0.5, 1.0 และ 1.5 โดยที่พิจารณาความแปรปรวนของวิธีทดลองคิดกลุ่มอยู่กับกรณีของแบบจำนวนซ้ำและจำนวนวิธีทดลอง นั่นคือ 3.1.จำนวนวิธีทดลองตั้งแต่ 7 วิธีทดลองและจำนวนซ้ำเท่ากันกับความแปรปรวนของวิธีทดลอง มี 3 กรณี กรณีละ 50 สถานการณ์ 3.2.จำนวนวิธีทดลองน้อยกว่า 7 วิธีทดลองและจำนวนซ้ำเท่ากันกับความแปรปรวนของวิธีทดลอง มี 3 กรณี กรณีละ 20 สถานการณ์ 3.3.จำนวนวิธีทดลองน้อยกว่า 7 วิธีทดลองและจำนวนซ้ำไม่เท่ากันกับความแปรปรวนของวิธีทดลอง 3 กรณี กรณีละ 50 สถานการณ์ 3.4.จำนวนวิธีทดลองน้อยกว่า 7 วิธีทดลองและจำนวนซ้ำไม่เท่ากันกับความแปรปรวนของวิธีทดลอง มี 3 กรณี กรณีละ 20 สถานการณ์

สำหรับวิธีเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีประมาณข้างต้นมีขั้นตอนที่สำคัญ ดังนี้คือ

1. ในแต่ละสถานการณ์ ให้วิธีประมาณค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสองต่ำสุดเป็นอันดับ 1 รองลงมาและให้วิธีประมาณค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสองที่สูงกว่าจนถึงสูงที่สุดเป็นอันดับ 2 และ 3 ตามลำดับ

2. ในวิธีประมาณแต่ละกรณีนำอันดับที่ได้มานับจำนวนแล้วเทียบกับจำนวนสถานการณ์ทั้งหมดเพื่อหาค่าเฉลี่ยในแต่ละอันดับในกรณีนั้น ๆ ซึ่งเรียกค่าเฉลี่ยของอันดับ (P_i ; $i = 1, 2$ และ 3) แล้วนำค่าเฉลี่ยของวิธีประมาณในแต่ละกรณีมาทำการถ่วงน้ำหนัก (Weight: W_i ; $i = 1, 2$ และ 3) โดยใช้น้ำหนัก คือ ถ้าอันดับที่ 1 ให้น้ำหนักเป็น W_1 ซึ่งเท่ากับ 3 ถ้าเป็นอันดับที่ 2 ให้น้ำหนักเป็น W_2 ซึ่งเท่ากับ 2 ถ้าเป็นอันดับที่ 3 ให้น้ำหนักเป็น W_3 ซึ่งเท่ากับ 1

3. นำค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักมาคำนวณเปอร์เซ็นต์ โดยคิดจากน้ำหนักทั้งหมด $\sum_{i=1}^3 W_i = 6$

4. นำค่าเปอร์เซ็นต์สัดส่วนถ่วงน้ำหนักในวิธีประมาณของแต่ละกรณีมาเปรียบเทียบวิธีใดมีค่าเปอร์เซ็นต์สัดส่วนถ่วงน้ำหนักมากที่สุดจะเป็นวิธีที่ดีที่สุด³

³ สัมภาษณ์ดร.สรชัย พิศาลบุตร, รองคณบดีคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 18 มีนาคม 2539.

คำจำกัดความที่ใช้

1. ค่าพารามิเตอร์ (Parameter) หมายถึง ค่าแสดงลักษณะต่างๆของประชากรซึ่งเป็นสิ่งที่ผู้วิเคราะห์สนใจและต้องการทราบ

2. ประชากร (Statistical Population หรือ Population) หมายถึง กลุ่ม หรือที่รวมของสิ่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดเกี่ยวกับข้อมูลหรือลักษณะที่สนใจศึกษา

3. ค่าสถิติ (Statistic Data) หมายถึง ค่าลักษณะต่างๆ ของประชากรที่คำนวณได้จากข้อมูลจากตัวอย่าง

4. ค่าวิกฤต (Critical Value) หมายถึง ค่าที่กำหนดขอบเขตการยอมรับและขอบเขตการปฏิเสธสมมติฐาน

5. ค่าเฉลี่ยความผิดพลาดยกกำลังสอง (Mean Square Error : MSE) หมายถึง ค่าที่แสดงว่าค่าประมาณแตกต่างจากค่าจริงมากน้อยเพียงไร โดยวัดในรูปค่าเฉลี่ยกำลังสองของความแตกต่างนั้น

6. ความแปรปรวน (Variance) ของตัวประมาณ หมายถึง ค่าที่แสดงว่าค่าต่าง ๆ ของตัวประมาณแตกต่างจากค่าเฉลี่ยของตัวประมาณเพียงไร โดยวัดในรูปค่าเฉลี่ยกำลังสองของความแตกต่างนั้น

7. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงไคสแควร์ (Chi-Square Distribution)

$$f(x^2) = \frac{2^{-\frac{\beta}{2}}}{L(\frac{\beta}{2})} (x^2)^{\frac{(\beta-2)}{2}} \exp(-\frac{1}{2}x^2)$$

$$: x^2 > 0$$

$$: \sigma_{i.} \sim \chi^2 (\beta, \alpha)$$

$$: i = 1, 2, \dots, m$$

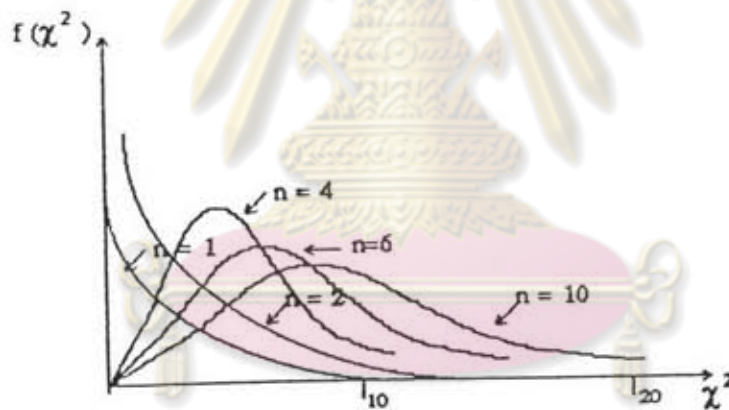
: β เป็นขั้นความเป็นอิสระ

: \exp หรือ e เป็นจำนวนอตรรกยะ (irrational) มีค่า

คุณสมบัติการแจกแจงไคสแควร์

1. การแจกแจงไคสแควร์ เป็นการแจกแจงที่ต่อเนื่อง
2. การแจกแจงไคสแควร์ มีค่าระหว่างศูนย์ จนถึงอนันต์ (infinity) คือมีค่าเป็นบวกเสมอ
3. การแจกแจงไคสแควร์ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ β ความแปรปรวนเท่ากับ α
4. ลักษณะส่วนโค้งจะเบ้ขวาเสมอ

ความสำคัญของการแจกแจงไคสแควร์คือ ใช้จำลองความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนที่มีค่าไม่เท่ากัน
รูปภาพที่ 11 แสดงตัวแปรสุ่มในหนึ่งมิติที่ต่อเนื่อง (χ^2) กับความน่าจะเป็นของการแจกแจงไคสแควร์ $f(\chi^2)$



11. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ (Normal Distribution).

จะมีรูปแบบเป็น

$$f(\mu_i) = \left(\frac{1}{2\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau} (\mu_i - \mu)^2 \right\}$$

; μ_i มีค่าเป็นจำนวนจริงใดๆ

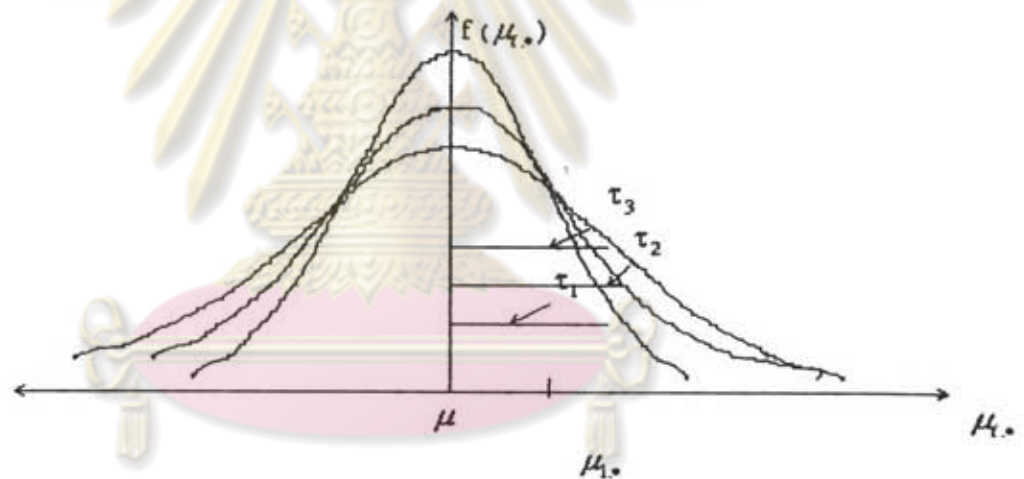
; $i = 1, 2, \dots, m$

; $\mu_i \sim N(\mu, \tau)$

คุณสมบัติของการแจกแจงปกติ

1. ส่วนโค้งมีลักษณะเป็นรูประฆังคว่ำ ความสูงส่วนโค้งขึ้นอยู่กับปริมาณของวาเรียน τ ถ้า τ น้อย ส่วนสูงของส่วนโค้งมีมาก (ในรูป $\tau_2 > \tau_1$)
2. มีแนวโน้มหาค่าเฉลี่ย (Cental tendency) ที่ส่วนกลางของส่วนโค้ง
3. ส่วนโค้งมีลักษณะทางซ้ายและทางขวาเหมือนกัน (Symmetry)
4. ไม่มีขีดจำกัด ทั้งซ้ายและขวา
5. มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน τ
6. ระยะระหว่าง μ ถึงจุดเปลี่ยนโค้งเท่ากับ $\sqrt{\tau}$

รูปภาพที่ 12 แสดงค่า (μ, σ) กับความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ $f(\mu, \sigma)$



ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

เพื่อช่วยให้ข้อสรุปที่เป็นประโยชน์ต่อผู้ใช้ในการเลือกใช้ชีวิตประจำวันค่าเฉลี่ยได้อย่างมีประสิทธิภาพและเหมาะสม เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนสุ่มไม่เป็นตามข้อตกลง ในสถานการณ์ต่าง ๆ ที่กำหนด