บทที่ 2

ทฤษฎีวิเคราะห์แผ่นพื้นบนฐานยืดหยุ่น

2.1 กล่าวนำ

ทฤษฎีและวิธีการที่นำมาวิเคราะห์พฤติกรรมของแผ่นพื้น (plate) ใน 1 มิติ ดังรูปที่ 2.1.1 คือ สมการพลังงาน โดยที่แผ่นพื้นจะมีสมมติฐานตามทฤษฎีการเปลี่ยนตำแหน่งน้อย (small deflection of plate) และตัวกลางรองรับหรือฐานยืดหยุ่น ใช้สมมติฐานของทฤษฎีแบบจำลองสามมิติ ของ Vlasov (1966) ทำการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนัก (load) ที่แผ่นพื้นรับได้กับ ค่าการโก่งตัวในกรณี ความหนาของแผ่นพื้นมีค่าคงที่ เพื่อเปรียบเทียบกับน้ำหนักที่แผ่นพื้นที่มี ความหนาเป็นฟังก์ชันอื่น ๆ รับได้ เมื่อให้ค่าการโก่งตัวของแผ่นพื้น และพื้นที่หน้าตัดเท่ากับในกรณี ความหนาคงที่

2.2 สมมติฐานและทฤษฎี

ในการศึกษาพฤติกรรมของแผ่นพื้น (plate) รูปร่างลักษณะของแผ่นพื้นจะอธิบายในลักษณะทางเรขาคณิตของผิวที่กึ่งกลาง (Middle surface) และใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนตำแหน่งน้อย (Small deflection of plates) ที่เสนอโดย Kirchoff และ Love (1974) ซึ่งจะมีสมมติฐานดังนี้

1. คุณสมบัติของแผ่นพื้นมีความยืดหยุ่น (elastic) เป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous) และมีคุณสมบัติทางกล เหมือนกันในทุกทิศทาง (isotropic)

2. แผ่นพื้นมีความราบเรียบ (Initially Flat)

3. ความกว้างของแผ่นพื้น จะต้องมีค่ามากกว่า 10 เท่าของความหนา

4. ค่าระยะโก่งของแผ่นพื้นต้องมีค่าไม่เกิน 1/10-1/5 เท่า ของ ความหนาของแผ่นพื้น

5. การเปลี่ยนรูปจะมีลักษณะเป็นเส้นที่ตั้งฉากกับเส้นกึ่งกลาง นั่นคือ การเปลี่ยนรูปเนื่องจากแรงเฉือนจะถือว่ามีค่าน้อย

6. ค่าหน่วยแรงที่ตั้งฉากกับผิวกลางจะถือว่ามีค่าน้อยและไม่นำมาคิด

7. ความเครียดที่ผิวกลางที่เกิดจากแรงในระนาบถือว่ามีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความเครียด ที่เกิดจากการดัด

8. การวิเคราะห์โครงสร้างอยู่บนพื้นฐานของทฤษฎีอิลาสติก

สมมติฐานของโมดูลัสของฐานราก ที่พิจารณาว่าเป็นระบบของสปริงที่แยกอิสระต่อกันนั้น Vlasov (1966) ศึกษาแล้วพบว่าจะทำให้การวิเคราะห์โครงสร้างที่วางบนฐานยืดหยุ่นนั้น ๆ ไปสู่ผลลัพธ์ ที่ไม่ถูกต้อง และเสนอว่า ถ้าพิจารณาโดยใช้สมมติฐานของฐานยืดหยุ่นระยะกึ่งอนันต์ (an elastic foundation isotropic semi-infinite space) จะสามารถอธิบายคุณสมบัติของฐานยืดหยุ่นในธรรมชาติ ได้ถูกต้องกว่า ซึ่งมีสมมติฐานดังนี้คือ

1. ตัวกลางรองรับมีคุณสมบัติเป็นเนื้อเดียวกันตลอด (homogeneous) และมี คุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง (isotropic) และมีความยืดหยุ่นเชิงเส้น (linearly elastic)

2. ตัวกลางรองรับ หรือฐานยืดหยุ่นมีลักษณะเป็นชั้นอัดแน่น (Compressible layer)

3. การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวราบถือว่ามีค่าน้อย เมื่อเทียบกับการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่ง

4. อัตราการลดของการโก่งตัวของฐานยืดหยุ่นต่อความลึกมีค่าคงที่

จากทฤษฎีและสมมติฐานข้างต้น เขียนสมการพลังงานของระบบใน 1 มิติ ซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 2.2.1 ได้ดังสมการที่ 2.2.1

$$V = -p_o w_o + K_3 \int_0^b h(x)^3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + k\int_0^b w^2 dx + t\int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \qquad (2.2.1)$$

โดยที่

p_o หมายถึง น้ำหนักที่กระทำต่อแผ่นพื้น

w หมายถึง ค่าการโก่งตัวของแผ่นพื้น

w_o หมายถึง ค่าการโก่งตัวของแผ่นพื้นที่จุดที่น้ำหนักกระทำ

D หมายถึง สติฟเนสการดัดของแผ่นพื้นตัน (solid plate) = $K_3 h^3$

h หมายถึง ความหนาของแผ่นพื้นกรณีความหนาคงที่

$$K_3 = \frac{E}{12\left(1-\nu^2\right)}$$

E หมายถึง โมดูลัสยืดหยุ่นของแผ่นพื้น

ν หมายถึง อัตราส่วนปัวซองของแผ่นพื้น

∇^2 หมายถึง ลาปลาซโอเปอเรเตอร์

t หมายถึง ความเครียดเฉือนของฐานยืดหยุ่น = $\frac{E_o}{4\left(1-\nu_o\right)}\int_0^H \phi^2 dz$

k หมายถึง ความเครียดอัดของฐานยืดหยุ่น = $\frac{E_o}{1-\nu_o^2}\int_0^H \phi'^2 dz$

$$E_o = \frac{E_s}{1-\nu_s^2}$$

$$\nu_o = \frac{\nu_s}{1-\nu_s}$$

Es หมายถึง โมดูลัสยืดหยุ่นของฐานยืดหยุ่น

νs หมายถึง อัตราส่วนปัวซองของฐานยืดหยุ่น

ϕ , ϕ' หมายถึง ฟังก์ชันการแปรเปลี่ยนของการโก่งตัวต่อความสูงของฐานยืดหยุ่น และค่าดีริวาทีฟของฟังก์ชัน ดังรูปที่ 2.2.2 ซึ่ง Vlasov (1966) เสนอให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันไซน์ไฮเปอร์โบลิค ดังสมการที่ 2.2.2

$$\phi(z) = \frac{\sinh \gamma \dfrac{H-z}{b}}{\sinh \dfrac{\gamma H}{b}} \qquad (2.2.2)$$

โดยที่ H หมายถึง ความหนาของฐานยืดหยุ่น ซึ่งสำหรับการวิจัยนี้จะถือว่ามีค่าเป็น อนันต์

γ หมายถึง ค่าคงที่แสดงถึงอัตราการลดของการโก่งตัวต่อความลึกของฐานยืดหยุ่น ในการวิจัยจะใช้ค่าเป็น 1 เนื่องจากพิจารณาเฉพาะฐานยืดหยุ่นที่เป็นดินเหนียว ซึ่งจะมีอัตราการลดของการโก่งตัวคงที่

b หมายถึง ครึ่งความกว้างของแผ่นพื้น

โดยมีเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ของแผ่นพื้นอิสระคือ โมเมนต์และแรงเฉือนที่ขอบของแผ่นพื้นมีค่าเป็นศูนย์ ดังสมการที่ 2.2.3 และ 2.2.4

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x=\pm b) = 0 \qquad (2.2.3)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x=\pm b) = 0 \qquad (2.2.4)$$

โดยที่ $\frac{\partial w}{\partial x}$ หมายถึง พาเชียลดิริวาทีฟของ w ต่อตัวแปร x

และสำหรับการวิจัยนี้ มีเงื่อนไขที่กำหนดขึ้นในการวิเคราะห์หาฟังก์ชันความหนาที่เหมาะสม คือ ให้มีพื้นที่หน้าตัด หรือเนื้อวัสดุของแผ่นพื้น เท่ากับในกรณีที่แผ่นพื้นมีความหนาคงที่ นั่นคือ

$$\int_{-b}^{b} h(x)dx = A = 2hb \tag{2.2.5}$$

โดยที่ A หมายถึง พื้นที่หน้าตัดของแผ่นพื้น

h(x) หมายถึง ฟังก์ชันความหนาของแผ่นพื้น

h หมายถึง ความหนาของแผ่นพื้นความหนาคงที่

b หมายถึง ครึ่งความกว้างของแผ่นพื้น

2.3 การวิเคราะห์และออกแบบที่เหมาะสม

การวิเคราะห์สมการพลังงาน (สมการที่ 2.2.1) ทำได้โดยสมมติฟังก์ชันการโก่งตัวของ แผ่นพื้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต ซึ่งจากลักษณะของน้ำหนักที่กระทำ และโครงสร้างที่สมมาตร จะสมมติในรูปของโคซายน์ฟูเรียร์ซีรีย์ และพิจารณาเพียง 3 เทอมแรก ดังสมการที่ 2.3.1 โดยถือว่าการโก่งตัวในเทอมที่มากขึ้น จะมีผลต่อการวิเคราะห์ค่าการโก่งตัวที่จุดที่น้ำหนักกระทำน้อยมาก เมื่อเทียบกับ 3 เทอมแรก

$$w(x) = A_w + B_w \cos\frac{\pi x}{2b} + C_w \cos\frac{3\pi x}{2b} \tag{2.3.1}$$

โดยที่ A_W , B_W และ C_W เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการโก่งตัวที่สมมติ

และสมมติฟังก์ชันความหนาที่เหมาะสมโดยจะสมมติฟังก์ชันใน 4 ลักษณะ ดังรูปที่ 2.3.1 คือ ฟังก์ชันที่เป็นค่าคงที่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเชิงเส้น และฟังก์ชันควอดลาติก ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังสมการที่ 2.3.2 a, 2.3.2 b , 2.3.2 c และ 2.3.2 d

$$h_1(x) = h \tag{2.3.2 a}$$

$$h_2(x) = D_2 + E_2 \cos\frac{\pi x}{2b} \tag{2.3.2 b}$$

$$h_3(x) = \begin{cases} D_3 + E_3 x \ , & 0 < x < b \\ D_3 - E_3 x \ , & -b < x < 0 \end{cases} \tag{2.3.2 c}$$

$$h_4(x) = D_4 + E_4 x^2 \qquad (2.3.2\ d)$$

โดยที่ D_2, D_3,D_4, E_2 ,E_3 และ E_4 เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันความหนาที่ 2 ,3 และ 4

แทนค่าฟังก์ชันการโก่งตัวลงในสมการเงื่อนไขขอบเขต สมการที่ 2.2.3 และ 2.2.4 จะได้ฟังก์ชันการโก่งตัวดังสมการที่ 2.3.3 และแทนค่าฟังก์ชันความหนาลงในสมการที่ 2.2.5 จะได้ฟังก์ชัน ความหนาที่สอดคล้องตามเงื่อนไขพื้นที่หน้าตัดคงที่ ดังสมการที่ 2.3.4 a , 2.3.4 b , 2.3.4 c และ 2.3.4 d

$$w(x) = A_w + C_w \left(27 \cos\frac{\pi x}{2b} + \cos\frac{3\pi x}{2b} \right) \qquad (2.3.3)$$

$$h_1(x) = h \qquad (2.3.4\ a)$$

$$h_2(x) = h - \frac{2E_2}{\pi} + E_2 \cos\frac{\pi x}{2b} \qquad (2.3.4\ b)$$

$$h_3(x) = \begin{cases} D_3 + \dfrac{2(h - D_3)}{b} x \ , & 0 < x < b \\ D_3 - \dfrac{2(h - D_3)}{b} x \ , & -b < x < 0 \end{cases} \qquad (2.3.4\ c)$$

$$h_4(x) = D_4 + \frac{3(h - D_4)}{b^2} x^2 \qquad (2.3.4\ d)$$

แทนค่าฟังก์ชันการโก่งตัวและความหนากลับไปในสมการพลังงาน (สมการที่ 2.2.1) แล้วทำการหาค่าต่ำสุดของพลังงานของแผ่นพื้นต่อการโก่งตัว นั่นคือ

$$\frac{\partial V}{\partial A_w} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial C_w} = 0 \qquad (2.3.5)$$

แก้สมการที่ 2.3.5 จะได้ค่าตัวแปร A_W และ C_W เป็นฟังก์ชันของ p_o และสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชัน ความหนา (E_2 , D_2 , D_3) ดังสมการที่ 2.3.6 a , 2.3.6 b และ 2.3.6 c

$$A_{w1} = \frac{p_o}{4bk} + \frac{-b^4kp_o}{1.64b^5k^2 + 9.43bkKE_1^3 + 7.68bkKhE_1^2 + 4.77E_1h^2bkK + 30.82bh^3kK + 19.46b^3kt} \tag{2.3.6 a}$$

$$C_{w1} = \frac{b^4kp_o}{27.87b^5k^2 + 160.05bkKE_1^3 + 130.38bkKhE_1^2 + 81.02E_1h^2bkK + 523.27bh^3kK + 330.38b^3kt}$$

$$A_{w2} = \frac{p_o}{4bk} + \frac{-b^4kp_o}{1.64b^5k^2 + 1.63bkKD_2^3 + 14.95bkKhD_2^2 + 46.59D_2h^2bkK + 52.702bh^3kK + 19.46b^3kt} \tag{2.3.6 b}$$

$$C_{w2} = \frac{b^4kp_o}{27.87b^5k^2 + 27.712bkKD_2^3 + 253.75bkKhD_2^2 + 790.91D_2h^2bkK + 894.697bh^3kK + 330.38b^3kt}$$

$$A_{w3} = \frac{p_o}{4bk} + \frac{-b^4kp_o}{1.64b^5k^2 + 18.85bkKD_3^3 + 15.36bkKhD_3^2 + 9.54D_3h^2bkK + 8.94bh^3kK + 19.46b^3kt} \tag{2.3.6 c}$$

$$C_{w3} = \frac{b^4kp_o}{27.87b^5k^2 + 320.12bkKD_3^3 + 260.76bkKhD_3^2 + 162.04D_3h^2bkK + 151.83bh^3kK + 330.39b^3kt}$$

$$A_{w4} = \frac{p_o}{4bk} + \frac{-b^4kp_o}{1.64b^5k^2 + 40.98bkKD_4^3 + 5.29bkKhD_4^2 + 0.85D_4h^2bkK + 0.12bh^3kK + 19.46b^3kt} \tag{2.3.6 d}$$

$$C_{w4} = \frac{b^4kp_o}{27.87b^5k^2 + 695.64bkKD_4^3 + 89.82bkKhD_4^2 + 14.57D_4h^2bkK + 1152.24bh^3kK + 330.38b^3kt}$$

โดยที่ A_{wn} และ B_{wn} เป็นค่าสัมประสิทธิของฟังก์ชันการโก่งตัว ของฟังก์ชันความหนาที่ n

แทนค่า A_{wn} และ C_{wn} ของแต่ละฟังก์ชัน ลงในฟังก์ชันการโก่งตัว (สมการที่ 2.3.2) แล้วหาค่าการแปรเปลี่ยนของการโก่งตัวต่ำสุดต่อฟังก์ชันความหนา เพื่อให้ได้ค่าน้ำหนักที่มากที่สุด นั่นคือ

$$\frac{\partial w(x=0)}{\partial E_2, D_3, D_4} = 0 \tag{2.3.7}$$

จากสมการที่ 2.3.7 จะได้ว่า ค่าน้ำหนักที่กระทำต่อแผ่นพื้นจะแปรผันตรงต่อค่า E_2 , D_3 ,D_4 จึงไม่สามารถหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดได้ แต่เพื่อประยุกต์ใช้กับฐานรากคอนกรีต ซึ่งมาตรฐาน ACI (318-89) ได้กำหนดเงื่อนไขที่คงที่ของพื้นที่หน้าตัดและ ความหนาต่ำสุดของโครงสร้างที่เป็นฐานราก และค่าตัวแปรคุณสมบัติของ วัสดุแผ่นพื้น คือ

1. ค่าโมดูลัสของคอนกรีต $E_c = 15120\sqrt{f_c'}$ ksc (ACI 8.5.1) เมื่อ f_c' เป็นค่ากำลังอัดของคอนกรีต
2. ค่าความหนาของแผ่นพื้นที่เป็นฐานรากเหนือเหล็กเสริมจะต้องไม่น้อยกว่า 6 นิ้ว (ACI 15.7)
3. ค่าความหนาของคอนกรีตที่ป้องกันเหล็กเสริมมีค่า 1/2 - 1 นิ้ว (ACI 7.7.1 c)
4. ค่าอัตราส่วนปัวซองของคอนกรีตมีค่า 0.1 - 0.3

สำหรับการวิจัยนี้จะใช้ค่า fc' ที่ค่า 210 ksc. และจากข้อกำหนดของ ACI ความหนารวมต่ำสุดของแผ่นพื้นที่วางบนดินคือ 7 นิ้ว หรือประมาณ 17.78 เซนติเมตร ซึ่งในที่นี้จะใช้ค่าความหนาที่ขอบของแผ่นพื้น เท่ากับ 20 และ 25 เซนติเมตร

อย่างไรก็ดีคุณสมบัติของฐานยืดหยุ่นขึ้นกับ ประเภทและสภาพของดิน (Anderson 1980 and Whitman 1980) ซึ่งมีค่าดังนี้คือ

1. ค่าโมดูลัสของดิน E_s = 220 c เมื่อ c เป็นค่ากำลังรับแรงเฉือนซึ่งขึ้นอยู่กับ ประเภท และลักษณะของดิน ดังตารางที่ 2.3.1
2. ค่าอัตราส่วนปัวซองของดิน ν_s มีค่าระหว่าง 0.3 - 0.5
3. ค่าอัตราการแปรเปลี่ยนของการโก่งตัวของฐานยืดหยุ่นต่อความลึก γ สำหรับดินเหนียวจะมีค่าคงที่ เท่ากับ 1

สำหรับการวิจัยนี้ ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของฐานยืดหยุ่นจะใช้ค่าเฉลี่ย $\overline{E_s}$ ของแต่ละช่วงสภาพ ความแข็ง ดังแสดงในตารางที่ 2.3.1

พิจารณา ความหนาที่ขอบของแผ่นพื้นมีค่าความหนาต่ำสุดตามข้อกำหนดของ ACI คือ 20 เซนติเมตร จะได้

สำหรับฟังก์ชันความหนาที่ 2 จากสมการที่ 2.3.4 b

$$h - \frac{2E_2}{\pi} + E_2 \cos\frac{\pi b}{2b} = 20$$

$$E_2 = \frac{\pi}{2}(h-20) \qquad (2.3.8\ a)$$

สำหรับฟังก์ชันความหนาที่ 3 จากสมการที่ 2.3.4 c

$$D_3 + \frac{2\left(h - D_3\right)}{b} b = 20$$

$$D_3 = \left(2h - 20\right) \qquad (2.3.8\ b)$$

สำหรับฟังก์ชันความหนาที่ 4 จากสมการที่ 2.3.4 d

$$\frac{3\left(h - D_4\right)}{b^2} b^2 + D_4 = 20$$

$$D_4 = \frac{3}{2}\left(h - 20\right) \qquad (2.3.8\ c)$$

และสำหรับความหนาที่ขอบเป็น 25 เซนติเมตร จะได้ในทำนองเดียวกัน ดังสมการที่ 2.3.9 a , 2.3.9 b และ 2.3.9 c

$$E_2 = \frac{\pi}{2}\left(h - 25\right) \qquad (2.3.9\ a)$$

$$D_3 = \left(2h - 25\right) \qquad (2.3.9\ b)$$

$$D_4 = \frac{3}{2}\left(h - 25\right) \qquad (2.3.9\ c)$$

แทนค่าฟังก์ชันความหนาจากสมการที่ 2.3.8 กลับไปในสมการที่ 2.3.6 แล้วแทนค่า A_{wn} และ C_{wn} ลงในสมการที่ 2.3.3 หาค่าความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักที่กระทำกับค่าการโก่งตัวที่จุด ที่น้ำหนักกระทำ นั่นคือ

$$w(x = 0) = w_o = A_{wn} + 28\ C_{wn} \qquad (2.3.10)$$

เมื่อ A_{wn} และ C_{wn} เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของการโก่งตัวของฟังก์ชันความหนาที่ n

ทำการเปรียบเทียบความสามารถในการรับน้ำหนักของแผ่นพื้น ของแต่ละฟังก์ชันความหนา โดย Pn′ หมายถึง ค่าความสามารถในการรับน้ำหนักของฟังก์ชันที่ n โดยให้ค่าการโก่งตัวที่จุดกึ่งกลางของแผ่นพื้น หรือจุดที่น้ำหนักกระทำมีค่าเท่ากับในกรณี ความหนาคงที่