

การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวทางการคิดเชิงสัมพันธ์
และแนวทางการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถ
ในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา



นางสาวไศจิวิจน์ เสริฐศรี

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาครุศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2553

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

DEVELOPMENT OF AN INSTRUCTIONAL PROCESS USING
RELATIONAL THINKING APPROACH AND SCAFFOLDING APPROACH
TO ENHANCE ALGEBRAIC REASONING ABILITY OF
ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS



Miss Sojiwajn Serthsri

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy Program in Curriculum and Instruction

Department of Curriculum, Instruction and Educational Technology

Faculty of Education

Chulalongkorn University

Academic Year 2010

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิด
การคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้
เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิง
พีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา

โดย

นางสาวไศจิวัฒน์ เสริฐศรี

สาขาวิชา

หลักสูตรและการสอน

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

รองศาสตราจารย์ ดร.ลำลี ทองธิว

คณะกรรมการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้บัณฑิตวิทยาลัยเป็นส่วนหนึ่ง
ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาศึกษาศาสตรบัณฑิต

.....คนบดีคณะครุศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ศิริชัย กาญจนวาสี)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.....ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.พิมพ์พันธ์ เดชะคุปต์)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม
(รองศาสตราจารย์ ดร.ลำลี ทองธิว)

.....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อลิศรา ชูชาติ)

.....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร. สิริพร ทิพย์คง)

โคจิวัฒน์ เสริฐศรี: การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิด
การเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน
ประถมศึกษา (DEVELOPMENT OF AN INSTRUCTIONAL PROCESS USING RELATIONAL
THINKING APPROACH AND SCAFFOLDING APPROACH TO ENHANCE ALGEBRAIC
REASONING ABILITY OF ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก:
รศ.ดร.อัมพร ม้าคนอง, อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม: รศ. ดร.สำลี ทองธิว, 212 หน้า.

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ 1) เพื่อพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์
และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน
ประถมศึกษา 2) เพื่อศึกษาคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิด
การเสริมต่อการเรียนรู้ที่พัฒนาขึ้น ผู้วิจัยได้พัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดย วิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูล
พื้นฐานที่สัมพันธ์กับหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน 2551 การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ความสัมพันธ์
ระหว่างแนวคิดและทฤษฎีเพื่อพัฒนากระบวนการเรียนการสอน แล้วนำไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่างซึ่งเป็น
นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนดาราคาม สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษา
กรุงเทพมหานคร ในปีการศึกษา 2553 จำนวน 52 คน โดยแบ่งเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มทดลอง 26 คน และกลุ่มควบคุม
26 คน ใช้ระยะเวลาดำเนินการทดลอง 40 ชั่วโมงต่อกลุ่ม เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แบบวัดความสามารถใน
การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน และ
แบบสัมภาษณ์ วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าสถิติที่
ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้

1. กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นประกอบด้วยขั้นตอน 4 ขั้นตอน ได้แก่ 1) ขั้นการค้นหา
ความสัมพันธ์ 2) ขั้นการใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ 3) ขั้นการสร้างข้อสรุป 4) ขั้นการตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป

2. ผลการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น มีดังนี้

2.1 ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอน
โดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ หลังการเรียนสูงกว่าก่อนการเรียน อย่างมี
นัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2.2 ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตหลังการเรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดย
ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุม
อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2.3 ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอน
โดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีพัฒนาการสูงขึ้น

ภาควิชา หลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา

สาขาวิชา หลักสูตรและการสอน

ปีการศึกษา 2553

ลายมือชื่อนิสิต.....โคจิวัฒน์ เสริฐศรี
ลายมือชื่ออ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก.....
ลายมือชื่ออ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม.....

4984729727: MAJOR CURRICULUM AND INSTRUCTION

KEYWORDS: ALGEBRAIC REASONING/ RELATIONAL THINKING APPROACH/ SCAFFOLDING APPROACH

SOJIWAJN SERTHSRI: DEVELOPMENT OF AN INSTRUCTIONAL PROCESS USING RELATIONAL THINKING APPROACH AND SCAFFOLDING APPROACH TO ENHANCE ALGEBRAIC REASONING ABILITY OF ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS. ADVISOR : ASSOC.PROF. AUMPORN MAKANONG, Ph.D., CO-ADVISOR: ASSOC.PROF. SUMLEE THONGTHEW, Ph.D., 212 pp.

The purposes of research were to: 1) develop an instructional process by using relational thinking approach and scaffolding approach to enhance algebraic reasoning ability and 2) study the quality of the developed instructional process on algebraic reasoning ability. The researcher developed the instructional process by analyzing and synthesizing basic information concerning The Basic Education Core Curriculum B.E. 2551 (A.D. 2008), mathematics instruction, and related approaches and theories. The process was experimented with forth grade students in Darakarm School, Bangkok, in academic year 2010. The samples were 52 students which were divided into two groups with 26 students in the experimental group and 26 students in the control group. The duration of the experiment was 40 hours each group. The research instruments were tests of algebraic reasoning ability. Data were analyzed by using arithmetic mean, standard deviation, and t-test. The findings were as follows:

1. The developed instructional process consisted of 4 steps, namely: 1) Finding relationships 2) Using relational thinking 3) Making a conclusion, and 4) Testing and confirming a conclusion.

2. The results of implementing the developed instructional process were:

2.1 Algebraic reasoning abilities of students after learning from the developed instructional process were significantly higher than those of before at .05 level of significance.

2.2 Algebraic reasoning abilities of students in the experimental group after learning from the developed instructional process were significantly higher than those of students in the control group at .05 level of significance.

Department: Curriculum, Instruction and Education Technology

Field of Study: Curriculum and Instruction

Academic Year: 2010

Student's Signature: Sojiwain Serthsi

Advisor's Signature: Aumporn Makanong

Co-advisor's Signature: Sumlee Thongthaw

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาให้คำปรึกษาและคำแนะนำอย่างดียิ่งของรองศาสตราจารย์ ดร. อัมพร ม้าคนอง อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ และรองศาสตราจารย์ ดร. สำลี ทองธิว อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ ที่นี้ ขอกราบขอบพระคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ซึ่งมีรองศาสตราจารย์ ดร. พิมพันธ์ เดชะคุปต์ ประธานกรรมการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อลิศรา ชูชาติ และรองศาสตราจารย์ ดร. สิริพร ทิพย์คง ที่ได้ให้คำแนะนำ ช่วยชี้แนะแก้ไขเพิ่มเติมเพื่อความสมบูรณ์ของปริญญาบัตร

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่กรุณาให้ความอนุเคราะห์ในการตรวจเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ให้ความช่วยเหลือ แนะนำปรับปรุงแก้ไขให้งานนี้มีคุณภาพ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชานนท์ จันทรา และ ดร. รุ่งทิวา แยมรุ่ง ที่ได้เสียสละเวลารวมทั้งคอยห่วงใยและให้กำลังใจตลอดเวลาในการทำวิทยานิพนธ์

นอกจากนี้ ผู้วิจัยขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสนธิวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ที่ให้ทุนแก่ผู้วิจัยในการศึกษาระดับดุษฎีบัณฑิต ขอขอบคุณผู้บริหารและคณะครูชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนดาราคาม ที่กรุณาให้ผู้วิจัยทดลองกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น และขอขอบคุณนักเรียนทุกคนที่ให้ความร่วมมือในการวิจัยครั้งนี้

ขอขอบคุณ อ.เชอริ อยู่ดี และสมาชิกทุกคนในสาขาคณิตศาสตร์ประถมศึกษา สสวท. อ.ชินษฐา ตรีหิรัญกุล อ.สุรพันธ์-สุนีย์ อินทสังข์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด เพื่อนนิสิตปริญญาเอก โดยเฉพาะอย่างยิ่ง อ.นุติยาพร วงษ์เณร รวมถึงเพื่อน ๆ พี่น้องที่ไม่ได้กล่าวนามในที่นี้ที่ให้การสนับสนุน ให้ความช่วยเหลือ และให้กำลังใจมาโดยตลอด

ท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อ พี่ชายและน้องชายที่ให้กำลังใจแก่ผู้วิจัยอย่างดียิ่งตลอดระยะเวลาที่ศึกษาและทำวิจัย คุณความดีทั้งหลายอันเกิดจากการทำวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยขออุทิศแด่คุณแม่วัฒนา เสริฐศรี ผู้เป็นแรงบันดาลใจและเป็นที่ยกย่องของผู้วิจัย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ญ
สารบัญภาพ.....	ฎ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
คำถามการวิจัย.....	10
วัตถุประสงค์การวิจัย.....	10
สมมติฐานการวิจัย.....	11
ขอบเขตการวิจัย.....	12
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	13
ประโยชน์ที่ได้รับ.....	17
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	18
แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์.....	19
แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์.....	19
แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับเครื่องหมายเท่ากับ.....	22
แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับเลขคณิตและพีชคณิต.....	27
การพัฒนาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์.....	29
แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้.....	33
ความหมายของการเสริมต่อการเรียนรู้.....	33
ทฤษฎีประวัติศาสตร์ทางสังคมของ Vygotsky.....	34
การเสริมต่อการเรียนรู้กับพื้นที่รอยต่อของพัฒนาการ.....	38
กลวิธีในการใช้การเสริมต่อการเรียนรู้.....	39
การเรียนการสอนโดยใช้การเสริมต่อการเรียนรู้.....	42
ข้อดีและข้อจำกัดของการเสริมต่อการเรียนรู้.....	44

บทที่ 2 (ต่อ)	หน้า
กระบวนการเรียนการสอน.....	45
องค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอน.....	46
การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน.....	46
การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์.....	50
การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา.....	52
ความหมายของพีชคณิต	52
การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต.....	53
การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์.....	55
การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา.....	61
การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	65
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	67
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์.....	67
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้.....	68
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา.....	69
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	74
การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน	77
ศึกษาหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน	
คณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา.....	77
ศึกษาแนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอนตาม	
แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้และการให้เหตุผล	
เชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา.....	78
พัฒนากระบวนการเรียนการสอน.....	83
ตรวจสอบคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน.....	90
แก้ไขปรับปรุงกระบวนการเรียนการสอน.....	91
การเตรียมการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน.....	100
สร้างแผนการจัดการเรียนรู้และสื่อการเรียนรู้.....	100
สร้างและพัฒนาเครื่องมือเก็บรวบรวมข้อมูล.....	109
การทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน.....	116
กำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง.....	117
ดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน.....	118

บทที่ 3 (ต่อ)	หน้า
วิเคราะห์ข้อมูล.....	123
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	125
ผลการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และ แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้.....	125
ผลการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และ แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้.....	131
ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตก่อนการเรียนของ หลังการเรียนนักเรียนกลุ่มทดลอง.....	132
ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตหลังการเรียนของ นักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	133
คุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และ แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้.....	134
ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา.....	137
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ.....	141
สรุปผลการวิจัย.....	145
อภิปรายผลการวิจัย.....	149
ข้อเสนอแนะ.....	160
รายการอ้างอิง.....	161
ภาคผนวก.....	171
ภาคผนวก ก รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ.....	172
ภาคผนวก ข ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้.....	174
ภาคผนวก ค ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล.....	194
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	212

สารบัญญัตราสาร

ตารางที่		หน้า
1	แสดงร้อยละของนักเรียนที่ตอบคำถาม $8 + 4 = \square + 5$	5
2	สรุปกลวิธีการเสริมต่อการเรียนรู้ที่ใช้ในกระบวนการเรียนการสอน.....	42
3	เกณฑ์การให้คะแนนผลการทำข้อสอบแบบอัตนัย ทักษะหรือกระบวนการ ให้เหตุผลของกรมิวิชาการ	66
4	แสดงการปรับขั้นตอนกระบวนการเรียนการสอน.....	92
5	บทบาทของครูและนักเรียนในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน	96
6	วิเคราะห์ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง สาระที่ 1 มาตรฐาน ค 1.2	101
7	วิเคราะห์ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง สาระที่ 6 มาตรฐาน ค 6.1	102
8	โครงสร้างรายหน่วย.....	105
9	โครงสร้างแผนการจัดการเรียนรู้.....	107
10	เกณฑ์ในการให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตใน ระดับประถมศึกษา.....	113
11	แบบแผนการทดลอง	118
12	เปรียบเทียบแนวการสอนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	119
13	การวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตก่อนการเรียนและ หลังการเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง.....	132
14	การวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตหลังการเรียนของ นักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	133
15	แสดงจำนวนนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมในแต่ละช่วงคะแนน.....	138
16	ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง จำนวน 6 คนที่ได้จากการสัมภาษณ์เชิงลึก.....	140

สารบัญภาพ

แผนภาพที่		หน้า
1	สรุปการคิดเชิงสัมพันธ์กับการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต.....	29
2	กรอบแนวคิดในการวิจัย.....	73
3	สรุประยะเวลาการดำเนินการวิจัย.....	76
4	ผลการวิเคราะห์สาระสำคัญของแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์.....	79
5	ผลการวิเคราะห์สาระสำคัญของทฤษฎีประวัติศาสตร์ทางสังคมของ Vygotsky กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้.....	80
6	ผลการวิเคราะห์สาระสำคัญของแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้.....	81
7	ผลการวิเคราะห์การจัดกิจกรรมเพื่อสร้างพื้นฐานสำหรับการเรียนรู้ พีชคณิตในระดับประถมศึกษา.....	83
8	ผลการสังเคราะห์สาระสำคัญของแนวคิดไปสู่หลักการของ กระบวนการเรียนการสอน.....	84
9	แสดงหลักการไปสู่วัตถุประสงค์ของกระบวนการเรียนการสอน.....	86
10	ผลการสังเคราะห์หลักการไปสู่แนวทางจัดการเรียนการสอน.....	87
11	ผลการสังเคราะห์แนวทางจัดการเรียนการสอนไปสู่กระบวนการเรียน การสอน.....	88
12	แสดงการปรับกระบวนการเรียนการสอนจากแนวทางการจัดการเรียน การสอนเดิม.....	94
13	แสดงรายละเอียดของกระบวนการเรียนการสอน	95
14	การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน.....	99
15	แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต.....	126
16	แสดงบันทึกวิธีคิดของนักเรียน.....	136
17	แสดงบันทึกวิธีคิดของนักเรียน.....	155
18	แสดงบันทึกวิธีคิดของนักเรียน.....	155
19	แสดงบันทึกวิธีคิดของนักเรียน.....	156
20	แสดงบันทึกวิธีคิดของนักเรียน.....	156

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัจจุบันพีชคณิตได้กลายเป็นหัวข้อที่ได้รับความสนใจจากนักการศึกษาและผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ในหลาย ๆ ประเทศ ดังที่ Greenes และ Findell (1999) ได้กล่าวถึงความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต (Algebraic Reasoning) ของนักเรียนว่าเปรียบเสมือนเป็นหัวใจของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในสาขาอื่น ๆ และเป็นพื้นฐานที่ดีต่อการทำงานในหลายสาขาอาชีพ เช่นเดียวกับที่ National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000) กล่าวว่าวิธีการและแนวคิดทางพีชคณิตช่วยส่งเสริมงานทางด้านคณิตศาสตร์ในหลาย ๆ แขนง เช่น เครือข่ายการสื่อสาร กฎทางฟิสิกส์ แบบจำลองของประชากร และผลทางสถิติก็สามารถนำเสนอโดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต Kaput และ Blanton (2000) ได้กล่าวว่าการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเป็นกระบวนการให้นักเรียนสร้างความคิดทางคณิตศาสตร์จากชุดตัวอย่างเฉพาะแล้วสร้างให้อยู่ในรูปทั่วไป โดยผ่านการอภิปรายหาข้อโต้แย้งและอธิบายสิ่งดังกล่าวในรูปทั่วไปมากยิ่งขึ้นตามวิธีการที่เหมาะสมกับระดับอายุ

นอกจากนี้ ในช่วงที่ผ่านมา มีงานวิจัยในต่างประเทศ ดังเช่น Cai, Lew, Morris, Moyer, Ng, และ Schmittau (2005) ได้ร่วมมือกันศึกษาการพัฒนาพีชคณิตในหลักสูตรระดับประถมศึกษาของประเทศจีน เกาหลีใต้ สิงคโปร์ รัสเซีย และสหรัฐอเมริกา ซึ่งพบว่าหลักสูตรพีชคณิตระดับประถมศึกษาทั้ง 5 ประเทศมีเป้าหมายหลักคือ เพื่อให้นักเรียนเรียนรู้ความคิดรวบยอดเชิงพีชคณิต โดยมุ่งให้นักเรียนมีความเข้าใจอย่างลึกซึ้งในเรื่องความสัมพันธ์เชิงปริมาณ โดยหลักสูตรของประเทศจีนเน้นให้นักเรียนได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการคิดเชิงเลขคณิตกับวิธีการคิดเชิงพีชคณิตในการแสดงความสัมพันธ์เชิงปริมาณ ประเทศเกาหลีใต้ เน้นกิจกรรมการดำเนินการด้านรูปธรรมอย่างหลากหลาย เพื่อใช้ลดช่องว่างด้านความคิดความเข้าใจระหว่างพีชคณิตกับเลขคณิต ประเทศสิงคโปร์ใช้สมการรูปภาพแทนความสัมพันธ์เชิงปริมาณเพื่อช่วยในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนมีความหมาย ส่วนประเทศรัสเซียมุ่งเน้นการพัฒนาความเข้าใจเชิงพีชคณิตโดยการจำลองการแสดงจำนวนด้วยกิจกรรมทางคณิตศาสตร์และความสัมพันธ์ด้านคณิตศาสตร์ และสำหรับสหรัฐอเมริกามุ่งเน้นให้นักเรียนศึกษาความสัมพันธ์เชิงปริมาณโดยวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทต่าง ๆ

อีกทั้งยังมีนักคณิตศาสตร์หลายท่านจากสถาบันต่าง ๆ ที่พยายามปฏิรูปเรื่องการเรียนการสอนการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต (Irwin และ Britt, 2005; Knuth, Stephens, McNeil และ Alibabi, 2006; NCTM, 2000 อ้างถึงใน Hunter, 2007) โดยมีข้อเสนอแนะการปฏิรูปดังกล่าวว่าในปัจจุบันควรสอนพีชคณิตในทุกระดับชั้น เริ่มตั้งแต่ในโรงเรียนประถมศึกษา (NCTM, 2000) โดยกำหนดให้มีจุดเน้นที่แตกต่างจากเดิม คือวิชาพีชคณิตโดยทั่วไปในระดับมัธยมศึกษาจะเรียนพื้นฐานในเรื่องขั้นตอนการจัดกระทำกับสัญลักษณ์และการนำไปใช้เชื่อมโยงกับชีวิตจริงเพียงเล็กน้อย แต่พีชคณิตระดับประถมศึกษาเน้นอยู่ที่การคิดให้เหตุผลซึ่งเป็นการเตรียมตัวนักเรียนให้มีการคิดอย่างเป็นคณิตศาสตร์ และสามารถนำไปใช้ได้ในทุกสาระของคณิตศาสตร์ ซึ่งการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตจะเกี่ยวข้องกับการสรุปในรูปแบบทั่วไปที่เกิดจากประสบการณ์กับจำนวนและการคิดคำนวณ การสร้างแบบแผนจากความคิดที่ใช้สัญลักษณ์ที่มีความหมาย และการสำรวจความคิดรวบยอดเกี่ยวกับแบบรูปและฟังก์ชัน (Van De Walle, 2007)

นอกจากนี้ Yackel (1997) เสนอเนื้อหาให้นักเรียนประถมศึกษาเรียนพีชคณิตในลักษณะของเรื่องแบบจำลอง (Modeling) การหาแบบรูป (Pattern Finding) และการศึกษาโครงสร้าง (The Study of Structure) ซึ่งการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เกี่ยวกับเรื่องเหล่านี้ จะเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สร้างการให้เหตุผลที่แสดงถึงพื้นฐานของวิธีการคิดที่แตกต่างกัน ดังนั้นจุดเน้นของการจัดการเรียนรู้พีชคณิตในระดับประถมศึกษา จึงไม่ใช่อยู่ที่กิจกรรมที่มีลักษณะเป็นพีชคณิต แต่ต้องเน้นที่การคิดและการให้เหตุผลของนักเรียน Battista และ Brown (1998) อธิบายว่าเพื่อให้ นักเรียนสามารถใช้พีชคณิตอย่างมีความหมาย ต้องเริ่มต้นจากการสอนให้เข้าใจความหมายไม่ใช่มุ่งไปที่การใช้สัญลักษณ์หรือการหาคำตอบ การสอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาจึงต้องเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดและแสดงความคิดเกี่ยวกับเรื่องของจำนวนและสมบัติของจำนวน จนกว่านักเรียนจะสามารถใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตได้อย่างเป็นธรรมชาติ

เอกสารงานวิจัยด้านการเรียนคณิตศาสตร์จำนวนมากที่รายงานเกี่ยวกับปัญหาหรือความยากลำบากในการเรียนพีชคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา เช่น ความยากลำบากของนักเรียนในการแก้สมการพีชคณิต การแปลความหมายจากสัญลักษณ์แสดงจำนวน การแปลความหมายจากภาษาไปเป็นสัญลักษณ์ และการทำความเข้าใจรูปทั่วไปของส่วนประกอบต่าง ๆ เชิงโครงสร้างของพีชคณิต (Clement, 1982; Sfard, 1991; Kieran, 1992; Kenney และ Silver, 1997; MacGregor และ Stacey, 1997; Stephens, 2003 อ้างถึงใน Stephens, 2006) ซึ่งสอดคล้องกับรายงานการประเมินผลการเรียนรู้จาก PISA (Programme for International Student Assessment) 2003 (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [สสวท.])

(2550) พบว่าถ้าจำแนกคณิตศาสตร์ตามแขนงวิชา (Strand) ได้แก่ พีชคณิต (Algebra) วิทยาศาสตร์คณิต (Discrete Mathematics) ฟังก์ชัน (Functions) เรขาคณิต (Geometry) จำนวน (Number) ความน่าจะเป็น (Probability) และสถิติ (Statistics) ผลการประเมินชี้ว่าพีชคณิตเป็นเรื่องยากที่สุดสำหรับนักเรียนอายุ 15 ปีในทุกประเทศ โดยเฉพาะอย่างยิ่งพบว่านักเรียนไทยมีความอ่อนด้อยในด้านพีชคณิตมากที่สุดเมื่อเทียบกับแขนงวิชาอื่น ๆ นอกจากนี้ Stephens (2006) ได้เสนอแนะว่าปัญหาดังกล่าว เกิดจากการที่นักเรียนขาดความเข้าใจหลักสำคัญที่จะส่งเสริมการเรียนรู้พีชคณิตสองประการคือ การเท่ากัน (Equivalence) และแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ (Relational Thinking Approach) ซึ่งสอดคล้องกับ Hunter (2007) ที่กล่าวว่าในการพัฒนาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน จำเป็นต้องเอาใจใส่ต่อการพัฒนารูปแบบของแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และยังคงจำเป็นต้องพัฒนาความเข้าใจของนักเรียน ในเรื่องเครื่องหมายเท่ากับว่าเป็นตัวแทนความสัมพันธ์ของการเท่ากัน

เกี่ยวกับการเท่ากันมีหลักฐานจากงานวิจัยด้านคณิตศาสตร์ที่แสดงว่า มีนักเรียนจำนวนมากขาดความเข้าใจอย่างลึกซึ้งในเรื่องของการเท่ากัน เช่น จากงานวิจัยของ Behr, Erlwanger และ Nichols (1980), Kieran (1981), Rittle-Johnson และ Alibali (1999) ได้แสดงว่านักเรียนประถมศึกษา มักจะมองดูเครื่องหมายเท่ากับเหมือนกับว่า เป็นการแจ้งให้ทราบถึงผลของการดำเนินการทางเลขคณิต โดยยึดถือการดำเนินการเป็นหลักในการมอง มากกว่าจะมองว่าเป็นสัญลักษณ์ของการเท่ากันในคณิตศาสตร์ การเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับในลักษณะนี้ ถือว่าเป็นความเข้าใจความคิดรวบยอดในเรื่องการเท่ากันคลาดเคลื่อน เพราะไม่ได้แสดงถึงความเข้าใจทั่วไปว่า สัญลักษณ์นี้แสดงถึงความสัมพันธ์ที่เท่ากันระหว่างจำนวนสองจำนวน แต่เข้าใจคลาดเคลื่อนว่าสัญลักษณ์นั้น แสดงถึงยอดรวมทั้งหมด หรือคำตอบ ดังเช่น ผลงานวิจัยที่ได้จากนักเรียนระดับประถมศึกษาของ Alibali (1999) และจากงานวิจัยของ McNeil และ Alibali (2005) ที่ให้นักเรียนแก้สมการ $4 + 3 + 5 = \square + 5$ แล้วพบว่า มีนักเรียนจำนวนมากทำการบวกจำนวนทุกจำนวน ($4 + 3 + 5 + 5$) แล้วใส่คำตอบลงใน \square หรือทำการบวกจำนวนทั้งหมด ($4 + 3 + 5$) ก่อนเครื่องหมายเท่ากับแล้วใส่คำตอบลงใน \square ซึ่งชี้ให้เห็นถึงมุมมองในการดำเนินการของเครื่องหมายเท่ากับว่ายังเข้าใจคลาดเคลื่อน นอกจากนี้ จากงานวิจัยของ Carpenter, Frank และ Levi (2003) นี้ ได้ทดลองโดยกำหนดให้นักเรียนประถมศึกษาพิจารณาประโยคจำนวนเปิด เช่น $8 + 4 = \square + 5$ ซึ่งผลที่ได้คือ นักเรียนส่วนใหญ่จะเติมตัวเลข 12 หรือ 17 ลงใน \square แทนที่จะเติมตัวเลข 7 กลุ่มนักเรียนที่ตอบ 12 นั้น เป็นเพราะว่านักเรียนมีความเข้าใจว่าจำนวนที่อยู่หลังเครื่องหมายเท่ากับคือคำตอบที่ได้จากการคำนวณ หรือในที่นี้ก็คือผลบวกของจำนวนที่อยู่ก่อน

หน้าเครื่องหมายเท่ากับ ส่วนกลุ่มนักเรียนที่ตอบ 17 นั้น เป็นเพราะนักเรียนมีความเข้าใจว่า ให้นำจำนวนทุกจำนวนบวกกันแล้วจึงเติมคำตอบลงในช่องว่าง มีกลุ่มที่ตอบถูกต้องอยู่สองกลุ่ม คือกลุ่มที่หนึ่ง คำนวณ $8 + 4$ ได้เท่ากับ 12 แล้วคิดต่อว่าจำนวนใด บวกกับ 5 แล้วได้เท่ากับ 12 นั่นคือ 7 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง กลุ่มที่สองได้คำตอบเป็น 7 เช่นเดียวกัน แต่ไม่ได้หาคำตอบโดยการคิดคำนวณเหมือนกลุ่มที่หนึ่ง แต่หาคำตอบโดยการมองความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน และพบว่า 4 น้อยกว่า 5 อยู่ 1 ดังนั้นจำนวนที่นำมาเติมต้องน้อยกว่า 8 อยู่ 1 จำนวนนั้นคือ 7 นั่นเอง

Kieran (1981) เสนอข้อสังเกตว่า ความเข้าใจความคิดรวบยอดเรื่องเครื่องหมายเท่ากับที่คลาดเคลื่อนจะส่งผลกระทบยาว ทำให้มีปัญหาการเรียนพหุนามในระดับมัธยมศึกษา และงานวิจัยของ Knuth, Alibali, Weinberg, McNeil และ Stephens (2005) พบว่าการเกิด ความเข้าใจความคิดรวบยอดที่คลาดเคลื่อนในเรื่องเครื่องหมายเท่ากับมีอยู่เสมอ แม้แต่ในนักเรียนที่มีอายุมากขึ้น จึงได้เสนอแนะว่า ความคิดเกี่ยวกับการเท่ากันเชิงคณิตศาสตร์ควรได้รับความใส่ใจในการเรียนการสอนโดยตรงตั้งแต่ระดับประถมศึกษา เพื่อจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจพีชคณิต เพราะในพีชคณิตนักเรียนต้องพัฒนามุมมองเชิงเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของสัญลักษณ์ เพื่อช่วยในการแก้สมการที่ซับซ้อนมากขึ้น กับการดำเนินการทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ Baroody และ Ginsburg (1983) เสนอแนะว่านักเรียนผู้ที่ได้รับประสบการณ์ที่เหมาะสม สามารถพัฒนาความเข้าใจในการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของเครื่องหมายเท่ากับตั้งแต่อายุน้อย หลักการสำคัญของการพัฒนาก็คือ การให้เห็นเครื่องหมายเท่ากับในบริบทที่ไม่ใช่การดำเนินการ เช่น $8 = 8$ และการอภิปรายประโยคถูกหรือผิด และประโยคจำนวนเปิด ดังที่งานวิจัยของ Falkner และคนอื่น ๆ (1999) แสดงให้เห็นว่าภายใต้การแนะนำของครูที่กำหนดงานให้เหมาะสมต่อ การตอบสนอง การคิดของนักเรียน แม้แต่นักเรียนระดับ 1 และระดับ 2 ก็สามารถพัฒนาความเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับในรูปของสัญลักษณ์เชิงเชื่อมโยงได้

เพื่อศึกษาความเข้าใจในการใช้เครื่องหมายเท่ากับ (=) ของนักเรียนประถมศึกษาในประเทศไทย ผู้วิจัยได้เก็บข้อมูลกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-6 จำนวน 650 คน โรงเรียนดาราคาม กรุงเทพมหานคร โดยใช้ประโยคสัญลักษณ์ $8 + 4 = \square + 5$ ของ Falkner, Levi, และ Carpenter (1999) ได้ข้อมูลดังนี้

ตารางที่ 1 แสดงร้อยละของนักเรียนที่ตอบคำถาม $8 + 4 = \square + 5$

ชั้น	จำนวนที่นักเรียนตอบ			
	7	12	17	อื่น ๆ
ประถมศึกษาปีที่ 1	5	70	8	17
ประถมศึกษาปีที่ 2	15	75	2	8
ประถมศึกษาปีที่ 3	29	60	9	2
ประถมศึกษาปีที่ 4	30	57	9	4
ประถมศึกษาปีที่ 5	69	23	4	4
ประถมศึกษาปีที่ 6	73	23	1	3
รวม	221	308	33	38
ร้อยละ	34	47.38	5.08	5.85

จากตารางที่ 1 พบว่าความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับนี้ มีนักเรียนที่เข้าใจคลาดเคลื่อนว่าเครื่องหมายเท่ากับคือ สัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณหาคำตอบ สอดคล้องกับผลงานวิจัยของ McNeil และ Alibali (2005) ที่พบว่านักเรียนระดับ 3 ถึงระดับ 5 มีความเข้าใจคลาดเคลื่อนว่าเครื่องหมายเท่ากับเป็นสัญลักษณ์ที่แสดงถึง ยอดรวมทั้งหมด หรือ คำตอบ และมีนักเรียนที่เข้าใจถูกต้องว่าเครื่องหมายเท่ากับคือ สัญลักษณ์ที่แทนความสัมพันธ์การเท่ากัน ระหว่างนิพจน์ที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ จากคำตอบของนักเรียน จะเห็นว่านักเรียนช่วงชั้นที่ 1 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-3 ส่วนใหญ่จะตอบ 12 คิดเป็นร้อยละ 31.54 และนักเรียนช่วงชั้นที่ 2 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4-6 ยังมีนักเรียนบางส่วนที่มีความเข้าใจคลาดเคลื่อน ในการใช้เครื่องหมายเท่ากับ โดยเฉพาะอย่างยิ่งนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่ยังตอบผิดคิดเป็นร้อยละ 10.77 ข้อมูลนี้ชี้ให้เห็นว่านักเรียนเหล่านี้ มีความเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ เช่นเดียวกับนักเรียนที่ Falkner, Levi, และ Carpenter (1999) ทดลอง และจากการสัมภาษณ์นักเรียนที่ตอบถูกต้องจำนวน 10 คน พบว่านักเรียนเหล่านี้ ใช้วิธีการคิดคำนวณในการหาคำตอบ โดยคำนวณ $8 + 4$ ได้เท่ากับ 12 แล้วคิดต่อว่าจำนวนใดบวกกับ 5 แล้วได้เท่ากับ 12 นั่นคือ 7 และทั้งสิบคนไม่มีใครใช้แนวทางการคิดเชิงสัมพันธ์ช่วยในการหาคำตอบ

สำหรับแนวทางการคิดเชิงสัมพันธ์ ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญในการส่งเสริมการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน ลักษณะของแนวทางการคิดเชิงสัมพันธ์เป็นการคิดที่ได้จากการสังเกตจำนวนที่อยู่ในนิพจน์และสมการแล้วพิจารณาหาคำตอบ นั่นคือนักเรียนจะต้องเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับว่าเป็นตัวบ่งชี้ความเท่ากันหรือความสมดุล และถือว่าแนวทางการคิดเชิงสัมพันธ์เป็น

รูปแบบหนึ่งของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต มีนักวิจัยหลายท่านได้เน้นในเรื่องการเท่ากันเพื่ออธิบายคำว่า แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ เช่น Kieran (1981) ได้ชี้ให้เห็นถึงความสำคัญของการมองเห็นเครื่องหมายเท่ากับ ว่าเป็นตัวบ่งชี้ของความเท่ากันหรือสมมูลกัน และสังเกตพบว่านักเรียนจำนวนมากในโรงเรียนประถมศึกษายังคงคิดว่าเครื่องหมายเท่ากับเป็นทิศทางในการค้นหาคำตอบ Carpenter และ Levi (2000) ได้ให้เหตุผลสนับสนุนด้วยความเข้าใจเรื่องการเท่ากันระหว่างพจน์ และการดำเนินการของจำนวนในแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะช่วยให้นักเรียนได้คิดอย่างสัมพันธ์กัน

นอกจากนี้ Sfard (1991), Carpenter, Franke และ Levi (2003) ได้ให้ความหมายแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ว่า มีความหมายกว้างกว่าความเข้าใจในการโยงความสัมพันธ์ของเครื่องหมายเท่ากับ แต่หมายถึงความสามารถในการบรรยายถึงการคิดของนักเรียนที่ได้จากการสังเกตความสัมพันธ์ของจำนวนที่อยู่ในนิพจน์และสมการ แล้วใช้ความสัมพันธ์ที่สังเกตเห็นได้นั้นพิจารณาหาคำตอบ ซึ่งแตกต่างจากระบบการคิดคำนวณที่เป็นไปตามลำดับที่ละขั้นตอน ยกตัวอย่างเช่น นักเรียนสามารถหาคำตอบของประโยคสัญลักษณ์ $25 + 58 + 75 = \square$ ได้โดยคิดคำนวณหาผลบวกของทุกจำนวนจากซ้ายไปขวา แต่นักเรียนจะสามารถหาคำตอบได้ง่ายยิ่งขึ้นถ้าใช้วิธีการจัดกลุ่มของจำนวน ($25 + 75$) การคิดแบบนี้ นักเรียนต้องพิจารณาสมการโดยภาพรวมเสียก่อน เพื่อมองหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่กำหนดให้บางจำนวน ก่อนที่จะเริ่มคิดคำนวณ นอกจากนี้ Stephens (2006) กล่าวว่าแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์คือ ความสามารถในการมองเห็นความเป็นไปได้ในการคิดที่หลากหลายระหว่างจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งมองเห็นลักษณะของการเปลี่ยนแปลงที่ขึ้นอยู่กับดำเนินการของจำนวนที่เกี่ยวข้อง ยกตัวอย่างการมองเห็นลักษณะในการเปลี่ยนแปลง หรือมองเห็นความเป็นไปได้ในการคิดที่หลากหลายระหว่างจำนวน เช่น $73 + 49 = 72 + \square$ กับ $90 - 59 = 99 - \square$ ในข้อแรกนักเรียนบางคนคิดว่าจะต้องลบ 73 ออก 1 แล้วนำ 1 นั้นไปบวกกับ 49 เพื่อให้ได้คำตอบคงเดิม การคิดให้เหตุผลในข้อที่สอง มีความซับซ้อนมากขึ้น เช่น นักเรียนบางคนอาจคิดว่า เพราะความแตกต่างระหว่างสองจำนวนคงเหมือนเดิม การเพิ่มขึ้นของ 9 ในจำนวนแรกต้องคู่กับการเพิ่มขึ้นของ 9 ในจำนวนที่สอง หรือนักเรียนบางคนอาจคิดว่า ถ้าจำนวนแรกเพิ่มขึ้นเป็น 99 ก็ต้องให้จำนวนที่สองคือ 59 เปลี่ยนคำตอบ ดังนั้นเพื่อให้ได้คำตอบเหมือนกัน จำนวนที่สองต้องเพิ่มขึ้นอีก 9 ด้วยคำตอบจึงเป็น 68 ลักษณะของการคิดในข้อที่มีการลบไม่เหมือนกับข้อที่มีการบวก เช่น ถ้า 90 เพิ่มขึ้นเป็น 99 จากนั้นทำการลดจำนวนที่สองด้วย 9 ทำให้ได้ 50 ซึ่งเป็น

คำตอบที่ไม่ถูกต้อง เพราะว่า $90 - 59$ ไม่เท่ากับ $99 - 50$ ดังนั้น การทราบจำนวนจำนวนหนึ่งมากกว่าหรือน้อยกว่าอีกจำนวนหนึ่งจะไม่มีประโยชน์ถ้าไม่ทราบลักษณะของการเปลี่ยนแปลง

Blanton และ Kaput (2005) ได้กล่าวว่าแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ หมายถึง การคิดเชิงพีชคณิต (Algebraic Thinking) นั่นเอง นอกจากนี้ Carpenter และคนอื่น ๆ (2003) จัดให้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์เป็นรูปแบบหนึ่งของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต โดย Carpenter และคนอื่น ๆ (2005) ได้อธิบายว่า การสอนเลขคณิตแบบเดิมโดยมากมุ่งเน้นการดำเนินการในกระบวนการตามขั้นตอนต่าง ๆ เพื่อให้ได้คำตอบเดียวที่เป็นคำตอบจากการคิดคำนวณ แต่ในพีชคณิตมุ่งเน้นความสัมพันธ์ เช่น การแก้สมการพีชคณิตคือ การเปลี่ยนแปลงสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชื่อมโยงกัน โดยที่ตัวแปร x อาจหมายถึงจำนวนหนึ่งหรือหลายจำนวน ซึ่งอันที่จริงแล้วความสัมพันธ์ระหว่างเลขคณิตกับพีชคณิตนั้นใกล้ชิดกันมาก ตัวอย่างเช่น $40 + 50$ ถ้าใช้วิธีการทางเลขคณิตก็คือ นำ 40 บวกกับ 50 ถ้าใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ก็คือ 4 ในหลักสิบบวกกับ 5 ในหลักสิบ ถ้าให้ y แทนหลักสิบ ก็จะได้ $4y + 5y$ นั่นคือใช้วิธีการทางพีชคณิต ทั้งวิธีการทางเลขคณิตและวิธีการทางพีชคณิตต่างก็ใช้สมบัติการแจกแจงเป็นพื้นฐานสำหรับการบวก 4 กับ 5 ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นได้ ดังนี้

$$40 + 50 = (4 \times 10) + (5 \times 10)$$

$$= (4+5) \times 10$$

$$= 9 \times 10$$

$$4y + 5y = (4+5) y$$

$$= 9y$$

จะเห็นได้ว่าทั้งเลขคณิตและพีชคณิตต่างก็มีส่วนสัมพันธ์กัน

Kilpatrick และคนอื่น ๆ (อ้างถึงใน Carpenter และคนอื่น ๆ, 2005) เสนอว่าการสอนให้นักเรียนมีความคล่องแคล่วด้านวิธีการในเลขคณิต ควรต้องดำเนินการอย่างต่อเนื่องเพราะเป็นเป้าหมายพื้นฐานของหลักสูตรเลขคณิต แต่ความคล่องแคล่วด้านวิธีการไม่ได้เกี่ยวข้องกับการคิดคำนวณเพียงอย่างเดียวยังประกอบด้วยความยืดหยุ่นในการเลือกว่าจะใช้วิธีการอย่างไรและเมื่อใด นั่นคือเป็นสิ่งที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ ซึ่งสอดคล้องกับ Jacob และคนอื่น ๆ (2007) ได้กล่าวว่าแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์นี้ แสดงให้เห็นถึงการปรับเปลี่ยนระดับรากฐานจากการเน้นเลขคณิตที่คิดคำนวณหาคำตอบเพียงอย่างเดียว ไปเน้นพีชคณิตโดยการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ควบคู่ไปด้วยกัน ซึ่งในการศึกษาเลขคณิตแบบดั้งเดิมได้แก่หัวข้อการบวก การลบ การคูณ และการหาร โดยปกติแล้วจะเป็นการแสดงไปตามลำดับขั้นตอนจนได้

คำตอบเป็นจำนวนหนึ่งจำนวน ซึ่งเป็นคำตอบที่ได้จากการคิดคำนวณ ในทางตรงกันข้าม การแก้สมการพีชคณิตจะมีลักษณะแตกต่างออกไป สมการพีชคณิตแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างสองนิพจน์และสามารถหาคำตอบได้จากการแปลงรูปอย่างต่อเนื่องของสมการ นักเรียนจำเป็นต้องเข้าใจว่าผลที่ได้จากการแปลงรูปของสมการในแต่ละขั้นตอนนั้นยังคงเท่ากับสมการแรก นอกจากนี้ Kieran (1981); Matz (1982); Falkner, Levi และ Carpenter (1999); Carpenter, Levi และ Farnsworth (2000); Jones และ Pratt (2006); Stephens (2006) ให้ความเห็นว่าแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์จะขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์สำคัญที่ปรากฏในเลขคณิต ซึ่งความสัมพันธ์เหล่านี้มักจะถูกมองข้าม เพราะมุ่งเน้นเฉพาะคำตอบที่ได้จากการคิดคำนวณ ดังนั้นการแยกเขียนเลขคณิตและพีชคณิตในระดับประถมศึกษา จึงส่งผลให้การเรียนพีชคณิตในระดับที่สูงขึ้นเป็นเรื่องยาก

การพัฒนาให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต Carpenter, Franke และ Levi (2003); Stephens (2006); Hunter (2007); Jacob และคนอื่น ๆ (2007) เสนอแนะว่าครูควรสอดแทรกแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์เข้ากับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เลขคณิต นอกจากนี้วิธีการช่วยเหลือของครูก็เป็นเรื่องที่สำคัญอย่างยิ่งที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถประสบความสำเร็จในการพัฒนาความสามารถ ดังที่ Vygotsky (1981) ได้ให้คำจำกัดความของบริเวณพื้นที่รอยต่อพัฒนาการ (Zone of Proximal Development) ว่าหมายถึง ระดับความสามารถที่นักเรียนสามารถทำได้ตามลำพังและปฏิบัติภาระงานต่าง ๆ ที่สามารถบรรลุได้ โดยการช่วยเหลือจากผู้ใหญ่หรือเพื่อนที่มีความสามารถมากกว่า เพราะจะทำให้เกิดการเรียนรู้ซึ่งจะส่งผลให้เกิดการเพิ่มพูนความรู้ความสามารถ หรือพัฒนาการทางเชาว์ปัญญาขึ้น จนแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง ซึ่งหมายถึงนักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนรู้ตามเป้าหมาย

ดังนั้นครูจำเป็นต้องหาแนวทางที่ช่วยในการพัฒนาความสามารถของนักเรียน เนื่องจากนักเรียนแต่ละคนมีความแตกต่างระหว่างบุคคล และมีขอบเขตการเรียนรู้ที่จำกัด หากนักเรียนได้รับความช่วยเหลือจากครู หรือเพื่อนที่มีความสามารถมากกว่า นักเรียนก็สามารถประสบความสำเร็จในการเรียนรู้ของตนเองได้ในที่สุด ฉะนั้นวิธีหนึ่งที่จะนำมาใช้พัฒนาความสามารถของนักเรียนเป็นแนวคิดในการให้ความช่วยเหลือนักเรียนในกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในครั้งนี้ก็คือแนวคิดในการจัดการเรียนการสอนแบบเสริมต่อการเรียนรู้ (Scaffolding Approach) ซึ่งเป็นแนวคิดในการจัดการเรียนการสอนที่ครู หรือเพื่อนผู้ที่มีความสามารถมากกว่าจะให้การช่วยเหลือการปฏิบัติงานแก่นักเรียนในรูปแบบต่าง ๆ โดยมุ่งให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหา หรือปฏิบัติงานที่

นักเรียนไม่สามารถปฏิบัติได้ด้วยตนเองไปสู่ความสามารถในการปฏิบัติงานนั้นให้สำเร็จได้ด้วยตนเองอย่างอิสระ (Eggen และ Kauchak, 1997)

นอกจากนี้ Hunter และ Anthony (2008) ได้ศึกษาการพัฒนาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ตามความเชื่อของ Piaget และ Vygotsky ว่าการพัฒนากระบวนการคิดนั้นเกี่ยวข้องกับบุคคลวัฒนธรรม และองค์ประกอบทางสังคม ในการเรียนรู้คณิตศาสตร์นั้นเกี่ยวข้องกับกระบวนการทางสังคม ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการทางสังคมนี้ Vygotsky (อ้างถึงใน Byrnes, 2001) เชื่อว่าครูต้องการวิธีการจัดการเรียนการสอนเพื่อช่วยเหลือนักเรียนในการเรียนรู้ เช่น การจัดการเรียนการสอนโดยการเสริมต่อการเรียนรู้ (Scaffolding Instruction) เพื่อช่วยการเสริมต่อกระบวนการคิด (Cognitive Scaffolding) ของนักเรียนที่อยู่ในบริเวณพื้นที่รอยต่อพัฒนาการ (Zone of Proximal Development) Vygotsky เชื่อว่าการสอนโดยใช้แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้จะช่วยทำให้นักเรียนเข้าใจในสิ่งที่ยังไม่เข้าใจได้เองตามธรรมชาติให้เข้าใจได้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ตลอดทั้งการมีปฏิสัมพันธ์ทางสังคมกับครูและเพื่อน ก็จะช่วยทำให้เข้าใจความคิดรวบยอดได้ดีขึ้น ซึ่ง Hogan และ Pressley (1997) ได้แบ่งชนิดของการเสริมต่อการเรียนรู้ไว้ 5 ประการคือ การเป็นตัวแบบของพฤติกรรมที่ต้องการ (Modeling of Desiring Behaviors) การให้คำอธิบาย (Offering Explanation) การสนับสนุนให้นักเรียนเข้ามามีส่วนร่วม (Inviting Students Participation) การตรวจสอบความถูกต้องแสดงความชัดเจนของความเข้าใจของนักเรียน (Verifying and Clarifying Student Understandings) และการให้นักเรียนแสดงประเด็นหลักฐานต่าง ๆ เพื่อสนับสนุนการคิด (Inviting Students to Contribute Clues)

เมื่อพิจารณาในมิติของทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของนักเรียนประถมศึกษาของ Piaget (1964) ที่กล่าวว่า เด็กอายุ 7-11 ปี มีพัฒนาการทางด้านสติปัญญาจัดอยู่ในขั้นปฏิบัติการคิดด้านรูปธรรม (Concrete Operation Stage) เด็กวัยนี้จะสามารถสร้างกฎเกณฑ์และตั้งเกณฑ์ในการแบ่งสิ่งแวดล้อมออกเป็นหมวดหมู่ได้ สามารถที่จะเข้าใจเหตุผล รู้จักการแก้ปัญหาสิ่งต่าง ๆ ที่เป็นรูปธรรมได้ สามารถที่จะเข้าใจความสัมพันธ์ของส่วนย่อย ส่วนรวม มีความสามารถในการคิดย้อนกลับ ความสามารถในการจำมีประสิทธิภาพมากขึ้น สามารถจัดกลุ่มหรือจัดการได้อย่างสมบูรณ์ สามารถสนทนากับบุคคลอื่นและเข้าใจความคิดของผู้อื่นได้ดี และจากการศึกษาคู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-6 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ของ สสวท. พบว่ามีการกำหนดเวลาการสอนคณิตศาสตร์ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เรื่องการบวก การลบ การคูณ และการหารมากกว่าในชั้นอื่น ๆ

ดังนั้นจากการศึกษาข้อมูลเบื้องต้นในเรื่องการใช้เครื่องหมายเท่ากับที่พบว่า นักเรียนมีความเข้าใจคาดเคลื่อนโดยคิดว่า เครื่องหมายเท่ากับหมายถึง สัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณหาคำตอบ และผลงานวิจัยต่าง ๆ ที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์เป็นพื้นฐานสำคัญในการช่วยพัฒนาความเข้าใจในเรื่องการใช้เครื่องหมายเท่ากับ ช่วยวางรากฐานจากเลขคณิตไปสู่พีชคณิต ทำให้นักเรียนเรียนพีชคณิตในระดับสูงขึ้นไปได้ง่ายขึ้น เนื่องจากมีความเข้าใจในเรื่องเครื่องหมายเท่ากับเป็นพื้นฐาน นอกจากนี้เพื่อให้นักเรียนได้รับการพัฒนาจนเกิดความคิดรวบยอดและทักษะที่นักเรียนจำเป็นต้องมีไปใช้ในการเรียนพีชคณิต การจัดการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ จะช่วยสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนโดยการช่วยเหลือสนับสนุนให้สอดคล้องกับความสามารถของนักเรียน ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา

คำถามการวิจัย

1. กระบวนการเรียนการสอนที่ได้จากการนำแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้มาใช้มีลักษณะและขั้นตอนเป็นอย่างไร
2. กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ทำให้นักเรียนประถมศึกษาที่มีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตสูงขึ้นหรือไม่
3. กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้สามารถเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษาได้มากกว่ากระบวนการเรียนการสอนแบบปกติหรือไม่

วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา
2. เพื่อศึกษาคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ โดยพิจารณาจาก

2.1 การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน ก่อนและหลังจากเรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิด การเสริมต่อการเรียนรู้

2.2 การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระหว่าง กลุ่มที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริม ต่อการเรียนรู้กับกลุ่มที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ

สมมติฐานการวิจัย

ในการพัฒนาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน Stephens (2006) ได้เสนอแนะว่า หลักสำคัญที่จะส่งเสริมการเรียนรู้พีชคณิตมีสองประการคือ การเท่ากัน (Equivalence) และ แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ (Relational Thinking Approach) ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Hunter (2007) ที่พบว่าจำเป็นต้องพัฒนารูปแบบการคิดเชิงสัมพันธ์ และความเข้าใจของนักเรียน ในเรื่องเครื่องหมายเท่ากับว่า เป็นตัวแทนความสัมพันธ์ของการเท่ากัน เพื่อพัฒนาการให้เหตุผล เชิงพีชคณิตของนักเรียน และจุดเน้นของพีชคณิตระดับประถมศึกษาอยู่ที่การคิดให้เหตุผลซึ่ง Van De Walle (2007) กล่าวว่า การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตจะเกี่ยวข้องกับการสรุปในรูปทั่วไปที่เกิดจาก ประสบการณ์กับจำนวนและการคิดคำนวณ การสร้างแบบแผนจากความคิดที่ใช้สัญลักษณ์ที่มีความหมาย อีกทั้งงานวิจัยของ Hunter และ Anthony (2008) พบว่า การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ของนักเรียนเป็นเรื่องที่สำคัญ โดยมีจุดเน้นคือ แนวคิดของการเท่ากันและความเข้าใจ ความสัมพันธ์ของเครื่องหมายเท่ากับนั้น เป็นพื้นฐานหลักของการเข้าใจพีชคณิต นอกจากนี้ แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ (Scaffolding) เป็นแนวคิดที่สามารถนำมาใช้ในการพัฒนาทักษะ ทั่วไป และใช้ในการพัฒนากลยุทธ์ทางปัญญาขั้นสูง (Rosenshine และ Meister, 1992) การเรียน การสอนโดยใช้การเสริมต่อการเรียนรู้เป็นการสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนอย่างเป็นระบบ (Dickson, Chard, และ Simmans, 1993 อ้างถึงใน Larkin, 2001) เป้าหมายของการช่วยเหลือคือ การช่วยให้นักเรียนสามารถใช้ทักษะหรือกลยุทธ์ที่ได้เรียนรู้ด้วยตนเองอย่างอิสระ โดยนักเรียนจะ ได้รับการช่วยเหลือด้วยรูปแบบต่าง ๆ ที่เหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน (Rosenshine และ Meister, 1992) ในกระบวนการให้ความช่วยเหลือนักเรียนจะปฏิสัมพันธ์กับบุคคลอื่น หรือ ทำงานกับเพื่อนที่มีศักยภาพมากกว่า ปฏิสัมพันธ์ทางสังคมจะช่วยให้นักเรียน ได้สนทนา แลกเปลี่ยนความรู้ประสบการณ์กับบุคคลอื่น ซึ่งทำให้นักเรียนเกิดการพัฒนาทางปัญญาได้ (Vygotsky, 1978)

จากแนวคิดต่าง ๆ ที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานของการวิจัยในครั้งนี้ ดังนี้

1. ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้สูงกว่าก่อนทดลองอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
2. ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ขอบเขตการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงพัฒนา เพื่อพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา มีขอบเขตการวิจัยดังนี้

1. ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4- 6 ในโรงเรียนประถมศึกษา สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษากรุงเทพมหานคร
2. ตัวแปรในการทดลองเพื่อศึกษาคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น
 - 2.1 ตัวแปรจัดกระทำ คือ กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ และกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ
 - 2.2 ตัวแปรตาม คือ ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต
3. เนื้อหาที่นำมาเป็นกรอบในการสร้างกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา เป็นเนื้อหาจากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ของ สสวท. ในบทที่ 2 การบวกและการลบ บทที่ 4 การคูณและบทที่ 5 การหาร
4. ระยะเวลาดำเนินการทดลอง 10 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 4 ชั่วโมง รวมทั้งสิ้น 40 ชั่วโมง

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. **แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์** หมายถึง แนวคิดทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการแก้ปัญหาการเท่ากัน โดยการพิจารณาความสัมพันธ์ของจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากัน แล้วพิจารณาความสัมพันธ์เชื่อมโยงที่มีลักษณะการเปลี่ยนแปลงซึ่งขึ้นอยู่กับ การดำเนินการของจำนวนที่เกี่ยวข้องระหว่างจำนวน แล้วใช้ความสัมพันธ์ที่สังเกตเห็นได้นั้น คิดพิจารณาหาคำตอบ โดยหลีกเลี่ยงจากระบวนการคิดคำนวณที่เป็นไปตามลำดับที่ละขั้นตอน เพื่อหาคำตอบ

2. **แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้** หมายถึง แนวคิดในการจัดการเรียนการสอนที่มีการช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียน โดยครูหรือเพื่อนที่เก่งกว่า การช่วยเหลือจะมีขึ้นก็ต่อเมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนยังไม่เข้าใจในสิ่งที่เรียนรู้และต้องการ การเสริมต่อการเรียนรู้ในที่นี้ เป้าหมายของการช่วยเหลือคือ การให้นักเรียนสามารถใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์พิจารณาหาคำตอบโดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ สามารถสร้างข้อสรุปในรูปแบบข้อความคาดการณ์หรือในรูปแบบทั่วไปได้ โดยครูให้การเสริมต่อการเรียนรู้หลากหลายรูปแบบ ได้แก่ การใช้คำถามเพื่อชี้แนะกระตุ้นให้นักเรียนสังเกตหรือสร้างข้อสรุป การสนับสนุนให้นักเรียนเข้ามามีส่วนร่วมโดยให้นักเรียนได้เล่า หรือตอบคำถามในสิ่งที่รู้ หรือร่วมอภิปราย การยกตัวอย่างและอธิบายแสดงให้เห็น ถึงวิธีการคิดที่ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ การให้นักเรียนยกตัวอย่างแสดงผลเพื่อตรวจสอบ และยืนยันข้อสรุป และการตรวจสอบความเข้าใจอย่างชัดเจนของนักเรียน

3. **กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้** หมายถึง ขั้นตอนการจัดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นโดยการนำแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้มาปรับเป็นกระบวนการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนเกิดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ประกอบด้วย 4 ขั้น ได้แก่ 1) ขั้นการค้นหาความสัมพันธ์ 2) ขั้นการใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ 3) ขั้นการสร้างข้อสรุป และ 4) ขั้นการตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป ซึ่งขั้นตอนทั้ง 4 ขั้นนี้ ใช้สอนอยู่ในขั้นสอนของกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ โดยจัดการเรียนการสอนตามลำดับขั้นตอนและใช้เวลา 2 ขั้นตอนต่อหนึ่งชั่วโมงสอดแทรกในขั้นสอนก่อนที่จะสอนตามเนื้อหาปกติ ดังนี้

ขั้นที่ 1 การค้นหาความสัมพันธ์ หมายถึง การให้นักเรียนสังเกตหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่อยู่ข้างซ้ายและข้างขวาของเครื่องหมายเท่ากัน โดยที่จำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากันนั้นจะต้องมีความเท่ากันเสมอ ด้วยการนำโจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากัน ที่สามารถใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบโดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ มาเป็นประเด็นให้นักเรียนอภิปราย สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสอง

ข้างของเครื่องหมายเท่ากับ และเมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนไม่สามารถบอก หรือระบุความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนได้ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการใช้คำถามเพื่อ ชี้นำ กระตุ้นให้นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์ และสนับสนุนให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น อภิปรายร่วมกัน

ขั้นที่ 2 การใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ โดยการนำโจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากันจากขั้นที่ 1 ที่นักเรียนสังเกตพบความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้าง ของเครื่องหมายเท่ากับแล้ว ให้นักเรียนหาคำตอบโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และหลีกเลี่ยง การคิดคำนวณ ด้วยวิธีการสังเกต เปรียบเทียบ ใช้เทคนิคการเพิ่ม หรือลด หรือสลับที่ หรือ เปลี่ยนกลุ่มของจำนวนที่เท่ากันทั้งสองข้าง เมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนไม่ได้ ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์มาช่วยในการหาคำตอบ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการ ยกตัวอย่างแสดงให้เห็นถึงวิธีการคิดที่ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และอธิบายประกอบโดยการ เขียนภาพลูกศรเชื่อมโยงระหว่างจำนวน เพื่อให้นักเรียนได้เห็นแนวทางในการคิด หลังจากนั้นจึง ให้นักเรียนเขียนบันทึกแสดงการคิด

ขั้นที่ 3 การสร้างข้อสรุป โดยการนำโจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหา เกี่ยวกับการเท่ากันจากขั้นที่ 2 ที่นักเรียนหาคำตอบโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และหลีกเลี่ยง การคิดคำนวณ ให้นักเรียนนำข้อสังเกตจากความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของ เครื่องหมายเท่ากับมาเขียนสรุป ซึ่งอาจเขียนสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ คือการเขียนสรุปในสิ่งที่ สังเกตได้เป็นคำกล่าว หรือข้อความที่คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง แล้วตรวจสอบความถูกต้องโดย การยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์ที่คล้ายกันมาสนับสนุน คัดค้าน หรือยืนยันข้อสรุปที่ได้ หรือ เขียนสรุปในรูปทั่วไป คือการเขียนสรุปในสิ่งที่สังเกตได้ในรูปประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวแปรแทน จำนวนใด ๆ ตัวแปรนี้อาจเขียนเป็นรูปต่าง ๆ เช่น \square , \triangle , \circ หรือ พยัญชนะภาษาไทย หรือ พยัญชนะภาษาอังกฤษ การตรวจสอบความถูกต้องของข้อสรุปในรูปทั่วไป ทำเหมือนกับข้อความ คาดการณ์ เมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนยังไม่สามารถเขียนสรุปได้ ครูเสริมต่อ การเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการใช้คำถามชี้นำ หรือยกตัวอย่างจนนักเรียนสามารถเขียนสรุปได้

ขั้นที่ 4 การตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป โดยการนำข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุป ในรูปทั่วไปที่นักเรียนสร้างไว้ในขั้นที่ 3 มาตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ เมื่อประเมินนักเรียน ด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนไม่สามารถหาเหตุผลโดยการยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์ อื่น ๆ มาตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนโดยการสนทนาร่วมกัน

พร้อมทั้งยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่น ๆ ให้นักเรียนใช้เป็นแนวทางในการเขียนข้อสรุปที่สร้างไว้

4. กระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ หมายถึง ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามคู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ของ สสวท. โดยใช้เนื้อหาในบทที่ 2 การบวกและการลบ บทที่ 4 การคูณ และบทที่ 5 การหาร ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนหลักในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน 4 ขั้น ได้แก่

1. **ขั้นนำ** หมายถึง ขั้นทบทวนพื้นฐานความรู้เดิมของนักเรียนก่อนนำเข้าสู่เนื้อหาใหม่ โดยการนำประโยคสัญลักษณ์มาให้นักเรียนพิจารณาอภิปรายหาคำตอบ การสนทนาซักถาม การตอบคำถามครูด้วยการคิดในใจ การเล่นเกม การยกตัวอย่างประกอบสื่อ เพื่อให้ นักเรียนระลึกถึงสิ่งที่เคยเรียน และเตรียมความพร้อมเพื่อเรียนเนื้อหาใหม่

2. **ขั้นสอน** หมายถึง ขั้นสอนเนื้อหาใหม่ ครูจัดกิจกรรมโดยใช้ของจริง หรือ รูปภาพ หรือสัญลักษณ์ประกอบการอธิบายยกตัวอย่าง ซึ่งดำเนินจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้แกนกลาง รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรแกนกลาง การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เรื่องการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับและศูนย์ กับคู่มือครูและหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ของ สสวท. ในบทที่ 2 การบวกและการลบ บทที่ 4 การคูณ และบทที่ 5 การหาร

3. **ขั้นสรุป** หมายถึง ขั้นของการให้นักเรียนช่วยกันสรุปสาระสำคัญของเรื่องที่เรียน เป็นวิธีลัด

4. **ขั้นฝึกทักษะ** หมายถึง ขั้นการนำความรู้ที่ได้รับไปใช้โดยการฝึกทักษะจากหนังสือเรียน หรือบัตรงาน

5. ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต หมายถึง ความสามารถของนักเรียน ในการแสดงเหตุผลเกี่ยวกับวิธีคิดหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน และการดำเนินการที่เกี่ยวข้อง โดยไม่เน้นการคิดคำนวณ ซึ่งอาจอยู่ในรูปของการอธิบาย หรือการแสดงวิธีคิดด้วยภาพที่ใช้ลูกศร เชื่อมโยงแสดงการให้เหตุผล หรือคำอธิบายโดยใช้ภาษาของนักเรียนเอง การให้เหตุผลสนับสนุน การคิดด้วยข้อความคาดการณ์ หรือการอ้างรูปทั่วไปประกอบคำตอบได้อย่างสมเหตุสมผล ดังนี้

1) ข้อสรุปเกี่ยวกับสมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน

“จำนวนใดบวกกับศูนย์ย่อมได้ผลบวกเท่ากับจำนวนนั้น” รูปทั่วไป $a + 0 = a$

“จำนวนเดียวกันเมื่อนำมาลบกันผลลบจะเท่ากับศูนย์” รูปทั่วไป $a - a = 0$

“จำนวนใดคูณกับหนึ่งย่อมได้ผลคูณเท่ากับจำนวนนั้น” รูปทั่วไป $a \times 1 = a$

“จำนวนใดหารด้วยหนึ่งย่อมได้ผลหารเท่ากับจำนวนนั้น” รูปทั่วไป $a \div 1 = a$

2) ข้อสรุปเกี่ยวกับสมบัติของการดำเนินการของจำนวน

“สมบัติการสลับที่ของการบวก” รูปทั่วไป $a + b = b + a$

“สมบัติการสลับที่ของการคูณ” รูปทั่วไป $a \times b = b \times a$

“สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก” รูปทั่วไป $(a + b) + c = a + (b + c)$

“สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ” รูปทั่วไป $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

3) ข้อสรุปในการใช้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในการหาคำตอบประโยคจำนวนที่มีเครื่องหมายเท่ากับ

“การแสดงความสัมพันธ์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับโดยการบวก”

“การแสดงความสัมพันธ์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับโดยการลบ”

“การแสดงความสัมพันธ์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับโดยการคูณ”

“การแสดงความสัมพันธ์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับโดยการหาร”

4) ข้อสรุปในการแก้ปัญหาประโยคจำนวนที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวน

“รูปทั่วไป $a + b = \square + c$ ”

“รูปทั่วไป $a + \square = b + c$ ”

“รูปทั่วไป $a - b = c - \square$ ”

“รูปทั่วไป $\square - a = b - c$ ”

5) ข้อสรุปในการใช้จำนวนในเชิงพีชคณิต

“จำนวนคู่รวมกับจำนวนคี่ย่อมเป็นจำนวนคี่”

“จำนวนคี่รวมกับจำนวนคี่ย่อมเป็นจำนวนคู่”

“จำนวนคู่คูณกับจำนวนคี่ย่อมเป็นจำนวนคี่”

“จำนวนคี่คูณกับจำนวนคี่ย่อมเป็นจำนวนคี่”

สามารถประเมินได้จากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ซึ่งเป็นแบบทดสอบที่มีลักษณะข้อคำถามเป็นแบบปลายเปิด แล้วให้นักเรียนแสดงวิธีคิดและให้เหตุผลประกอบ นอกจากนั้นประเมินจากแบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน และแบบสัมภาษณ์นักเรียนในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

6. นักเรียน หมายถึง นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 - 6 ในโรงเรียนประถมศึกษาสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษากรุงเทพมหานคร

ประโยชน์ที่ได้รับ

1. ได้กระบวนการเรียนการสอนที่สามารถนำไปใช้เป็นแนวทางสำหรับครูคณิตศาสตร์ ในการนำกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา
2. ได้แนวทางสำหรับหน่วยงานที่เกี่ยวข้องนำไปใช้จัดอบรมครูคณิตศาสตร์ระดับ ประถมศึกษา เพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยเรื่องการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน ประถมศึกษานี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามประเด็นต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์
 - 1.1 แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์
 - 1.2 แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับเครื่องหมายเท่ากับ
 - 1.3 แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับเลขคณิตและพีชคณิต
 - 1.4 การพัฒนาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์
2. แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้
 - 2.1 ความหมายของการเสริมต่อการเรียนรู้
 - 2.2 ทฤษฎีประวัติศาสตร์ทางสังคมของ Vygotsky
 - 2.3 การเสริมต่อการเรียนรู้กับพื้นที่รอยต่อของพัฒนาการ
 - 2.4 กลวิธีในการใช้การเสริมต่อการเรียนรู้
 - 2.5 การเรียนการสอนโดยใช้การเสริมต่อการเรียนรู้
 - 2.6 ข้อดีและข้อจำกัดของการเสริมต่อการเรียนรู้
3. กระบวนการเรียนการสอน
 - 3.1 ความหมายของกระบวนการเรียนการสอน
 - 3.2 องค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอน
 - 3.3 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน
 - 3.4 การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์
4. การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา
 - 4.1 ความหมายของพีชคณิต
 - 4.2 การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต
 - 4.3 การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์

- 4.4 การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา
- 4.5 การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- 5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
 - 5.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์
 - 5.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้
 - 5.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา

1. แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ (Relational Thinking Approach)

1.1 แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์

Sfard (1991) และ Carpenter, Franke และ Levi (2003) ได้ให้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ว่ามีความหมายกว้างกว่าความเข้าใจในการโยงความสัมพันธ์ของเครื่องหมายเท่ากับ แต่หมายถึงความสามารถในการบรรยายถึงการคิดของนักเรียนที่ได้จากการสังเกตความสัมพันธ์ของจำนวนที่อยู่ในนิพจน์และสมการ แล้วใช้ความสัมพันธ์ที่สังเกตเห็นได้นั้น พิจารณาคำตอบซึ่งแตกต่างจากกระบวนการคิดคำนวณที่เป็นไปตามลำดับที่ละขั้นตอน ยกตัวอย่างเช่น นักเรียนสามารถหาคำตอบของประโยคสัญลักษณ์ $25 + 58 + 75 = \square$ ได้โดยคิดคำนวณหาผลบวกของทุกจำนวนจากซ้ายไปขวา แต่นักเรียนจะสามารถหาคำตอบได้ง่ายยิ่งขึ้น ถ้าใช้วิธีการจัดกลุ่มของจำนวน $(25 + 75)$ การคิดแบบนี้ นักเรียนต้องพิจารณาสมการในภาพรวมเสียก่อน เพื่อมองหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่กำหนดให้บางจำนวนก่อนที่จะเริ่มคิดคำนวณ

Carpenter และคนอื่น ๆ (2003) จัดให้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์เป็นรูปแบบหนึ่งของ การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

Blanton และ Kaput (2005) ได้กล่าวว่าแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ก็หมายถึง การคิดเชิงพีชคณิต (Algebraic Thinking) นั่นเอง

Carpenter และคนอื่น ๆ (2005) กล่าวว่า แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์เกี่ยวข้องกับการใช้สมบัติพื้นฐานของจำนวนและการดำเนินการของจำนวน เพื่อเปลี่ยนรูปการแสดงของจำนวนทางคณิตศาสตร์มากกว่าการคำนวณหาคำตอบตามวิธีการขั้นตอนต่าง ๆ

Stephens (2006) แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์เป็นการคิดของผู้เรียนเกี่ยวกับความสัมพันธ์เชื่อมโยงที่แตกต่างหลากหลายระหว่างจำนวน นิพจน์ และการดำเนินการ ซึ่งแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์นี้ เป็นความสามารถในการมองเห็นความเป็นไปได้ในการคิดที่หลากหลายระหว่างจำนวน ซึ่งมองเห็นลักษณะของการเปลี่ยนแปลงที่ขึ้นอยู่กับดำเนินการของจำนวนที่

เกี่ยวข้อง ยกตัวอย่างการมองเห็นลักษณะในการเปลี่ยนแปลง หรือมองเห็นความเป็นไปได้ในการคิดที่หลากหลายระหว่างจำนวนเช่น $73 + 49 = 72 + \square$ กับ $90 - 59 = 99 - \square$ ในข้อแรกนักเรียนบางคนคิดว่าจะต้องลบ 73 ออก 1 แล้วนำ 1 นั้นไปบวกกับ 49 เพื่อให้ได้คำตอบคงเดิม การคิดให้เหตุผลในข้อที่ 2 มีความซับซ้อนมากขึ้น ต้องคู่กับการเพิ่มขึ้นของ 9 ในจำนวนที่สอง หรือนักเรียนคนอื่นอาจคิดว่า ถ้าจำนวนแรกเพิ่มขึ้นเป็น 99 ก็ต้องให้จำนวนที่สองคือ 59 เปลี่ยนคำตอบ ดังนั้นเพื่อให้ได้คำตอบเหมือนกันจำนวนที่สองต้องเพิ่มขึ้นอีก 9 ด้วยคำตอบจึงเป็น 68 ลักษณะของการคิดในข้อที่มีการลบไม่เหมือนกับข้อที่มีการบวก เช่น ถ้า 90 เพิ่มขึ้นเป็น 99 จากนั้นทำการลดจำนวนที่สองด้วย 9 ทำให้ได้ 50 ซึ่งเป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง เพราะว่า $90 - 59$ ไม่เท่ากับ $99 - 50$ ดังนั้นการทราบจำนวนจำนวนหนึ่งมากกว่าหรือน้อยกว่าอีกจำนวนหนึ่ง จะไม่มีประโยชน์ ถ้าไม่ทราบลักษณะของการเปลี่ยนแปลง Stephens ได้สรุปลักษณะแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ไว้ดังนี้

- มุ่งเน้นการพิจารณาประโยคโดยรวม
- มีเครื่องหมายเท่ากับแสดงความเท่ากัน
- หลีกเลียงจากการคิดคำนวณ
- การเปรียบเทียบจำนวนที่รู้จักในแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับเพื่อหาจำนวนที่ไม่ทราบ
- ลักษณะในการทดแทนขึ้นอยู่กับดำเนินการที่เกี่ยวข้อง

นอกจากนี้ Stephens (2006) ได้เสนอแนะเกี่ยวกับการสอนแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ว่า การแนะนำแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ให้กับนักเรียนไม่ใช่งานที่ง่าย ถ้ามุมมองของครูยังจำกัดความคิดเพียงแค่การคำนวณเลขคณิตในโรงเรียนประถมศึกษา นั่น แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ หมายถึง การให้ความสนใจในโครงสร้างของการดำเนินการในเลขคณิต ถ้าปราศจากประสบการณ์การคิดเชิงสัมพันธ์เหล่านี้ นักเรียนส่วนมากจะล้มเหลวในการเข้าใจโครงสร้างของการดำเนินการในเลขคณิต ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นในการเปลี่ยนผ่านไปยังพีชคณิต Stephens ได้สรุปเกี่ยวกับแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ไว้ว่า เป็นวิธีการที่มีพลังในการสร้างความสนใจในโครงสร้างพื้นฐานของเลขคณิต ซึ่งมีสองความคิดหลักคือ การแสดงจำนวนบนเครื่องหมายเท่ากับ และการทดแทนจำนวนรวมถึงการรู้ลักษณะที่จะทดแทนตำแหน่ง ความคิดเหล่านี้ถือว่าเป็นพื้นฐานสำหรับการคิดเชิงพีชคณิต

Watson และ Mason (2004 อ้างถึงใน Stephens, 2006) สนับสนุนความสำคัญของการทำให้นักเรียนมองเห็นมิติของความหลากหลาย ซึ่งองค์ประกอบบางประการในประโยค

ทางคณิตศาสตร์มีการเปลี่ยนแปลงในขณะที่องค์ประกอบอื่น ๆ ยังไม่เปลี่ยนแปลงการใช้ความเป็นไปได้ในการคิดที่หลากหลายระหว่างจำนวนในประโยคจำนวนที่ขาดหายไป นักเรียนต้องทราบลักษณะที่เกิดขึ้นอย่างความหลากหลาย การมองเห็นความเป็นไปได้ของความหลากหลายในลักษณะต่าง ๆ ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญของแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์

Molina, Castro, Ambrose (2006) แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ไม่มีนิยามที่ชัดเจน แต่เป็นที่เข้าใจกันโดยทั่วไปว่า นักเรียนมีแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ เมื่อเขามองเห็นความเกี่ยวข้องเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์อย่างน้อยสองแนวคิด วิเคราะห์และใช้ความเกี่ยวข้องเชื่อมโยงที่ได้ในการแก้ปัญหา หรือตัดสินใจในการเรียนรู้เกี่ยวกับสถานการณ์หรือโมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

Jacob และคนอื่น ๆ (2007) แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์จะช่วยให้ตระหนักถึงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนและสมบัติพื้นฐานของการดำเนินการของจำนวน นักเรียนสามารถใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์มาทำการคิดคำนวณให้ง่ายขึ้น สามารถสร้างและเรียนรู้ความคิดรวบยอดใหม่ ๆ ได้ นอกจากนั้นยังนำวิธีการคิดคำนวณที่เรียนรู้มาใช้กับวงจำนวนที่กว้างขึ้น และเข้าใจเกี่ยวกับเลขคณิตโดยทั่วไป การจะแบ่งแยกออกมาอย่างชัดเจนว่า อะไรที่จัดเป็นแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และอะไรที่ไม่จัดว่าเป็นแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์นั้น เป็นเรื่องยากและนักเรียนจะแสดงความสามารถของแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ในระดับแตกต่างกันไป

Van De Walle (2007) กล่าวว่า การที่นักเรียนสังเกตและใช้ความสัมพันธ์ของจำนวนระหว่างสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมากกว่าการคำนวณหาคำตอบนั้น เรียกว่าเป็นแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ ซึ่งเป็นการคิดที่มากกว่าการคิดคำนวณอย่างง่ายและเน้นไปที่การดำเนินการของจำนวนว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญของกลยุทธ์ การหาผลลัพธ์ทั้งหลาย ตัวอย่างเช่น กลยุทธ์ใกล้สองเท่า (The Near-Doubles Strategy) สำหรับ $6 + 7$ หรือกลยุทธ์ครึ่งหนึ่งและสองเท่า (The Half-and-Double Strategy) สำหรับ 6×8 แต่ละกลยุทธ์เกี่ยวข้องกับการใช้ความสัมพันธ์ให้เป็นประโยชน์ระหว่างผลลัพธ์ที่ต้องการกับผลลัพธ์ที่รู้อยู่แล้ว เช่น $6 + 7$ คือ มากกว่า $6 + 6$ และ 3×8 คือครึ่งหนึ่งของ 6×8 กลยุทธ์ในการหาผลลัพธ์นี้เป็นเพียงตัวอย่างง่าย ๆ ของประโยชน์แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ นอกจากนี้ Van De Walle ยังเสนอแนะว่าควรกำหนดให้นักเรียนมีแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์โดยการดำเนินการค้นหาคำตอบจากประโยคถูกหรือผิด และประโยคจำนวนเปิด โดยเลือกสมการที่ออกแบบสำหรับดึงความคิดที่ดี และทำทายออกมามากกว่าการคิดคำนวณ ควรใช้จำนวนที่ทำให้การคิดโดยวิธีคำนวณยากขึ้น เพื่อผลักดันให้พวกเขาไปสู่แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และควร

สนับสนุนให้นักเรียนคิดสร้างประโยคจริงหรือเท็จ และประโยคจำนวนเปิดที่เกี่ยวข้องกับแนวคิด การคิดเชิงสัมพันธ์ด้วยตนเอง เพื่อก่อให้เกิดความสนใจกับความคิดในการใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับจำนวนที่หลากหลายขึ้น โดยทั่วไปจะเริ่มต้นเกี่ยวข้องกับการใช้ศูนย์ การบวก การลบด้วยจำนวนเดียวกัน และตามด้วยสมบัติต่าง ๆ ของจำนวน นอกจากนี้ การที่นักเรียนคิดสร้างประโยคจริงหรือเท็จ และประโยคจำนวนเปิดที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ด้วยตนเองนั้น จะส่งผลให้เกิดประโยชน์ 2 ประการคือ

1) นักเรียนได้พัฒนาความเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับ โดยนักเรียนใช้การดำเนินการของจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ และสามารถให้ความหมายของเครื่องหมายเท่ากับว่าเหมือนกันในการแก้ปัญหาคำนวณเปิด

2) ค้นหาคำแสดงออกมาของแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ นักเรียนผู้ซึ่งอาศัยความสัมพันธ์ในการค้นหาคำดำเนินการของจำนวนในแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับ มากกว่าการคิดคำนวณโดยตรงจะสามารถก้าวเข้าสู่การคิดเชิงพีชคณิตได้อย่างง่าย

จากการศึกษาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์จากนักการศึกษาหลายท่านที่กล่าวมาสรุปได้ว่า แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ หมายถึง การคิดทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการแก้ปัญหาคำนวณเท่ากันโดยการพิจารณาความสัมพันธ์ของจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ แล้วมองความสัมพันธ์เชื่อมโยงที่มีลักษณะการเปลี่ยนแปลงโดยขึ้นอยู่กับดำเนินการของจำนวนที่เกี่ยวข้องระหว่างจำนวน แล้วใช้ความสัมพันธ์ที่สังเกตเห็นได้นั้น คิดพิจารณาหาคำตอบ ซึ่งแตกต่างจากกระบวนการคิดคำนวณที่เป็นไปตามลำดับที่ละขั้นตอนเพื่อหาคำตอบ

1.2 แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับเครื่องหมายเท่ากับ

นักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายท่าน เช่น Kieran (1981); Matz (1982); Falkner, Levi และ Carpenter (1999); Carpenter และ Levi (2000); Jones และ Pratt (2006); Stephens และคนอื่น ๆ (2006) ค้นพบว่าความเข้าใจของนักเรียนระดับประถมศึกษาเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ สามารถจำแนกได้เป็นสองกลุ่ม คือ นักเรียนกลุ่มแรกเป็นกลุ่มที่เข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับ คือ เครื่องหมายที่แทนการคำนวณคำตอบของการดำเนินการเกี่ยวกับจำนวน โดยนักเรียนกลุ่มนี้จะเข้าใจว่าหลังเครื่องหมายเท่ากับ คือ คำตอบที่ได้จากการคำนวณค่าของนิพจน์ที่อยู่หน้าเครื่องหมายเท่ากับเท่านั้น ซึ่งเป็นความเข้าใจที่มีความคลาดเคลื่อนและเป็นอุปสรรคอย่างมากต่อนักเรียนในการหาคำตอบของสมการ และการเปลี่ยนผ่านความเข้าใจจากแนวคิดทางเลขคณิตไปสู่แนวคิดทางพีชคณิต นักเรียนกลุ่มที่สองเป็นกลุ่มที่เข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์แทนความสัมพันธ์ระหว่างสองนิพจน์ซึ่งมีค่าเท่ากัน ซึ่งเป็น

ความเข้าใจที่ถูกต้องและมีความสำคัญต่อนักเรียนอย่างมากด้วยเหตุผลสองประการ คือ ประการแรกเป็นความเข้าใจที่จำเป็นต้องใช้ในการให้เหตุผลกับสมการในลักษณะ $7 + 8 = 7 + 7 + 1$ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่มีความสำคัญและเป็นประโยชน์อย่างมากในทางเลขคณิต เพราะสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับสถานการณ์ที่ยากขึ้น เช่น $45 - 18 = 45 - 20 + 2$ เป็นต้น ตัวอย่างดังกล่าวแสดงให้เห็นถึงการที่นักเรียนได้พัฒนาความเข้าใจทางเลขคณิตควบคู่ไปกับการเรียนรู้แนวคิดทางพีชคณิต (Falkner, Levi และ Carpenter, 1999) ประการที่สอง การไม่เข้าใจความหมายในลักษณะดังกล่าวจะเป็นอุปสรรคกับนักเรียนอย่างมากในการเปลี่ยนและถ่ายโยงแนวคิดจากเลขคณิตไปสู่พีชคณิต (Kieran, 1981, Matz, 1982) เช่น เมื่อนักเรียนพบสมการ $4x + 27 = 87$ การแก้สมการลักษณะดังกล่าวจะเริ่มต้นด้วยการลบออกทั้งสองข้างของสมการด้วย 27 คำถามที่ตามมา คือ เพราะเหตุผลใดจึงทำอย่างนั้น คำตอบ คือ การที่นักเรียนเข้าใจความหมายของเครื่องหมายเท่ากับในแง่ของความสัมพันธ์ระหว่างสองนิพจน์ จะช่วยให้นักเรียนมองเห็นว่าการดำเนินการดังกล่าวมีเหตุผล เพราะทำให้ทั้งสองข้างของสมการยังคงเท่ากันอยู่ด้วยเหตุผลดังกล่าวจะเห็นว่า นักเรียนจำเป็นต้องมีความเข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับ คือ ความสัมพันธ์ไม่ใช่สัญลักษณ์แทนการคำนวณคำตอบเพียงอย่างเดียว

Carpenter และ Levi (2000) ได้ชี้ให้เห็นว่าความเข้าใจเรื่องการเท่ากันเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาประโยคจำนวน เช่น $13 + 8 = \square + 10$ นักเรียนที่คิดว่าเครื่องหมายเท่ากับเป็นตัวแทนของการดำเนินการเพื่อค้นหาคำตอบอาจจะคิดว่าจำนวนที่ต้องเติมใน \square คือ 21 โดยไม่สังเกตตัวเลข 10 ที่ตามมา ส่วนนักเรียนที่ใช้วิธีการคิดคำนวณที่มีความเข้าใจที่ถูกต้องในเรื่องของการเท่ากันจะให้เหตุผลว่า เนื่องจากจำนวนสองจำนวนทางซ้ายมือบวกกันได้ 21 จำนวนสองจำนวนทางขวามือก็ต้องบวกกันได้ 21 เนื่องจากจำนวนหนึ่งเป็น 10 ดังนั้นจำนวนที่ต้องเติมใน \square คือ 11 นอกจากนี้ Stephens (2006) ให้ความคิดเห็นเพิ่มเติมว่านักเรียนที่ใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์สามารถคิดจากคู่ที่ไม่มีการคำนวณในลักษณะของการเท่ากัน โดยมองเห็นความเป็นไปได้ระหว่างจำนวนในความสัมพันธ์ที่เท่ากันที่มีลักษณะของความหลากหลายในการเปลี่ยนแปลงขึ้นอยู่กับจำนวนและการดำเนินการที่เกี่ยวข้อง โดยคิดว่า 8 เพิ่มขึ้นอีก 2 เป็น 10 ดังนั้น 13 ต้องลดลง 2 เป็น 11 การมองเห็นความเป็นไปได้ที่หลากหลายระหว่างจำนวนอาจมองเห็นได้ง่าย เมื่อจำนวนอยู่ใกล้กัน เช่น 99 กับ 90 หรือ 72 กับ 73 หรือ 746 กับ 747 ถ้ามีประโยคจำนวนหนึ่ง เช่น $109 + 76 = 23 + \square$ อาจจะเป็นการรวดเร็วที่จะบวกทางซ้ายมือเพื่อให้ได้ 185 จากนั้นก็ถามว่าจำนวนอะไรที่บวกกับ 23 แล้วได้ 185 ผลลัพธ์ก็คือ 162 ซึ่งเป็นความจริงว่า 23 น้อยกว่า 76 อยู่ 53 จำนวนที่ขาดหายไปต้องเป็น 53 มากกว่า 109 หรืออาจกล่าวได้อีกทางหนึ่งว่า

เนื่องจาก 109 มากกว่า 23 อยู่ 86 ดังนั้นจำนวนที่ขาดหายไปคือ 86 มากกว่า 76 การมองเห็นความเป็นไปได้ที่หลากหลายระหว่างจำนวนเหล่านี้ นักเรียนส่วนใหญ่อาจจะมองไม่เห็นความหลากหลายเหล่านี้ได้อย่างง่ายดายตายนัก

McNeil และ Alibali (2004 อ้างถึงใน Stephens, 2006) แสดงถึงวิธีการต่าง ๆ ที่ใช้ในการตอบโจทยปัญหาความเท่ากัน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่มีความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับไม่ถูกต้องจะใช้วิธีบวกกันทั้งหมด โดยมักจะสร้างสมการขึ้นมาใหม่ให้มีคำตอบเพียงด้านเดียวอยู่ทางขวามือของสมการ เช่น จากสมการ $3 + 4 + 8 = 3 + \square$ มักจะเปลี่ยนเป็น $3 + 4 + 8 + 3 = \square$ แล้วหาคำตอบซึ่งเป็นเรื่องที่ไม่ถูกต้อง ดังนั้นความเข้าใจในเรื่อง การเท่ากันทางคณิตศาสตร์จึงเป็นเรื่องที่จำเป็นต้องเน้นในระดับประถมศึกษา

Stephens (2006) กล่าวว่าผู้ที่สนใจในการพัฒนาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษาจะต้องมีความตระหนัก 3 ประการคือ

- (1) การที่นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับไม่ถูกต้อง
- (2) การที่นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับไม่ถูกต้องนี้เป็นเรื่องยากที่จะแก้ไข
- (3) ถ้าทั้งปัญหานี้ไว้อาจจะนำไปสู่การเพิ่มปัญหาในการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นที่สูงขึ้น

Van De Walle (2007) ได้กล่าวถึงความหมายของเครื่องหมายเท่ากับว่าเป็นสัญลักษณ์หนึ่งที่มีความหมายมากที่สุดในเลขคณิตระดับประถมศึกษา ซึ่งเกี่ยวข้องกับการใช้จำนวนและการดำเนินการในพีชคณิตและในคณิตศาสตร์ทั้งหมด ในขณะที่งานวิจัยตั้งแต่ปี 1975 ที่ชี้ให้เห็นอย่างชัดเจนว่า เครื่องหมายเท่ากับ “ = ” เป็นสัญลักษณ์ที่นักเรียนมักจะเข้าใจผิด ดังเช่นงานวิจัยของ Behr, Erlwanger และ Nichols (1975), Erlwanger และ Berlander (1983) ที่พบว่านักเรียนในเกรดต้น ๆ ถูกสอนว่าเครื่องหมายเท่ากับหมายถึง “เหมือนกัน” และนักเรียนทั้งหลายบอกว่าการแสดงจำนวนแต่ละข้างต้องเหมือนกัน แต่จากประสบการณ์ของนักเรียนกลับทำให้พวกเขาเชื่อว่าด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับโดยปกติเป็นด้านซ้ายคือโจทยปัญหาและอีกด้านหนึ่งคือคำตอบ ความเข้าใจของนักเรียนในเรื่องเครื่องหมายเท่ากับเหมือนกับปุ่มของเครื่องคิดเลข คือ กดเครื่องหมายเท่ากับแล้วได้รับคำตอบตามมา ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Falkner, Levi และ Carpenter (1999) ที่ทดสอบนักเรียนจากประโยคสัญลักษณ์ $8 + 4 = \square + 5$ พบว่ามีจำนวนนักเรียนไม่เกิน 10% ของนักเรียนทุกระดับจากระดับ 1 - 6 ใส่จำนวนที่ถูกต้องคือ 7 ใน \square โดยทั่วไปมักจะตอบ 12 และ 17

Kieran และ Matz (1982 อ้างถึงใน Jacob และคนอื่น ๆ, 2007) ในการเรียนพีชคณิตจำเป็นต้องเกิดความเข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับเป็นสิ่งที่แสดงความสัมพันธ์และถ้านักเรียนขาดความเข้าใจในเรื่องนี้แล้วก็เป็นอุปสรรคอย่างมากต่อการที่นักเรียนจะเชื่อมต่อการเรียนเลขคณิตไปสู่พีชคณิต ตัวอย่างเช่น การแปลงสมการซึ่งเป็นส่วนสำคัญในพีชคณิตระดับมัธยมศึกษา ต้องใช้ความเข้าใจว่าเมื่อนำจำนวนเดียวกันมาบวกเข้าทั้งสองข้างของสมการแล้วความสัมพันธ์ระหว่างนิพจน์สองนิพจน์ยังคงเดิมไม่เปลี่ยนแปลง ถ้านักเรียนไม่สามารถมองเห็นว่าเครื่องหมายเท่ากับนั้นเป็นสิ่งที่แสดงความสัมพันธ์แล้ว การแปลงรูปสมการดังที่กล่าวมาแล้วก็แทบจะไม่มี ความหมายอะไรสำหรับนักเรียน และนักเรียนจะสามารถแปลงรูปสมการได้โดยการจำกฎมาใช้เท่านั้น

Jacob และคนอื่น ๆ (2007) มองว่าเครื่องหมายเท่ากับเป็นสิ่งที่แสดงถึงความสัมพันธ์และเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการนำความคิดเชิงสัมพันธ์ไปใช้ นั่นคือการทำให้การคิดคำนวณง่ายขึ้น และการหารูปทั่วไป

Van De Walle (2007) กล่าวว่าทำไมการเข้าใจในเรื่องเครื่องหมายเท่ากับของนักเรียนให้ถูกต้องจึงเป็นเรื่องที่สำคัญ เหตุผลประการแรกคือเพราะเป็นสิ่งสำคัญสำหรับนักเรียนที่จะมองเห็นและเข้าใจความสัมพันธ์ในระบบจำนวน ซึ่งเครื่องหมายเท่ากับเป็นวิธีการหลักในการแสดงความสัมพันธ์เหล่านี้ ตัวอย่างเช่น $6 \times 7 = 5 \times 7 + 7$ ตัวอย่างนี้ไม่เพียงแต่เป็นกลยุทธ์ในการหาผลลัพธ์ แต่ยังเป็น การแสดงความคิดพื้นฐานอย่างหลากหลายในเลขคณิต เช่น จำนวนสามารถแสดงในรูปผลรวมดังนี้ $6 = 1 + 5$ หรือสมบัติการแจกแจงคือ การแยกคูณแต่ละส่วน เช่น $(1 + 5) \times 7 = (1 \times 7) + (5 \times 7)$ จะเห็นว่ามี การเปลี่ยนแปลงโดยเพิ่มจำนวนเข้ามา ดังการแสดงจำนวน $5 \times 7 + 7$ ถ้านักเรียนมีความคิดเหล่านี้โดยใช้การพิจารณาความสัมพันธ์ในขั้นต้น ก็จะเป็นการพัฒนาอย่างไม่เป็นทางการผ่านเลขคณิต เพื่อสรุปให้อยู่ในรูปทั่วไปและสรุปให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ เหตุผลประการที่สองคือ ถ้านักเรียนไม่เข้าใจในเครื่องหมายเท่ากับ จะทำให้นักเรียนมีปัญหาในการเรียนพีชคณิต เช่น การแก้สมการ $5x - 24 = 81$ นักเรียนต้องมองว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับเหมือนกับการแสดงจำนวนทั้งสองข้างเท่ากัน ถ้าทั้งสองข้างเหมือนกันก็จะสามารถบวก 24 เข้าแต่ละข้างได้ จะเป็นไปไม่ได้ที่จะคำนวณด้านซ้ายมือแล้วใส่คำตอบ

Carpenter, Franke และ Levi (2003 อ้างถึงใน Van De Walle, 2007) แนะนำว่าการเริ่มต้นที่ดีในการช่วยให้นักเรียนเข้าใจในเครื่องหมายเท่ากับ คือการค้นหาคำตอบสมการจากประโยคจริงหรือเท็จ และประโยคจำนวนเปิด ความหมายของเครื่องหมายเท่ากับเป็นผลลัพธ์อันหนึ่งของการสำรวจชนิดนี้ เช่น การพิจารณาวิธีอธิบายสองแบบที่แตกต่างกันอย่างชัดเจนว่า

ทำไมจึงเติม 5 ใน \square สำหรับประโยคจำนวนเปิด $7 - \square = 6 - 4$ วิธีแรกคือ ถ้า $6 - 4$ คือ 2 ต้องลบออกจาก 7 ให้ได้ 2 และ $7 - 5$ คือ 2 ดังนั้นใส่ 5 ใน \square วิธีที่สอง พิจารณาว่า 7 มากกว่า 6 ในอีกข้างหมายความว่าต้องลบ 1 ออกจากด้านซ้ายเพื่อให้เป็นจำนวนที่เหมือนกัน ซึ่งรู้ว่าจำนวนที่มากกว่า 4 คือ 5 ดังนั้นใส่ 5 ใน \square วิธีแรกเป็นการคำนวณผลจากด้านหนึ่งและแก้ไขผลอีกด้านหนึ่งเพื่อให้ประโยคเป็นจริง แต่วิธีที่สองใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการแสดงจำนวนของแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งวิธีนี้ไม่ต้องการคิดคำนวณค่าของแต่ละข้าง เมื่อจำนวนมากขึ้นวิธีการใช้ความสัมพันธ์จะมีประโยชน์มากขึ้น เช่น จากประโยคจำนวนเปิด $534 + 175 = 174 + \square$ ถ้า 174 น้อยกว่า 175 อยู่ 1 จำนวนใน \square ต้องมากกว่า 534 อยู่ 1 คือ 535 การคิดวิธีแรกนั้นต้องใช้การคิดคำนวณและบางครั้งมีปัญหาในการคำนวณหาคำตอบที่ถูกต้อง ถ้าโจทย์เป็นจำนวนที่มากขึ้น ส่วนการคิดวิธีที่สองจะทำการสังเกตและใช้ความสัมพันธ์ของจำนวนระหว่างสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมากกว่าการคำนวณหาคำตอบ ซึ่งการคิดลักษณะนี้เรียกว่าแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์นั่นเอง

Jacob และคนอื่นๆ (2007) ในด้านการสอนพบว่าการอภิปรายเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับเป็นจุดเริ่มต้นที่ดีในการพัฒนาแนวปฏิบัติในชั้นเรียนเพื่อสนับสนุนการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับสร้างทักษะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต เนื่องจากครูได้รับแรงจูงใจที่จะร่วมอภิปรายมุมมองที่นักเรียนมีต่อเครื่องหมายเท่ากับ เพื่อที่จะได้ค้นพบว่านักเรียนขาดความเข้าใจเกี่ยวกับการใช้สัญลักษณ์เครื่องหมายเท่ากับในด้านใด นอกจากนี้ประโยคสัญลักษณ์จริงหรือเท็จ และประโยคสัญลักษณ์ปลายเปิด พบว่าเป็นเครื่องมือที่เป็นประโยชน์ที่จะจุดประกายให้เกิดการอภิปรายเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ เป็นหน้าต่างสะท้อนให้ครูเห็นความคิดรวบยอดของนักเรียน การอภิปรายที่เป็นประโยชน์เกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ และการให้เหตุผลทางพีชคณิตโดยทั่วไปอาศัยลักษณะการตั้งปัญหาเช่น การเปรียบเทียบความเหมือนและความแตกต่างเป็นสิ่งที่ต้องจุดประกายให้นักเรียนคิด แนวคิดหลักก็คือประโยคสัญลักษณ์ที่ใครคนหนึ่งเสนอมาอาจจะท้าทายความคิดของนักเรียน ประโยคสัญลักษณ์หลาย ๆ ประโยค และลำดับของประโยคสัญลักษณ์อาจจะนำมาใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ครูต้องคิดถึงลำดับของปัญหาทั้งหมด ไม่ใช่แค่เพียงปัญหาข้อเดียว การเน้นที่ลำดับของปัญหานั้นเป็นเรื่องท้าทาย เนื่องจากครูจะต้องคิดล่วงหน้าในขณะที่เดียวกันก็ยินยอมรับความคิดของนักเรียน เนื่องจากพัฒนาการทางด้านความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับของนักเรียนเป็นประเด็นที่ได้รับความกระจ่างมากกว่าพัฒนาการทางด้านอื่น ๆ ครูจึงสามารถเข้าถึงความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับและออกแบบปัญหาในลำดับที่เหมาะสม เพื่อผลักดันให้ระดับการคิดของนักเรียนไปสู่ระดับที่

สูงขึ้นได้ดีกว่าเนื้อหาในส่วนอื่น ๆ ดังนั้นการอธิบายเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ เป็นการปูพื้นฐานสำหรับบทสนทนาที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น รวมถึงบทสนทนาเกี่ยวกับการช่วยให้นักเรียนใช้ความสัมพันธ์ของจำนวนในการทำให้การคิดคำนวณง่ายขึ้น และเพื่อหารูปทั่วไปสำหรับหลาย ๆ กรณี

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า การที่นักเรียนได้พัฒนาความเข้าใจทางเลขคณิตควบคู่ไปกับการเรียนรู้แนวคิดทางพีชคณิต นักเรียนจำเป็นต้องมีความเข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับคือความสัมพันธ์ไม่ใช่สัญลักษณ์แทนการคำนวณคำตอบเพียงอย่างเดียว นักเรียนที่ใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์สามารถคิดโดยมองเห็นความเป็นไปได้ระหว่างจำนวนในความสัมพันธ์ที่เท่ากันที่มีลักษณะของความเปลี่ยนแปลงอย่างหลากหลายขึ้นอยู่กับจำนวนและการดำเนินการที่เกี่ยวข้อง ดังนั้นความเข้าใจในเรื่องเครื่องหมายเท่ากับว่าเป็นสัญลักษณ์หนึ่งที่มีความหมายมากที่สุดในระดับประถมศึกษา ซึ่งเกี่ยวข้องกับการใช้จำนวนและการดำเนินการ ในการเรียนพีชคณิต จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องเกิดความเข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับเป็นสิ่งที่แสดงความสัมพันธ์ และเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการนำแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ไปใช้ นั่นคือการทำให้การคิดคำนวณง่ายขึ้น และนำไปสู่การหารูปทั่วไป

1.3 แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับเลขคณิตและพีชคณิต

Carpenter และคนอื่น ๆ (2005) ได้อธิบายว่าการสอนเลขคณิตแบบเดิมโดยมากมุ่งเน้นการดำเนินการในกระบวนการตามขั้นตอนต่าง ๆ เพื่อให้ได้คำตอบเดียวที่เป็นคำตอบจากการคิดคำนวณ แต่ในพีชคณิตมุ่งเน้นความสัมพันธ์ เช่น การแก้สมการพีชคณิต คือการเปลี่ยนแปลงสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชื่อมโยงกัน โดยที่ตัวแปร x อาจหมายถึงจำนวนหนึ่งหรือหลายจำนวน ซึ่งอันที่จริงแล้วความเชื่อมโยงระหว่างเลขคณิตกับพีชคณิตนั้นใกล้ชิดกันมาก ตัวอย่าง เช่น $40 + 50$ ถ้าใช้วิธีการเลขคณิตก็คือ นำ 40 บวกกับ 50 ถ้าใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ก็คือ 4 ในหลักสิบบวกกับ 5 ในหลักสิบ ถ้าให้ y แทนหลักสิบก็จะได้ $4y + 5y$ นั่นคือใช้วิธีการทางพีชคณิต ทั้งวิธีการทางเลขคณิตและวิธีการทางพีชคณิตต่างก็ใช้สมบัติการแจกแจงเป็นพื้นฐานสำหรับการบวก 4 กับ 5 ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 40 + 50 &= (4 \times 10) + (5 \times 10) \\ &= (4 + 5) \times 10 \\ &= 9 \times 10 \\ 4y + 5y &= (4 + 5) y \\ &= 9y \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าทั้งเลขคณิตและพีชคณิตมาจากความคิดพื้นฐานเดียวกัน

NCTM (2000) และ Kilpatrick และคนอื่น ๆ (2001 อ้างถึงใน Carpenter และคนอื่น ๆ, 2005) เสนอว่าการสอนให้นักเรียนมีความคล่องแคล่วด้านวิธีการในเลขคณิตควรต้องดำเนินการอย่างต่อเนื่องเพราะเป็นเป้าหมายพื้นฐานของหลักสูตรเลขคณิต แต่ความคล่องแคล่วด้านวิธีการไม่ได้เกี่ยวข้องกับความคิดคำนวณเพียงอย่างเดียวยังประกอบด้วยความยืดหยุ่นในการเลือกว่าจะใช้วิธีการอย่างไรและเมื่อใด นั่นคือเป็นสิ่งที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์

Jacob และคนอื่น ๆ (2007) ได้กล่าวว่าแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์นี้ แสดงให้เห็นถึงการปรับเปลี่ยนระดับรากฐานไปจากการเน้นเลขคณิตที่คิดคำนวณหาคำตอบเพียงอย่างเดียวไปเน้นพีชคณิตโดยการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ควบคู่ไปด้วยกัน ซึ่งในการศึกษาเลขคณิตแบบดั้งเดิม ได้แก่ หัวข้อ การบวก การลบ การคูณ และการหาร โดยปกติแล้วจะเป็นการแสดงไปตามลำดับขั้นตอนจนได้คำตอบเป็นจำนวนหนึ่งจำนวน ซึ่งเป็นคำตอบที่ได้จากการคิดคำนวณในทางตรงกันข้าม การแก้สมการพีชคณิตจะมีลักษณะแตกต่างออกไป สมการพีชคณิตแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างสองนิพจน์และสามารถหาคำตอบได้จากการแปลงรูปอย่างต่อเนื่องของสมการ นักเรียนจำเป็นต้องเข้าใจว่าผลที่ได้จากการแปลงรูปของสมการในแต่ละขั้นตอนนั้นยังคงเท่ากับสมการแรก แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์จะขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์สำคัญที่ทำให้คำจำกัดความแก่เลขคณิตและพีชคณิต อย่างไรก็ตามในทางเลขคณิตนั้น ความสัมพันธ์เหล่านี้มักจะถูกมองข้าม ดังนั้นโดยการเน้นที่แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ ครูสามารถบูรณาการแนวคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์เข้ากับการเรียนเลขคณิต เพื่อสอนนักเรียนให้เกิดทั้งความคิดรวบยอดและทักษะที่นักเรียนจะได้สั่งสมในระดับประถมศึกษา จนได้รับการพัฒนาและสอดคล้องกับความคิดรวบยอดและทักษะที่นักเรียนจำเป็นต้องมีไปใช้ในการเรียนพีชคณิตต่อไป ยกตัวอย่าง แม้ว่านักเรียนอาจจะรู้จักสมบัติการแจกแจงอย่างผิวเผิน แต่ก็ยังเป็นพื้นฐานสำหรับการคูณจำนวนหลายหลักในการคิดคำนวณของเลขคณิต เช่น

$$78 \times 5 = (70 + 8) \times 5$$

$$= 70 \times 5 + 8 \times 5$$

และสำหรับวิธีการบวกที่คิดขึ้นโดยนักเรียนหลายคน เช่น

$$57 + 68 = 50 + 60 + 7 + 8$$

$$= (5 + 6) \times 10 + 15$$

$$= 125$$

สมบัติการแจกแจงนี้ ยังเป็นพื้นฐานของการบวกในการคำนวณทางพีชคณิต เช่น

$$6y + 4y = (6 + 4)y$$

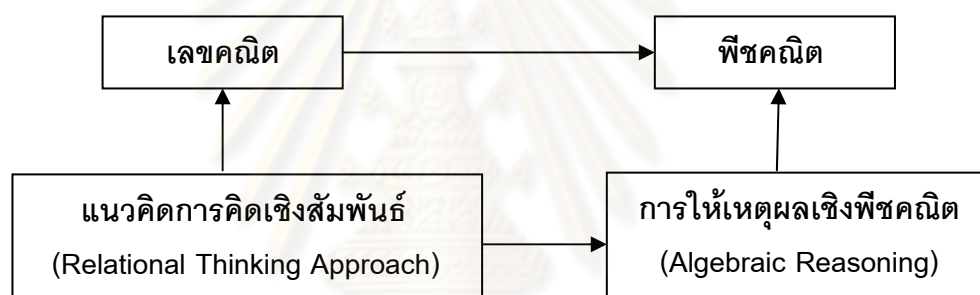
$$= 10y$$

การพัฒนาความเข้าใจความสัมพันธ์นี้ ในการเรียนเลขคณิตอาจจะต้องใช้เวลานาน เพื่อที่จะไม่เกิดความเข้าใจคลาดเคลื่อนทางพีชคณิต เช่น

$$6x + 3y = 9xy \text{ หรือ}$$

$$5(y + 8) = 5y + 8 \text{ (Matz, 1982 อ้างถึงใน Jacob และคนอื่น ๆ, 2007)}$$

สรุปได้ว่าการที่นักเรียนมีความสามารถใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ในเลขคณิตจะส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต โดยผู้วิจัยสรุปได้ดังนี้



แผนภาพที่ 1 สรุปแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

1.4 การพัฒนาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์

งานวิจัยที่มุ่งเน้นการพัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์และการใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ในการเรียนเลขคณิตในระดับประถมศึกษา เช่น Carpenter และ Levi (2000); Carpenter และคนอื่น ๆ (2003); Koehler (2004); Jacobs, Franke, Carpenter และ Battey (2007) งานวิจัยเหล่านี้ให้นักเรียนใช้ความสัมพันธ์กับสมบัติของจำนวน และการดำเนินการของจำนวนในการเรียนเลขคณิต เริ่มต้นจากการใช้คำถามของครู การต่อยอดความคิดของนักเรียน การเรียงลำดับของปัญหาที่ส่งเสริมการพัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์ และการอภิปรายทั่วไปเกี่ยวกับประเภทของการคิดที่นักเรียนใช้ในห้องเรียน เช่น วิธีที่นักเรียนสามารถใช้สมบัติการแจกแจงในการเรียนรู้ข้อเท็จจริงของจำนวนในเรื่องการคูณ นอกจากนั้นการให้นักเรียนพิจารณาประโยคจริงหรือเท็จ (True/False Sentences) ในหลายงานวิจัย Carpenter และคนอื่น ๆ (2003) ก็เป็นอีกกิจกรรมหนึ่งที่สามารถนำไปใช้เพื่อการพัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์ให้นักเรียนได้

Koehler (2004 อ้างถึงใน Molina, Castro, และ Ambrose, 2005/2006) ทดลองกับกลุ่มนักเรียนเกรด 2 และ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ต่ำ สามารถพัฒนาความเข้าใจของตนเองเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน การดำเนินการ นิพจน์ และการใช้ความสัมพันธ์เหล่านี้ในการเรียนรู้เรื่องการคูณได้อย่างเข้าใจเป็นอย่างดี ผลการศึกษานี้แสดงให้เห็นว่า นักเรียนที่มีความสามารถต่ำก็สามารถที่จะเริ่มเข้าร่วมกิจกรรมการเรียนรู้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่สูงกว่า และซับซ้อนกว่าที่ผู้สอนคาดเดาได้อย่างราบรื่น และที่ดียิ่งไปกว่านั้น คือ แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์จะช่วยส่งเสริมการคิดคำนวณที่ซับซ้อนของผู้เรียนได้

Carpenter และคนอื่น ๆ (2005) ได้ศึกษาวิธีการจัดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการคิดเชิงสัมพันธ์ในชั้นเรียนระดับประถมศึกษา และวิธีการใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ในการเรียนเลขคณิต โดยใช้ประโยคจริงหรือเท็จ และประโยคจำนวนเปิดเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ โดยเน้นที่สมบัติของจำนวน และวิธีในการคิดเกี่ยวกับการดำเนินการของจำนวน ตัวอย่างประโยคจำนวน เช่น $38 + 47 = 47 + 38$ ซึ่งเน้นชัดเจนไปที่สมบัติการสลับที่ของการบวก นักเรียนอาจคำนวณว่าประโยคนี้จริง โดยการบวกแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับ แต่นักเรียนบางคนอาจสรุปทันทีว่าประโยคนี้ถูกต้อง เพราะว่าเพียงแค่ลำดับของจำนวนเท่านั้นที่เปลี่ยน สิ่งนี้สามารถนำไปสู่การอภิปรายว่า นี่คือการสัมพันธ์ทั่วไปสำหรับทุกจำนวน

ในบริบทของเลขคณิต จากการศึกษาของ Stephens (2006) ได้ให้นิยามเฉพาะเรื่องแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ว่าเป็นความสามารถในการมองเห็นและใช้การเปลี่ยนแปลงที่เป็นไปได้ในประโยคเปิดของจำนวน หรือประโยคจำนวนที่มีบางจำนวนหายไป (Open or Missing Number Sentences) การพัฒนาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์นี้ สามารถดำเนินการได้ในรูปแบบของกิจกรรมการเรียนรู้ โดยกิจกรรมนั้นจะช่วยให้นักเรียนมุ่งมาสนใจความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนและการดำเนินการที่เกี่ยวข้อง โดยไม่เน้นการคิดเชิงคำนวณ (Computational Thinking) ซึ่งยึดติดอยู่กับขั้นตอนวิธีการคำนวณและการหาคำตอบ กิจกรรมการเรียนรู้รูปแบบหนึ่งที่ใช้ได้ผลจากการศึกษาวิจัยที่ผ่านมา เรียกว่า การใช้ประโยคเปิดของจำนวน ตัวอย่าง เช่น (ก) $27 + 48 - 48 = \square$ (ข) $12 + 7 = \square + 12$ (ค) $8 + 4 = \square + 5$ นักเรียนที่ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ สามารถหาคำตอบออกมาได้โดยไม่ต้องคำนวณ $27 + 48 - 48$ (ก) $12 + 7$ (ข) และ $8 + 4$ (ค) แต่จะมองเห็นการหัก 48 ออกจาก 48 (ก) เห็นการสลับที่ของการบวกจำนวนสองจำนวน (ข) และเห็นการลดและการเพิ่มของจำนวนที่สัมพันธ์กัน (ค) โรงเรียนส่วนใหญ่ทั่วโลกมีการส่งเสริมให้นักเรียนพัฒนาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์น้อยมาก งานวิจัยต่าง ๆ ที่ผ่านมาแสดงให้เห็นว่านักเรียนจำนวนมากไม่สามารถแก้ปัญหาเกี่ยวกับประโยคเปิดของจำนวนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และจะทำได้

บ้างก็ต่อเมื่อได้ลงมือคำนวณแล้ว ทั้งนี้สาเหตุเป็นเพราะนักเรียนขาดความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของจำนวนต่าง ๆ ในสมการที่กำหนดให้ รวมทั้งขาดความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการดำเนินการ และสมบัติทางเลขคณิตต่าง ๆ ซึ่งเกี่ยวข้องกับสถานการณ์

Stephens (2006) หลักฐานที่แสดงว่านักเรียนมีการคิดเชิงสัมพันธ์ เช่น ลูกศร แผนภาพ ภาพอธิบาย ได้ถูกใช้เพื่อเปรียบเทียบขนาดของจำนวนในแต่ละด้านของเครื่องหมายเท่ากับ หรือการอธิบายด้วยวาจาว่า ได้เปรียบเทียบความสัมพันธ์ของขนาดของจำนวนในแต่ละด้านของเครื่องหมายเท่ากับตามที่ลูกศร แผนภาพ หรือคำอธิบาย ได้ใช้เชื่อมโยงแสดงในการให้เหตุผลโดยไม่ได้คำนวณเปรียบเทียบเพื่อหาตัวเลขที่ขาดหายไป

Jacob และคนอื่น ๆ (2007) การนำการคิดเชิงสัมพันธ์ไปใช้มี 3 แบบคือ

(1) การพิจารณาว่าเครื่องหมายเท่ากับเป็นตัวบ่งชี้ของความสัมพันธ์ ตัวอย่างเช่น การพิจารณาเครื่องหมายเท่ากับเป็นตัวบ่งชี้ความสัมพันธ์ระหว่างสองนิพจน์ ที่น่าเป็นห่วงก็คือ นักเรียนหลายคนมีมุมมองที่แปลกออกไปโดยมักจะมองว่าเครื่องหมายเท่ากับเป็นสัญญาณให้นำจำนวนที่อยู่ก่อนหน้าเครื่องหมายเท่ากับมาคิดคำนวณ และจำนวนหลังเครื่องหมายเท่ากับก็คือผลลัพธ์ที่ได้จากการคิดคำนวณนั้น ยกตัวอย่างเช่น นักเรียนที่มีมุมมองดังกล่าวจะแก้สมการ $57 + 36 = \square + 34$ โดยการเติม 93 ลงใน \square

(2) การใช้ความสัมพันธ์ของจำนวนทำให้การคิดคำนวณง่ายขึ้น ยกตัวอย่างเช่น นักเรียนที่มองว่าเครื่องหมายเท่ากับเป็นสิ่งที่แสดงความสัมพันธ์จะสามารถแก้สมการ $57 + 36 = \square + 34$ โดยการคิดคำนวณตรง ๆ เขาจะคำนวณ $57 + 36 = 93$ แล้วมาพิจารณาต่อว่าจำนวนใดบวกกับ 34 แล้วได้ 93 หรือไม่เขาก็อาจจะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง 36 กับ 34 และสังเกต เห็นว่า 34 น้อยกว่า 36 อยู่ 2 และให้เหตุผลว่า จำนวนใน \square ต้องมากกว่า 57 อยู่ 2 ในทั้งสองกรณีนี้ นักเรียนเข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับแสดงถึงความสัมพันธ์ อย่างไรก็ตามวิธีที่สองแสดงให้เห็นถึงระดับของแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ที่นักเรียนได้ใช้ความสัมพันธ์ของจำนวนมาช่วยให้การคำนวณของเขาง่ายขึ้น ด้วยการที่รู้ว่าเมื่อใดจะนำความสัมพันธ์ของจำนวนมาใช้ จะช่วยเปลี่ยนให้โจทย์คำนวณที่ยืดยาว อย่างเช่น 5×499 และ $1488 + 375 - 373$ กลายเป็นโจทย์ง่าย ๆ เช่น $5 \times 500 - 1$ และ $1488 + 2$ การที่นักเรียนรู้วิธีการทำให้การคิดคำนวณง่ายขึ้น โดยการเปลี่ยน 499 เป็น 500 หรือการนำ 373 ไปลบออกจาก 375 นั้น ทำให้ได้รู้ว่าทำไมวิธีการคิดเหล่านี้จึงได้ใช้เข้าไปสู่การเข้าใจแนวคิดสำคัญเกี่ยวกับจำนวนและสมบัติพื้นฐานของการดำเนินการของจำนวน ในวิธีการหนึ่งโดยเฉพาะ นักเรียนที่สามารถใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์จะสามารถบอกความสัมพันธ์ของจำนวน และให้เหตุผลได้ว่า การแปลงรูปแบบไหนที่จะเหมาะสมกับโจทย์นั้น

ในการทำเช่นนั้น พวกเขาต้องมีความเข้าใจอย่างน้อย ๆ ความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนและสมบัติพื้นฐาน สามารถนำมาใช้พิสูจน์เกี่ยวกับการแปลงรูปของนิพจน์ต่าง ๆ นักเรียนที่ไม่ได้รับโอกาสในการเรียนรู้เกี่ยวกับแนวคิดเหล่านี้ มักจะไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างของระบบจำนวนไปใช้ได้ ซึ่งเป็นสาเหตุให้การเรียนเลขคณิตและพีชคณิตกลายเป็นเรื่องยากขึ้นกว่าที่จำเป็น

(3) การทำความเข้าใจให้เห็นชัดเจนโดยอาศัยสมบัติพื้นฐานของการดำเนินการของจำนวน โดยทั่วไปแล้วนักเรียนมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับความสัมพันธ์พื้นฐานของจำนวน แต่นักเรียนไม่เคยศึกษาความสัมพันธ์เหล่านี้จนเข้าใจแจ่มแจ้ง และไม่เคยได้คิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์เหล่านี้ว่าเป็นระบบหรือแสดงความสัมพันธ์เหล่านี้ในรูปทั่วไป ครูสามารถช่วยให้นักเรียนได้ค้นพบหลักการทั่วไปโดยใช้การตั้งคำถามที่มักจะพบในการอภิปรายเกี่ยวกับเลขคณิต และนักวิจัยหลายคนก็ได้แสดงหลักฐานออกมาให้เห็นว่าแม้แต่นักเรียนประถมศึกษาที่มีความสามารถในการสร้างรูปทั่วไปได้ เช่น (Davis, 1964; Schifter, 1999; Carpenter และ Levi, 2000; Blanton และ Kaput, 2005; Carraher, Schliemann, Brizuela และ Earnest, 2006) ตัวอย่างเช่น ในงานวิจัยของ Carpenter และ Levi (2000) ได้นำเสนอ บทสนทนาที่เกิดขึ้นหลังจากถามนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 และ 2 ว่า $78 - 49 = 78$ นั้น จริงหรือเท็จ หลังจากที่ได้อภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเห็นหลาย ๆ แนวความคิดเกี่ยวกับประโยค ที่แสดงความสัมพันธ์ของจำนวน นักเรียนกลุ่มนี้ได้เสนอกฎขึ้นมาดังนี้ จำนวนใดลบด้วยศูนย์จะเท่ากับจำนวนนั้น สรุปแล้วนักเรียนไม่ได้ใช้แค่ความเข้าใจของศูนย์มาเป็นการพิจารณาประโยคสัญลักษณ์ดังกล่าว แต่ยังสร้างรูปทั่วไป เช่น $a - 0 = a$ และได้อภิปรายร่วมกันว่า หลักการดังกล่าวจะเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนหรือไม่ นอกจากนี้นักเรียนประถมศึกษาสามารถแสดงรูปทั่วไป โดยใช้ภาษาของตัวเอง และสามารถแสดงรูปทั่วไปโดยใช้ตัวแปร เช่น $s + 0 = s$, $p + r = r + p$ ถ้านักเรียนขาดความเข้าใจในรูปทั่วไป นักเรียนก็จะไม่เข้าใจสมบัติพื้นฐานของการดำเนินการ ของจำนวน และเมื่อนักเรียนไม่เข้าใจแล้ว สมบัติเหล่านี้จะถูกนำมาในการคำนวณได้อย่างไร นักเรียนไม่สามารถแยกแยะว่าเลขคณิตและพีชคณิตนั้นขึ้นอยู่กับพื้นฐานความคิดเดียวกัน

สรุปได้ว่าการพัฒนาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ สามารถดำเนินการได้โดยใช้รูปแบบของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยกิจกรรมจะมุ่งให้ผู้เรียนสนใจความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนและการดำเนินการของจำนวนในการเรียนเลขคณิต โดยไม่เน้นการคิดคำนวณ นอกจากนี้ การให้นักเรียนพิจารณาประโยคจริงหรือเท็จ ก็เป็นอีกกิจกรรมหนึ่งที่สามารถนำไปใช้เพื่อการพัฒนาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ให้กับนักเรียน

2. แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

2.1 ความหมายของการเสริมต่อการเรียนรู้ (Scaffolding)

Wood, Bruner และ Ross (1976) ได้ให้ความหมายของการเรียนการสอนแบบการเสริมต่อการเรียนรู้ว่าเป็นกระบวนการที่ทำให้เด็กหรือนักเรียนสามารถดำเนินการแก้ปัญหาหรือทำงานให้บรรลุเป้าหมายที่อยู่เหนือความพยายามของนักเรียนที่จะทำได้ด้วยตนเอง แต่จะทำได้เมื่อได้รับความช่วยเหลือสนับสนุน และการช่วยเสริมศักยภาพต่าง ๆ ของงานโดยครู หรือผู้ใหญ่ที่ในครั้งแรกรงานเหล่านั้น อยู่เหนือความสามารถของนักเรียนที่จะกระทำได้ด้วยตนเอง ด้วยวิธีที่ทำให้นักเรียนใส่ใจและทำองค์ประกอบต่าง ๆ ของงานเหล่านั้นให้สำเร็จ ซึ่งองค์ประกอบของงานเหล่านั้นต้องอยู่ในช่วงหรือขอบเขตที่นักเรียนจะสามารถทำได้

Vygotsky (1978, อ้างถึงใน Clark และ Graves, 2005) ให้ความหมายการเสริมต่อการเรียนรู้ว่าเป็นการให้ความช่วยเหลือนักเรียนให้สามารถทำงานที่ไม่สามารถทำงานให้สำเร็จได้ตามลำพังให้สามารถทำได้สำเร็จ เป็นโครงสร้างชั่วคราวที่ยึดหยุ่นได้ โดยครูค่อย ๆ ลดการช่วยเหลือลงแล้วถ่ายโอนความรับผิดชอบการทำงานไปสู่ นักเรียน นักเรียนลงมือกระทำมีปฏิสัมพันธ์กับสังคม หลักการสำคัญของการเสริมต่อการเรียนรู้คือ ครูต้องประเมินความรู้ ทักษะ และความต้องการของนักเรียน เพื่อเตรียมหรือเลือกกิจกรรมการช่วยเหลือที่เหมาะสม กับความต้องการของนักเรียน การเรียนรู้สิ่งที่ไม่สามารถเรียนรู้ได้ตามลำพังโดยต้องได้รับการช่วยเหลือจากครูและเพื่อนที่มีความรู้มากกว่า ทั้งนี้การให้การเสริมต่อการเรียนรู้ต้องเหมาะสมกับพัฒนาการของนักเรียน สามารถให้ความช่วยเหลือได้หลายรูปแบบ เช่น การตั้งคำถาม การบอกหรืออธิบายวิธีการ การสาธิตหรือแสดงให้ดู การให้แบบอย่าง การชี้แนะ การทำงานกลุ่ม การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดหรือแบบทดสอบก่อน เป็นต้น ซึ่งใช้ได้ทั้งการเสริมต่อด้วยสิ่งที่มองเห็น และการเสริมต่อแบบเป็นคำพูด ใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ และกระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนรู้

Rosenshine และ Meister (1992) กล่าวถึงการใช้วิธีการเสริมต่อการเรียนรู้ว่าเป็นการประยุกต์แนวคิดบริเวณพื้นที่รอยต่อพัฒนาการมาสู่การเรียนการสอน โดยกล่าวว่าการใช้วิธีการเสริมด้วยการเรียนรู้ เป็นรูปแบบของการสนับสนุนที่ครูหรือนักเรียนคนอื่น ๆ ให้แก่นักเรียนด้วยกัน เพื่อช่วยให้นักเรียนเชื่อมต่อระหว่างความสามารถในปัจจุบัน และเป้าหมายที่ตั้งไว้

Dixon – Krauss (1996) ได้ให้นิยามของการใช้วิธีการเสริมต่อการเรียนรู้ไว้ว่าเป็นการที่ครูมอบหมายงานที่จะให้นักเรียนเรียนรู้ และมีการแนะนำ ชี้แนะ โดยการพูดคุยสนทนากับนักเรียน เพื่อให้แนวทางในการที่จะเรียนรู้งานนั้น ๆ

Eggen และ Kauchak (1997) การเสริมต่อการเรียนรู้คือ การช่วยเหลือเพื่อให้นักเรียนทำงานที่ไม่สามารถทำงานตามลำพังได้สำเร็จ การเสริมต่อการเรียนรู้ช่วยให้นักเรียนผ่านพื้นที่บริเวณรอยต่อพัฒนาการโดยช่วยเหลือนักเรียนให้สามารถทำงานได้สำเร็จโดยอิสระ ผลของการช่วยเหลือตอบสนองต่อความต้องการของนักเรียน ปรับความต้องการเข้ากับความสามารถในการปฏิบัติของนักเรียน ครูเข้ามาช่วยเหลือเมื่อนักเรียนต้องการ และปล่อยให้ นักเรียนเป็นอิสระเมื่อนักเรียนทำงานได้เอง รูปแบบของการเสริมต่อการเรียนรู้ที่ใช้ในการสอน เช่น การเป็นตัวแบบ (Modeling) การคิดและพูดออกมามัด ๆ (Think-Aloud) การใช้คำถาม (Questions) การปรับสื่อการเรียนการสอน (Adapting Instruction Materials) และการให้คำแนะนำโดยไม่ลั้งเล (Prompts and Cues)

Larkin (2001) ได้อธิบายการเรียนการสอนโดยใช้วิธีการเสริมต่อการเรียนรู้ไว้ว่าเป็นการช่วยเหลือสนับสนุนให้นักเรียนสามารถทำงานให้สำเร็จ เมื่อนักเรียนต้องเรียนรู้สิ่งใหม่หรือสิ่งที่ยาก นักเรียนอาจจะต้องการความช่วยเหลือมากขึ้น และเมื่อนักเรียนเริ่มจะทำงานนั้นได้สำเร็จ การช่วยเหลือสนับสนุนนั้นจะค่อย ๆ ลดลง จนกระทั่งนักเรียนสามารถรับผิดชอบหรือทำงานนั้นได้ด้วยตนเองการช่วยเหลือจะยุติลง

จากแนวคิดของนักการศึกษาข้างต้น สรุปได้ว่า การเรียนการสอนโดยใช้วิธีการเสริมต่อการเรียนรู้ เป็นกระบวนการของการช่วยเหลือ สนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียน อย่างเป็นระบบ โดยมีครูคอยให้การช่วยเหลือ หรือนักเรียนให้การช่วยเหลือซึ่งกันและกัน ซึ่งเป็นปฏิสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นระหว่างนักเรียน ครูหรือผู้ที่มีศักยภาพมากกว่า เป้าหมายของการช่วยเหลือคือ การให้นักเรียนสามารถปฏิบัติงานที่นักเรียนไม่สามารถทำให้สำเร็จได้ด้วยตนเองให้สำเร็จสมบูรณ์ได้ด้วยตนเอง วิธีการช่วยเหลือจะค่อย ๆ เปลี่ยนแปลงไปตามระดับความสามารถในการปฏิบัติงานของนักเรียน โดยการช่วยเหลือจะค่อย ๆ ลดลง ในขณะที่นักเรียนค่อย ๆ เพิ่มความสามารถในการปฏิบัติงานด้วยตนเอง และเมื่อนักเรียนสามารถปฏิบัติงานได้ด้วยตนเองอย่างอิสระแล้วการช่วยเหลือในการทำกิจกรรมนี้จะยุติลง

2.2 ทฤษฎีประวัติศาสตร์ทางสังคมของ Vygotsky (Vygotsky's Sociohistorical)

แนวคิดที่นำมาใช้เป็นพื้นฐานในการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน คือ ทฤษฎีประวัติศาสตร์ทางสังคมของ Vygotsky (1816-1934 อ้างถึงใน ธัญสุดา จิรกิตตยากร, 2549) เป็นนักจิตวิทยาชาวรัสเซียที่ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับพัฒนาการทางสติปัญญา โดยทฤษฎีของเขาเน้นความสำคัญของวัฒนธรรมและสังคมและการเรียนรู้ที่มีต่อการพัฒนาเชาว์ปัญญา เขากล่าวว่าเชาว์ปัญญาของเด็กจะพัฒนาขึ้นจากบริบทของวัฒนธรรมและสังคมซึ่งมีอิทธิพลต่อเด็ก

เด็กจำนวนมากมีความรู้และทักษะค่อยปรากฏขึ้นจากการปฏิสัมพันธ์กับพ่อแม่ ครู และคนอื่น ๆ ที่มีประสบการณ์หรือความชำนาญมากกว่า Vygotsky เห็นด้วยกับ Piaget ว่าเด็กเล็กมีความอยากรู้อยากเห็นที่จะสำรวจตรวจสอบ อยากรงมือกระทำในการเรียนรู้ และเกิดการค้นพบ แต่แนวคิดที่ Vygotsky ไม่เห็นด้วยกับ Piaget คือ การแก้ปัญหาตามลำพังของเด็ก ในทางกลับกัน การแก้ปัญหาหรือการค้นพบจะเกิดจากบริบทของการเรียนรู้ร่วมมือ การสนทนาระหว่างผู้ที่มีประสบการณ์มากกว่า ซึ่งเป็นตัวอย่างในการกระทำ และถ่ายทอดมาเป็นคำพูดคำสนทนา อย่างเช่น การที่เด็กเริ่มจะเข้าโรงเรียน การทำความเข้าใจในการสอนของครูในครั้งแรก และต่อมาในที่สุดก็สามารถทำความเข้าใจและเรียนรู้ได้ โดยเฉพาะจากการสอนหรือคำแนะนำของครู จากการศึกษาของ Vygotsky เด็กหญิงอายุ 4 ปีเริ่มหัดต่อภาพ (Jigsaw) เป็นครั้งแรกเด็กหญิงได้พยายามต่อภาพแต่ทำอย่างไรก็ทำไม่ได้ จนกระทั่งพ่อสังเกตเห็นและนั่งข้าง ๆ พุดคุยให้ข้อคิดว่า จะเป็นการดี ถ้าจะเริ่มวางชิ้นส่วนจากมุมแรกก่อน และชี้ไปที่มุมสีชมพู เด็กหญิงทำไปและเกิดการติดขัดอีก และรู้สึกท้อแท้ใจ พ่อจึงวางภาพอีก 2 ชิ้นไว้ใกล้ ๆ ภาพที่เด็กหญิงต่อได้ ในที่สุดเด็กหญิงก็ต่อภาพได้สำเร็จ การใช้คำพูดของพ่อที่กระตุ้นหรือคอยแนะเด็กหญิงให้ได้ลงมือทำเองจนประสบความสำเร็จ ในช่วงที่เด็กหญิงติดขัดไม่สามารถต่อภาพได้และพ่อเข้ามาช่วยแนะนำโดยการสนทนา Vygotsky เรียกว่า The Zone Of Proximal Development ซึ่งแสดงให้เห็นช่องว่างระดับพัฒนาการที่แท้จริงขณะที่ตัดสินใจแก้ปัญหาอย่างอิสระ กับระดับพัฒนาการที่สูงขึ้นของการพัฒนาศักยภาพ ขณะแก้ปัญหาภายใต้คำแนะนำของผู้ใหญ่ หรือทำงานกับเพื่อนที่มีความสามารถมากกว่า Vygotsky เรียกการช่วยเหลือเด็กในการเรียนรู้ว่า “Scaffolding” ซึ่งหมายความว่า การให้ความช่วยเหลือเด็กในการเรียนรู้ หรือการแก้ปัญหา หรือการทำงานอย่างใดอย่างหนึ่ง ซึ่งเด็กไม่สามารถทำได้ด้วยตนเองจนสัมฤทธิ์ผลตามวัตถุประสงค์

Vygotsky อธิบายว่า การเรียนรู้เกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อเด็กมีปฏิสัมพันธ์ทางสังคมกับผู้ใหญ่ เช่น พ่อ แม่ ครู และเพื่อน ในขณะที่เด็กอยู่ในสภาวะสังคมและวัฒนธรรม (Social Cultural Context) ในกระบวนการเรียนรู้และพัฒนาการเขาวงกตปัญญาเด็กหรือนักเรียน เปลี่ยนสิ่งเร้าที่เกิดจากการที่ปฏิสัมพันธ์ทางสังคมเข้าไปภายในใจ โดยอาศัยกลไกกลาง (Mediation Means) เป็นเครื่องช่วยเชื่อมโยงสิ่งเร้าภายนอกในสภาวะสังคมให้เป็นส่วนหนึ่งของสิ่งที่มีอยู่ คิดภายในใจ กลไกกลางที่ใช้คือ เครื่องมือ (Tool) และเครื่องหมาย (Sign) Vygotsky ให้ความหมายของเครื่องมือว่าเป็นสิ่งที่นักเรียนใช้เพื่อช่วยในการทำงานให้สัมฤทธิ์ผลตามความต้องการ เครื่องหมายเป็นสิ่งที่ใช้แทนวัตถุสิ่งของที่เป็นรูปธรรมหรือนามธรรม

Vygotsky ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับบทบาทของภาษาในพัฒนาการเชอว์ปีญญาเพราะภาษาเป็นเครื่องมือสำคัญของการคิด การเข้าใจพัฒนาการของภาษาจึงสำคัญมาก Vygotsky ได้แบ่งพัฒนาการของภาษาออกเป็น 3 ชั้น

ชั้นที่ 1 ภาษาที่ใช้ในการมีปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่นซึ่ง Vygotsky ให้ชื่อว่าภาษาสังคม (Social Speech) แรกเกิดจนถึง 3 ขวบ เป็นขั้นแรกของพัฒนาการทางภาษา เด็กจะใช้ภาษาเพื่อแสดงความคิดหรืออารมณ์ และในการควบคุมพฤติกรรมของผู้อื่น โดยใช้คำพูดพยางค์เดียว เช่น “ไม่” หมายความว่า “ไม่ชอบ” “ไม่ต้องการ” “ไม่ได้” หรือ “น้ำ” หมายความว่า “ต้องการดื่มน้ำ”

ชั้นที่ 2 ภาษาที่พูดกับตนเอง (Egocentric Speech) (3-7 ขวบ) เด็กวัยนี้จะใช้ภาษาพูดกับตนเอง โดยไม่จำเป็นจะต้องเกี่ยวข้องกับใคร เด็กมักจะใช้ภาษาคลายกันเป็นสิ่งที่สั่งให้เด็กทำงานแม้ว่าจะพูดคนเดียวแต่ก็จะออกเสียงให้ผู้อื่นได้ยินด้วย Vygotsky ให้ความสำคัญของ Egocentric Speech ว่ามีบทบาทสำคัญในการประสานความคิด และพฤติกรรม หรือการแสดงออก

ชั้นที่ 3 ภาษาที่พูดในใจเฉพาะของตนเอง (Inner Speech) 7 ขวบขึ้นไป ภาษาที่พูดในใจเป็นตัวแปรสำคัญในการพัฒนาการเชอว์ปีญญาขั้นสูง Vygotsky กล่าวว่า การคิดทุกอย่างใช้ภาษาที่พูดในใจเงียบ ๆ การวิจัยเกี่ยวกับการใช้ภาษาที่พูดในใจเฉพาะตัว และการคิดแก้ปัญหา พบว่าเด็กจะใช้ภาษาที่พูดในใจบ่อยขึ้น จะใช้เฉพาะตนเองมากกว่าเด็กที่แก้ปัญหาซับซ้อนได้ช้า ทั้งนี้เป็นเพราะเด็กใช้ภาษาช่วยในการคิดวางแผนหรือขั้นตอนที่จะแก้ปัญหา

การเรียนรู้ตามแนวคิดของ Vygotsky เด็กและครูสอนควรมีลักษณะดังนี้

- 1) เด็กทุกคนต้องมีปฏิสัมพันธ์เกี่ยวข้องกับโลกภายนอกที่ล้อมรอบตัวเขาเหล่านั้น และมีโอกาสได้ค้นหาคำตอบตามสมมติฐานเพื่ออธิบายสิ่งต่าง ๆ ในสิ่งแวดล้อมของเขา
- 2) ในการหาคำตอบตามการคาดคิด หรือทำนาย เพื่อให้ใช้ในการอธิบายนั้น เป็นการเปิดโอกาสให้เด็กได้สร้างรูปแบบจำลอง ตัวแทนวัตถุ ปรัชญาการณัธรรมชาติและเหตุการณ์ที่เด็กได้ประสบไว้ในใจ ในความคิดหรือประสบการณ์ตรง
- 3) ความรู้และความคิดตามรูปแบบจำลองที่เด็กได้พบและสร้างขึ้นเอง อาจจะมีลักษณะที่ยังขาดความสมบูรณ์ หรือเป็นเพียงความคิดรวบยอดที่แคบเมื่อเทียบกับความรู้ ความคิดของผู้ที่มีความชำนาญประสบการณ์มาก ดังนั้นจึงต้องมีการปรับปรุงแก้ไขความคิดรวบยอดที่ไม่เหมาะสม ให้เกิดความสมบูรณ์ขึ้นใหม่ หรือมีการขยายแบบจำลองความคิดรวบยอด

ต่อไป การเรียนรู้ของเด็กเกิดขึ้นโดยการได้ลงมือกระทำสิ่งที่มีความหมายสำหรับตนเองแล้ว แม้ว่า การสร้างสิ่งที่มีความหมายจะเกิดจากการแนะนำของคนอื่นก็ตาม

4) การสร้างความรู้สามารถปรากฏขึ้น เมื่อเด็กแต่ละคนได้มีส่วนเข้าไปกระทำ ในกระบวนการนั้นแล้วเท่านั้น

5) การสร้างความรู้ถือว่านักเรียนเป็นผู้รับผิดชอบการเรียนรู้ของตนเอง ครูเป็น เพียงผู้สนับสนุน หรือผู้อำนวยการความสะดวกให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้เท่านั้น

6) การสร้างความรู้เกิดจากเด็กสร้างสิ่งที่มีความหมายแลกเปลี่ยนกัน โดยอาศัย การมีปฏิสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน

7) บทบาทของครูไม่ใช่เป็นเพียงผู้ถ่ายทอดความรู้ให้กับนักเรียนเพียงอย่างเดียวเท่านั้น แต่เป็นการช่วยนักเรียนสร้างและประกอบจำลองทางความคิดขึ้นมาใหม่ ซึ่งนักเรียน ใช้ในการอธิบาย วัตถุประสงค์ปรากฏการณ์ธรรมชาติและเหตุการณ์ต่าง ๆ ในสิ่งแวดล้อมรอบตัวของ นักเรียน ทฤษฎีของ Vygotsky มีความเกี่ยวข้องกับการจัดการศึกษาค้นคว้าอย่างชัดเจน Vygotsky ให้ความสำคัญเกี่ยวกับการเรียนรู้ของนักเรียนว่า เกิดจากการกระทำมากกว่าการเรียนรู้เฉย ๆ เขาได้ประเมินความสามารถในการเรียนรู้ สิ่ง que เห็นถึงความแตกต่างอย่างชัดเจน ในเรื่องของการตระหนักในบทบาทของครู ครูจะเป็นผู้คอยชี้แนะและมีส่วนร่วมในการจัดกิจกรรมการเรียน การสอน ครูจะให้ความช่วยเหลือเพื่อให้นักเรียนได้แสดงออกในความสามารถได้อย่างเต็มที่ และมีการวัดความก้าวหน้าของนักเรียน ครูควรจัดเตรียมการฝึกให้นักเรียนได้มีการเรียนรู้ร่วมมือ เพื่อเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนได้ช่วยเหลือซึ่งกันและกัน นอกจากการเรียนรู้ร่วมมือแล้วในการเล่น ร่วมกัน (Cooperative Play) นักเรียนได้เรียนรู้ในการพัฒนาทักษะระเบียบต่าง ๆ เพื่อการอยู่ร่วมกัน ในสังคม มีการเจรจาวางแผน สวมบทบาทและแบ่งหน้าที่กัน ในอาชีพต่าง ๆ นักเรียนจะมีการแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบที่นักเรียนคิดว่าถูกต้องไปด้วย การเรียนรู้ร่วมมือจะช่วยส่งเสริมให้ สมาชิกในกลุ่มได้รับการสอนหรือชี้แนะจากผู้ใหญ่ หรือเพื่อนที่มีความสามารถ หรือประสบการณ์ มากกว่าจะทำให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพซึ่งจะพบว่า

1) นักเรียนจะเกิดแรงจูงใจมากขึ้นในขณะที่ทำงานหรือแก้ปัญหาาร่วมกัน

2) การเรียนรู้ร่วมมือมีจุดประสงค์หลักคือ ต้องการให้นักเรียนได้อธิบายหรือ บอกความคิด เพื่อแลกเปลี่ยนซึ่งกันและกัน และพิสูจน์ข้อขัดแย้ง กิจกรรมที่อยู่ในการเรียนรู้ ร่วมมือจะช่วยให้นักเรียนได้ร่วมคิดตัดสินใจด้วยความคิดของตนเอง และมีความชัดเจนยิ่งขึ้น ถ้านักเรียนเกิดความเข้าใจ

3) นักเรียนจะได้ใช้เซารวีปัญญาาระดับสูงขณะที่ทำงานร่วมกัน กลวิธีนี้จะเป็นการนำความคิดและวิธีการที่จะไม่เกิดขึ้นได้ตามลำพัง

ทฤษฎีประวัติศาสตร์สังคมของ Vygotsky ให้ความสำคัญเกี่ยวกับพัฒนาการทางเซารวีปัญญา ซึ่งเกิดจากการที่เด็กได้รับการเรียนรู้จากกระบวนการทางสังคม การเรียนรู้ร่วมมือจากเพื่อนและผู้ใหญ่ที่มีความสามารถมากกว่า ในขณะที่เด็กอยู่ในบริเวณพื้นที่รอยต่อพัฒนาการ (Zone Of Proximal Development) จะได้รับการช่วยเหลือ (Scaffold) โดยผ่านการเรียนรู้ร่วมมือซึ่งเปิดโอกาสให้เด็กได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นและการมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีต่อกัน จะส่งผลให้เด็กแต่ละคนพัฒนาความคิดของตนเองได้เต็มตามศักยภาพ

2.3 การเสริมต่อการเรียนรู้กับพื้นที่รอยต่อของพัฒนาการ (Zone of Proximal Development)

มโนทัศน์ของการเสริมต่อการเรียนรู้ มีพื้นฐานมาจากแนวคิดการเรียนรู้กลุ่มคอนสตรัคติวิสต์เชิงสังคมของ Vygotsky (1978, อ้างถึงใน Clark และ Graves, 2005) ตามแนวคิด Vygotsky ทุก ๆ หน้าที่ทางสมองสำหรับพัฒนาการของเด็ก เกิดขึ้นครั้งแรกจากการร่วมมือกับผู้ใหญ่ การร่วมมือที่เกิดขึ้น Vygotsky อ้างถึงบริเวณรอยต่อของพัฒนาการ (Zone of Proximal Development) พื้นที่ที่อยู่ระหว่างกิจกรรมที่เด็กสามารถทำได้เอง โดยอิสระกับพื้นที่ที่สามารถทำได้ด้วยการช่วยเหลือ พื้นที่รอยต่อของพัฒนาการ คือ พื้นที่ระหว่างพัฒนาการจริงซึ่งพิจารณาจากการแก้ปัญหาได้ด้วยตนเองกับระดับพัฒนาการที่พัฒนาได้พิจารณาจากการแก้ปัญหาภายใต้การแนะนำและร่วมมือกับผู้ที่มีความสามารถมากกว่า ครูหรือกลุ่มเพื่อนที่มีความเชี่ยวชาญมากกว่ามีความจำเป็นมากสำหรับกระบวนการเรียนรู้ พัฒนาการของบุคคลเกิดขึ้นในบริบทของกิจกรรมที่มีตัวแบบและการช่วยเหลือของคนที่มีทักษะมากกว่า งานของครูก็คือ การประเมินความเข้าใจของนักเรียนเพื่อให้ถึงจุดที่แท้จริงของพื้นที่รอยต่อพัฒนาการ ซึ่งนักเรียนต้องการช่วยเหลือ การช่วยเหลือของครูได้แก่ การเป็นแบบอย่าง การสาธิต การตั้งคำถาม การฝึก การสร้างภาระงานกลุ่มเพื่อให้เกิดการช่วยเหลือของเพื่อนในกลุ่ม ครูต้องรู้ว่าชนิดของงานที่นักเรียนแตกต่างกันสามารถทำได้ และต้องมีการปรับประเภทและจำนวนของความช่วยเหลือขณะที่นักเรียนพัฒนาอย่างต่อเนื่องตลอดช่วงที่ศึกษาในโรงเรียน จนกระทั่งในชีวิตจริง คนเราทุกคนต้องการวิธีการต่าง ๆ และประเภทของความช่วยเหลือที่ซับซ้อน ขณะที่เราพัฒนาและเรียนรู้ เช่น การนำเสนอแบบอย่างเพื่อแสดงให้นักเรียนเห็นการทำสิ่งต่าง ๆ การสาธิตกระบวนการหรือทักษะทางกาย และโดยการพูดตั้ง ๆ ว่าผู้ที่มีความรู้คิดอย่างไร ครูยังสามารถช่วยเหลือผ่านคำถาม การให้ผลสะท้อนกลับ การกระตุ้น และการชมเชย แต่ละรูปแบบของ

การช่วยเหลือขึ้นอยู่กับความชัดเจนและประสิทธิภาพการสื่อสารกับนักเรียน “การเสริมต่อการเรียนรู้” จึงเป็นทั้งคำทั่วไปสำหรับงานที่ครูนำเสนอการสนับสนุนอย่างเพียงพอ ตามความต้องการของนักเรียน และสามารถสร้างความเข้าใจภายใต้พื้นที่รอยต่อพัฒนาการ

การพัฒนาทางปัญญาของมนุษย์แบ่งเป็น 2 ระดับคือ (1) เซอร์วิญญาขั้นต้น (Elementary Mental Process) เป็นกระบวนการขั้นพื้นฐานที่เกิดขึ้นโดยอัตโนมัติตามธรรมชาติที่ไม่ต้องเรียนรู้และมักจะมีอาการจำต่อการมีชีวิต ปฏิสัมพันธ์ทางสังคมจึงไม่มีอิทธิพลต่อกระบวนการเหล่านี้ และ(2) เซอร์วิญญาขั้นสูง (Higher Mental Process) เป็นกระบวนการทางปัญญาที่เกิดจากการมีปฏิสัมพันธ์กับผู้ใหญ่ที่ให้การอบรมเลี้ยงดู ถ่ายทอดวัฒนธรรมโดยใช้ภาษา (สุรวรงค์ ไคว้ตระกูล, 2548) ซึ่ง Vygotsky (1978) เชื่อว่าภาษาหรือการพูดจะเป็นเครื่องมือในการพัฒนาเซอร์วิญญาขั้นสูง นอกจากนั้นการปฏิสัมพันธ์ทางสังคม การสนทนาแลกเปลี่ยนความรู้ ประสบการณ์โดยการทำงานร่วมกัน จะทำให้บุคคลได้คิดและได้ถ่ายทอดความคิดนั้นออกมาทำให้เกิดการพัฒนาทางปัญญา

จากที่กล่าวข้างต้น สรุปได้ว่า การเสริมต่อการเรียนรู้กับพื้นที่รอยต่อของการพัฒนาการ คือ กระบวนการของการช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนอย่างเป็นระบบ โดยมีครูคอยให้ความช่วยเหลือ หรือนักเรียนให้การช่วยเหลือซึ่งกันและกันดำเนินการในพื้นที่ระหว่างพัฒนาการจริง ซึ่งพิจารณาจากการแก้ปัญหาได้ด้วยตนเองกับระดับพัฒนาการที่พัฒนาได้ พิจารณาจากการแก้ปัญหาภายใต้การแนะนำและร่วมมือกับผู้ที่มีความสามารถมากกว่า

2.4 กลวิธีในการใช้การเสริมต่อการเรียนรู้

Wood และคนอื่น ๆ (1976) ได้เสนอกลวิธีที่ผู้สอนจะใช้การเสริมต่อการเรียนรู้ให้แก่เด็ก 6 ประการ คือ

1) การคัดสรรงานและแจกแจงงานให้เหมาะสม (Recruitment) ขั้นแรกของการทำงาน ครูต้องเลือกงานที่เหมาะสม แจกแจงประเด็นที่นักเรียนสนใจ และให้เชื่อมโยงผูกยึดกับสิ่งที่ต้องการให้เกิดขึ้นในงานนั้น เช่น การสร้างความสนใจในงานที่ทำ ให้เห็นความสำคัญเป้าหมายของงาน

2) การลดงานให้เป็นงานย่อย ๆ (Reduction in Degree of Freedom) เป็นการแจกแจงงานให้เป็นขั้นย่อย ๆ ที่ไม่ซับซ้อน ลดขนาดของงานลง ให้งานมีลักษณะที่ง่ายขึ้น แต่ละขั้นจะมีทักษะที่จำเป็นสำคัญ ๆ ซึ่งจะง่ายต่อการให้ข้อมูลป้อนกลับต่อนักเรียน ในระยะแรกนักเรียนจะทำงานในส่วนที่ทำได้และครูจะทำในส่วนที่เหลือ

3) การสร้างแรงจูงใจอย่างต่อเนื่อง (Direction Maintenance) เป็นการรักษาความสนใจของนักเรียนให้คงอยู่อย่างสม่ำเสมอ โดยสร้างความท้าทายให้นักเรียนทำงานที่อยู่ในระดับที่เหนือจากระดับที่นักเรียนเพิ่งทำงานได้สำเร็จ

4) การชี้จุดสำคัญ (Making Critical Features) เป็นการชี้ให้เห็นถึงคุณสมบัติสำคัญที่แสดงให้เห็นว่างานนั้นสำเร็จหรือไปถูกทางแล้ว รวมถึงการบอกข้อบกพร่องหรือความคลาดเคลื่อนในงานที่ทำอยู่

5) การควบคุมปัญหาหรือความคับข้องใจ (Frustration Control) การแก้ปัญหาหรืองานควรจะมีปัญหาหรือความเครียดอยู่ได้บ้าง ดีกว่าที่จะไม่มีความเครียดเลย ในการทำงานครูจะต้องช่วยให้นักเรียนไม่รู้สึกวิตกกังวลจากความผิดพลาด ไม่ให้นักเรียนรู้สึกเสียหน้าจากความผิดพลาดของตนเอง ครูดึงส่วนที่นักเรียนสนใจมาเป็นประโยชน์หรือครูใช้วิธีการอื่น ๆ ที่จะช่วยให้นักเรียนมีความเครียดเพียงเล็กน้อย อย่างไรก็ตาม สิ่งที่สำคัญกว่าคือครูต้องระวังความเสี่ยงที่จะเกิดจากการที่นักเรียนพึ่งพาครูมากเกินไประหว่างการทำกิจกรรม

6) การสาธิต (Demonstration) เป็นการแสดงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางการแก้ปัญหาที่นักเรียนเผชิญอยู่ และรวมถึงการให้นักเรียนเกิดการเลียนแบบและสร้างเสริมคุณลักษณะเฉพาะตัวของนักเรียน

Roehler และ Cautlon (1996, อ้างถึงใน กมล โพธิ์เย็น, 2547) แบ่งชนิดของการเสริมต่อการเรียนรู้ไว้ 5 ประการดังนี้

1) การให้คำอธิบาย (Offering Explanation) เป็นการช่วยเหลือการเรียนรู้เพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องที่เรียน ให้รู้ในเรื่องที่เรียน รู้เงื่อนไขว่าทำไมต้องใช้ความรู้นั้น ใช้เมื่อไร และใช้อย่างไร

2) การสนับสนุนให้ผู้เรียนเข้ามามีส่วนร่วม (Inviting Students Participation) ให้โอกาสนักเรียนเข้ามามีส่วนร่วมในกระบวนการที่เกิดขึ้น โดยให้นักเรียนได้เล่า หรือตอบคำถามในสิ่งที่รู้

3) การตรวจสอบความถูกต้องแสดงความชัดเจนของความเข้าใจของนักเรียน (Verifying and Clarifying Student Understandings) ครูตรวจสอบความเข้าใจที่เกิดขึ้นกับนักเรียนว่ามีเหตุมีผลหรือไม่ ถูกต้องชัดเจนหรือไม่

4) การเป็นตัวแบบของพฤติกรรมที่ต้องการ (Modeling of Desiring Behaviors) ได้แก่

4.1 การคิดดัง ๆ (Think-Aloud) เป็นการแสดงความคิดที่มีอยู่ให้ปรากฏออกมาชัดเจน เช่น ครูแสดงความคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาออกมาโดยการพูดดัง ๆ ให้นักเรียนทำตาม

4.2 การพูดดัง ๆ (Talk-Aloud) เป็นการใช้รูปแบบของการถามคำถาม ตั้งคำถาม และการให้ข้อเสนอแนะ

4.3 การเป็นตัวอย่างในการปฏิบัติ (Performance Modeling) ครูแสดงการทำงานที่สมบูรณ์โดยไม่ได้คิดหรือพูดดัง ๆ เกี่ยวกับการนั้น เช่น ครูแสดงตัวอย่างท่าทางที่สนุกสนาน เช่น การยิ้ม หัวเราะ

5) การให้นักเรียนแสดงประเด็นหลักฐานต่าง ๆ เพื่อสนับสนุนการคิด (Inviting Students to Contribute Clues) เป็นการให้นักเรียนแสดงประเด็นชี้แนะ หรือหลักฐานเพื่อแสดงความมีเหตุ มีผล หรือการทำงานให้สำเร็จ โดยครูและนักเรียนจะร่วมกันพูดถึงประเด็นเหล่านั้น เช่น การให้นักเรียนเรียนรู้ความหมายของการเปรียบเทียบ ครูจะให้นักเรียนบอกความหมายของการเปรียบเทียบ และระบุถึงประเด็นที่แตกต่างกัน

Eggen และ Kauchak (1997) ได้แบ่งประเภทของกลวิธีในการเสริมต่อการเรียนรู้ไว้ 5 ประเภทดังนี้

- 1) การเป็นตัวอย่าง (Modeling) เช่น การแสดงวิธีการแก้ปัญหา
- 2) การคิดดัง ๆ (Think-Aloud) เป็นตัวอย่างของกระบวนการโดยให้ผู้เรียนได้ทราบถึงการคิดของครูในขณะที่กำลังแก้ปัญหา
- 3) การใช้คำถาม (Questions) การใช้คำถามจะเป็นการช่วยเหลือ สร้างประเด็นความสนใจและการแนะนำทางเลือก
- 4) การปรับสาระการเรียนรู้การสอน (Adapting Instructional Material) เช่น การปรับงานให้มีความง่าย หรือเป็นลำดับงานย่อย ๆ
- 5) การใช้สิ่งเตือนหรือตัวชี้แนะ (Prompts and Clues) เช่น การวางแผนการเขียนที่จะช่วยให้นักเรียนจัดการจัดระบบการคิดของตนเองก่อนเขียนงานที่ได้รับการมอบหมาย การช่วยเหลือนี้จะหยุดเมื่อนักเรียนซึมซับเอาแผนงานต่าง ๆ หรือขั้นตอนต่าง ๆ ไว้ในตนเองอย่างอัตโนมัติแล้ว

จากกลวิธีในการเสริมต่อการเรียนรู้ของนักการศึกษาที่กล่าวมาข้างต้น สรุปเป็นกลวิธีในการเสริมต่อการเรียนรู้ที่ใช้ในกระบวนการเรียนการสอนนี้ ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 สรุปกลวิธีการเสริมต่อการเรียนรู้ที่ใช้ในกระบวนการเรียนการสอน

ชื่อนักการศึกษาที่เสนอวิธีการเสริมต่อการเรียนรู้			สรุปกลวิธีการเสริมต่อการเรียนรู้
Wood และคนอื่นๆ	Roehler และ Cautlon	Eggen และ Kauchak	
1) การคัดสรรงานและแจกแจงงานให้เหมาะสม	1) การให้คำอธิบาย 2) การสนับสนุนให้นักเรียนเข้ามามีส่วนร่วม	1) การเป็นตัวแบบ 2) การคิดตั้ง ๆ 3) การใช้คำถาม 4) การปรับสาระการเรียนรู้การสอน	1) การใช้คำถาม 2) การสาธิต 3) การให้คำอธิบาย 4) การให้นักเรียนมีส่วนร่วมโดยการอภิปรายแลกเปลี่ยนแนวคิด
2) การลดงานให้เบรียดย่อย ๆ	3) การตรวจสอบความถูกต้องแสดงความเข้าใจอย่างชัดเจนของนักเรียน	5) การใช้สิ่งเตือนหรือตัวชี้แนะ	5) การให้นักเรียนแสดงประเด็นหลักฐานต่าง ๆ เพื่อสนับสนุนการคิด
3) การสร้างแรงจูงใจอย่างต่อเนื่อง	4) การเป็นตัวแบบของพฤติกรรมที่ต้องการ		6) การตรวจสอบความถูกต้องแสดงความเข้าใจอย่างชัดเจนของนักเรียน
4) การชี้จุดสำคัญ	5) การให้นักเรียนแสดงประเด็นหลักฐานต่าง ๆ เพื่อสนับสนุนการคิด		
5) การควบคุมปัญหาหรือความคับข้องใจ			
6) การสาธิต			

สรุปได้ว่า การให้การช่วยเหลือการเรียนรู้ของนักเรียนจะมีกลวิธีในการช่วยเหลือที่ครูจะให้การช่วยเหลือในกระบวนการเรียนการสอนนี้คือ การใช้คำถามซึ่งนำกระตุ้นความคิด การสาธิตวิธีคิด การอธิบายชี้แจงรายละเอียดให้ชัดเจนขึ้น การให้นักเรียนมีส่วนร่วมโดยการอภิปรายแลกเปลี่ยนแนวคิดในการแก้ปัญหา การให้นักเรียนแสดงประเด็นหลักฐานต่าง ๆ เพื่อสนับสนุนการคิด และการตรวจสอบความถูกต้องโดยให้นักเรียนแสดงเหตุผลเพื่อสนับสนุนการคิด

2.5 การเรียนการสอนโดยใช้การเสริมต่อการเรียนรู้

Rosenshine และ Guenther (1992) ระบุองค์ประกอบสำคัญของการเรียนการสอนโดยการเสริมต่อการเรียนรู้ ประกอบด้วยองค์ประกอบหลัก 6 ประการ คือ

1) กิจกรรมก่อนสอน ประกอบด้วยกิจกรรมที่จำเป็น 3 ประการ คือ

1.1 การระบุว่าทักษะที่ต้องการพัฒนาอยู่ในขอบเขตการพัฒนาศักยภาพของนักเรียน ครูต้องตระหนักในใจว่า การช่วยเสริมศักยภาพจะนำไปใช้ได้เฉพาะในบริเวณรอยต่อของพัฒนาการของนักเรียนเท่านั้น

1.2 มีการพัฒนาการช่วยเหลือเฉพาะ (Specific Scaffold) อย่างเหมาะสมกับ สิ่งที่จะพัฒนาหรือที่จะใช้ในการช่วยเหลือการเรียนรู้ เช่น การให้นักเรียนระบุประเด็นเพื่ออธิบาย ประเด็น หรือการเชื่อมโยงประเด็น เป็นต้น

1.3 การควบคุมกำกับความยุ่งยากของงาน โดยเริ่มต้นจากงานง่าย ๆ และ ค่อย ๆ เพิ่มความซับซ้อนของงาน หรือสอนแต่ละขั้นตอนแยกจากกัน

2) ครูมีกิจกรรมเพื่อแสดงให้เห็นถึงกลยุทธ์ทางปัญญา โดย

2.1 การเป็นตัวแบบแสดงขั้นตอนต่าง ๆ ในการทำงาน

2.2 การเป็นตัวแบบคำพูด แสดงกระบวนการคิด หรือการคิดตั้ง ๆ

2.3 การบอกให้นักเรียนทราบเกี่ยวกับข้อผิดพลาดที่มักจะมีกับนักเรียน

3) ครูแนะนำแนวทางการปฏิบัติแก่นักเรียน ขณะที่นักเรียนแยกแยะแผนทำงานใน สถานการณ์ใหม่ เช่น การใช้คำพูดที่เป็นนัย การเตือนในสิ่งที่นักเรียนมองข้ามไป ให้คำแนะนำใน สิ่งที่ควรได้รับการพัฒนาปรับปรุง การแนะนำแนวทางการปฏิบัติโดยครูนำการปฏิบัติ การทำงานเป็น กลุ่มเล็ก ๆ เป็นต้น

4) นักเรียนได้รับแบบตรวจสอบรายการ (Checklist) เพื่อใช้ประเมินการทำงานของ ตนเองและแนะนำแนวทางการปฏิบัติโดยการใช้การตรวจสอบตนเอง เพื่อช่วยให้นักเรียนมีอิสระ ขณะเดียวกันครูอาจเป็นต้นแบบในการตรวจสอบรายการให้เช่นกัน

5) ให้นักเรียนได้ฝึกปฏิบัติอย่างอิสระในสถานการณ์ใหม่ที่จัดให้ โดยครูรวมขั้นตอน ต่าง ๆ เข้าไว้ด้วยกัน การช่วยเหลือสนับสนุนจะลดลง

6) นักเรียนประยุกต์การเรียนรู้สู่สถานการณ์ใหม่ ให้ฝึกในสถานการณ์ที่หลากหลาย มีลักษณะที่แตกต่างไปจากเดิม เพื่อให้นักเรียนได้ผสมผสานความรู้ที่ได้ไปสู่สถานการณ์ใหม่

สรุปได้ว่า การเรียนการสอนโดยใช้การเสริมต่อการเรียนรู้ ประกอบไปด้วยการจัด กิจกรรมก่อนสอน และขณะทำการสอนครูต้องจัดกิจกรรม เพื่อแสดงให้เห็นถึงกลยุทธ์ทางปัญญา และมีการแนะนำแนวทางปฏิบัติแก่นักเรียน นักเรียนมีโอกาสได้ฝึกปฏิบัติอย่างอิสระ ได้ประยุกต์ การเรียนรู้สู่สถานการณ์ใหม่ และมีโอกาสได้ประเมินตนเองในการทำงาน

2.6 ข้อดีและข้อจำกัดของการเสริมต่อการเรียนรู้

Van Der Stuyf (2002) กล่าวถึงข้อดีและข้อจำกัดของการเสริมต่อการเรียนรู้ไว้ดังนี้

ข้อดีของการสอนแบบเสริมต่อการเรียนรู้ประการแรก คือ การให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียน นักเรียนไม่ฟังข้อมูลที่นำเสนออย่างเฉื่อยชา แต่ได้รับการกระตุ้นผ่านครูในการสร้างความรู้พื้นฐานและสร้างความรู้ใหม่ ๆ ในการทำงานกับนักเรียนที่มีความภูมิใจในตัวเองต่ำ หรือนักเรียนที่มีความบกพร่องทางการเรียน ต้องหาโอกาสในการให้ผลย้อนกลับในทางบวกแก่นักเรียน ประการที่สอง การสอนแบบการเสริมต่อการเรียนรู้สร้างแรงจูงใจแก่นักเรียนทำให้นักเรียนต้องการเรียน และประการที่สาม ช่วยลดระดับความสับสนของนักเรียน ซึ่งเป็นเรื่องที่สำคัญมากสำหรับนักเรียนที่มีความต้องการพิเศษที่อาจจะสับสนได้ง่ายแล้วก็จะไม่ยอมรับและปฏิเสธการเข้าร่วมเรียนรู้ระหว่างสถานการณ์ใดสถานการณ์หนึ่ง

ข้อจำกัดของการเสริมต่อการเรียนรู้ ประการแรก คือ เป็นข้อจำกัดสำหรับครูตั้งแต่การพัฒนาการสนับสนุนและเตรียมบทเรียนแบบเสริมต่อการเรียนรู้ (Scaffolded Lessons) เพื่อให้เหมาะสมกับความต้องการของนักเรียนแต่ละคน ต้องใช้เวลามาก อีกทั้งการใช้การเสริมต่อการเรียนรู้กับนักเรียนรายบุคคลในชั้นเรียนที่มีจำนวนมากเป็นสิ่งที่ทำซ้ำมาก ประการที่สอง หากครูไม่ได้รับการฝึกการใช้การเสริมต่อการเรียนรู้ที่เหมาะสม อาจนำการเสริมต่อการเรียนรู้ไปใช้อย่างไม่เหมาะสม ซึ่งอาจทำให้ไม่เห็นผลเต็มที่ ประการที่สาม ครูจำเป็นต้องหยุดการควบคุมและปล่อยให้ให้นักเรียนทำผิดได้ ซึ่งเป็นสิ่งที่ยากสำหรับครูในการปฏิบัติ ประการสุดท้าย ครูมีครูและคู่มือหลักสูตรที่มีอยู่ไม่มีตัวอย่างของการเสริมต่อการเรียนรู้ หรือเค้าโครงของวิธีการเสริมต่อการเรียนรู้ ซึ่งน่าจะเหมาะสมกับบทเรียนที่มีเนื้อหาเฉพาะ

จากแนวคิดของนักการศึกษาดังกล่าว สรุปได้ว่าการเรียนการสอนโดยใช้การเสริมต่อการเรียนรู้ สามารถนำมาใช้ในการพัฒนาการคิดของนักเรียนได้ โดยในระยะก่อนการสอน ครูจะต้องจัดเตรียม คัดเลือกแล้วใช้การช่วยเหลือให้เหมาะกับระดับความสามารถของนักเรียน ในระหว่างการเรียนการสอน ครูจะใช้กลวิธีต่าง ๆ ที่จะสนับสนุนการคิด เช่น การคิดตั้ง ๆ การแสดงขั้นตอนการคิด การใช้คำถามกระตุ้น หรือการใช้เครื่องมือที่ประเมินการคิดมาเป็นตัวช่วยในการคิดของนักเรียน เช่น การสอบถามเพื่อประเมินการคิด เป็นต้น อย่างไรก็ตามการเรียนการสอนโดยใช้การเสริมต่อการเรียนรู้มีทั้งข้อดี และข้อจำกัดซึ่งควรคำนึงถึงก่อนนำไปใช้ในการช่วยเหลือนักเรียน

3. กระบวนการเรียนการสอน

3.1 ความหมายของกระบวนการเรียนการสอน

Randolph (2003) ได้ให้ความหมายของกระบวนการ (Process) ว่าหมายถึง ลำดับขั้นตอนที่ถูกจัดไว้ที่จะทำเพื่อให้บรรลุเป้าหมายเฉพาะ

ทิสนา แคมมณี (2548) กล่าวถึงการเรียนการสอน (Instruction) ว่าเป็น การถ่ายทอดความรู้ ทักษะ และเจตคติต่าง ๆ โดยมีการเตรียมการ มีการวางแผนตามหลักวิชา มีขั้นตอนหรือกระบวนการสอนที่เป็นแบบแผนชัดเจน มีกิจกรรมการเรียนรู้ที่ให้นักเรียนมีส่วนร่วม เพื่อให้บรรลุจุดมุ่งหมาย ซึ่งมีความหมายถึงการสอนโดยคำนึงถึงการเรียนรู้ของนักเรียน เป็นสำคัญ ความหมายของการสอนเปลี่ยนแปลงไปจากการถ่ายทอดความรู้ มาเป็นการช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ ซึ่งต้องอาศัยวิธีการหลากหลาย

อรทัย มูลคำ และสุวิทย์ มูลคำ (2544) ได้นิยามกระบวนการเรียนการสอนว่า หมายถึง ลักษณะลำดับขั้นตอนของรูปแบบการสอนแบบต่าง ๆ ซึ่งประกอบไปด้วยกิจกรรมของครู และนักเรียน กิจกรรมของครู เช่น การวางแผนการสอน การเตรียมการสอน การจัดเตรียมสื่อ การจัดกิจกรรมในห้องเรียน เป็นต้น ส่วนกิจกรรมของนักเรียน เช่น กิจกรรมที่นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติในขณะที่มีการเรียนการสอน ซึ่งลำดับขั้นตอนเหล่านี้ได้พัฒนาขึ้นจากหลักการและทฤษฎี การเรียนรู้แบบต่าง ๆ

ชาญชัย ยมดิษฐ์ (2548) ได้ให้ความหมายของกระบวนการจัดการเรียนการสอนว่า หมายถึง วิธีการหรือกลวิธีในการใช้ความพยายามของครูที่จะดำเนินการจัดการเรียนการสอน ตามขั้นตอนที่วางแผนไว้ให้บรรลุวัตถุประสงค์อย่างมีประสิทธิภาพและเกิดประสิทธิผล โดยใน กระบวนการจัดการเรียนการสอนนั้น ต้องบูรณาการส่วนต่าง ๆ อย่างเหมาะสมและกลมกลืน กับหลักการ ทฤษฎี ครู นักเรียน สื่อ รูปแบบวิธีการ ตลอดไปจนถึงการวัดและการประเมินผล

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่ากระบวนการเรียนการสอน หมายถึง การจัดกิจกรรม การเรียนการสอนอย่างเป็นขั้นตอน เพื่อพัฒนาความสามารถของนักเรียนให้บรรลุตาม วัตถุประสงค์ของการเรียนการสอน โดยขั้นตอนเหล่านั้นได้พัฒนาขึ้นจากหลักการของแนวคิด หรือทฤษฎี

3.2 องค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอน

ในการศึกษาองค์ประกอบของการเรียนการสอน นักการศึกษาได้ให้แนวคิดไว้ ดังนี้ Winn (1993) กล่าวว่า กระบวนการเรียนการสอนมีความสัมพันธ์กับการออกแบบการสอน เป็นกระบวนการที่จะคัดเลือกวิธีสอนเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ตามเงื่อนไขที่ตั้งไว้

Arend (1994) กล่าวว่า กระบวนการเรียนการสอน ประกอบไปด้วย ครู จุดประสงค์ นักเรียน สิ่งแวดล้อมการเรียนการสอน วิธีการเรียน และการประเมินผล

Davis School District (2000) กล่าวว่า องค์ประกอบของการเรียนการสอนมีลักษณะคล้ายกับรูปแบบ ซึ่งประกอบด้วย เนื้อหา วิธีการ และการประเมิน

ทิตนา แชมมณี (2548) ได้นำเสนอองค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอนไว้ ดังนี้

1. มีปรัชญา ทฤษฎี หลักการ แนวคิด หรือความเชื่อที่เป็นพื้นฐานการสอนที่สอดคล้องกับหลักการที่ยึดถือ
2. มีการบรรยายและอธิบายสภาพหรือลักษณะของการจัดการเรียนการสอนที่สอดคล้องกับหลักการที่ยึดถือ
3. มีการจัดระบบ คือ มีการจัดองค์ประกอบและความสัมพันธ์ขององค์ประกอบของระบบให้สามารถนำไปสู่เป้าหมายของระบบ หรือกระบวนการนั้น ๆ
4. มีการอธิบาย หรือให้ข้อมูลเกี่ยวกับวิธีสอนและเทคนิคการสอนต่าง ๆ อันจะช่วยให้กระบวนการเรียนการสอนนั้น ๆ เกิดประสิทธิภาพสูงสุด

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า กระบวนการเรียนการสอนประกอบด้วย ขั้นตอนการเรียนการสอนโดยมีที่มาจากแนวคิดหรือทฤษฎีต่าง ๆ และวัตถุประสงค์ที่ใช้ในการเรียนการสอน

3.3 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน

ขั้นตอนของการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน มีดังนี้ (Kemp, Morrison และ Ross, 1994; Dick และ Carey, 1997)

1. การวิเคราะห์ (Analysis) ขั้นการวิเคราะห์เป็นขั้นที่เกี่ยวข้องกับ
 - 1.1 การวิเคราะห์ปัญหา คือ การใช้กระบวนการประเมินความต้องการซึ่งเป็นเครื่องมือในการค้นหาปัญหาที่จะนำมาออกแบบและพัฒนาการเรียนการสอน โดยมีการให้รายละเอียดของปัญหา ระบุแหล่งของปัญหาและส่วนอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา คำถามที่เกี่ยวข้องกับปัญหาเพื่อให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาได้ก็คือ ปัญหาที่มีหรือไม่มี ปัญหาอะไรที่

เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอน ปัญหานั้นเป็นปัญหาที่แท้จริงหรือไม่ อะไรคือสาเหตุของปัญหา อะไรคือวิธีการแก้ปัญหาที่เป็นไปได้ ข้อจำกัดคืออะไร และเป้าประสงค์ของการออกแบบการเรียนการสอนคืออะไร เป็นต้น วัตถุประสงค์ของการออกแบบและการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนจะได้มาจากกระบวนการประเมินความต้องการดังกล่าว และการประเมินความต้องการยังเป็นการกำหนดความเข้าใจว่าการเรียนการสอนที่จะทำการออกแบบและพัฒนานั้นเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาหรือเป็นสิ่งที่ต้องการอย่างแท้จริงหรือไม่

1.2 การวิเคราะห์กิจกรรมหรืองาน เป็นการวิเคราะห์หารายละเอียดของกิจกรรมหรืองานที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนหรือการฝึกอบรม ในการวิเคราะห์อาจทำได้โดยการสัมภาษณ์ การสังเกตกิจกรรมหรืองานที่ได้ทำอยู่แล้วเพื่อให้เกิดความรู้ตามทักษะที่ต้องการ กิจกรรมหรืองานที่ดีและไม่ดีต้องแยกออกจากกันให้ชัดเจน การวิเคราะห์งานหรือกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอน (Learning task analysis) มีงานที่ต้องกระทำ 5 ประการด้วยกัน ดังนี้

- 1.2.1 กำหนดวัตถุประสงค์การเรียนรู้
- 1.2.2 กำหนดเนื้อหาสาระการเรียนรู้
- 1.2.3 กำหนดกิจกรรมการเรียนรู้
- 1.2.4 กำหนดสื่อการเรียนรู้
- 1.2.5 กำหนดแนวทางในการประเมินผลการเรียน

1.3 การวิเคราะห์นักเรียน เป็นการวิเคราะห์คุณลักษณะของนักเรียนในประเด็นต่าง ๆ ที่จะมีผลต่อการเรียนรู้ ไม่ว่าจะเป็นอายุ เพศ พื้นฐานสังคมเศรษฐกิจ ความถนัด แรงจูงใจ ความรู้พื้นฐานเดิมก่อนเรียน รวมทั้งความแตกต่างระหว่างบุคคล หรือระหว่างกลุ่มตลอดจนด้านระดับการพัฒนา (Development levels) รูปแบบการเรียนรู้ (Learning style) รูปแบบการรับข้อมูลต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับนักเรียนให้มากที่สุดซึ่งจะเป็นกลยุทธ์การสอนและเทคนิคการวัดผล

1.4 การวิเคราะห์ทรัพยากรที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอน ในการออกแบบและพัฒนาระบบการเรียนการสอน ควรให้ความสนใจในการวิเคราะห์ทรัพยากรที่เกี่ยวข้อง เช่น บุคลากร งบประมาณ องค์กร สื่อและสิ่งอำนวยความสะดวกที่เอื้อให้การออกแบบการเรียนการสอนประสบความสำเร็จ การวิเคราะห์ในขั้นตอนนี้รวมถึงการวิเคราะห์ประโยชน์และการคุ้มทุน (Cost/Benefits Analysis) ด้วย

2. การพัฒนา (Development and Production) ขั้นตอนที่สองในการพัฒนาระบบการเรียนการสอนแยกองค์ประกอบสำคัญ ดังนี้

2.1. การพัฒนาเนื้อหาความรู้ อาจแยกองค์ประกอบที่สำคัญได้แก่

2.1.1 พัฒนารายละเอียดของเนื้อหาความรู้แต่ละหน่วย รายละเอียดจะประกอบไปด้วยความคิดรวบยอด ข้อเท็จจริง หลักการหรือกระบวนการ

2.1.2 พัฒนาสิ่งที่เป็นตัวอย่างของเนื้อหาแต่ละหน่วย

2.1.3 พัฒนาการฝึกปฏิบัติในแต่ละหน่วยของเนื้อหา การมีกิจกรรมให้นักเรียนได้ฝึกปฏิบัติจะช่วยให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ที่ดี

2.2. การพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอน กิจกรรมการเรียนการสอนมีหลายแนวทาง เช่น การพัฒนาการเรียนการสอนโดยยึดพฤติกรรมการเรียนรู้ (Learning domain) แล้วเขียนกิจกรรมการเรียนการสอนดังกล่าวในลักษณะของแผนการสอนว่าจะดำเนินการอย่างไรบ้าง โดยทั่วไปการจัดการเรียนการสอนที่มีประสิทธิภาพมักจะมีขั้นตอนหรือกิจกรรมการเรียนการสอน ดังนี้

2.2.1 การสร้างแรงจูงใจ ในขั้นตอนแรกของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนนั้น ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจ ความตั้งใจ เพื่อเป็นการเตรียมความพร้อมให้นักเรียน และการจูงใจนี้ควรแทรกอยู่ในทุกขั้นตอนของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน โดยอาจใช้การเสริมแรงด้วยวิธีการต่าง ๆ ตามความเหมาะสม

2.2.2 ให้อัตถุประสงค์แก่นักเรียน ควรให้นักเรียนได้ทราบว่าเขาจะได้เรียนอะไร นักเรียนจะมีความก้าวหน้าในการเรียนได้ดีถ้านักเรียนได้ทราบวัตถุประสงค์การเรียนก่อน

2.2.3 คำนึงถึงความรู้พื้นฐานของนักเรียน ในกระบวนการเรียนการสอน ต้องให้รู้ชัดแจ้งว่านักเรียนต้องมีความรู้ มีทักษะ และเจตคติอย่างไรบ้างก่อนมาเรียน

2.2.4 ให้สารสนเทศและตัวอย่าง สารสนเทศที่เป็นสิ่งที่นักเรียนจะต้องค้นคว้า จะต้องรับเข้าสู่สติปัญญา ความคิดของตนเองเพื่อให้เกิดผลต่อวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ สารสนเทศที่ให้อาจเป็นข้อเท็จจริง กฎเกณฑ์ เป็นตัวอย่างทักษะ ซึ่งอาจให้ในรูปการบรรยาย ในรูปสื่อที่นำเสนอ ให้การปฏิบัติให้ทำตามความสอดคล้องของเนื้อหา

2.2.5 การให้ฝึกปฏิบัติและข้อมูลย้อนกลับ ในการที่นักเรียนเรียนรู้ เนื้อหาความรู้ (Knowledge) ทักษะ (Skill) และเจตคติ (Attitude) นักเรียนต้องปฏิบัติพฤติกรรมนั้น ๆ และการฝึกปฏิบัติต้องให้มีความสอดคล้องกับวัตถุประสงค์

2.2.6 การประเมินผล เป็นการตรวจสอบว่านักเรียนได้เรียนรู้อะไร และผลการเรียนรู้นั้นเป็นอย่างไร มีสิ่งใดบ้างที่ควรมีการปรับปรุงแก้ไข

3. การนำไปทดลองใช้ (Implementation) เมื่อการออกแบบและพัฒนาระบบการเรียนการสอนได้ดำเนินการจนได้ผลผลิต (Product) ที่จะนำไปทดลองใช้ได้แล้ว ก็ถึงขั้นการนำไปใช้ ในขั้นการนำไปใช้นี้ต้องทำควบคู่กันไปกับขั้นตอนการประเมินผลเพื่อให้ได้มีการเก็บรวบรวมข้อมูลสำหรับนำมาปรับปรุง และการตัดสินใจตลอดเวลา ขั้นนี้เป็นขั้นการนำเสนอและจัดดำเนินการสอน ซึ่งองค์ประกอบที่สำคัญที่เกี่ยวข้องกับการนำหลักสูตรไปใช้มี 2 ประการ คือ การสอน (Instruction) และการบริหารการสอน (Administration) ข้อควรตระหนักในขั้นการจัดการเรียนการสอนมีดังนี้

1) ต้องให้การดำเนินการสอนเป็นไปในรูปแบบการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลาง

2) มีความสัมพันธ์ระหว่างครูกับนักเรียน คือครูเป็นผู้นำหน้าที่เหมือนผู้จัดการเรียน หรือสภาพแวดล้อมเพื่อให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ มีแรงจูงใจที่อยากจะเรียนรู้ มีการแนะนำและประเมินผลการเรียนรู้ และการเรียนการสอนต้องคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล และผู้สอนต้องทำหน้าที่เป็นผู้สอนเสริม (Tutor) และเป็นที่ยกย่องให้นักเรียน

3) ครูผู้สอนต้องพัฒนาวิธีการเรียนการสอนให้ทันสมัยอยู่เสมอโดยมีการวางแผนและใช้เทคโนโลยีในการสอนอย่างเหมาะสม

4. การประเมินผล (Evaluation) การประเมินผลเป็นการวัดว่าวงจรของการออกแบบและพัฒนาระบบการเรียนการสอนนั้นสมบูรณ์แล้วหรือยัง ซึ่งข้อมูลย้อนกลับ (Feedback) เป็นส่วนสำคัญที่ได้จากการประเมินผล เพื่อนำไปปรับปรุงในส่วนของแต่ละขั้นตอนให้ดีขึ้นและตรงตามวัตถุประสงค์ ถ้าการประเมินผลพบว่า จุดใดควรปรับปรุงเปลี่ยนแปลงก็ต้องดำเนินการปรับปรุงสิ่งที่ได้จากการประเมินผลเพื่อนำไปปรับปรุงออกแบบและพัฒนาระบบการเรียนการสอนมีดังต่อไปนี้

4.1 รายงานในการควบคุมให้วงจรการออกแบบและพัฒนาระบบการเรียนดำเนินไปได้ ทำให้ทราบว่าเมื่อใดที่ข้อแตกต่างอะไรในขั้นตอนต่าง ๆ ซึ่งได้จากการประเมินผล

4.2 ทรัพยากรต่าง ๆ ว่ามีเพียงพอ ขาดตกบกพร่องตรงจุดใด เช่น เครื่องมือ อุปกรณ์ สิ่งอำนวยความสะดวก สภาพแวดล้อมการเรียน

4.3 สื่อการสอนและสิ่งอำนวยความสะดวกในการสอน ที่ต้องปรับปรุงแก้ไขมีอะไรบ้าง

4.4 ครูผู้สอน กิจกรรมการเรียนการสอนที่ครูนำเสนอไปด้วยดี และถูกต้องเหมาะสมหรือไม่

4.5 ข้อทดสอบ เหมาะกับการทดสอบโดยตรงกับวัตถุประสงค์หรือไม่

4.6 ข้อควรปรับปรุงอื่น ๆ เช่น การสอนเสริมและการสอนซ่อมเสริม เป็นต้น

4.7 ในการประเมินผลอาจแยกได้เป็น 2 ประเภท คือ การประเมินผลเพื่อการปรับปรุง (Formative evaluation) และการประเมินผลลัพท์หรือผลสัมฤทธิ์ (Summative evaluation)

3.4 การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

ในกระบวนการเรียนการสอนต้องมีหลักการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามแนวทางที่สำคัญ ๆ ดังนี้

Carpenter และ Lehrer (1999) ได้กล่าวถึงการจัดการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้เกิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ควรมีลักษณะดังนี้

1) การสร้างความสัมพันธ์ หมายถึง การเชื่อมโยงแนวคิดหรือกระบวนการใหม่กับแนวคิดเดิมที่นักเรียนเข้าใจแล้ว

2) การขยายและประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ หมายถึงการพัฒนาความรู้ที่ให้นักเรียนสามารถรวมแนวคิดใหม่และแนวคิดที่มีอยู่เดิมเข้าด้วยกัน เพื่อทำให้เกิดความเข้าใจได้ดีขึ้น

3) ผลสะท้อนจากประสบการณ์ หมายถึง นักเรียนสามารถสำรวจแนวคิดที่พวกเขาได้เรียน และรู้ว่าจะนำแนวคิดนั้นไปใช้อย่างไร

4) การแสดงออกอย่างชัดเจนในสิ่งที่รู้ หมายถึง การเขียนหรือการอภิปรายเพื่อสะท้อนถึงสิ่งที่นักเรียนรู้

5) การสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง หมายถึง การที่นักเรียนสามารถสร้างความรู้ผ่านกิจกรรมการเรียนการสอนได้อย่างมีเหตุมีผลด้วยตนเอง

Hanna และ Yackel (2003) กล่าวว่า การเรียนคณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจสามารถพัฒนาได้โดย

1) การมีปฏิสัมพันธ์ในชั้นเรียน

2) การให้นักเรียนได้เสนอแนวคิดหรือข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์

3) การให้นักเรียนมีโอกาสประเมินแนวคิดของตนเองและผู้อื่น

4) การพัฒนาทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

สิริพร ทิพย์คง (2545) ได้ให้หลักการสอนคณิตศาสตร์ที่ควรจำเป็นต้องทราบและนำสิ่งเหล่านี้ไปใช้ในการสอน เพื่อช่วยให้นักเรียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ มีความรู้และประสบผลสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

- 1) สอนจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมไปหานามธรรม
- 2) สอนจากสิ่งที่อยู่ใกล้ตัวนักเรียนก่อนสอนสิ่งที่อยู่ไกลตัวนักเรียน
- 3) สอนจากเรื่องที่ยากก่อนการสอนเรื่องที่ยาก
- 4) สอนตรงตามเนื้อหาที่ต้องการสอน
- 5) สอนให้คิดไปตามลำดับขั้นตอนอย่างมีเหตุผล
- 6) สอนด้วยอารมณ์ขัน
- 7) สอนด้วยหลักจิตวิทยา สร้างแรงจูงใจ เสริมกำลังใจให้กับนักเรียน
- 8) สอนโดยการนำไปสัมพันธ์กับวิชาอื่น

อัมพร ม้าคนอง (2546) ได้สรุปหลักการสอนคณิตศาสตร์ที่ได้มาจากทฤษฎีเกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เช่น ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของเพียเจต์ ทฤษฎีการเรียนคณิตศาสตร์ของดินส์ ทฤษฎีการเรียนการสอนของบรูเนอร์ ทฤษฎีการเรียนรู้ของกานเย ทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ และทฤษฎีเกี่ยวกับการถ่ายโยงโดยใช้การเปรียบเทียบ ดังนี้

- 1) สอนให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์หรือได้ความรู้ทางคณิตศาสตร์จากการคิดและมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกับผู้อื่น ใช้ความคิดและคำถามที่นักเรียนสงสัยเป็นประเด็นในการอภิปราย เพื่อให้ได้แนวคิดที่หลากหลาย และเพื่อนำไปสู่ข้อสรุป
- 2) สอนให้นักเรียนเห็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ความสัมพันธ์และความต่อเนื่องของเนื้อหาคณิตศาสตร์
- 3) สอนโดยคำนึงว่าจะให้นักเรียนเรียนอะไร และเรียนอย่างไร นั่นคือต้องคำนึงถึงทั้งเนื้อหาวิชาและกระบวนการเรียน
- 4) สอนโดยการใช้สิ่งที่เป็นรูปธรรมอธิบายนามธรรม
- 5) จัดกิจกรรมการสอนโดยคำนึงถึงประสบการณ์ และความรู้พื้นฐานของนักเรียน
- 6) สอนโดยใช้การฝึกหัดให้นักเรียนเกิดประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ทั้งการฝึกรายบุคคล ฝึกเป็นกลุ่ม
- 7) สอนเพื่อให้นักเรียนเกิดทักษะการคิดวิเคราะห์เพื่อแก้ปัญหา สามารถให้เหตุผลเชื่อมโยงสื่อสาร และคิดอย่างสร้างสรรค์
- 8) สอนให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์ในห้องเรียนกับคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน
- 9) ครูควรศึกษาธรรมชาติและศักยภาพของนักเรียน
- 10) สอนให้นักเรียนมีความสุขในการเรียนคณิตศาสตร์

11) สังเกต และประเมินการเรียนรู้ของนักเรียนโดยใช้คำถามสั้น ๆ หรือการพูดคุยปกติ

กระทรวงศึกษาธิการ (2551) กล่าวถึงการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ว่า ครูต้องสอดแทรกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เข้ากับการเรียนการสอนด้านเนื้อหา ด้วยการให้นักเรียนทำกิจกรรม หรือตั้งคำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนคิด อธิบาย และให้เหตุผล เช่น ให้นักเรียนแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้ที่เรียนมาแล้ว หรือให้นักเรียนเรียนรู้ผ่านการแก้ปัญหา ให้นักเรียนใช้ความรู้ทางพีชคณิตในการแก้ปัญหา หรือให้นักเรียนใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการอธิบายเกี่ยวกับสถานการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน หรือกระตุ้นให้นักเรียนใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการสร้างสรรค์ผลงานที่หลากหลายและแตกต่างจากคนอื่น รวมทั้งการแก้ปัญหาที่แตกต่างจากคนอื่นด้วย

จากที่กล่าวมาข้างต้น ทำให้ได้แนวทางการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ไปใช้ในการจัดกระบวนการเรียนการสอน สรุปได้ว่าการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้นักเรียนมีความรู้และประสบผลสำเร็จตามเป้าหมายนั้น ต้องคำนึงถึงหลายด้าน เช่น การตั้งคำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนคิด การอธิบาย และให้เหตุผล การให้นักเรียนใช้ความรู้ทางพีชคณิตในการแก้ปัญหา การให้นักเรียนทำกิจกรรมโดยมีส่วนร่วมในการอภิปราย เพื่อให้ได้แนวคิดที่หลากหลาย และเพื่อนำไปสู่ข้อสรุป การสอนเพื่อให้นักเรียนเกิดทักษะการคิดวิเคราะห์เพื่อแก้ปัญหา สามารถคิดไปตามลำดับขั้นตอนอย่างมีเหตุผล

4. การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา

4.1 ความหมายของพีชคณิต

Herbert และ Brown (1997) มองพีชคณิตในแง่ของการใช้เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา ได้แก่ การวิเคราะห์ข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา และการนำเสนอข้อมูลในรูปของการอธิบายและการหาคำตอบ เช่น การหาตัวไม่ทราบค่า การทดสอบข้อความคาดการณ์ หรือการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ เป็นต้น

นอกจากนี้ สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000) กล่าวถึงพีชคณิตว่าคนส่วนใหญ่มักจะเข้าใจว่า พีชคณิตเป็นวิชาที่ว่าด้วยการแก้สมการที่ซับซ้อนหรือการดำเนินการเกี่ยวกับนิพจน์ และเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร ซึ่งส่วนที่กล่าวถึง เป็นเพียงส่วนหนึ่งของพีชคณิตแต่ไม่ใช่ทั้งหมด ซึ่ง Greenes และ Findell (1999) มีมุมมองว่าแนวคิดหลักทางพีชคณิตควรประกอบด้วย การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย การนำเสนอ สมการ ตัวแปร ฟังก์ชัน และสัดส่วน นอกจากนี้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านที่พยายามให้ความหมายของ

พีชคณิตในลักษณะของภาษา (Usiskin, 1999) โดยมีมุมมองว่าพีชคณิต คือ ภาษาของวิชาคณิตศาสตร์ เป็นภาษาแทนรูปทั่วไปของเลขคณิต และเป็นภาษาที่มีลักษณะพิเศษเฉพาะที่เกี่ยวข้องกับตัวไม่ทราบค่า สูตร รูปทั่วไป การแทนค่า และความสัมพันธ์ เป็นต้น

จากที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปความหมายของพีชคณิตได้ว่า เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา การนำเสนอข้อมูลในรูปการอธิบายและหาคำตอบ การทดสอบข้อความคาดการณ์ หรือการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน เป็นการดำเนินการเกี่ยวกับนิพจน์ และเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร และแทนภาษาทั่วไปของเลขคณิต

4.2 การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

Yackel (1997) กล่าวถึงการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตว่า เป็นการให้เหตุผลที่นอกเหนือไปจากการให้เหตุผลเชิงตัวเลข (Numerical Reasoning) หรือการให้เหตุผลที่เป็นเพียงการยกตัวอย่างในกรณีเฉพาะ แต่เป็นการให้เหตุผลที่มีความเป็นกรณีทั่วไป (General Reasoning) เกี่ยวกับความสัมพันธ์ และวิธีการใช้สัญลักษณ์ในการนำเสนอความคิด ซึ่งสอดคล้องกับ Falkner, Levi, และ Carpenter (1999, 2000) ที่มองว่าการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเป็นการให้เหตุผลที่เกิดจากแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ ซึ่งแสดงออกมาในรูปภาษาของนักเรียนเอง หรือการใช้สัญลักษณ์ในการอธิบายความสัมพันธ์และความเป็นรูปทั่วไป

Kaput (1999 อ้างถึงใน Van De Walle, 2007) ซึ่งเป็นผู้นำการจัดหลักสูตรพีชคณิตทุกระดับชั้น กล่าวถึงพีชคณิตว่า เป็นเรื่องเกี่ยวข้องกับการสรุปในรูปทั่วไป และการแสดงจำนวนที่ใช้การสร้างภาษาที่เป็นทางการมากขึ้น การสรุปในรูปทั่วไปเริ่มต้นในเลขคณิต ในสถานการณ์จำลองในเรขาคณิต และในคณิตศาสตร์ทั้งหมดที่สามารถหรือควรปรากฏในระดับประถมศึกษา Kaput ได้รวบรวมข้อคิดเห็นเกี่ยวกับการคิดเชิงพีชคณิตจากผู้วิจัยหลายคน และได้สรุปรูปแบบต่าง ๆ ของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตไว้ 5 แบบคือ

- 1) รูปทั่วไปของเลขคณิตและแบบรูปคณิตศาสตร์ทั้งหมด
- 2) การใช้สัญลักษณ์อย่างมีความหมาย
- 3) การศึกษาโครงสร้างในระบบจำนวน
- 4) การศึกษาแบบรูปและฟังก์ชัน
- 5) ขั้นตอนของการจำลองแบบทางคณิตศาสตร์ ซึ่งรวมข้อ 1-4 เข้าด้วยกัน

Kaput (1999 อ้างถึงใน Van De Walle, 2007) สรุปได้ว่าการคิดเชิงพีชคณิตไม่ใช่ความคิดเดี่ยว ๆ แต่ประกอบด้วยรูปแบบที่แตกต่างกัน และความเข้าใจในสัญลักษณ์ ดังนั้นจึง

ต้องเริ่มต้นพัฒนาารูปแบบการคิดเชิงพีชคณิตตั้งแต่เนิ่น ๆ เพื่อที่นักเรียนจะได้เรียนรู้การคิดหาผลลัพธ์ด้วยความคิดเชิงคณิตศาสตร์

Farnsworth (2003) กล่าวว่าปัจจัยสำคัญของหลักสูตรที่สนับสนุนการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตมี 3 ด้านคือ

1) การสรุปในรูปทั่วไป (Generalizing) เป็นกระบวนการพัฒนาคณิตศาสตร์โดยทั่วไปเกี่ยวกับโครงสร้าง สมบัติของจำนวนและความสัมพันธ์ที่เน้นความสำคัญของความคิดทางคณิตศาสตร์

2) การสรุปเป็นกฎในรูปสัญลักษณ์ (Formalizing) เป็นกระบวนการของการแสดงรูปทั่วไปทางคณิตศาสตร์ ด้วยกฎในรูปสัญลักษณ์ ด้วยกฎเกณฑ์ที่เกิดจากภาษาทางการที่ใช้ทุกวัน เช่น นักเรียนอาจแสดงแบบรูปครั้งแรกในภาษาที่ใช้ทุกวันว่า “บวกด้วยสอง ทุก ๆ ครั้ง” และแสดงแบบรูปนั้นต่อที่เป็นสัญลักษณ์มากขึ้น เช่น “+2 ”

3) การตัดสินข้อความคาดการณ์ (Justifying Conjectures) เป็นกระบวนการพัฒนาข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ เพื่อสำรวจและวิเคราะห์ข้อยืนยันทางคณิตศาสตร์ที่มีหลักฐานหรือเหตุผลขั้นแรก ที่สำคัญในกระบวนการนี้ก็คือ นักเรียนเข้าใจว่าข้อยืนยันทางคณิตศาสตร์นั้นนักเรียนจะสามารถทำได้และควรจะต้องสนใจได้

Blanton และ Kaput (2005) กล่าวว่า การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตมีหลายรูปแบบ ดังนี้

1) การใช้เลขคณิตในฐานะที่เป็นความคิดทางคณิตศาสตร์สำหรับใช้แสดงความคิดและกฎเกณฑ์ในการสรุปในรูปทั่วไปที่เรียกว่า รูปทั่วไปของเลขคณิต (Generalized Arithmetic) โดยหมายถึงการให้เหตุผลเกี่ยวกับการดำเนินการของจำนวนและสมบัติของจำนวน ดังเช่นรูปทั่วไปเกี่ยวกับสมบัติการสลับที่ของการคูณหรือสมบัติของศูนย์ หรือความเข้าใจการเท่ากันในฐานะที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ

2) รูปทั่วไปของแบบรูปของจำนวนเพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (Functional Thinking) หมายถึงรูปทั่วไปของแบบรูปของจำนวนเกี่ยวข้องกับการค้นหา และแสดงกฎเกณฑ์ของจำนวน ดังเช่น การอธิบายการเปลี่ยนแปลงของแบบรูป หรือรูปทั่วไปเกี่ยวกับผลบวกซึ่งเป็นลำดับต่อเนื่องกันของจำนวน

3) การสร้างแบบจำลองในฐานะที่เป็นการแสดงความคิด และกฎเกณฑ์ในการสรุปในรูปทั่วไป การสร้างแบบจำลองในฐานะที่เป็นรูปแบบของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตก็ยังคง

เกี่ยวข้องกับกฎเกณฑ์ของรูปทั่วไป แต่มาจากสถานการณ์เชิงคณิตศาสตร์ หรือข้อเท็จจริงเกี่ยวกับกฎเกณฑ์ในระดับมัธยมศึกษาเพื่อสร้างแบบจำลองที่มากขึ้น

4) การสรุปในรูปทั่วไปเกี่ยวกับระบบนามธรรมทางคณิตศาสตร์จากการคิดคำนวณและความสัมพันธ์ ซึ่งมีน้อยในหลักสูตรระดับประถมศึกษา เป็นการสรุปในรูปทั่วไปกับสื่อนามธรรมและระบบที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการของจำนวนในชั้นเรียนของสื่อนามธรรมและรูปแบบการสอนดั้งเดิมที่อธิบายในฐานะที่เป็นพีชคณิตนามธรรม

ทั้ง 4 รูปแบบนี้ รูปทั่วไปของเลขคณิตและการคิดเชิงฟังก์ชันเป็นรูปแบบที่เหมาะสมกับการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา

สรุปได้ว่าการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต หมายถึง การให้เหตุผลที่เกิดจากแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ ซึ่งแสดงออกมาในรูปภาษาของนักเรียนเอง หรือการใช้สัญลักษณ์ในการอธิบายความสัมพันธ์ ความเข้าใจการเท่ากันในฐานะที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ การให้เหตุผลเกี่ยวกับการดำเนินการของจำนวนและสมบัติของจำนวน การสรุปในรูปข้อความคาดการณ์ การสรุปในรูปทั่วไป การตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุป และการให้เหตุผลสนับสนุนการคิดด้วยข้อความคาดการณ์ หรือการอ้างข้อสรุปในรูปทั่วไปประกอบคำตอบได้อย่างสมเหตุสมผล

4.3 การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์

Krulik และ Rudnick (1993) กล่าวว่า ความสามารถของนักเรียนในการได้มาซึ่งข้อสรุปที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่กำหนด ได้มาจากการคิดโดยนักเรียนต้องสร้างข้อความคาดการณ์ หาข้อสรุปจากความสัมพันธ์ในสถานการณ์ปัญหาแล้วแสดงผล อธิบายข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปนั้น ซึ่งข้อสรุปก็คือแนวคิดหรือความรู้ใหม่ที่ได้ Krulik และ Rudnick ได้แบ่งการคิดออกเป็น 4 ชั้น คือ การคิดขั้นระลึกได้ (Recall) การคิดขั้นพื้นฐาน (Basic) การคิดขั้นวิเคราะห์ (Critical) และการคิดขั้นสร้างสรรค์ (Creative) ส่วนการให้เหตุผล Krulik และ Rudnick มองว่าเป็นส่วนหนึ่งของการคิดที่เหนือไปจากการคิดขั้นระลึกได้

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000) การให้เหตุผลเป็นทักษะกระบวนการหนึ่งที่ถูกเน้นในการจัดการเรียนรู้ เนื่องจากความสามารถในการให้เหตุผลเป็นองค์ประกอบที่สำคัญในการเข้าใจคณิตศาสตร์

Thurstone (1938 อ้างถึงใน สุภาพร บุญหนัก, 2544) ความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล หมายถึง นักเรียนมีความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์ โดยสามารถถ่ายโยงไปสู่การแก้ปัญหาอื่น ๆ ที่ไม่ใช่วิชาคณิตศาสตร์ และความสามารถใน

การแก้ปัญหาอื่น ๆ ทั่วไปตามความสามารถที่พึงปรารถนา ซึ่งการวัดความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลตามทฤษฎีองค์ประกอบพื้นฐานทางสมองของ Thurstone มี 4 ลักษณะดังนี้

1) การจำแนกประเภท (Classification) เป็นการวัดความสามารถด้านเหตุผลในการพิจารณาเปรียบเทียบสิ่งของต่าง ๆ มีอะไรเหมือนกัน มีอะไรต่างกัน เมื่อนำมาสร้างกลุ่มหรือพวกจะได้อย่างสามารถเปรียบเทียบว่า อะไรแตกต่างไปจากกลุ่ม หรืออะไรมีคุณสมบัติเหมือนกับกลุ่มที่กำหนดให้ ความสามารถด้านนี้เป็นความสามารถด้านการแยกแยะ หรือวิเคราะห์คุณลักษณะของสิ่งต่าง ๆ

2) การอุปมาอุปไมย (Analogy) เป็นการวัดความสามารถด้านเหตุผลในการพิจารณาความสัมพันธ์ของคำสองคำ อ้างอิงไปยังความหมายคำอีกสองคำ หรือกลุ่มมโนภาพสองกลุ่มกับกลุ่มมโนภาพอีกสองกลุ่มได้อย่างคล่องแคล่ว

3) อนุกรมภาพ (Matrices) เป็นการวัดความสามารถด้านเหตุผล ในการหาเหตุผลของการเปลี่ยนแปลงภาพอย่างมีระบบ

4) การสรุปอ้างอิง (Inference) เป็นการวัดความสามารถด้านเหตุผล ในการสรุปผลจากเหตุต่าง ๆ อาจจะเป็นเหตุใหญ่ หรือเหตุเล็กก็ได้

Brandt (1984 อ้างถึงใน กฤษณะ โสขุมมา, 2546) การคิดกับการให้เหตุผลมีส่วนสัมพันธ์กันอย่างใกล้ชิด และเป็นพื้นฐานสำคัญของการเรียนรู้และการแก้ปัญหา ด้วยเหตุนี้ นักการศึกษาจึงให้ความสำคัญเกี่ยวกับการสอน เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการคิดอย่างมีระบบ มีเหตุผลมากขึ้น โดยได้พยายามศึกษา ทดลองเพื่อหาว่าทักษะการคิดอะไรที่จำเป็นและเป็นพื้นฐานของการคิดอย่างมีเหตุผล สอนอย่างไรจึงจะทำให้เกิดทักษะที่ต้องการเหล่านั้น จึงได้มีการกล่าวถึงการสอนไว้ 3 แนวทาง คือ แนวทางการสอนเพื่อคิด (Teaching for Thinking) แนวทางการสอนการคิด (Teaching of Thinking) และแนวทางการสอนที่เกี่ยวกับการคิด (Teaching about Thinking) โดยมีรายละเอียดพอสังเขปดังนี้

1) การสอนเพื่อให้อคิด การสอนตามแนวทางนี้เน้นในด้านการสอนเนื้อหาวิชา โดยมีการปรับเปลี่ยนกระบวนการสอนเพื่อเพิ่มความสามารถในด้านการคิดของผู้เรียน

2) การสอนการคิด การสอนตามแนวทางนี้มีจุดเน้นเกี่ยวกับกระบวนการทางสมองที่นำมาใช้ในการคิดโดยเฉพาะ โดยเน้นไปที่ทักษะการคิด หรือเป็นแนวทางที่สอนทักษะการคิดโดยตรง แนวทางในการสอนนั้น จะมีลักษณะที่แตกต่างกันหลายแนวทางตามความเชื่อพื้นฐานของผู้ที่จัดสร้างแนวทางการสอน

3) การสอนเกี่ยวกับการคิด การสอนตามแนวทางนี้เป็นแนวทางที่ใช้การคิด เป็นเนื้อหาสาระของการสอน โดยมุ่งให้นักเรียนได้เรียนรู้ถึงสิ่งที่เป็นความคิดของตัวเอง โดยรู้ว่าตนกำลังคิดอะไร ต้องการรู้อะไร และในขณะที่กำลังคิดอยู่นั้นตนเองรู้อะไร และไม่รู้อะไร ซึ่งสิ่งดังกล่าวนี้จะช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจถึงกระบวนการคิดของตนเอง อันก่อให้เกิดทักษะที่เรียกว่า การสังเคราะห์ความคิด (Metacognition) ของตนเอง แนวทางการสอนเกี่ยวกับการคิดนี้ เริ่มเป็นที่สนใจของนักการศึกษาทั่วไปเพิ่มขึ้น โดยเชื่อว่าเป็นแนวทางที่ทำให้นักเรียนสามารถควบคุมและตรวจสอบการคิดของตนเองได้ในขณะที่ทำการคิด ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนสามารถค้นหาข้อบกพร่องของตนได้ ทั้งนี้เพื่อหาแนวทางแก้ไขได้ตรงจุด

Lappan และ Schram (1989) เนื่องจากความสามารถในการคิดและการให้เหตุผล เป็นทักษะที่ต้องใช้การฝึก และฝึกจากประสบการณ์ที่หลากหลาย และควรได้รับการฝึกอย่างต่อเนื่องจากบรรยากาศของชั้นเรียนที่สนับสนุนให้มีการอธิบายแลกเปลี่ยนความคิด ชี้แจงเหตุผล และแก้ปัญหาพร้อมกัน ดังนั้น ในการพัฒนาความสามารถในการคิดและการให้เหตุผล ควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมและแสดงพฤติกรรมในการสืบค้น คาดการณ์ ค้นหา วิธีการพิสูจน์ สังเกตแบบรูป ชี้แจงเหตุผลของแนวคิดโดยการอธิบายแบบรูป แสดงด้วยภาพหรือแบบจำลองและตอบคำถามต่าง ๆ เช่น “ทำไม” “อะไรจะเกิดขึ้นถ้า...” “สามารถที่จะใช้วิธีการอื่นได้หรือไม่ถ้าการดำเนินการเดิมไม่บรรลุผล” ล้วนเป็นคำถามที่ก่อให้เกิดการคิด การสร้างข้อความคาดคะเน การกำหนดแบบจำลอง (Modeling) และการอธิบาย ซึ่งเป็นลักษณะของการให้เหตุผลเกี่ยวกับสถานการณ์

Rowan และ Morrow (1993 อ้างถึงใน สุภาพร บุญหนัก, 2544) นอกจากเตรียมกิจกรรมให้นักเรียนได้มีส่วนร่วม และแสดงพฤติกรรมที่เป็นการฝึกทักษะและพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลแล้ว ยังได้ให้ข้อคิดเกี่ยวกับบรรยากาศในชั้นเรียนว่า เป็นสิ่งสำคัญมากที่สุดที่ต้องจัดบรรยากาศที่แสดงให้นักเรียนเห็นว่า การให้เหตุผลเป็นสิ่งสำคัญว่าการได้เพียงคำตอบที่ถูกต้อง ซึ่งบรรยากาศในชั้นเรียนต้องไม่ทำให้นักเรียนรู้สึกหวาดกลัว เป็นบรรยากาศที่สนับสนุนและส่งเสริมให้นักเรียนได้พูดอธิบายและแสดงเหตุผลของแนวคิด ได้กระทำและสรุปพร้อมทั้งแสดงการยืนยันข้อสรุปของแนวคิดนั้น ๆ

สำหรับการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล Guilford และ Hoepfner (1971) ได้ให้ความเห็นว่า การพัฒนาบุคคลให้มีความสามารถในการให้เหตุผลนั้น ต้องเริ่มจากการส่งเสริมให้บุคคลได้คิดอย่างมีเหตุผล ความสามารถในการให้เหตุผลดังกล่าวนี้ เป็นสิ่งจำเป็นที่โรงเรียนควรจัดทำ และเป็นสิ่งที่สามารถฝึกได้โดยสอนควบคู่กับเนื้อหาวิชาปกติ หรือในสถานการณ์ต่าง ๆ ที่เหมาะสม

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547) เสนอลักษณะของการให้เหตุผลในชั้นเรียนระดับประถมศึกษาว่า อาจเป็นการให้เหตุผลอย่างง่าย ๆ ไม่เป็นทางการ เช่น การหาว่า $23 + 15 = 38$ นักเรียนอาจจะให้เหตุผลง่าย ๆ โดยนำแท่งไม้มาแสดงจำนวน ประกอบการอธิบาย หรืออาจจะเขียนเล่าความคิดในการทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ การพัฒนาการให้เหตุผลจะเริ่มจากการเรียนรู้สิ่งที้ง่าย ๆ ไปสู่สิ่งที่ซับซ้อน หรือจากการให้เหตุผลที่เป็นรูปธรรม ไปสู่นามธรรม การให้เหตุผลในระดับประถมศึกษา ครูควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้ใช้การให้เหตุผลอย่างหลากหลายในการพัฒนาศักยภาพด้านต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

- 1) การจำแนก
- 2) การเปรียบเทียบ
- 3) การเชื่อมโยง
- 4) การวิเคราะห์
- 5) การสร้างข้อความคาดการณ์ การทำนาย การตั้งสมมติฐาน
- 6) การประเมิน
- 7) การสร้างรูปทั่วไป
- 8) การอนุมาน

หลักการในการพัฒนาการให้เหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา มีดังนี้

- 1) ควรจัดประสบการณ์ให้สม่ำเสมอทุกระดับชั้น
- 2) การให้เหตุผลสามารถพัฒนาได้ โดยสอดแทรกทุกหน่วยการเรียนรู้ตาม

ความเหมาะสม

- 3) ระดับการให้เหตุผล ควรให้สอดคล้องกับวัยและระดับชั้นของนักเรียน
- 4) การให้เหตุผล ควรจัดให้ได้มีประสบการณ์อย่างสม่ำเสมอ ซึ่งควรจะปลูกฝังให้เกิดเป็นนิสัย
- 5) ควรให้นักเรียนได้ตระหนักว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผล
- 6) ควรจัดบรรยากาศในห้องเรียนให้ส่งเสริมการฝึกการให้เหตุผล

แนวทางการดำเนินการเพื่อจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผล นอกจากจะต้องคำนึงถึงหลักการต่าง ๆ ดังกล่าวแล้ว สิ่งที่ควรดำเนินการ มีดังนี้

1) ตั้งเป้าหมายให้ชัดเจน ควรพิจารณาในรายละเอียดว่าระดับชั้นนั้น ต้องการให้นักเรียนมีความสามารถอะไรบ้าง เช่น การให้เหตุผล การมีทักษะ การนำไปใช้ การตัดสินใจและสรุปผลได้มากน้อยเพียงใด ควรตระหนักว่าเป้าหมายนั้น มีความสำคัญ มีคุณค่าในชีวิตของนักเรียน และต้องกำหนดการประเมินให้บรรลุเป้าหมาย

2) ปรับแนวคิดในการสอน การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล สามารถทำควบคู่ไปกับการสอนได้ทุกอย่าง โดยจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้คิดเองมากขึ้น เช่น จัดให้มีการอภิปราย ถามให้นักเรียนเล่าความคิด ชี้แจงเหตุผลประกอบ ซึ่งเป็นการแสดงผลอย่างง่าย ๆ เพื่อให้นักเรียนได้เคยชินกับการคิดอย่างมีเหตุผล และการชี้แจงนี้จะเป็นโอกาสให้นักเรียนได้ย้อนกลับมาพิจารณาแนวคิดของตนเอง ทำความเข้าใจให้แจ่มชัดขึ้น และปรับแต่งแนวคิดได้อย่างมีเหตุผล ตลอดจนประเมินเหตุผลของผู้อื่นว่าควรเชื่อถือหรือไม่ เมื่อนักเรียนแสดงผล ควรอวยการสรุปเหตุผลของนักเรียน ปรับแต่งเหตุผลนั้นให้รัดกุม เพื่อให้นักเรียนได้ซึมซับวิธีการให้เหตุผลที่ดี

3) จัดกิจกรรมเพิ่มเติม ควรเพิ่มกิจกรรมนอกเหนือจากการสอนตามปกติ เช่น จัดให้มีการแก้ปัญหาที่แปลกใหม่ไม่ใช่เฉพาะโจทย์ปัญหาในหนังสือเรียนเท่านั้น ให้มีการสร้างแบบรูปเอง หรือการพิจารณาแบบรูปที่กำหนดให้ ให้นักเรียนได้นำคณิตศาสตร์ไปใช้เชื่อมโยงกับวิชาอื่น ๆ เป็นต้น

O'Daffer และ Thornquist (1993) ได้ให้ทรรศนะว่า การให้เหตุผลเป็นส่วนหนึ่งของความคิดทางคณิตศาสตร์ ว่าหมายถึงการใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่อย่างหลากหลายในการทำความเข้าใจแนวคิด ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิด สร้างข้อสรุป หรือสนับสนุนข้อสรุปเกี่ยวกับแนวคิด และความสัมพันธ์ของแนวคิด และแก้ปัญหาเกี่ยวกับแนวคิดนั้น สำหรับการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ มีทักษะการให้เหตุผลที่มีความสำคัญต่อความสำเร็จทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนอยู่ 2 ประเภท คือ

1) การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการใช้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับสมาชิกบางสมาชิกในเซต ๆ หนึ่ง เพื่อนำไปสู่สรุปทั่วไป หรือนำไปสู่สมาชิกทุกตัวในเซตนั้น

2) การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการใช้ข้อความหรือแบบรูปที่เป็นจริงหรือสมเหตุสมผลอยู่แล้ว เพื่อนำไปสู่ข้อสรุป

Baroody (1993 อ้างถึงใน ชีรา ลำดวนหอม, 2546; กฤษณะ ไสขุมา, 2546; อารีย์ ศรีเดือน, 2547) กล่าวว่า การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่สำคัญและจำเป็น เพราะการให้เหตุผลช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาออกเหนือไปจากการจดจำข้อเท็จจริง กฎ และการดำเนินการ การเน้นการให้เหตุผล ช่วยให้นักเรียนเห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่สามารถให้เหตุผลได้อย่างเป็นระบบ และมีความหมาย และทักษะการให้เหตุผลในคณิตศาสตร์ สามารถประยุกต์ไปใช้ในสาขาอื่น ๆ ได้ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มี 3 ประเภทคือ 1) การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) 2) การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) และ 3) การให้เหตุผลเชิงประจักษ์ (Intuitive Reasoning) ซึ่งเป็นลักษณะของการให้เหตุผลที่เกิดจากการหยั่งรู้ (Insight) หรือเกิดจากกลางสังหรณ์ไม่ได้ มีข้อมูล ที่จำเป็นทั้งหมดในการตัดสินใจ จึงตัดสินใจจากข้อมูลที่เห็นหรือจากความรู้สึกภายใน เหตุผล เชิงหยั่งรู้จึงเป็นเหตุผลที่วางอยู่บนสิ่งที่ปรากฏหรือข้อสมมติฐาน ซึ่งสิ่งที่ปรากฏอาจถูกหรือผิดก็ได้ การจัดหลักสูตรเพื่อเน้นการพัฒนาให้ผู้เรียนมีทักษะในการให้เหตุผลนั้น ควรเน้นในเรื่องของการแยกและจำแนกประเภทของสิ่งต่าง ๆ

Begg (1994) เสนอว่าความสามารถในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ ควรประกอบด้วยความสามารถด้านต่าง ๆ ต่อไปนี้

1) การจำแนกและการอธิบาย ประกอบด้วย การจำแนกประเภทของสิ่งต่าง ๆ การอธิบายถึงสิ่งต่าง ๆ อย่างชัดเจน

2) การให้เหตุผล ประกอบด้วย การสร้างข้อสรุปที่มีเหตุผล ใช้แบบจำลอง ข้อมูล สมบัติและความสัมพันธ์เพื่อสร้างเป็นเหตุผล การพิสูจน์คำตอบและกระบวนการ การใช้แบบรูปและความสัมพันธ์เพื่อวิเคราะห์สถานการณ์ การให้เหตุผลโดยใช้กราฟ และการนำเสนอด้วยกราฟ ติดตามการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ ตัดสินความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผล สร้างการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลแบบง่าย ๆ เข้าใจและประยุกต์ใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัย เข้าใจและประยุกต์ใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย การยกตัวอย่างค้าน และการยอมรับว่าการให้เหตุผลคือส่วนหนึ่งของคณิตศาสตร์

3) การสรุปอ้างอิง ประกอบด้วย การสร้างและประเมินข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ การสร้างรูปทั่วไป การตัดสินใจที่เหมาะสมและเชื่อถือได้

4) การพิสูจน์ ประกอบด้วย การยอมรับธรรมชาติของระบบสัจพจน์ในทางคณิตศาสตร์ การสร้างการพิสูจน์ ทั้งการพิสูจน์ทางอ้อม และการพิสูจน์โดยวิธีอุปนัย

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000) กล่าวว่า การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์นั้น จะเป็นแนวทางในการพัฒนาให้เกิดการแสดงออกถึงความเข้าใจอันลึกซึ้งซึ่งเกี่ยวกับปรากฏการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวาง ซึ่งได้กำหนดมาตรฐานของการให้เหตุผลและการพิสูจน์สำหรับนักเรียนในระดับอนุบาล ถึงระดับ 12 ดังนี้

- 1) ตระหนักถึงความสำคัญของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์
- 2) สร้างและตรวจสอบข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้
- 3) พัฒนาและประเมินการอ้างเหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้
- 4) เลือกและใช้ชนิดของการให้เหตุผลและวิธีพิสูจน์อย่างหลากหลาย

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ หมายถึง การส่งเสริมนักเรียนให้มีความสามารถในการอธิบาย การหาความสัมพันธ์ การวิเคราะห์ การแสดงวิธีคิดให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผล ซึ่งข้อสรุปที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่กำหนด ได้มาจากการคิดโดยนักเรียนต้องสร้างข้อความคาดการณ์ และข้อสรุปในรูปทั่วไป โดยหาข้อสรุปจากความสัมพันธ์ในสถานการณ์ปัญหา แล้วแสดงเหตุผลอธิบายข้อสรุป และยืนยันข้อสรุปนั้น โดยฝึกจากกิจกรรมที่สนับสนุนให้มีการอภิปรายแลกเปลี่ยนแนวคิดพร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบเหตุผล และในระหว่างปฏิบัติกิจกรรม ครูจะใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนคิดและแสดงเหตุผล

4.4 การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา

Kaput (1998) ได้จำแนกรูปแบบของการให้เหตุผลทางพีชคณิตไว้ 5 แบบ ซึ่งล้วนแล้วแต่มีความสัมพันธ์เชื่อมโยงกัน ดังนี้

- 1) พีชคณิตในฐานะที่เป็นการหารูปทั่วไปและการให้คำจำกัดความของแบบรูปและสิ่งต่าง ๆ ที่ดำเนินตามกฎเกณฑ์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งพีชคณิตในฐานะที่เป็นรูปทั่วไปของเลขคณิต
- 2) พีชคณิตในฐานะที่เป็นการดำเนินการของสัญลักษณ์ต่าง ๆ อย่างมีรูปแบบกฎเกณฑ์
- 3) พีชคณิตในฐานะที่เป็นการศึกษาเกี่ยวกับโครงสร้าง และระบบที่ได้มาจากการคิดคำนวณและความสัมพันธ์

4) พีชคณิตในฐานะที่เป็นการศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ การแปรผัน
เกี่ยวเนื่อง

5) พีชคณิตในฐานะที่เป็นการสร้างแบบจำลอง

Blanton และ Kaput (2005) ได้เสนอแนะประเภทของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต
ในฐานะที่เป็นรูปทั่วไปของเลขคณิต ดังนี้

1) สมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน เช่น

- รูปทั่วไปเกี่ยวกับผลรวมและผลคูณของจำนวนคู่และจำนวนคี่

- รูปทั่วไปเกี่ยวกับสมบัติของจำนวน เช่น ผลของการลบจำนวนจากตัวมันเอง

แสดงให้อยู่ในรูป $a - a = 0$

- การแยกจำนวนเต็มออกจากกันเพื่อหาผลรวมและการตรวจสอบโครงสร้าง
ของผลรวมเหล่านั้น

- รูปทั่วไปเกี่ยวกับสมบัติของค่าประจำหลัก

2) สมบัติของการดำเนินการของจำนวน เช่น โครงสร้างหรือรูปทั่วไปของสมบัติ

การสลับที่ของการบวกและการคูณ หรือสมบัติการแจกแจงของการคูณและการบวก

3) การเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน เช่น

- การแสดงความสัมพันธ์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ “=” ของจำนวน

- การอธิบายมุมมองของเครื่องหมายเท่ากับ “=” ว่าเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง

จำนวน

- การแปลความของเครื่องหมายเท่ากับ “=” ว่าเป็นสัญลักษณ์แห่งการเท่ากัน

หรือสมมูล

- ทุกขั้นตอนในการทำให้เท่ากันต้องการดำเนินการของจำนวนที่แสดง

ความเท่ากัน

4) การมองจำนวนในเชิงพีชคณิต

การใช้จำนวนเหมือนกับทำหน้าที่คล้ายตัวแปร (Placeholder) หรือตัวแปร
ต่าง ๆ เช่น $45,678 + 1,185,631$ เป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ แทนที่นักเรียนจะคำนวณแล้วตอบ
แต่นักเรียนไม่คำนวณ แต่มองว่า 8 เป็นจำนวนคู่ และ 1 เป็นจำนวนคี่ ซึ่งจำนวนคู่รวมกับจำนวนคี่
ย่อมเป็นจำนวนคี่ นักเรียนไม่ได้มอง 8 ว่าคือแปด และไม่ได้มองว่า 1 คือหนึ่ง แต่มอง 8 ว่าเป็น
Placeholder หรือที่ซึ่งแทนความเป็นจำนวนคู่ และมอง 1 ว่าเป็น Placeholder หรือที่ซึ่งแทน
ความเป็นจำนวนคี่ ซึ่งการมองลักษณะนี้เรียกว่าการมองจำนวนในเชิงพีชคณิต

5) การแก้ปัญหาคำประโยคที่มีบางจำนวนหายไป (Solving Missing Number Sentences)

(1) ประโยคที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวน (Missing Number Sentences Involving One Unknown Number)

(2) ประโยคที่มีจำนวนหายไปสองจำนวน (Missing Number Sentences Involving Two Unknown Number)

(3) ประโยคที่มีจำนวนหายไปเป็นตัวอักษร (Missing Number Sentences Included Literal Symbols)

Jacob และคนอื่น ๆ (2007) ได้ศึกษาวิจัยโดยมุ่งเน้นไปที่แนวคิดทางพีชคณิตที่มีพื้นฐานการศึกษาเกี่ยวกับการให้เหตุผลของนักเรียนระดับประถมศึกษา จุดมุ่งเน้นนี้เกิดจากปัจจัยที่ใช้ประกอบการพิจารณาเป้าหมายที่จะทำให้ครูเข้าใจแนวคิดทางพีชคณิต และความคิดความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับพีชคณิตได้ดีขึ้น ซึ่งมีปัจจัยหลายประการดังนี้ คือ ประการแรกเนื่องจากเลขคณิตเป็นสาระหลักในหลักสูตรปัจจุบัน การเปลี่ยนแปลงโดยการขยายแนวคิดทางเลขคณิตให้ครอบคลุมถึงแนวคิดทางพีชคณิต จะต้องให้ครูมีส่วนร่วมในการออกความคิดเห็นด้วย ประการที่สองต้องการให้ครูมองว่าการให้เหตุผลทางพีชคณิตมีแทรกอยู่ตลอดหลักสูตรคณิตศาสตร์มากกว่าที่จะมองว่าเป็นหัวข้อหนึ่งที่ต้องแยกออกมาสอนต่างหาก ประการที่สามต้องการสนับสนุนครูให้สังเกตวิธีการคิดของนักเรียน ประการสุดท้ายมุ่งเน้นไปที่พีชคณิตในฐานะที่เป็นรูปทั่วไปของเลขคณิต และการศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ สรุปได้ว่ากุญแจสำคัญของ การปฏิรูปการเรียนรู้พีชคณิต คือ การบูรณาการการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในทุกระดับชั้น ทุกเนื้อหา กล่าวคือ นำเอาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเข้าไปสอดแทรกในหลักสูตรคณิตศาสตร์ทั้งหมด ครูต้องรู้จักและพัฒนาพื้นฐานของการให้เหตุผลทางพีชคณิตในรูปแบบต่าง ๆ

Carpenter, Levi และ Farnsworth (2000) กล่าวว่า กิจกรรมเพื่อสร้างพื้นฐานสำหรับเรียนรู้พีชคณิตในระดับประถมศึกษา ควรจัดกิจกรรมดังนี้คือ

1) ถามคำถามที่เปิดโอกาสให้นักเรียนเข้าใจความสำคัญของความคิดเชิงคณิตศาสตร์ เช่น การตอบของนักเรียนในประโยคจำนวนเปิด $9 + 6 = \square + 8$ ได้บอกเกี่ยวกับความเข้าใจความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ โดยการตรวจสอบเหตุผลในการตอบของนักเรียนจากการถามว่าทำไมจึงตอบเช่นนั้น

2) จัดให้นักเรียนมีโอกาสนในการอภิปรายและวิเคราะห์ความแตกต่างของความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ เช่น ความคิดรวบยอดที่แตกต่างของเครื่องหมายเท่ากับที่แสดงให้เห็น

จากวิธีการแก้ปัญหาของนักเรียนในประโยคจำนวนเปิด $9 + 6 = \square + 8$ สามารถจัดให้เป็นส่วนสำคัญสำหรับผลของการอภิปราย

3) จัดให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้สมการที่ช่วยให้เข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน ไม่ใช่เครื่องหมายที่ให้คำตอบหาคำตอบ เช่น $\square = 8+9$, $8 + 6 = 6+\square$, $9 + 6 = \square + 8$ รูปแบบที่หลากหลายของประโยคจำนวนเหล่านี้เป็นประโยคจำนวนที่คำตอบไม่ได้อยู่ตามหลังเครื่องหมายเท่ากับ

4) จัดให้นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับประโยคถูกหรือผิดที่แสดงข้อคิดเห็นขัดแย้งในความคิดรวบยอดที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ เช่น $8 = 5 + 3$, $9 = 9$, $7 - 4 = 7 - 4$

5) จัดปัญหาที่สนับสนุนให้นักเรียนสร้างรูปทั่วไปเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐานของจำนวน เช่น เมื่อกำหนดปัญหาให้นักเรียนหาคำตอบแล้วตั้งคำถามถามนักเรียนว่า รู้ได้อย่างไรว่าคำตอบนั้นถูกต้อง โดยถามคำถามลักษณะนี้บ่อย ๆ จะส่งผลให้นักเรียนเริ่มต้นสรุปในรูปทั่วไปได้ เช่น “เมื่อลบจำนวนออกจากตัวมันเองจะได้ศูนย์” เมื่อนักเรียนกล่าวถึงรูปทั่วไปในลักษณะเช่นนี้ให้ถามต่อไปว่า “มันเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนหรือไม่” ตัวอย่างประโยคถูกหรือผิด เช่น $97 - 97 = 0$, $48 \times 0 = 48$, $37 + 58 = 58 + 37$, $56 \div 0 = 0$, หรือจำนวนอะไรที่นำมาใส่ใน \square แล้วทำให้ประโยคนี้เป็นจริง $\square + 74 = 74$ หรือ $35 \times \square = 8 \times 35$

6) ให้นักเรียนตัดสินใจสรุปในรูปทั่วไป การตัดสินใจสรุปในรูปทั่วไปต้องการมากกว่าการให้ตัวอย่างมาก ๆ เช่น $8 \times 5 = 5 \times 8$ โดยคาดหวังให้นักเรียนตัดสินใจตามข้อยืนยันที่พวกเขาค้นพบ จะสามารถทำให้นักเรียนได้รับทักษะในการแสดงข้อโต้แย้งและข้อพิสูจน์ในเชิงคณิตศาสตร์ โดยใช้คำถามว่า จะเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนหรือไม่ หรือ รู้ได้อย่างไรว่าเป็นจริงสำหรับทุกจำนวน ถามลักษณะนี้ซ้ำ ๆ เพื่อสนับสนุนนักเรียนให้ยอมรับว่า จำเป็นต้องใช้ข้อยืนยันที่ค้นพบมาตัดสินใจในการสรุปให้อยู่ในรูปทั่วไป

สรุปได้ว่าการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาในงานวิจัยนี้หมายถึงความสามารถของนักเรียนในการให้เหตุผลโดยการอธิบาย หรือการแสดงหลักฐานในการให้ข้อสรุป โดยการสร้างข้อสรุปในรูปข้อความคาดการณ์หรือรูปทั่วไป จากสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการเท่ากันและสมบัติต่าง ๆ ของจำนวน เช่น สมบัติการสลับที่ของการบวก สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก สมบัติการสลับที่ของการคูณ สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ สมบัติการแจกแจง สมบัติของศูนย์ และสมบัติของหนึ่ง

4.5 การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546) ได้กำหนดหลักการวัดผลประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มีหลักการที่สำคัญคือ การวัดผลประเมินผลต้องทำต่อเนื่องควบคู่ไปกับการจัดกิจกรรมเรียนรู้ ครูควรใช้กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการเรียนรู้ โดยอาจใช้คำถามเพื่อตรวจสอบ และส่งเสริมความรู้ความเข้าใจด้านเนื้อหา ส่งเสริมให้เกิดทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ดังตัวอย่างคำถามต่อไปนี้ นักเรียนแก้ปัญหานี้ได้อย่างไร ใครมีวิธีการนอกเหนือไปจากนี้บ้าง นักเรียนคิดอย่างไรกับวิธีการที่เพื่อนเสนอ การกระตุ้นด้วยคำถามที่เน้นการคิดจะทำให้เกิดการปฏิสัมพันธ์ระหว่างนักเรียนด้วยกันเอง และระหว่างนักเรียนกับครู นักเรียนได้มีโอกาสแสดงความคิดเห็น นอกจากนี้ครูยังสามารถใช้คำตอบของนักเรียนเป็นข้อมูลเพื่อตรวจสอบความรู้ความเข้าใจ และพัฒนาการด้านทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนอีกด้วย ในการประเมินผลทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ในด้านการให้เหตุผลสามารถทำได้โดยใช้เครื่องมือและวิธีการที่เหมาะสมอย่างหลากหลาย เช่น การมอบหมายงานให้ทำการบ้าน การเขียนแบบบันทึกทางคณิตศาสตร์ (math note) การทดสอบ การสังเกต การสัมภาษณ์ รวมทั้งการให้นักเรียนได้ประเมินตนเอง โดยประเมินได้จากความสามารถในการแสดงออกตามขั้นตอนของทักษะการให้เหตุผล ดังนี้

- รวบรวมความรู้ที่เกี่ยวข้องในกระบวนการแก้ปัญหา
- เลือกใช้ความรู้เพื่อจัดลำดับขั้นตอนของการให้เหตุผลและลงข้อสรุป
- ตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผล

กรมวิชาการ (2546) ได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนการทำข้อสอบแบบอัตนัย ทักษะ หรือกระบวนการให้เหตุผล ดังตารางที่ 3

ศูนย์พัฒนาระบบบริหาร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 3 เกณฑ์การให้คะแนนผลการทำข้อสอบแบบอัตนัย ทักษะหรือกระบวนการให้เหตุผล
ของกรมวิชาการ

ระดับคะแนน / ความหมาย	ผลการทำข้อสอบแบบอัตนัย	ความสามารถในการให้เหตุผล
4 / ดีมาก	การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ คำตอบถูกต้องครบถ้วน	มีการอ้างอิง เสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจอย่างสมเหตุสมผล
3 / ดี	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนนัก แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบถูกต้องครบถ้วน	มีการอ้างอิงที่ถูกต้องบางส่วน และเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ
2 / พอใช้	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน หรือไม่แสดงวิธีทำ คำตอบถูกต้องครบถ้วน หรือ การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ แต่คำตอบไม่ถูกต้อง ขาดการตรวจสอบ	เสนอแนวคิดไม่สมเหตุสมผลในการประกอบการตัดสินใจ
1 / ต้องปรับปรุง	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงวิธีทำและคำตอบที่ได้ไม่ถูกต้อง แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง	มีความพยายามเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ
0 / ไม่พยายาม	ทำได้ไม่ถึงเกณฑ์	ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ

จากหลักการวัดผลประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และเกณฑ์การให้คะแนนในด้านทักษะ หรือกระบวนการให้เหตุผล สรุปได้ว่าการวัดและประเมินผลความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ควรประกอบด้วยกิจกรรมที่ใช้คำถามเพื่อตรวจสอบ นอกจากนี้ควรมีเครื่องมือและวิธีการวัดที่หลากหลาย เช่น การสังเกต การเขียนแบบบันทึกทางคณิตศาสตร์ การทำการบ้าน การทดสอบ การสัมภาษณ์ รวมทั้งการให้นักเรียนได้ประเมินตนเอง และการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลควรมีเกณฑ์ตามระดับคะแนน เริ่มตั้งแต่ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ เพิ่มระดับคะแนนขึ้นไปจนถึงมีการอ้างอิงเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจอย่างสมเหตุสมผล

5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

5.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์

Carpenter, Levi, Franke, และ Zeringue (2005) ศึกษาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนมาแล้ว 8 ปี ในรายงานวิจัยครั้งนี้ พวกเขารายงานผลการสนับสนุนส่งเสริมแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ที่ทำกับนักเรียน โดยแสดงบทสนทนาระหว่างครูที่ได้รับการอบรมเรื่องการสอนให้คิดเชิงสัมพันธ์มาแล้วกับนักเรียนเกรด 3 จำนวนสองคน โดยเน้นไปที่สมบัติการแจกแจงสองตัวอย่าง ตัวอย่างแรกอธิบายประกอบถึงวิธีที่ครูต่อยอดความคิดของนักเรียนตามลำดับของประโยคจำนวน เพื่อช่วยนักเรียนในการเริ่มต้นโยงความสัมพันธ์เกี่ยวกับข้อเท็จจริงของจำนวนในเรื่องการคูณ โดยใช้สมบัติการแจกแจง ตัวอย่างที่สองแสดงให้เห็นนักเรียนอีกคนหนึ่งที่มีความสามารถในการใช้สมบัติการแจกแจงและการขยายความรู้ของเขา งานวิจัยนี้ชี้ให้เห็นว่าครูสามารถพัฒนาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนได้ โดยการใช้ลักษณะคำถามและลำดับของปัญหาที่ใช้ถามอย่างเหมาะสม

Stephens (2006) ศึกษาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับกลุ่มตัวอย่างเกรด 5-7 จากสองโรงเรียนในประเทศออสเตรเลียจำนวน 301 คน โดยให้นักเรียนตอบแบบสอบถามซึ่งเป็นประโยคเปิดของจำนวน (Open or Missing Number Sentences) ในสามลักษณะที่แตกต่างกัน ลักษณะของประโยคเปิดในกลุ่มแรกจะง่ายต่อการแก้ปัญหาด้วยการคิดคำนวณ (Computational Thinking) ลักษณะของประโยคเปิดในกลุ่มที่สามจะคิดคำนวณยากขึ้น แต่จะง่ายหากนักเรียนแก้ปัญหาด้วยการใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ ผลปรากฏว่านักเรียนส่วนใหญ่หาคำตอบโดยการคิดคำนวณ และมีนักเรียนจำนวนน้อยที่ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ ผลอีกประการหนึ่งคือ จำนวนของนักเรียนที่ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ในเกรด 7 มีจำนวนมากกว่าในเกรด 6 และ เกรด 5 ตามลำดับ จากการศึกษาครั้งนี้ Stephens ได้วิเคราะห์ความสม่ำเสมอในการคิดโดยจำแนกนักเรียนออกเป็นสามประเภทได้แก่ ประเภทที่ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ตลอดทั้งสามลักษณะของคำถาม (SR-Stable Relational) ประเภทที่คิดคำนวณตลอดทั้งสามลักษณะของคำถาม (SA-Stable Arithmetical) และประเภทที่ไม่ได้ใช้การคิดแบบใดแบบหนึ่งเพียงแบบเดียว (NS-Not Stable) ผลในส่วนนี้พบว่า การสอนคณิตศาสตร์ของครูที่แตกต่างกันในโรงเรียนทั้งสองโรงเรียน ส่งผลต่อวิธีการเลือกที่จะใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์หรือใช้การคิดคำนวณของนักเรียน

Stephens (2006) ศึกษาความตระหนักเกี่ยวกับการเท่ากันและแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักศึกษาคูจากมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง จำนวน 30 คน ในประเด็นของความพร้อม

ในการที่จะส่งเสริมการคิดของนักเรียนเรื่องการเท่ากัน และแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ ผู้วิจัยรวบรวมผลจากแบบสอบถามและการสัมภาษณ์ ผลปรากฏว่านักศึกษาครุมีความตระหนักเรื่องแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์โดยสามารถเข้าใจลักษณะของงาน (Task) ที่สามารถนำไปส่งเสริมแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ให้แก่นักเรียน และระบุได้ว่าผลการคิดของนักเรียนที่แสดงออกโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์เป็นอย่างไร อย่างไรก็ตามยังพบว่า นักศึกษาครุบางคนมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ

Hunter (2007) ศึกษาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับกลุ่มตัวอย่างเกรด 5-8 ในนิวซีแลนด์ จำนวน 361 คน โดยปรับใช้แบบสอบถามของ Stephens (2006) นักเรียนกลุ่มตัวอย่างได้รับการพัฒนาให้คิดและคำนวณได้อย่างยืดหยุ่น กับครูในโครงการ New Zealand Numeracy Project ดังนั้นจึงเป็นที่คาดเดาว่านักเรียนส่วนใหญ่จะใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ได้ดี แต่ผลการวิเคราะห์ข้อมูลไม่เป็นเช่นนั้น โดยพบว่านักเรียนส่วนใหญ่ (46%) ใช้การคิดคำนวณอย่างเดียว 28% ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์อย่างเดียว และอีก 26% ใช้การคิดทั้งสองแบบหรือแบบผสมผสานกัน Hunter รายงานว่าความผิดพลาดในการคิดของนักเรียนส่วนหนึ่งว่ามาจากการเข้าใจความหมายของเครื่องหมายเท่ากับอย่างคลาดเคลื่อน โดยยึดติดว่าเครื่องหมายเท่ากับเป็นสัญลักษณ์ของการดำเนินการและต้องใช้การคิดคำนวณหาคำตอบทุกครั้ง

Hunter และ Anthony (2008) ศึกษาการพัฒนาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ในบรรยากาศด้วยคำถามกับกลุ่มตัวอย่าง 25 คน เป็นนักเรียนอายุ 9-11 ปี ในโรงเรียนประถมศึกษาประเทศนิวซีแลนด์ งานวิจัยนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง โดยจัดการเรียนการสอนเน้นกลวิธีแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ เก็บข้อมูลโดยการสัมภาษณ์ก่อนและหลังเรียน ใช้เวลาในการทดลองสอน 3 เดือน ผลการวิจัยพบว่า จำนวนนักเรียนที่สามารถให้เหตุผลเชิงพีชคณิตมีจำนวนเพิ่มมากขึ้นก่อนการทดลอง โดยการใช้กลวิธีแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ร่วมกับการช่วยเหลือจากครู และมีบรรยากาศในห้องเรียนด้วยคำถาม ทุกคนมีส่วนร่วมในการฟัง การคิดและการโต้แย้งด้วยเหตุผล

5.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

Brownwyn (2000) งานวิจัยนี้ได้ศึกษาตามแนวคิดของบรูเนอร์ในการฟื้นฟูความรู้ทางคณิตศาสตร์ด้วยการเสริมต่อการเรียนรู้โดยการสอนแบบตัวต่อตัว วิธีการศึกษาโดยสังเกตการมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างครูสองคนกับนักเรียนอายุ 6-7 ปี ในชั้นเรียนผ่านวิดีโอทัศน์ แล้วนำมาอภิปรายร่วมกัน ผลจากการสังเกตแสดงให้เห็นว่าการเสริมต่อการเรียนรู้ในลักษณะการสอนแบบตัวต่อตัวเป็นลักษณะการสอนที่เหมาะสมแก่การฟื้นฟูความรู้ทางคณิตศาสตร์ การเรียนรู้ถึงเทคนิคการสอนเพื่อฟื้นฟูความรู้ทางคณิตศาสตร์โดยวิธีการบันทึกภาพวิดีโอทัศน์นั้น เป็นวิธีที่ดีเยี่ยม

เพราะครูผู้สอนจะได้เห็นภาพขณะที่ตัวเองกำลังสอนโดยใช้เทคนิคที่พัฒนาขึ้นมา ภาพวิถีทัศน์ที่บันทึกไว้จะใช้ในการประเมินกิจกรรมการสอน วิธีในการสอน และพัฒนาการของนักเรียนในด้านคณิตศาสตร์ ครูทั้งสองคนนี้ใช้การเสริมต่อการเรียนรู้ที่คล้ายกัน คือใช้วิธีการสอนแบบเสริมต่อการเรียนรู้ในการทำให้นักเรียนแสดงออกในสิ่งที่เขาคิด และครูต้องใช้เวลาสำหรับให้นักเรียนคิด เมื่อนักเรียนต้องพยายามหาคำตอบที่ทำได้ยาก โดยการลดอุปสรรคของการแก้ปัญหาและ ช่วยให้นักเรียนมีความตั้งใจกับปัญหาจนสำเร็จในที่สุด ครูทั้งสองค่อย ๆ ปรับงานที่ละน้อยเพื่อให้นักเรียนแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น โดยสังเกตจากการตอบสนองของนักเรียน ซึ่งทำให้นักเรียนตัดปัญหาต่าง ๆ ออกไปได้ สิ่งสำคัญที่เด่นชัดของครูทั้งสองคน คือ การสอนแบบตัวต่อตัว ทำให้สามารถดูแลและกระตุ้นเด็กได้เป็นอย่างดี แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้มีผลอย่างมากกับครูและนักเรียน ครูที่มีลักษณะการสอนที่เสริมต่อการเรียนรู้จะเป็นการส่งเสริมคุณภาพของครูในด้าน การมีทักษะในการสังเกต และการปฏิบัติตนของครู จะทำให้ครูสามารถวางรูปแบบการเรียนรู้ของนักเรียนได้ ครูสามารถที่จะสร้างบรรยากาศในการเรียนเพื่อส่งเสริมการมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีระหว่างครูและนักเรียน ถ้านักเรียนไม่มีการตอบสนอง ครูก็สามารถกระตุ้นและส่งเสริมให้เกิดการเรียนรู้ได้

5.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา

Arens และ Meyer (2000) ได้ศึกษาวิจัยเพื่อตอบสนองต่อความต้องการที่จะพัฒนาแนวคิดเกี่ยวกับพีชคณิตใหม่ ๆ ให้แก่ครูประจำการ โดยการเริ่มชุดการพัฒนาวิชาชีพด้วยจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนาเกี่ยวกับการคิดเชิงพีชคณิตให้กับครูฝึกสอน ผู้ประสานงานด้านการเรียนการสอน และบุคลากรอื่น ๆ ในโรงเรียนประถมศึกษา รายงานการวิจัยนี้บรรยายชุดการคิดพีชคณิตของ McREL (Mid-Continent Research For Education and Learning) ซึ่งประกอบไปด้วย การคิดเชิงพีชคณิตอยู่ในรูปของการใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเรื่องแบบรูปและความสัมพันธ์ การเลือกและการจัดประเภท การสร้างกฎเกณฑ์ และการค้นหากลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการ นอกจากนี้มีการอภิปรายผลของการติดตามการนำชุดการคิดพีชคณิตของ McREL ไปใช้ 2 ระยะ

Carpenter และ Levi (2000) ได้ศึกษาการพัฒนาการเกิดความคิดรวบยอดของการคิดแบบมีเหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับชั้นประถมศึกษา เพื่อช่วยให้นักเรียนมีความรู้ในเรื่องการสรุปจากนามธรรมให้อยู่ในรูปทั่วไป การเป็นตัวแทนและการดำเนินการในด้านความคิดเห็นเชิงคณิตศาสตร์ โดยใช้วิธีการออกแบบการเรียนการสอนตามรูปแบบ CGI (Cognitive Guided Instruction) เป้าหมายคือเพื่อเริ่มต้นเข้าใจวิธีให้ความช่วยเหลือนักเรียนในการสะท้อนผลวิธีการคิดต่าง ๆ เพื่อที่นักเรียนจะได้นำข้อมูลที่สะท้อนนั้นไปสรุปในรูปทั่วไป หรือสร้างในรูปสัญลักษณ์

ข้อสรุปก็คือ โดยภาพรวมปรากฏว่านักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาสามารถมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็น การเป็นตัวแทน และการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ต่าง ๆ ได้

Kaput และ Blanton (2000) ศึกษากระบวนการบูรณาการการพัฒนาการคิด การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในเขตการศึกษาที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการศึกษาต่ำ ใช้เวลาในการศึกษา 3 ปี โดยในปี 1997-1998 ศึกษากับครูผู้สอนระดับ 5 จำนวน 2 คน และศึกษากับครูผู้สอนระดับ 6 จำนวน 1 คน ในปี 1998-1999 ศึกษากับครูผู้สอนระดับ 2-5 จำนวน 20 คน จากโรงเรียนประถมศึกษา 8 โรง มีผลจากการศึกษา ดังนี้

- 1) การพัฒนาครูทั้งที่เป็นครูก่อนประจำการและครูประจำการเกี่ยวกับการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต
- 2) กระบวนการของการสอนพีชคณิตในระดับประถมศึกษาโดยใช้สื่อในการสอน
- 3) วิวัฒนาการของการปฏิบัติในชั้นเรียนและวัฒนธรรมในชั้นเรียนต่อรูปแบบต่าง ๆ ที่สนับสนุนการพัฒนาการคิดให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน
- 4) การเรียนรู้ของผู้เรียนที่ได้จากการวัดความก้าวหน้าทั้งมลรัฐ โดยทดสอบในระดับ 4 และระดับ 8 และมีการวัดเพิ่มเติม
- 5) การออกแบบประสบการณ์ที่เหมาะสมสำหรับการพัฒนาครูก่อนประจำการ
- 6) การสนับสนุนสื่อที่ดีที่สุดสำหรับใช้กับครูก่อนประจำการและครูประจำการ
- 7) กระบวนการนำนวัตกรรมไปใช้แพร่ไปทั่วเขตการศึกษากับโรงเรียนประถมศึกษา 30 โรงเรียน
- 8) การเปรียบเทียบกับผลการประเมินนักเรียนที่หลากหลายโดยรัฐจากเขตการศึกษาที่คล้ายคลึงกัน

Kaput (2000) ได้ศึกษาวิจัยที่แสดงว่าหัวใจของการปฏิรูปพีชคณิตก็คือการบูรณาการ การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในทุกระดับชั้นและทุกหัวข้อ มีการแสดงความแตกต่างระหว่างพีชคณิตในโรงเรียนกับพีชคณิตที่เชื่อมโยงความรู้และทักษะต่าง ๆ ท้ายสุดมีการเสนอแนะวิธีทำงานที่ชุมชนด้านการศึกษาจะพาไปสู่การเป็นพีชคณิตที่แท้จริงสำหรับทุกคน ในภาคผนวกมีภาพประกอบเชิงรูปธรรม จากชั้นเรียนเกี่ยวกับองค์ประกอบต่าง ๆ ของพีชคณิตในระดับประถมศึกษา

Koehler (2004) ได้ทำการวิจัย 1 ปี เป็นการจัดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตโดยคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ในเลขคณิต และการคิดสร้างสรรค์ในการเชื่อมโยงระหว่างเลขคณิตกับพีชคณิต การวิจัยนี้ใช้กลยุทธ์แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ช่วยในการพัฒนา

ทักษะเลขคณิตโดยเน้นการอภิปรายในการเรียนเลขคณิต การสอนโดยใช้ชุดคำถามจริงหรือเท็จ และประโยคเปิดของจำนวน เพื่อสนับสนุนความสัมพันธ์ของจำนวนและใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ มีกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนจำนวน 25 คน จากนักเรียนเกรด 2 และเกรด 3 และเลือกนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำสุด 6 คน มาสัมภาษณ์ และทำแบบทดสอบมาตรฐาน ซึ่งพบว่านักเรียน 6 คนนี้ ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์เพียงเล็กน้อย และคะแนนมาตรฐานที่ได้จากการวัดก็ต่ำมากเมื่อเทียบกับนักเรียนในห้อง สมมุติฐานการวิจัยยืนยันว่า นักเรียนมีความก้าวหน้าในการใช้กลยุทธ์แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ในการเรียนเรื่องข้อเท็จจริงของการคูณ การวิจัยนี้แสดงให้เห็นว่า ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม นักเรียนสามารถมีแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ได้ และครูสามารถสนับสนุนการเรียนเลขคณิตด้วยความเข้าใจได้

Cai, Lew, Morris, Moyer, Ng, และ Schmittau (2005) ได้ศึกษาวิเคราะห์ความคิดรวบยอดและตัวแทนทางพีชคณิตที่นำเข้ามา และพัฒนาในหลักสูตรประถมศึกษาในประเทศจีน เกาหลีใต้ สิงคโปร์ รัสเซีย และสหรัฐอเมริกา ซึ่งในหลักสูตรทั้ง 5 หลักสูตรนี้ มีเป้าหมายหลักสำหรับการเรียนรู้ความคิดรวบยอดทางพีชคณิตก็คือ เพื่อให้ นักเรียนมีความเข้าใจอย่างลึกซึ้งในความสัมพันธ์เชิงปริมาณ แต่จุดเน้นและแนวคิดในการช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจดีขึ้นในเรื่องความสัมพันธ์เชิงปริมาณนั้น มีความแตกต่างกันมาก การวิเคราะห์ 5 หลักสูตรนี้ มุ่งประเด็นที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนาการคิดพีชคณิตในระดับขั้นต้น ๆ 4 ประเด็นคือ

- 1) ขอบเขตใดที่หลักสูตรคาดหวังให้นักเรียนในระดับขั้นต้น ๆ มีการคิดเชิงพีชคณิต
- 2) ระดับที่เป็นทางการใดที่คาดหวังในนักเรียนระดับขั้นต้น ๆ
- 3) จะช่วยนักเรียนให้เปลี่ยนผ่านจากการคิดเลขคณิตไปสู่การคิดเชิงพีชคณิตให้ราบรื่นได้อย่างไร
- 4) การประยุกต์ใช้ตามสภาพจริงมีความจำเป็นสำหรับนักเรียนระดับขั้นต้น ๆ

หรือไม่

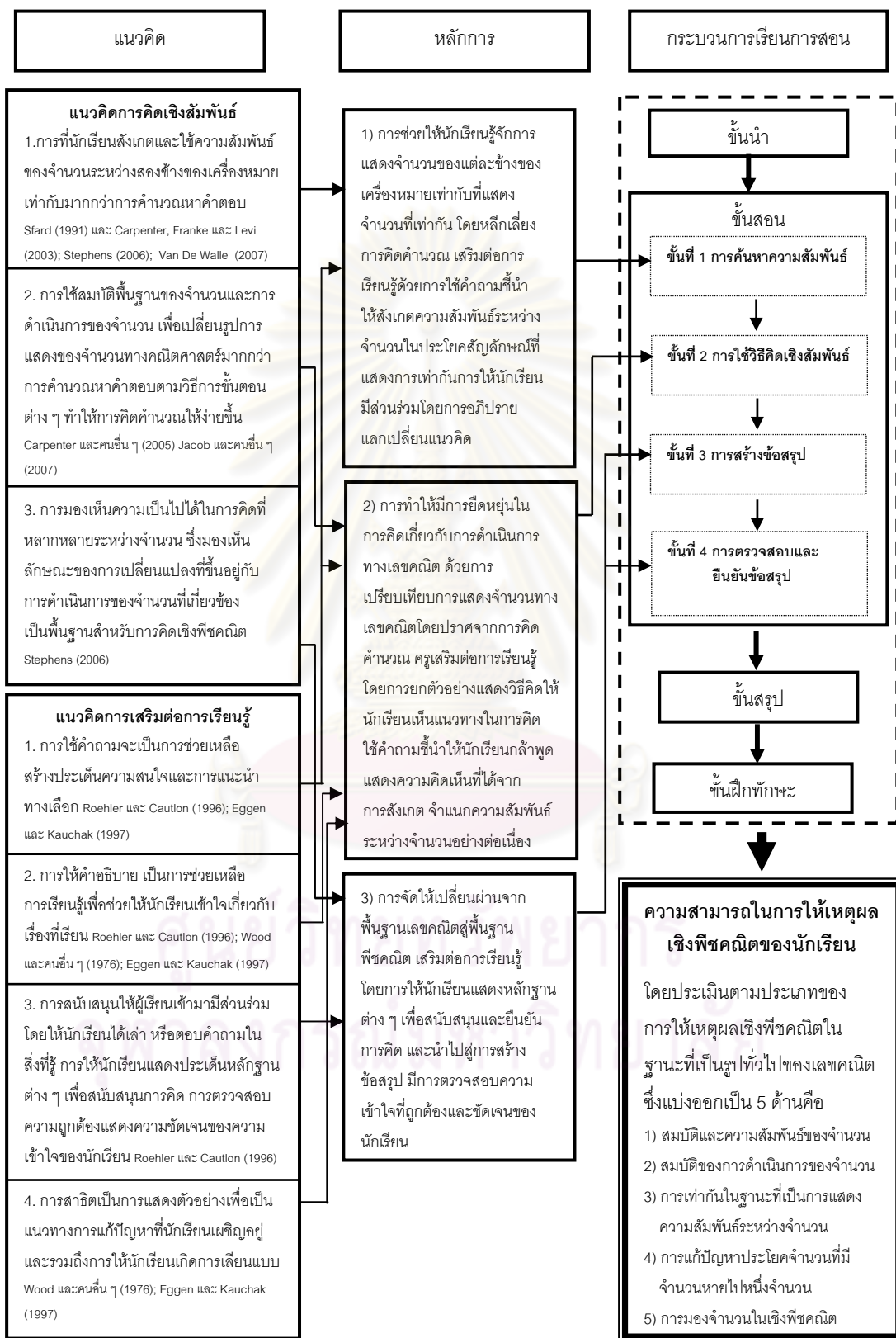
ผลการศึกษาพบว่า หลักสูตรของประเทศจีนเน้นให้นักเรียนได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการคิดเชิงเลขคณิตกับวิธีคิดเชิงพีชคณิต ในการแสดงความสัมพันธ์เชิงปริมาณ ประเทศเกาหลีใต้เน้นกิจกรรมการดำเนินการด้านรูปธรรมอย่างหลากหลายเพื่อใช้ลดช่องว่างด้านความคิดความเข้าใจระหว่างพีชคณิตกับเลขคณิต ประเทศสิงคโปร์ใช้สมการรูปภาพแทนความสัมพันธ์เชิงปริมาณเพื่อช่วยในการพัฒนาความคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนมีความหมาย ประเทศรัสเซียมุ่งเน้นการพัฒนาความเข้าใจเชิงพีชคณิตโดยการจำลองการแสดงจำนวนด้วย

กิจกรรมทางคณิตศาสตร์และความสัมพันธ์ด้านคณิตศาสตร์ ส่วนประเทศสหรัฐอเมริกามุ่งเน้นให้นักเรียนศึกษาความสัมพันธ์เชิงปริมาณโดยวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทต่าง ๆ

Carraher และคนอื่นๆ (2006) นำเสนอผลบางส่วนจากการศึกษาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน 8-10 ปี ในช่วงการทดลองในชั้นเรียนเป็นเวลา 2 ปีครึ่ง โดยเน้นแนวคิดด้านการปฏิบัติในเรื่องการบวก การลบ การคูณ และการหาร แนวคิดด้านการเปลี่ยนผ่านระหว่างเลขคณิตและพีชคณิต มีการเสนอแนะว่าเลขคณิตมีลักษณะเชิงพีชคณิตแฝงอยู่ เช่น ที่เกี่ยวข้องกับรูปทั่วไปและโครงสร้างทั่วไปที่สามารถถูกทดแทนให้เห็นได้อย่างชัดเจนในสัญลักษณ์เชิงพีชคณิต และเชื่อว่าความคิดรวบยอดและสัญลักษณ์ทางพีชคณิตจำเป็นต้องพิจารณาเสมือนเป็นพื้นฐานของคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา

Jacobs และคนอื่นๆ (2007) ได้ทำการวิจัยเชิงทดลองที่ใช้ระยะเวลาดำเนินการหนึ่งปีแสดงให้เห็นถึงผลทางบวกของโครงการพัฒนาวิชาชีพครู ซึ่งการวิจัยครั้งนี้ได้ทำการวิจัยกับโรงเรียนประถมศึกษา 19 แห่งในตัวเมือง โดยมีครู 180 คน และนักเรียน 3,735 คน จากเขตการศึกษาที่มีผลการประเมินต่ำสุดเขตหนึ่งของรัฐแคลิฟอร์เนีย ถึงการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในฐานะที่เป็นรูปทั่วไปของเลขคณิต และการศึกษาเกี่ยวกับแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ถูกนำไปใช้เป็นตัวชี้วัดหลักสำหรับการอบรมครูที่กำลังสอนในเกรด 1-5 จากการศึกษาครั้งนี้ พบว่านักเรียนที่ถูกสอนโดยครูที่เข้าร่วมโครงการมีวิธีจัดการกับปัญหาที่หลากหลายกว่า โดยเฉพาะอย่างยิ่งกลยุทธ์ที่สะท้อนให้เห็นถึงการรู้จักใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ มากกว่านักเรียนที่ถูกสอนโดยครูที่ไม่ได้เข้าร่วมโครงการเลย จากการสัมภาษณ์นักเรียนในชั้นเรียนที่ร่วมในโครงการนี้ มีผลออกมาที่บ่งชี้ไว้ชัดเจนว่า นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์เท่ากับได้ดีกว่า และนักเรียนยังใช้กลยุทธ์ที่สะท้อนให้เห็นถึงการรู้จักใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์มากกว่านักเรียนที่ถูกสอนโดยครูที่ไม่ได้เข้าร่วมโครงการ

กรอบแนวคิดในการวิจัย



แผนภาพที่ 2 กรอบแนวคิดในการวิจัย

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยและพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา แบ่งการดำเนินงานออกเป็น 3 ระยะ คือ ระยะที่ 1 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ระยะที่ 2 การเตรียมการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน และระยะที่ 3 การทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ระยะที่ 1 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน ประกอบด้วย

1. ศึกษาหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา
2. ศึกษาแนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอนตามแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้และการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา
3. พัฒนากระบวนการเรียนการสอน
4. ตรวจสอบคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน
5. แก้ไขปรับปรุงกระบวนการเรียนการสอน

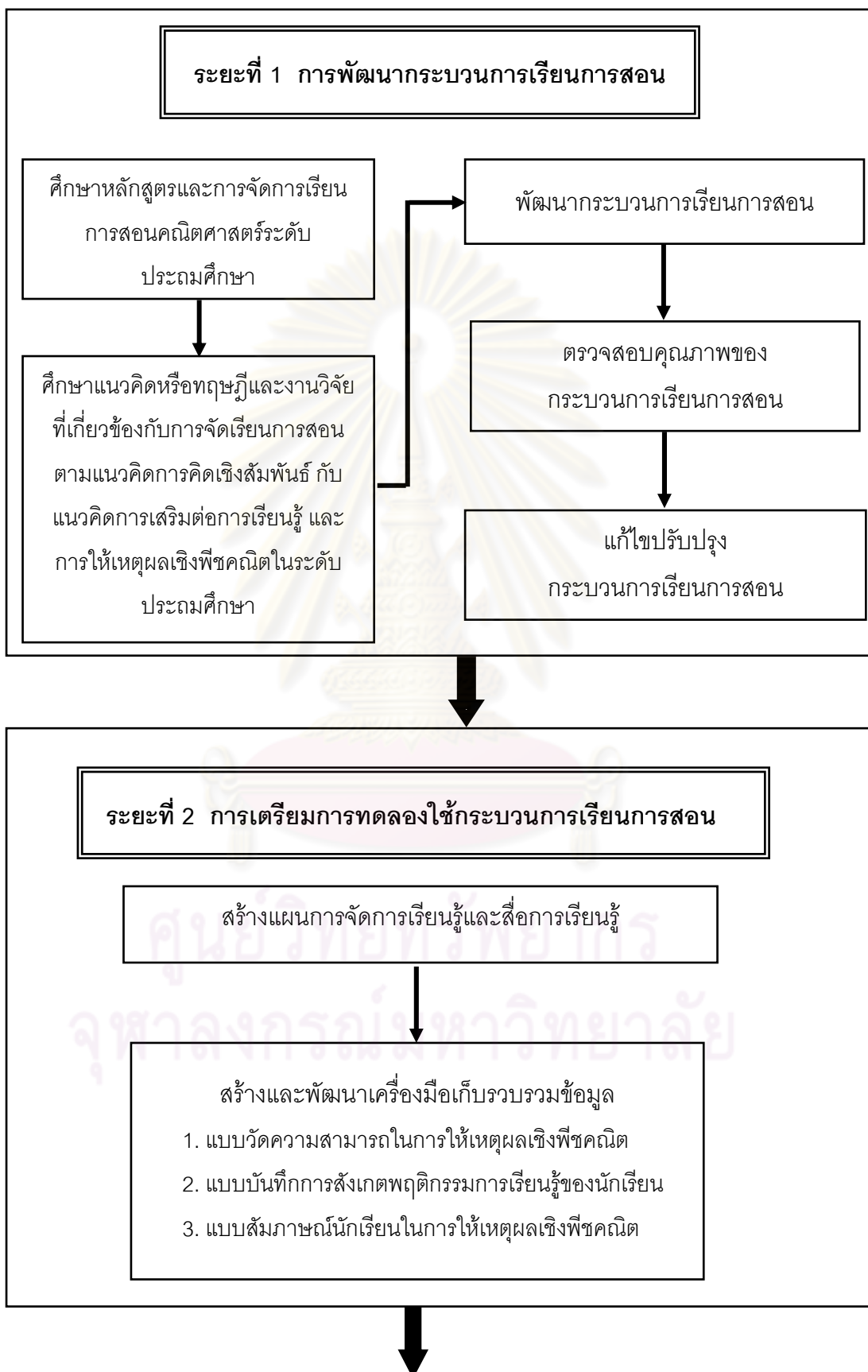
ระยะที่ 2 การเตรียมการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

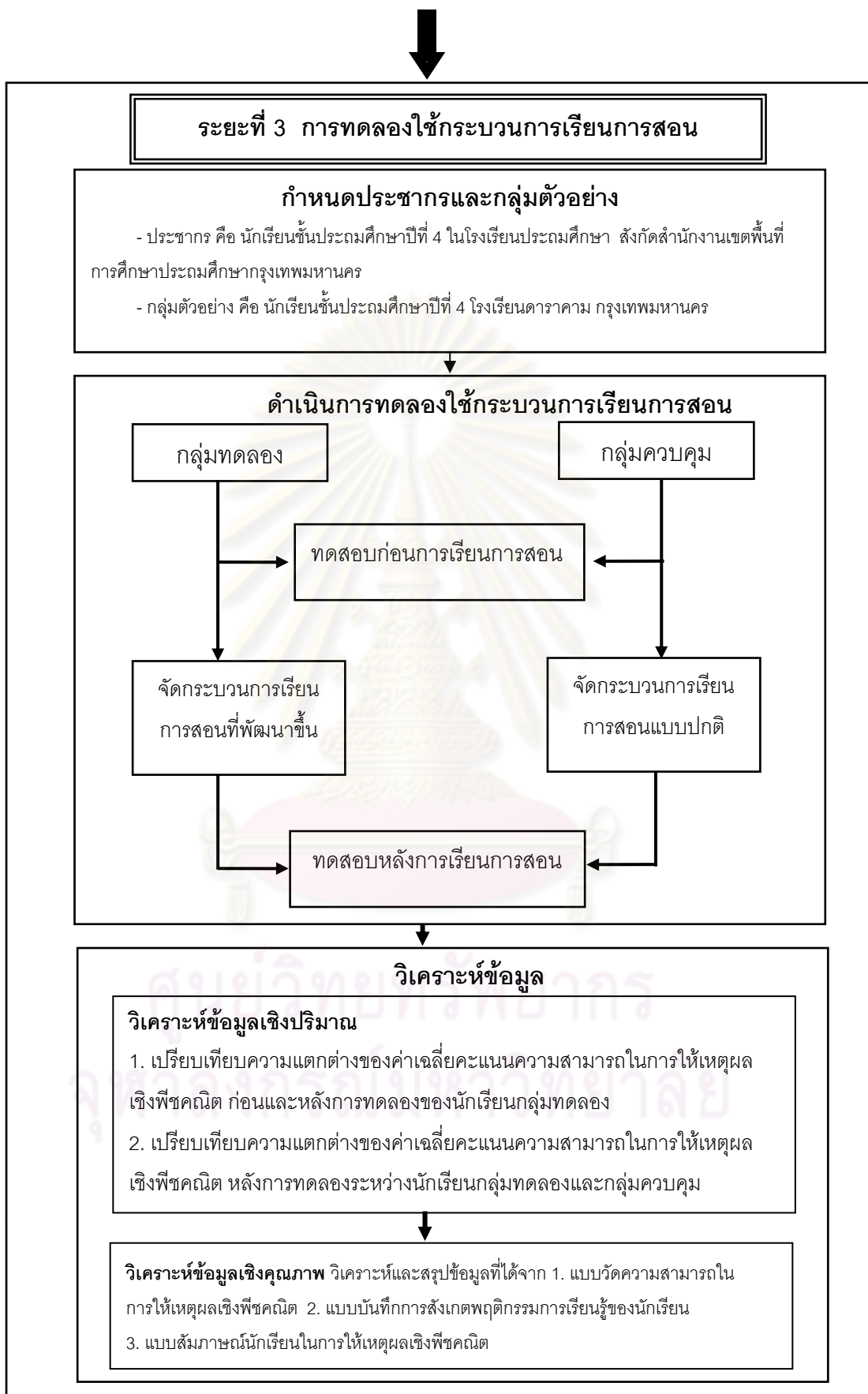
1. สร้างแผนการจัดการเรียนรู้และสื่อการเรียนรู้
2. สร้างและพัฒนาเครื่องมือเก็บรวบรวมข้อมูล

ระยะที่ 3 การทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

1. กำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
2. ดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน
3. วิเคราะห์ข้อมูล

โดยสรุประยะการดำเนินการวิจัยดังกล่าวข้างต้นตามแผนภาพที่ 3 ดังนี้





แผนภาพที่ 3 สรุประยะการดำเนินการวิจัย

การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิด การเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา มีลำดับ ในการพัฒนาดังนี้

1. ศึกษาหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา

ผู้วิจัยศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยพิจารณาศึกษามาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระ การเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพื่อนำมากำหนดเป็นแนวทางในการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน โดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ให้สอดคล้องกับหลักสูตร ส่งเสริมให้นักเรียนบรรลุผลตามตัวชี้วัดของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา และเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา ซึ่งสรุปผล ดังนี้

1.1 หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้มีการกำหนด มาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดที่ชัดเจน โดยระบุถึงความสำคัญที่ต้องจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจากคณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ทำให้มนุษย์มีความคิด สร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ และมีแบบแผน ดังนั้นในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จึงกำหนดสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องตามศักยภาพ โดยแบ่งเป็นสาระด้านความรู้ 5 สาระคือ จำนวนและการดำเนินการ การวัด เรขาคณิต พีชคณิต การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น และมีสาระด้านทักษะและกระบวนการอีกหนึ่งสาระที่ สอดแทรกอยู่กับสาระด้านความรู้ทั้ง 5 สาระในเรื่องเกี่ยวกับการแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่ หลากหลาย การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และ ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ซึ่งการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ อย่างมีคุณภาพนั้น ผู้สอนต้องสอดแทรกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เข้ากับการเรียน การสอนด้านเนื้อหา ด้วยการให้ผู้เรียนทำกิจกรรม หรือตั้งคำถามที่กระตุ้นให้ผู้เรียนคิด อธิบาย และให้เหตุผล เช่น การให้ผู้เรียนใช้ความรู้ทางพีชคณิตในการแก้ปัญหา หรือการกระตุ้นให้ผู้เรียน ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลายและแตกต่างจากคนอื่น นอกจากนี้ ในการจัดการเรียนการสอนจะต้องให้ความสำคัญระหว่างสาระด้านความรู้ ทักษะและกระบวนการ ควบคู่ไปกับคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่พึงประสงค์ ได้แก่ การทำงานอย่างมีระบบ มีระเบียบ มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ มีความเชื่อมั่นในตนเอง พร้อมทั้ง ตระหนักในคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ โดยสามารถวัดและประเมินผลด้านความรู้และ

ด้านทักษะและกระบวนการควบคู่กันไปในระหว่างการเรียนการสอน ซึ่งสามารถประเมินได้จากกิจกรรมที่ผู้เรียนทำจากแบบฝึกหัด หรือข้อสอบที่เป็นคำถามปลายเปิดที่ให้โอกาสผู้เรียนแสดงความสามารถ

1.2 คุณภาพของผู้เรียนตามตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ในระดับประถมศึกษาที่สอดคล้องกับงานวิจัยนี้คือ ผู้เรียนมีความรู้ ความเข้าใจและความรู้สึกเชิงจำนวนเกี่ยวกับจำนวนนับและศูนย์ การดำเนินการของจำนวน สมบัติเกี่ยวกับจำนวน สามารถแก้ปัญหาเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนนับและศูนย์ พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ ใช้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

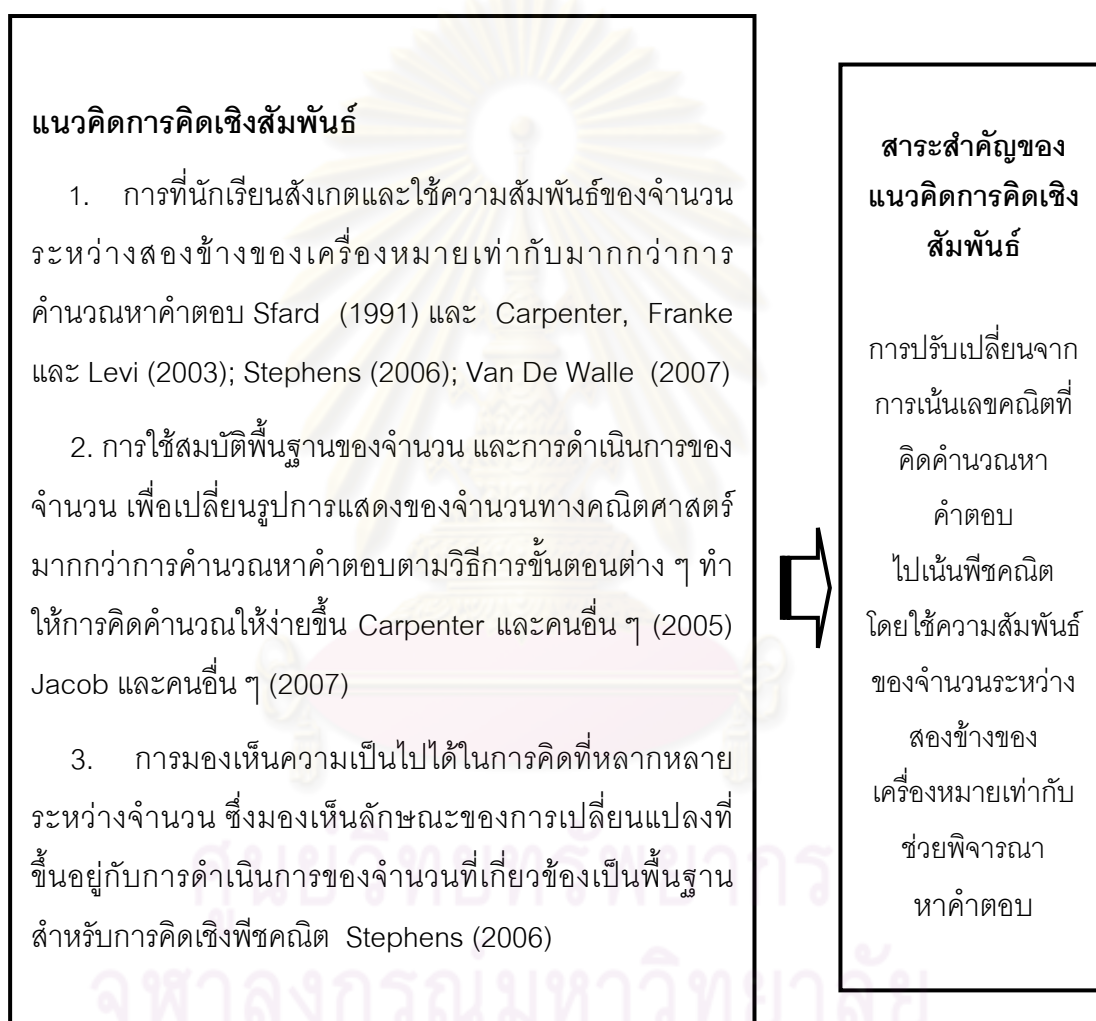
1.3 หลักการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา ที่สอดคล้องกับงานวิจัยนี้คือ จัดให้นักเรียนเรียนคณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจตามแนวคิดของ Hanna และ Yackel (2003) โดยจัดให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์ในชั้นเรียน ให้นักเรียนได้เสนอแนวคิดหรือข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนมีโอกาสประเมินแนวคิดของตนเองและผู้อื่น ให้นักเรียนได้รับการพัฒนาทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ได้ใช้หลักการสอนคณิตศาสตร์ตามข้อเสนอแนะ สิริพร ทิพย์คง (2545) คือสอนจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมไปหานามธรรม สอนจากสิ่งที่อยู่ใกล้ตัวนักเรียนก่อนสอนสิ่งที่อยู่ไกลตัวนักเรียน สอนจากเรื่องง่ายก่อนการสอนเรื่องที่ยาก สอนตรงตามเนื้อหาที่ต้องการสอน และสอนให้คิดไปตามลำดับขั้นตอนอย่างมีเหตุผล และ อัมพร ม้าคอง (2546) ได้ให้ข้อสรุปหลักการสอนคณิตศาสตร์ว่าสอนให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์หรือได้ความรู้ทางคณิตศาสตร์จากการคิด และมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกับผู้อื่น ใช้ความคิดและคำถามที่นักเรียนสงสัยเป็นประเด็นในการอภิปราย เพื่อให้ได้แนวคิดที่หลากหลาย และเพื่อนำไปสู่ข้อสรุป

2. ศึกษาแนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดเรียนการสอนตามแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้และการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา

2.1 วิเคราะห์สาระสำคัญของแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง พบว่านักการศึกษา คณิตศาสตร์หลายท่านได้ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์มาพัฒนาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

โดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ในการเรียนเลขคณิตในระดับประถมศึกษา เช่น Sfard (1991), Blanton และ Kaput (2001), Carpenter, Franke และ Levi (2003), Carpenter และคนอื่น ๆ (2003), (2005) Watson และ Mason (2004), Molina, Castro, Ambrose (2005/2006), Stephens, (2006), Jacob และคนอื่น ๆ (2007), Van De Walle (2007) ผู้วิจัยได้วิเคราะห์สาระสำคัญของแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ได้ดังแผนภาพที่ 4



แผนภาพที่ 4 ผลการวิเคราะห์สาระสำคัญของแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์

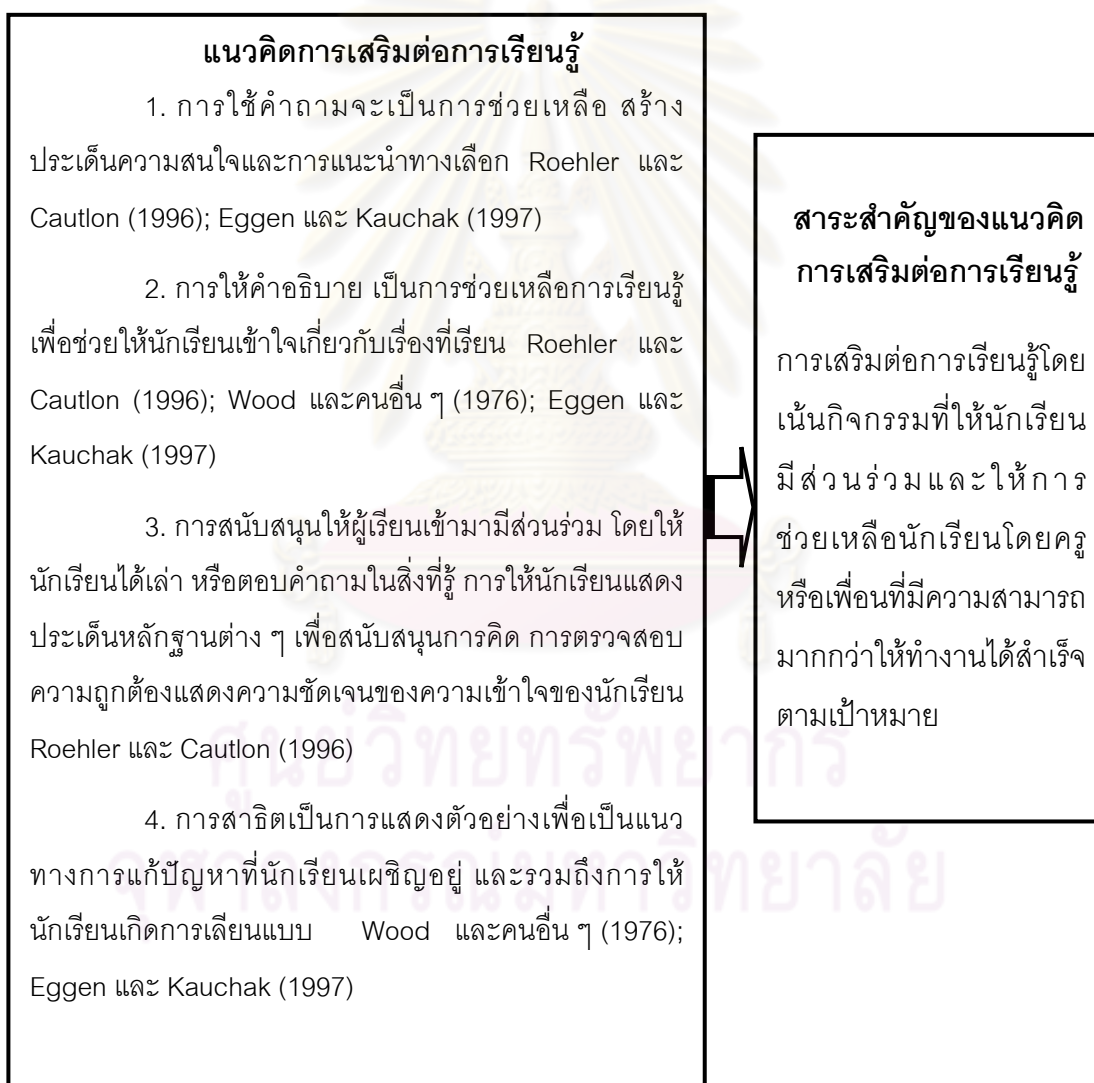
2.2 วิเคราะห์สาระสำคัญของทฤษฎีประวัติศาสตร์ทางสังคมของ Vygotsky กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ดังแผนภาพที่ 5



แผนภาพที่ 5 ผลการวิเคราะห์สาระสำคัญของทฤษฎีประวัติศาสตร์ทางสังคมของ Vygotsky กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

2.3 วิเคราะห์สาระสำคัญของแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง พบว่ามีนักการศึกษาหลายท่านที่ได้นำแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้มาใช้ในการจัดการเรียนการสอน เช่น Wood Bruner และ Ross(1976), Vygotsky(1978), Rosenshine และ Meister(1992), Dixon – Krauss (1996), Eggen และ Kauchak (1997), Larkin (2001) ซึ่งผู้วิจัยสามารถสรุปและวิเคราะห์สาระสำคัญของแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ได้ ดังแผนภาพที่ 6



แผนภาพที่ 6 ผลการวิเคราะห์สาระสำคัญของแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

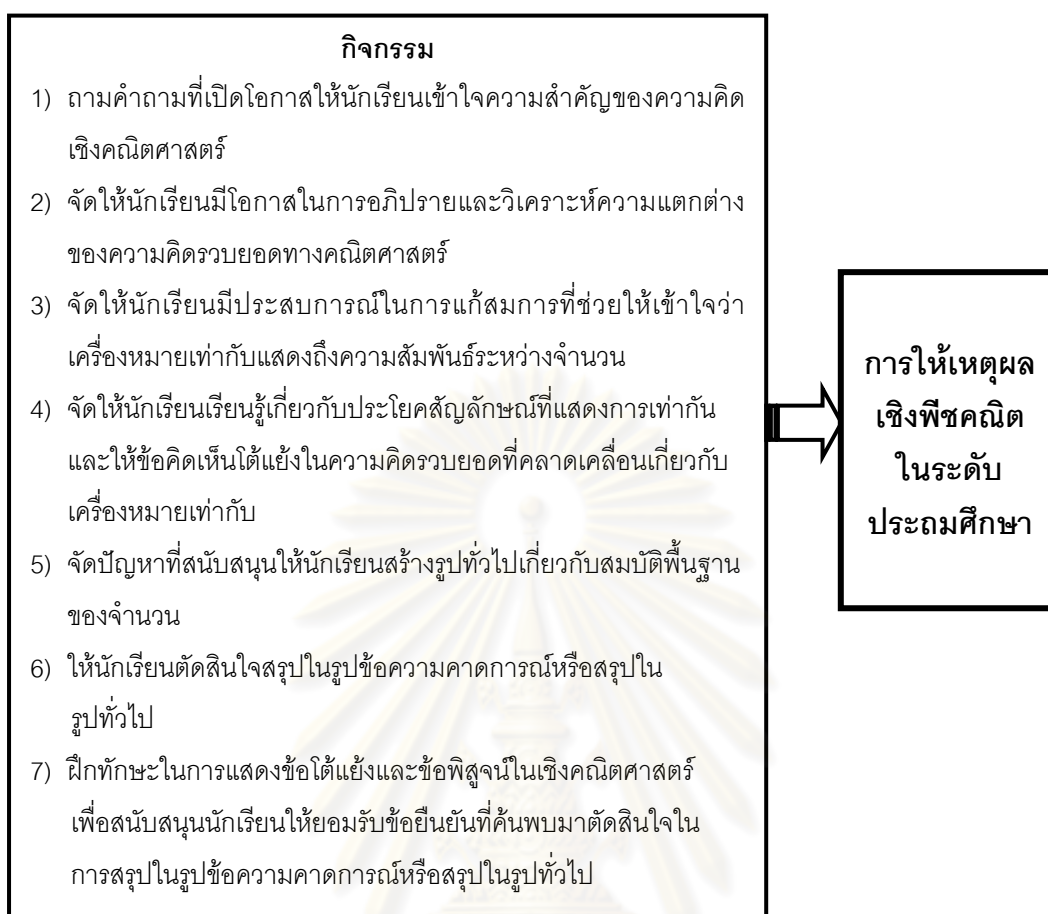
2.4 วิเคราะห์การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับกรให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษาจากนักการศึกษาหลายท่าน เช่น Yackel(1997), Kaput (1998), Carpenter, Levi และ Farnsworth (2000), Farnsworth (2003), Blanton และ Kaput (2005), Jacob และคนอื่น ๆ (2007) เป็นต้น และนำมาวิเคราะห์สรุปได้ว่ากรให้เหตุผลเชิงพีชคณิตมีหลายรูปแบบ และรูปแบบที่เหมาะสมกับการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษาคือ รูปทั่วไปของเลขคณิต และรูปทั่วไปของแบบรูปของจำนวนเพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้มุ่งเน้นศึกษาในเรื่องรูปทั่วไปของเลขคณิต โดย Blanton และ Kaput (2005) ได้เสนอแนะประเภทของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในฐานะที่เป็นรูปทั่วไปของเลขคณิตได้ 5 ประเภท ดังนี้

- 1) สมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน
- 2) สมบัติของการดำเนินการของจำนวน
- 3) การเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน
- 4) การแก้ปัญหาประโยคที่มีบางจำนวนหายไป
- 5) การมองจำนวนในเชิงพีชคณิต

การมุ่งเน้นไปที่พีชคณิตในฐานะที่เป็นเลขคณิตในรูปทั่วไปนั้น จำเป็นต้องจัดกิจกรรมเพื่อสร้างพื้นฐานสำหรับเรียนรู้พีชคณิตในระดับประถมศึกษา ดังแผนภาพที่ 7

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



แผนภาพที่ 7 ผลการวิเคราะห์การจัดกิจกรรมเพื่อสร้างพื้นฐานสำหรับการเรียนรู้พีชคณิตในระดับประถมศึกษา

3. พัฒนาระบบการเรียนการสอน

การพัฒนาระบบการเรียนการสอนเพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา โดยผู้วิจัยได้ดำเนินการตามลำดับ ดังนี้

3.1 สร้างหลักการของระบบการเรียนการสอน

ผู้วิจัยนำผลการวิเคราะห์สาระสำคัญของแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้มาสังเคราะห์เป็นหลักการของระบบการเรียนการสอน ดังแผนภาพที่ 8

<p>แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์</p> <p>1. การที่นักเรียนสังเกตและใช้ความสัมพันธ์ของจำนวนระหว่างสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมากกว่า การคำนวณหาคำตอบ Sfard (1991) และ Carpenter, Franke และ Levi (2003); Stephens (2006); Van De Walle (2007)</p> <p>2. การใช้สมบัติพื้นฐานของจำนวนและการดำเนินการของจำนวน เพื่อเปลี่ยนรูปการแสดงของจำนวน ทางคณิตศาสตร์มากกว่าการคำนวณหาคำตอบตามวิธีการขั้นตอนต่าง ๆ ทำให้การคิดคำนวณให้ ง่ายขึ้น Carpenter และคนอื่น ๆ (2005) Jacob และคนอื่น ๆ (2007)</p> <p>3. การมองเห็นความเป็นไปได้ในการคิดที่หลากหลายระหว่างจำนวน ซึ่งมองเห็นลักษณะของ การเปลี่ยนแปลงที่ขึ้นอยู่กับดำเนินการของจำนวนที่เกี่ยวข้อง เป็นพื้นฐานสำหรับการคิด เชิงพีชคณิต Stephens (2006)</p>	
<p>แนวคิดการคิดเสริมต่อการเรียนรู้</p> <p>1. การใช้คำถามจะเป็นการช่วยเหลือ สร้างประเด็นความสนใจและการแนะนำทางเลือก Roehler และ Cautlon (1996); Eggen และ Kauchak (1997)</p> <p>2. การให้คำอธิบาย เป็นการช่วยเหลือการเรียนรู้เพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องที่เรียน Roehler และ Cautlon (1996); Wood และคนอื่น ๆ (1976); Eggen และ Kauchak (1997)</p> <p>3. การสนับสนุนให้ผู้เรียนเข้ามามีส่วนร่วม โดยให้นักเรียนได้เล่า หรือตอบคำถามในสิ่งที่รู้ การให้ นักเรียนแสดงประเด็นหลักฐานต่าง ๆ เพื่อสนับสนุนการคิด การตรวจสอบความถูกต้อง แสดงความ ความเข้าใจชัดเจนของนักเรียน Roehler และ Cautlon (1996)</p> <p>4. การสาธิตเป็นการแสดงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางแก้ปัญหาที่นักเรียนเผชิญอยู่ และรวมถึงการให้ นักเรียนเกิดการเลียนแบบ Wood และคนอื่น ๆ (1976); Eggen และ Kauchak (1997)</p>	
<p style="text-align: center;">หลักการ</p> <p>1) การช่วยให้นักเรียนรู้จักการแสดงจำนวนของแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับที่แสดงจำนวนที่ เท่ากัน โดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ เสริมต่อการเรียนรู้ด้วยการใช้คำถามชี้แนะให้สังเกตความสัมพันธ์ ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากัน การให้นักเรียนมีส่วนร่วมโดยการอภิปราย แลกเปลี่ยนแนวคิด</p> <p>2) การทำให้มีการยืดหยุ่นในการคิดเกี่ยวกับการดำเนินการทางเลขคณิต ด้วยการเปรียบเทียบการแสดง จำนวนทางเลขคณิตโดยปราศจากการคิดคำนวณ ครูเสริมต่อการเรียนรู้โดยการยกตัวอย่างแสดงวิธีคิด ให้นักเรียนเห็นแนวทางในการคิด ใช้คำถามชี้แนะให้นักเรียนกล้าพูดแสดงความคิดเห็นที่ได้จาก การสังเกต จำแนกความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนอย่างต่อเนื่อง</p> <p>3) การจัดให้เปลี่ยนผ่านจากพื้นฐานเลขคณิตสู่พื้นฐานพีชคณิต เสริมต่อการเรียนรู้ โดยการให้นักเรียน แสดงหลักฐานต่าง ๆ เพื่อสนับสนุนและยืนยันการคิด และนำไปสู่การสร้างข้อสรุป มีการตรวจสอบ ความเข้าใจที่ถูกต้องและชัดเจนของนักเรียน</p>	

แผนภาพที่ 8 ผลการสังเคราะห์สาระสำคัญของแนวคิดไปสู่หลักการของกระบวนการเรียนการสอน

จากผลการสังเคราะห์สาระสำคัญของแนวคิดไปสู่หลักการของกระบวนการเรียนการสอน ได้หลักการของกระบวนการเรียนการสอน 3 ประการดังนี้

1) การช่วยให้นักเรียนรู้จักการแสดงจำนวนของแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับที่แสดงจำนวนที่เท่ากัน โดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ เสริมต่อการเรียนรู้ด้วยการใช้คำถามซึ่งนำไปสู่สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากัน การให้นักเรียนมีส่วนร่วมโดยการอภิปรายแลกเปลี่ยนแนวคิด

หลักการนี้เป็นการช่วยให้นักเรียนรู้จักการแสดงจำนวนของแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับที่แสดงจำนวนที่เท่ากัน โดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ด้วยการใช้คำถามซึ่งนำไปสู่สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากัน เปิดโอกาสและสนับสนุนนักเรียนเข้ามาร่วมอภิปราย ให้โอกาสนักเรียนพูดในสิ่งที่คิดออกมาดัง ๆ หรือเขียนแสดงวิธีการคิด หรือแสดงแบบอย่างของการคิดเพื่อเป็นการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ระหว่างนักเรียนด้วยกัน

2) การทำให้มีการยืดหยุ่นในการคิดเกี่ยวกับการดำเนินการทางเลขคณิต ด้วยการเปรียบเทียบการแสดงจำนวนทางเลขคณิตโดยปราศจากการคิดคำนวณ ครูเสริมต่อการเรียนรู้โดยการยกตัวอย่างแสดงวิธีคิดให้นักเรียนเห็นแนวทางในการคิด ใช้คำถามซึ่งนำไปให้นักเรียนกล่าวพูดแสดงความคิดเห็นที่ได้จากการสังเกต จำแนกความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนอย่างต่อเนื่อง

หลักการนี้เป็นการทำให้มีการยืดหยุ่นในการคิดเกี่ยวกับการดำเนินการทางเลขคณิต ด้วยการแสดงวิธีคิดหาคำตอบโดยการเปรียบเทียบจำนวน หลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ และเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนให้เข้าใจเกี่ยวกับเรื่องที่เรียนด้วยการช่วยเหลือที่หลากหลายวิธีการ ได้แก่ ครูยกตัวอย่างแสดงวิธีคิดให้เป็นแบบอย่าง ใช้คำถามซึ่งนำไปให้นักเรียนกล่าวพูดแสดงความคิดเห็นที่ได้จากการสังเกตอย่างสม่ำเสมอ

3) การจัดให้เปลี่ยนผ่านจากพื้นฐานเลขคณิตสู่พื้นฐานพีชคณิต เสริมต่อการเรียนรู้โดยการให้นักเรียนแสดงหลักฐานต่าง ๆ เพื่อสนับสนุนและยืนยันการคิด และนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่มีการตรวจสอบ ความเข้าใจที่ถูกต้องและชัดเจนของนักเรียน

หลักการนี้เป็นการจัดให้เปลี่ยนผ่านจากพื้นฐานเลขคณิตสู่พื้นฐานพีชคณิต โดยการให้นักเรียนมุ่งสนใจความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนและการดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับโดยไม่เน้นการคิดคำนวณ นำข้อสังเกตจากความสัมพันธ์ที่พบมาหาข้อสรุปและหาหลักฐานเพื่อยืนยันหรือคัดค้านข้อสรุปที่พบ และเสริมต่อการเรียนรู้ด้วยการ

ให้โอกาสนักเรียนมีส่วนร่วมหรือแสดงหลักฐานต่าง ๆ เพื่อสนับสนุนและยืนยันการคิด และนำไปสู่การสร้างข้อสรุป มีการตรวจสอบ ความเข้าใจที่ถูกต้องและชัดเจนในการคิดนักเรียน

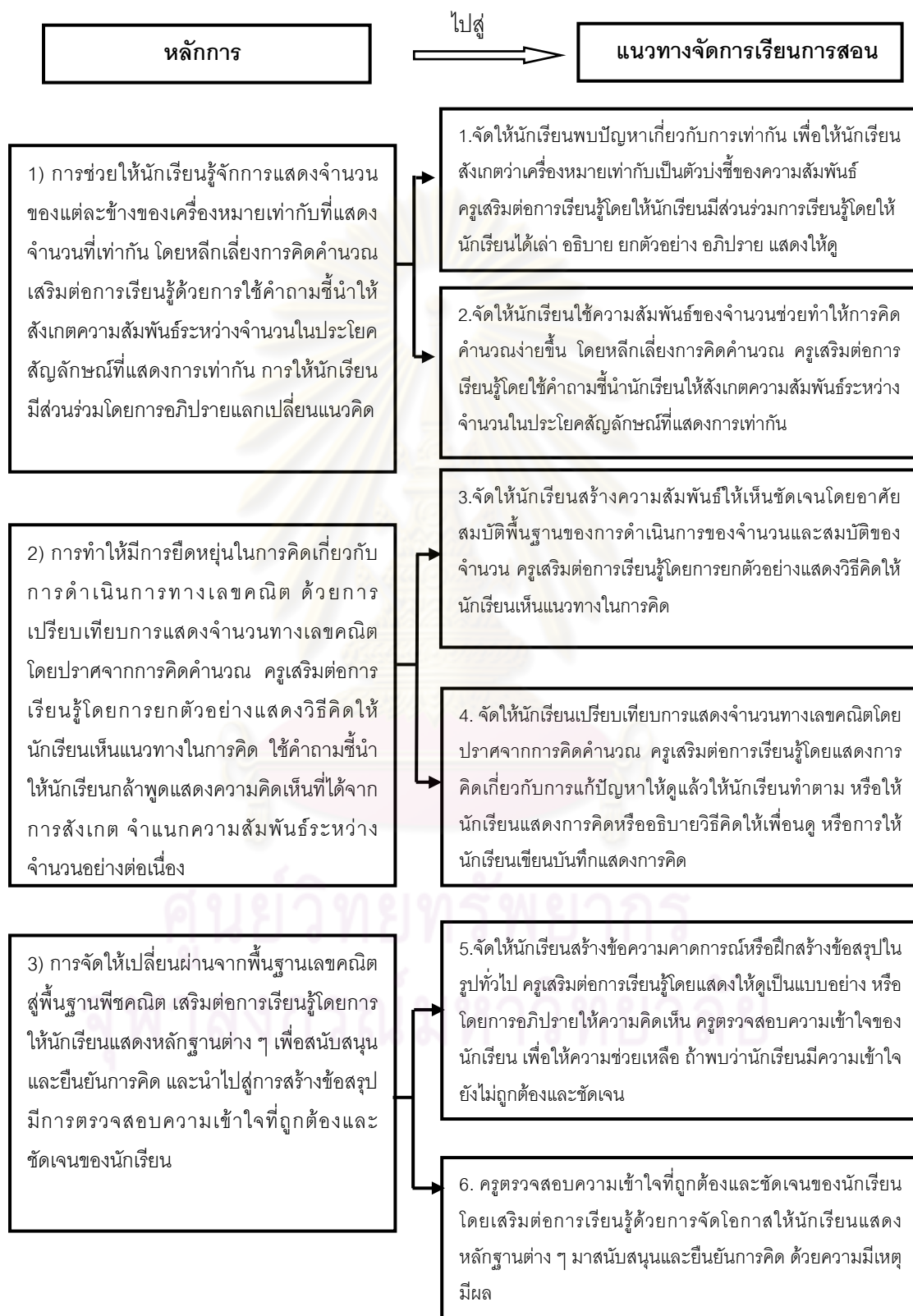
3.2 กำหนดวัตถุประสงค์ของกระบวนการเรียนการสอน

จากหลักการของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้มา กำหนดวัตถุประสงค์ของกระบวนการเรียนการสอน ดังแผนภาพที่ 9



แผนภาพที่ 9 แสดงหลักการไปสู่วัตถุประสงค์ของกระบวนการเรียนการสอน

3.3 การสังเคราะห์หลักการไปสู่แนวทางการจัดการเรียนการสอน ดังแผนภาพที่ 10



แผนภาพที่ 10 ผลการสังเคราะห์หลักการไปสู่แนวทางการจัดการเรียนการสอน

3.4 การสังเคราะห์แนวทางจัดการเรียนการสอนไปสู่กระบวนการเรียน

การสอน ดังแผนภาพที่ 11



แผนภาพที่ 11 ผลการสังเคราะห์แนวทางจัดการเรียนการสอนไปสู่กระบวนการเรียนการสอน

จากผลการสังเคราะห์แนวทางจัดการเรียนการสอนไปสู่กระบวนการเรียน การสอน แสดงรายละเอียดของกระบวนการเรียนการสอนเพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิง พิษคณิตของนักเรียนประถมศึกษา ได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 การส่งเสริมให้แสดงวิธีคิดเชิงสัมพันธ์ เป็นการนำประโยคจำนวนจริง หรือเท็จ หรือประโยคจำนวนเปิดเกี่ยวกับการเท่ากันที่สามารถใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ในการหา คำตอบโดยหลีกเลี่ยงการใช้การคิดคำนวณหาคำตอบมาเป็นประเด็นให้นักเรียนอภิปราย เพื่อให้ นักเรียนเข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับไม่ใช่นำมาใช้ในการคิดคำนวณหาคำตอบเท่านั้น แต่ใช้แสดง ความเท่ากันของจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของประโยคสัญลักษณ์นั้น ครูเสริมต่อ การเรียนรู้โดยการใช้คำถามนำเพื่อให้นักเรียนได้สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน แล้วให้ นักเรียนใช้ข้อสังเกตนั้นแสดงวิธีคิดหาคำตอบ โดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ครูเลือกวิธีคิดของ นักเรียนที่แสดงให้เห็นถึงแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ แล้วให้นักเรียนเขียนบันทึกแสดงการคิด แล้วครูช่วยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นที่ 2 การสร้างข้อความคาดการณ์ เป็นการนำประโยคจำนวนจริง หรือเท็จ หรือประโยคจำนวนเปิดเกี่ยวกับสมบัติของจำนวนและการดำเนินการของจำนวน ที่นักเรียนได้ พิจารณาคำตอบมาแล้วในขั้นที่ 1 ให้นักเรียนพิจารณาในเชิงความสัมพันธ์แล้วร่วมกันอภิปราย เพื่อหาข้อสรุป แล้วนำมาเขียนสรุปในรูปแบบข้อความคาดการณ์ แล้วร่วมกันอภิปรายโต้แย้งหาเหตุผล มาพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ที่สร้างขึ้น ครูเสริมต่อการเรียนครูใช้การไต่ถามจนกระทั่งนักเรียน สามารถพิสูจน์ได้ว่าข้อความคาดการณ์นั้นถูกต้อง

ขั้นที่ 3 การสร้างข้อสรุปในรูปแบบทั่วไป ครูกระตุ้นให้นักเรียนนำข้อความ คาดการณ์ที่นักเรียนได้อภิปรายและพิสูจน์ได้ว่าถูกต้องแล้วในขั้นที่ 2 นำมาเขียนสรุปในรูปแบบทั่วไป ครูใช้การไต่ถามให้นักเรียนสามารถอธิบาย และยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงถึงข้อสรุป ในรูปแบบทั่วไปนั้นได้ นักเรียนอาจเขียนสรุปในรูปแบบทั่วไปทั้งจากของตนเองหรือจากแนวคิดของเพื่อนมา เป็นของตนเอง ครูช่วยตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นที่ 4 การนำข้อสรุปในรูปแบบทั่วไปไปใช้ นักเรียนนำข้อสรุปในรูปแบบทั่วไปไปใช้ในการ แก้ไขทฤษฎีปัญหาที่เกี่ยวข้องกับข้อสรุปในรูปแบบทั่วไปนั้น ๆ โดยครูจัดเตรียมแบบฝึกทักษะที่ เกี่ยวข้องกับข้อสรุปทั่วไปนั้น ๆ ให้มากพอต่อการฝึกฝน เพื่อทบทวนสร้างความเข้าใจของนักเรียน ให้ชัดเจนยิ่งขึ้น ตรวจประเมินผลงานโดยให้แลกเปลี่ยนกับเพื่อนช่วยตรวจสอบความถูกต้อง โดย ครูช่วยตรวจสอบอีกครั้งและให้ข้อเสนอแนะเพื่อเพิ่มความเข้าใจที่ถูกต้องและชัดเจน

4. ตรวจสอบคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน

ในการตรวจสอบคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน ผู้วิจัยนำเสนอเป็น 2 ส่วน ดังนี้

4.1 การตรวจสอบคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนโดยผู้ทรงคุณวุฒิ

นำกระบวนการเรียนการสอนและแผนการจัดการเรียนรู้ที่พัฒนาขึ้น ไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิทางด้านการสอนคณิตศาสตร์ จำนวน 3 คน (รายชื่อในภาคผนวก ก) ประเมินความเหมาะสมเกี่ยวกับแนวคิดพื้นฐานในการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน องค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอน ซึ่งประกอบด้วย หลักการ จุดประสงค์ ขั้นตอนการเรียนการสอน การวัดและประเมินผล และตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ตามกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น โดยใช้แบบประเมินกระบวนการเรียนการสอน และแบบประเมินแผนการจัดการเรียนรู้ ซึ่งข้อมูลที่ได้จากการประเมินนำมาวิเคราะห์คำตอบจากทรงคุณวุฒิ จำนวน 3 คน มาแปลงเป็นคะแนน ดังนี้

มีความคิดเห็นว่า เหมาะสมดี	ให้คะแนนเป็น 3
มีความคิดเห็นว่า เหมาะสมปานกลาง	ให้คะแนนเป็น 2
มีความคิดเห็นว่า ยังต้องปรับปรุง	ให้คะแนนเป็น 1

หลังจากนั้น คำนวณค่าเฉลี่ยความเหมาะสมของผู้ทรงคุณวุฒิ โดยปรับเทียบกับเกณฑ์การแปลความหมายโดยใช้ค่าเฉลี่ยของ บุญชม ศรีสะอาด (2546) ดังนี้

2.51 – 3.00	หมายถึง เหมาะสมดี
1.51 – 2.50	หมายถึง เหมาะสมปานกลาง
1.00 – 1.50	หมายถึง ยังต้องปรับปรุง

กำหนดเกณฑ์ค่าเฉลี่ยของความเหมาะสมของกระบวนการเรียนการสอนและแผนการจัดการเรียนรู้ ถ้าค่าเฉลี่ยของผู้ทรงคุณวุฒิ มีค่าตั้งแต่ 2.51 ขึ้นไป ถือว่ากระบวนการเรียนการสอนและแผนการจัดการเรียนรู้มีความเหมาะสมดี

ผลการตรวจสอบคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน และแผนการจัดการเรียนรู้ โดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับแนวคิดการเสริมสร้างต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา โดยผู้ทรงคุณวุฒิพบว่า องค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอน อยู่ในระดับเหมาะสมดี ค่าเฉลี่ย 2.67 และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.47 และแผนการจัดการเรียนรู้มีความเหมาะสมอยู่ในระดับเหมาะสมดี ค่าเฉลี่ย 2.73 และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.32

4.2 การทดลองใช้แผนการจัดการเรียนรู้ นำแผนการจัดการเรียนรู้ โดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับแนวคิดการเสริมสร้างต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา และได้ปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอเพิ่มเติมของผู้ทรงคุณวุฒิ แล้วไปทดลองสอนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนวัดธาตุนทอง (เรือนเขียวสะอาด) ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง และมีลักษณะใกล้เคียงกับกลุ่มตัวอย่าง เพื่อตรวจสอบความเป็นไปได้สำหรับการนำไปสอนในสภาพการเรียนการสอนจริง

5. แก้ไขปรับปรุงกระบวนการเรียนการสอน

ตามทีผู้วิจัยนำกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นให้ผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบด้านคุณภาพเกี่ยวกับแนวคิดพื้นฐานในการพัฒนากระบวนการเรียนการสอน องค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอน ซึ่งประกอบด้วย หลักการ จุดประสงค์ ขั้นตอนการเรียนการสอน การวัดและประเมินผล และตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ตามกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น และจากผลการนำแผนการจัดการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นไปดำเนินการสอนกับนักเรียนที่มีลักษณะใกล้เคียงกับกลุ่มตัวอย่างนั้น ผู้ทรงคุณวุฒิได้นำผลจากการทดลองใช้แผนการจัดการเรียนรู้มาพิจารณาและให้ข้อเสนอแนะในการแก้ไขปรับปรุงกระบวนการเรียนการสอนดังต่อไปนี้

1) ปรับขั้นตอนกระบวนการเรียนการสอนใหม่ แต่ยังคงใช้แนวทางการจัดการเรียนการสอนเดิม โดยปรับขั้นที่ 1 จากการส่งเสริมให้แสดงวิธีคิดเชิงสัมพันธ์ แบ่งเป็น 2 ขั้นใหม่ คือ การค้นหาความสัมพันธ์ และขั้นการใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ เนื่องจากการส่งเสริมให้นักเรียนแสดงวิธีคิดเชิงสัมพันธ์เป็นเรื่องที่นักเรียนยังไม่คุ้นเคย จึงควรเพิ่มเวลาให้นักเรียนมีโอกาสใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ให้มากขึ้น นำขั้นที่ 2 การสร้างข้อความคาดการณ์ และขั้นที่ 3 การสร้างข้อสรุปในรูปทั่วไปมารวมกันเป็นขั้นที่ 3 คือ ขั้นการสร้างข้อสรุป เนื่องจากในระดับประถมศึกษาสาระพีชคณิตมุ่งเน้นให้นักเรียนฝึกสรุปความสัมพันธ์ที่สังเกตเห็นได้ในรูปข้อความคาดการณ์ แต่จะสรุปในรูปทั่วไปเมื่อเรียนระดับสูงขึ้น ดังนั้นจึงไม่ควรแยกการสร้างข้อสรุปในรูปทั่วไปไว้ต่างหาก เพราะจะยากเกินไปสำหรับนักเรียนในระดับนี้ และปรับขั้นที่ 4 การนำข้อสรุปในรูปทั่วไปไปใช้ เป็นการตรวจสอบและยืนยันข้อสรุปที่ได้จากการสังเกต เนื่องจากเมื่อนักเรียนได้ฝึกการสร้างข้อสรุปแล้ว ในขั้นต่อไปควรจัดโอกาสให้นักเรียนได้ฝึกการตรวจสอบก่อนที่จะยืนยันข้อสรุป จากเหตุผลดังกล่าวจึงนำมาสรุปได้ ดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 แสดงการปรับขั้นตอนกระบวนการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอน(เดิม)	กระบวนการเรียนการสอน(ใหม่)	เหตุผลในการปรับ
<p>ขั้นที่ 1 การส่งเสริมให้แสดงวิธีคิดเชิงสัมพันธ์</p>	<p>ขั้นที่ 1 การค้นหาความสัมพันธ์</p> <p>ขั้นที่ 2 การใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์</p>	<p>เนื่องจากการส่งเสริมให้นักเรียนแสดงวิธีคิดเชิงสัมพันธ์เป็นเรื่องที่นักเรียนยังไม่คุ้นเคยจึงควรเพิ่มเวลาให้นักเรียนมีโอกาสใช้วิธีคิดตามแนวทางการคิดเชิงสัมพันธ์ให้มากขึ้น จึงขยายขั้นตอนจากกระบวนการสอนเดิม 1 ขั้น เป็น 2 ขั้น</p>
<p>ขั้นที่ 2 การสร้างข้อความคาดการณ์</p> <p>ขั้นที่ 3 การสร้างข้อสรุปในรูปแบบทั่วไป</p>	<p>ขั้นที่ 3 การสร้างข้อสรุปจากข้อสังเกต</p>	<p>เนื่องจากหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ในระดับประถมศึกษาชั้นต้น ตัวชี้วัดในสาระพีชคณิต มุ่งเน้นให้นักเรียนฝึกสรุปความสัมพันธ์ที่สังเกตเห็นได้ในรูปข้อความคาดการณ์ แต่จะสรุปในรูปแบบทั่วไปเมื่อเรียนในระดับที่สูงขึ้น ดังนั้นจึงไม่ควรแยก การสร้างข้อสรุปในรูปแบบทั่วไปไว้ต่างหากเพราะจะยากเกินไปสำหรับนักเรียนระดับนี้ ควรเน้นการสร้างข้อสรุปที่นักเรียนสามารถสรุปให้อยู่ในรูปข้อความคาดการณ์หรือในรูปแบบทั่วไปก็ได้</p>
<p>ขั้นที่ 4 การนำข้อสรุปในรูปแบบทั่วไปไปใช้</p>	<p>ขั้นที่ 4 การตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป</p>	<p>เนื่องจากการที่จะช่วยส่งเสริมให้เกิดกระบวนการสร้างองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เมื่อได้รับขั้นการฝึกสร้างข้อสรุปแล้ว ในขั้นต่อไปควรจัดโอกาสให้นักเรียนได้ฝึกการตรวจสอบก่อนที่จะยืนยันข้อสรุป ดังนั้นในขั้นนี้จึงปรับจากเดิมมาเป็นการตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป</p>

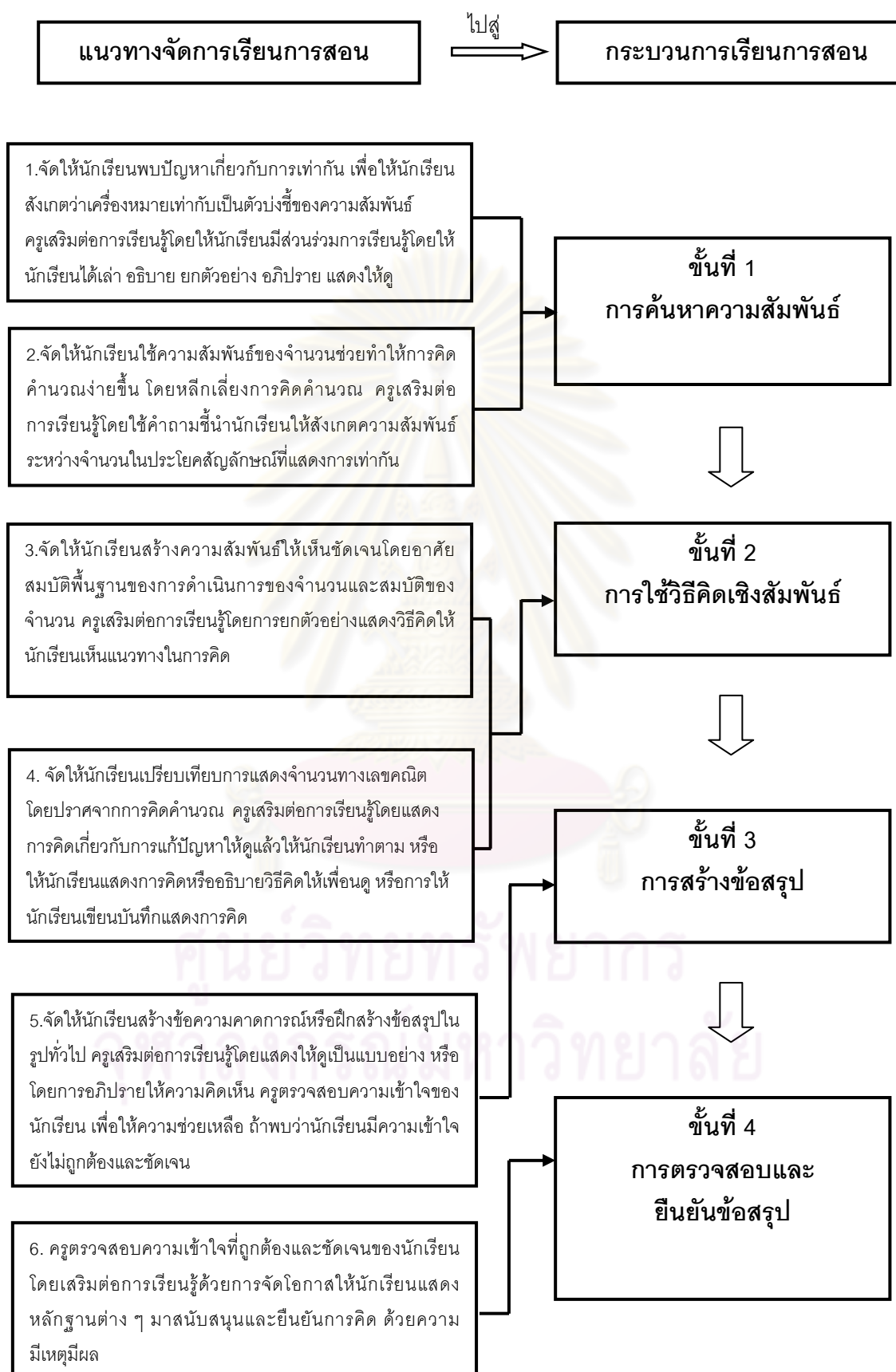
2) ขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอนควรเพิ่มบทบาทของครูและนักเรียนเพื่อให้มีความชัดเจน

3) แผนการจัดการเรียนรู้ควรปรับภาษาให้เหมาะสมกับนักเรียนระดับประถมศึกษา เช่น ประโยคจำนวนจริงหรือเท็จ หรือประโยคจำนวนเปิด ควรแก้ไขเป็นประโยคสัญลักษณ์ เป็นต้น ผู้วิจัยได้นำข้อเสนอแนะต่าง ๆ ของผู้ทรงคุณวุฒิมาปรับปรุงแก้ไขได้ผลดังนี้

1) จากแนวทางจัดการเรียนการสอนไปสู่กระบวนการเรียนการสอน
ดังแผนภาพที่ 12

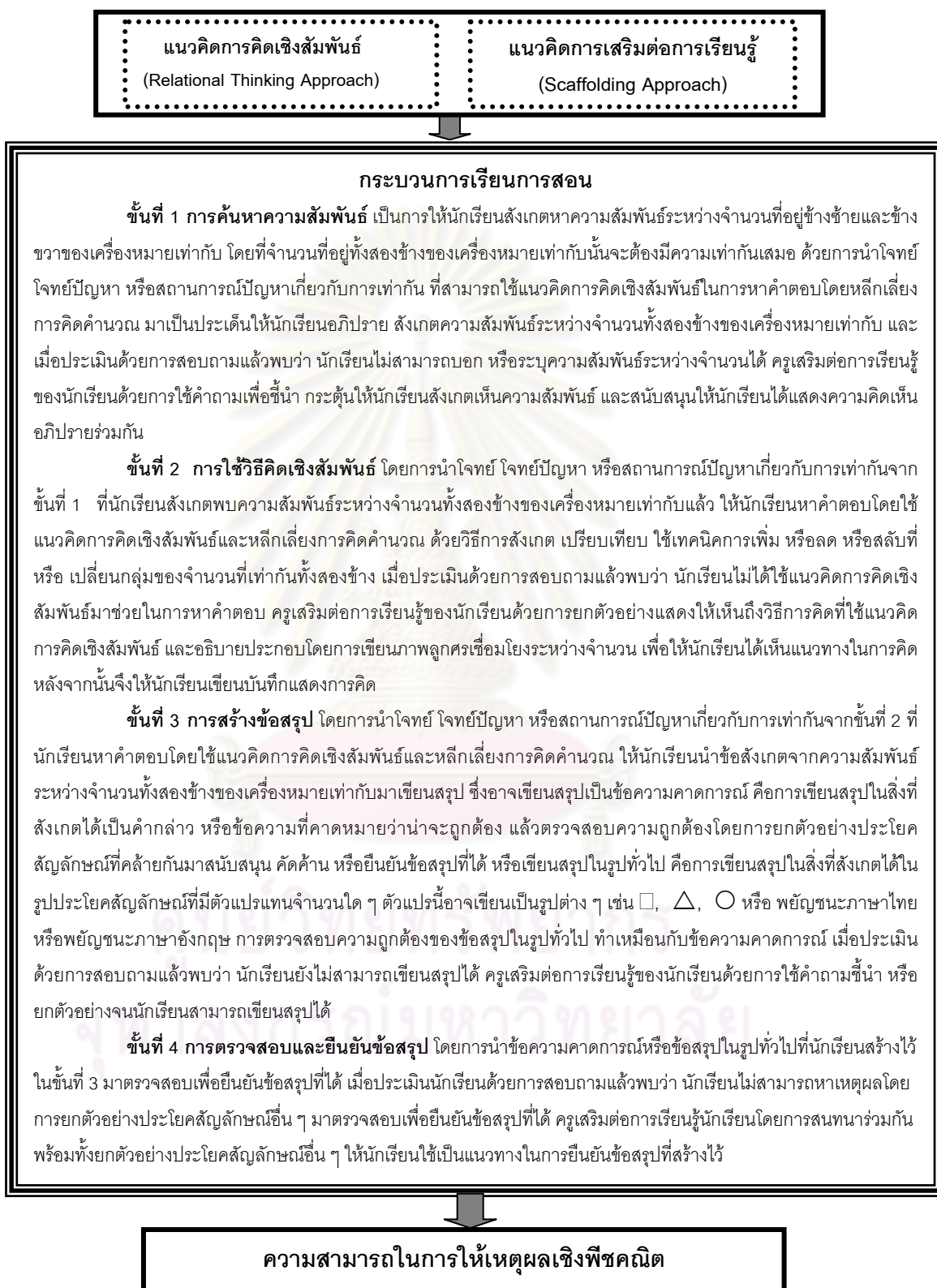


ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



แผนภาพที่ 12 แสดงการปรับกระบวนการเรียนการสอนจากแนวทางการจัดการเรียนการสอนเดิม

2) รายละเอียดของกระบวนการเรียนการสอน ดังแผนภาพที่ 13



แผนภาพที่ 13 แสดงรายละเอียดของกระบวนการเรียนการสอน

3) บทบาทของครูและนักเรียนในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน ดังตารางที่ 5

ตารางที่ 5 บทบาทของครูและนักเรียนในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน

ขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน	บทบาทครู	บทบาทนักเรียน
<p>ขั้นที่ 1 การค้นหาความสัมพันธ์ เป็นการให้นักเรียนสังเกตหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่อยู่ข้างซ้ายและข้างขวาของเครื่องหมายเท่ากับ โดยที่จำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับนั้นจะต้องมีความเท่ากันเสมอ ด้วยการนำโจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากัน ที่สามารถใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบโดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ มาเป็นประเด็นให้นักเรียนอภิปราย สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ และเมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนไม่สามารถบอก หรือระบุความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนได้ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการใช้คำถามเพื่อชี้แนะ กระตุ้นให้นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์ และสนับสนุนให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น อภิปรายร่วมกัน</p>	<p>(1) นำโจทย์เกี่ยวกับการเท่ากันมา เป็นประเด็นให้นักเรียนอภิปราย</p> <p>(2) ประเมินความเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่อยู่ข้างซ้ายและข้างขวาของเครื่องหมายเท่ากับ ด้วยการสอบถาม</p> <p>(3) ใช้คำถามเพื่อชี้แนะให้นักเรียน สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากันและหาคำตอบโดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ</p> <p>(4) ส่งเสริมให้นักเรียนได้อภิปรายร่วมกัน</p>	<p>(1) ตอบคำถามโจทย์เกี่ยวกับการเท่ากันตาม ความรู้ความเข้าใจเดิม</p> <p>(2) สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากัน เพื่อหาคำตอบโดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ</p> <p>(3) ฟีกอธิบายหรือแสดงวิธีคิด</p> <p>(4) มีส่วนร่วมในการอภิปรายโดยแสดงความคิดเห็น</p>
<p>ขั้นที่ 2 การใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ โดยการนำโจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากันจากขั้นที่ 1 ที่นักเรียนสังเกตพบความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับแล้ว ให้นักเรียนหาคำตอบโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ด้วยวิธีการสังเกต เปรียบเทียบ ใช้เทคนิคการเพิ่ม หรือลด หรือสลับที่ หรือ เปลี่ยนกลุ่มของจำนวนที่เท่ากันทั้งสองข้าง เมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนไม่ได้ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์มาช่วยในการหาคำตอบ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการยกตัวอย่าง แสดงให้เห็นถึงวิธีการคิดที่ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และอธิบายประกอบโดยการเขียนภาพลูกศร เชื่อมโยงระหว่างจำนวน เพื่อให้นักเรียนได้เห็นแนวทางในการคิด หลังจากนั้นจึงให้นักเรียนเขียนบันทึกแสดงการคิด</p>	<p>(1) ประเมินความเข้าใจการใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบ ด้วยการสอบถาม</p> <p>(2) ยกตัวอย่างแสดงให้เห็นถึงวิธีคิดเชิงสัมพันธ์</p> <p>(3) ส่งเสริมให้นักเรียนได้อธิบายหรือแสดงวิธีคิด โดยเลือกวิธีคิดของนักเรียนที่แสดงให้เห็นถึงการคิดเชิงสัมพันธ์มานำเสนอ</p> <p>(4) ตรวจสอบความถูกต้อง การเขียนบันทึกแสดงการคิดของนักเรียน</p>	<p>(1) ตอบคำถามโจทย์เกี่ยวกับการเท่ากันตาม ความรู้ความเข้าใจเดิม</p> <p>(2) ฟีกอธิบายหรือแสดงวิธีคิดเชิงสัมพันธ์</p> <p>(3) มีส่วนร่วมในการอภิปรายโดยแสดงความคิดเห็น</p> <p>(4) เขียนบันทึกแสดงการคิด</p>

ตารางที่ 5 บทบาทของครูและนักเรียนในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน (ต่อ)

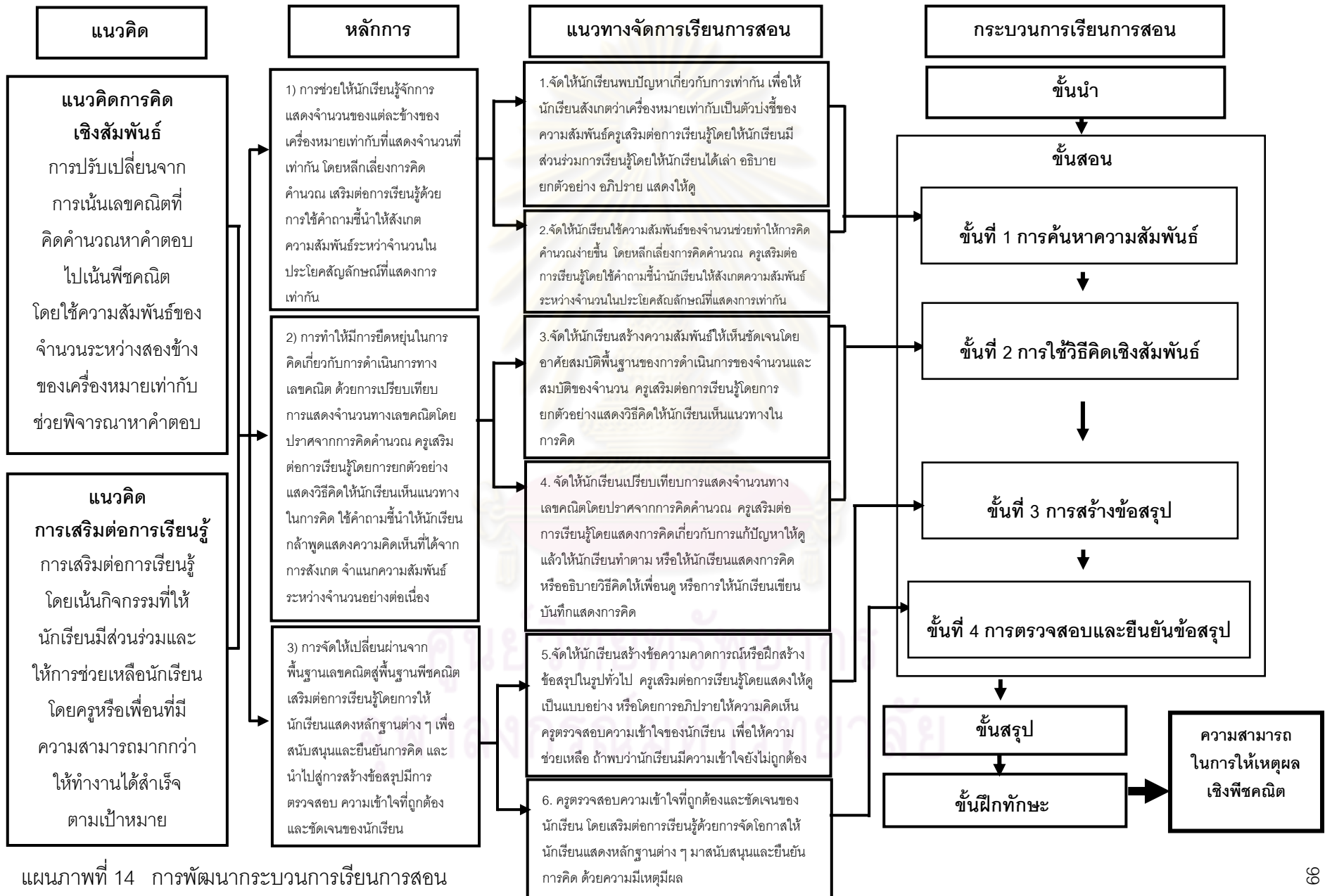
ขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน	บทบาทครู	บทบาทนักเรียน
<p>ขั้นที่ 3 การสร้างข้อสรุป โดยการนำโจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากัน จากขั้นที่ 2 ที่นักเรียนหาคำตอบโดยใช้แนวคิด การคิดเชิงสัมพันธ์และหลักการคิดคำนวณ ให้ นักเรียนนำข้อสังเกตจากความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมาเขียนสรุป ซึ่งอาจเขียนสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ คือการเขียนสรุปในสิ่งที่สังเกตได้เป็นคำกล่าว หรือข้อความที่คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง แล้วตรวจสอบความถูกต้องโดยการยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์ที่ คล้ายกันมาสนับสนุน คัดค้าน หรือยืนยันข้อสรุปที่ได้ หรือเขียนสรุปในรูปแบบทั่วไป คือการเขียนสรุปในสิ่งที่สังเกตได้ในรูปประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวแปรแทน จำนวนใด ๆ ตัวแปรนี้อาจเขียนเป็นรูปต่าง ๆ เช่น □, △, ○ หรือ พยัญชนะภาษาไทย หรือพยัญชนะภาษาอังกฤษ การตรวจสอบความถูกต้องของข้อสรุปในรูปแบบทั่วไป ทำเหมือนกับข้อความคาดการณ์ เมื่อ ประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนยังไม่ สามารถเขียนสรุปได้ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ของ นักเรียนด้วยการใช้คำถามชี้แนะ หรือยกตัวอย่างจน นักเรียนสามารถเขียนสรุปได้</p>	<p>(1) ประเมินการสร้างข้อสรุป จากข้อสังเกตความสัมพันธ์ ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของ เครื่องหมายเท่ากับด้วยการ สอบถาม</p> <p>(2) ส่งเสริมให้นักเรียนได้สร้าง ข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุป ในรูปทั่วไป โดยใช้คำถามนำให้ นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ ระหว่างจำนวนที่ได้อภิปราย มาแล้วเพื่อให้นักเรียนนำไปสู่ เป็นข้อสรุป</p> <p>(3) ตรวจสอบความถูกต้องของ ข้อสรุป</p>	<p>(1) สังเกตความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนในประโยคสัญลักษณ์เพื่อนำไปเป็นข้อมูลในการสรุป</p> <p>(2) ฝึกเขียนข้อสรุปจากประโยค สัญลักษณ์ที่มีความสัมพันธ์ เหมือนกันมาเป็นข้อความ คาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปแบบทั่วไป</p>
<p>ขั้นที่ 4 การตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป โดยการ นำข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปแบบทั่วไปที่ นักเรียนสร้างไว้ในขั้นที่ 3 มาตรวจสอบเพื่อยืนยัน ข้อสรุปที่ได้ เมื่อประเมินนักเรียนด้วยการสอบถาม แล้วพบว่า นักเรียนไม่สามารถหาเหตุผลโดย การยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่น ๆ มาตรวจสอบ เพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ ครูเสริมต่อ การเรียนรู้ นักเรียนโดยการสนทนาร่วมกัน พร้อมทั้งยกตัวอย่าง ประโยคสัญลักษณ์อื่น ๆ ให้นักเรียนใช้เป็นแนวทาง ในการยืนยันข้อสรุปที่สร้างไว้</p>	<p>(1) นำข้อความคาดการณ์หรือ ข้อสรุปในรูปแบบทั่วไปที่นักเรียน สร้างไว้มาเป็นประเด็นให้ นักเรียนอภิปรายเพื่อนำไปสู่การ ตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้</p> <p>(2) ประเมินการตรวจสอบ เพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ด้วยการ สอบถาม</p> <p>(3) ยกตัวอย่างประโยค สัญลักษณ์อื่นที่มีความสัมพันธ์ เหมือนกันที่จะนำมาตรวจสอบ ข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุป</p>	<p>(1) ยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์ อื่นที่มีความสัมพันธ์เหมือนกันที่ จะนำมาตรวจสอบข้อความ คาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปแบบทั่วไป ที่สร้างขึ้นด้วยตนเองหรือ เลียนแบบอย่างของครูหรือเพื่อน</p> <p>(2) มีส่วนร่วมในการอภิปราย และถกเถียงเพื่อยืนยันข้อสรุป ที่สร้างไว้</p>

ตารางที่ 5 บทบาทของครูและนักเรียนในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน (ต่อ)

ขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน	บทบาทครู	บทบาทนักเรียน
	<p>ในรูปทั่วไปให้นักเรียนเห็นเป็นแนวทาง</p> <p>(4) ส่งเสริมให้นักเรียนสามารถอธิบายและยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่นที่มีความสัมพันธ์เหมือนกันที่จะนำมาตรวจสอบข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปทั่วไปที่สร้างขึ้นโดยการสนทนาร่วมกัน</p>	

การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา โดยผู้วิจัยได้สรุปตามแผนภาพที่ 14 ดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



แผนภาพที่ 14 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน

ระยะที่ 2 การเตรียมการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

1. สร้างแผนการจัดการเรียนรู้และสื่อการเรียนรู้

ผู้วิจัยดำเนินการจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้และสื่อการเรียนรู้โดยศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ศึกษาแนวทางการใช้หลักสูตร แนวทางการเขียนแผนการจัดการเรียนรู้ตามหลักสูตร แล้วนำมาออกแบบแผนการจัดการเรียนรู้ โดยการวิเคราะห์ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เรื่องการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับและศูนย์ กับคู่มือครูและหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ในบทที่ 2 การบวกและการลบ บทที่ 4 การคูณ และบทที่ 5 การหาร แล้วจัดทำเป้าหมายหลักของการจัดการเรียนรู้ จัดทำคำอธิบายรายหน่วย จัดทำโครงสร้างรายหน่วย และจัดทำโครงสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ เพื่อนำมาใช้เป็นแนวทางในการจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ตามขั้นตอนกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน 4 ขั้นตอนที่สร้างขึ้น เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา ดังนี้

1.1 วิเคราะห์ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เรื่องการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับและศูนย์ ได้ดังนี้

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่าง ๆ และสามารถใช้ในการดำเนินการในการแก้ปัญหา ดังตารางที่ 6

ตารางที่ 6 วิเคราะห์ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง สาระที่ 1 มาตรฐาน ค 1.2

ตัวชี้วัด	ความรู้	ทักษะ	คุณลักษณะ
ค 1.2 ป. 4/1 บวก ลบ คูณ หาร และบวก ลบ คูณ หารระคนของ จำนวนนับและศูนย์ พร้อมทั้งตระหนัก ถึงความ สมเหตุสมผล ของคำตอบ	<ul style="list-style-type: none"> การบวก การลบ การคูณจำนวนหนึ่งหลักกับจำนวนมากกว่าสี่หลัก การคูณจำนวนมากกว่าหนึ่งหลักกับจำนวนมากกว่าสองหลัก การหารที่ตัวหารไม่เกินสามหลัก การบวก ลบ คูณ หารระคน การเฉลี่ย 	<ul style="list-style-type: none"> บวก ลบ คูณ หารของจำนวนนับและศูนย์ บวก ลบ คูณ หารระคนของจำนวนนับและศูนย์ 	<ul style="list-style-type: none"> มีความตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ
ค 1.2 ป. 4/2 วิเคราะห์และแสดง วิธีหาคำตอบของ โจทย์ปัญหาและ โจทย์ปัญหาระคน ของจำนวนนับ และศูนย์พร้อมทั้ง ตระหนักถึงความ สมเหตุสมผล ของคำตอบ และ สร้างโจทย์ได้	<ul style="list-style-type: none"> โจทย์ปัญหาการบวก การลบ โจทย์ปัญหาการคูณจำนวนหนึ่งหลักกับจำนวนมากกว่าสี่หลัก โจทย์ปัญหาการคูณจำนวนมากกว่าหนึ่งหลักกับจำนวนมากกว่าสองหลัก โจทย์ปัญหาการหารที่ตัวหารไม่เกินสามหลัก โจทย์ปัญหาการบวก ลบ คูณ หารระคน การสร้างโจทย์ปัญหาการบวก การลบ การคูณ การหาร 	<ul style="list-style-type: none"> วิเคราะห์และแสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาจำนวนนับและศูนย์ วิเคราะห์และแสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาระคนของจำนวนนับและศูนย์ สร้างโจทย์ปัญหา 	<ul style="list-style-type: none"> มีความตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ดังตารางที่ 7

ตารางที่ 7 วิเคราะห์ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง สาระที่ 6 มาตรฐาน ค 6.1

ตัวชี้วัด	ความรู้	ทักษะ	คุณลักษณะ
ค 6.1 ป.4/1 ใช้วิธีการที่หลากหลาย แก้ปัญหา	-	<ul style="list-style-type: none"> ใช้วิธีการที่หลากหลาย แก้ปัญหา 	<ul style="list-style-type: none"> มีวิธีการหลากหลายวิธี ในการแก้ปัญหา
ค 6.1 ป.4/2 ใช้ความรู้ ทักษะและ กระบวนการทาง คณิตศาสตร์และ เทคโนโลยีใน การแก้ปัญหาใน สถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม	-	<ul style="list-style-type: none"> ใช้ความรู้ ทักษะและ กระบวนการทาง คณิตศาสตร์และ เทคโนโลยีใน การแก้ปัญหา 	<ul style="list-style-type: none"> มีความรู้ ทักษะและ กระบวนการทาง คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี ในการแก้ปัญหาใน สถานการณ์ต่าง ๆ ได้ อย่างเหมาะสม
ค 6.1 ป.4/3 ให้เหตุผลประกอบการ ตัดสินใจ และสรุปผล ได้อย่างเหมาะสม	-	<ul style="list-style-type: none"> ใช้เหตุผลประกอบการ ตัดสินใจ ใช้เหตุผลประกอบการ สรุปผล 	<ul style="list-style-type: none"> มีการให้เหตุผลใน การตัดสินใจและสรุปผล ได้อย่างเหมาะสม
ค 6.1 ป.4/4 ใช้ภาษา และสัญลักษณ์ ทางคณิตศาสตร์ใน การสื่อสาร การสื่อ ความหมาย และ การนำเสนอได้อย่าง ถูกต้องและเหมาะสม	-	<ul style="list-style-type: none"> ใช้ภาษาและ สัญลักษณ์ทาง คณิตศาสตร์ใน การสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ 	<ul style="list-style-type: none"> มีภาษาและสัญลักษณ์ ทางคณิตศาสตร์ใน การสื่อสาร การสื่อ ความหมาย และ การนำเสนอได้ อย่างถูกต้อง และ เหมาะสม

ตารางที่ 7 (ต่อ) วิเคราะห์ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง สาระที่ 6 มาตรฐาน ค 6.1

ตัวชี้วัด	ความรู้	ทักษะ	คุณลักษณะ
ค 6.1 ป.4/5 เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์ กับศาสตร์อื่น ๆ	-	<ul style="list-style-type: none"> เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ 	<ul style="list-style-type: none"> มีการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ
ค 6.1 ป.4/6 มีความคิดริเริ่ม สร้างสรรค์	-	<ul style="list-style-type: none"> ใช้การคิดริเริ่มสร้างสรรค์ 	<ul style="list-style-type: none"> มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

1.2 จัดทำเป้าหมายหลักของการจัดการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้

มาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด ดังนี้

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่าง การดำเนินการต่าง ๆ และใช้การดำเนินการในการแก้ปัญหา

ตัวชี้วัด ค 1.2 ป.4/1 บวก ลบ คูณ หาร และบวก ลบ คูณ หารระคนของจำนวนนับและศูนย์ พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ

ค 1.2 ป.4/2 วิเคราะห์และแสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาและโจทย์ปัญหาระคนของจำนวนนับและศูนย์ พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ และสร้างโจทย์ได้

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ตัวชี้วัด ค 6.1 ป.4/1 ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา

ค 6.1 ป.4/2 ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ป.4/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ป.4/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม

ค 6.1 ป.4/5 เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น

ค 6.1 ป.4/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

1.3 จัดทำคำอธิบายรายหน่วย ได้ดังนี้

หน่วยที่ 1 การบวกและการลบ เวลา 12 ชั่วโมง

ศึกษา ฝึกทักษะการคิดคำนวณ การคิดเชิงสัมพันธ์และฝึกการแก้ปัญหาเกี่ยวกับ**ความรู้**ในเรื่องการบวกจำนวนที่หลายหลัก การลบจำนวนที่หลายหลัก การบวก ลบระคน โจทย์ปัญหาการบวกและการลบ โจทย์ปัญหาการลบ ลบระคน การสร้างโจทย์ปัญหาการบวกและการลบ โดยจัดประสบการณ์มุ่งเน้นให้นักเรียนได้ใช้**ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์** ได้แก่ ความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำเสนอ และการเชื่อมโยงความรู้ เพื่อให้ผู้เรียนมี**คุณลักษณะ** ที่ต้องการคือมีความตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ

รหัสตัวชี้วัด

ค 1.2 ป. 4/1, ค 1.2 ป. 4/2, ค 6.1 ป.4/1, ค 6.1 ป.4/2, ค 6.1 ป.4/3,

ค 6.1 ป.4/4, ค 6.1 ป.4/5 , ค 6.1 ป.4/6

หน่วยที่ 2 การคูณ เวลา 12 ชั่วโมง

ศึกษา ฝึกทักษะการคิดคำนวณ การคิดเชิงสัมพันธ์และฝึกการแก้ปัญหาเกี่ยวกับ**ความรู้**ในเรื่องการคูณจำนวนหนึ่งหลักกับจำนวนมากกว่าสี่หลัก การคูณจำนวนมากกว่าหนึ่งหลักกับจำนวนมากกว่าสองหลัก โจทย์ปัญหาการคูณจำนวนหนึ่งหลักกับจำนวนมากกว่าสี่หลัก โจทย์ปัญหาการคูณจำนวนมากกว่าหนึ่งหลักกับจำนวนมากกว่าสองหลัก การสร้างโจทย์ปัญหาการคูณ โดยจัดประสบการณ์มุ่งเน้นให้นักเรียนได้ใช้**ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์** ได้แก่ ความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำเสนอ และการเชื่อมโยงความรู้ เพื่อให้ผู้เรียนมี**คุณลักษณะ** ที่ต้องการคือมีความตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ

รหัสตัวชี้วัด

ค 1.2 ป. 4/1, ค 1.2 ป. 4/2, ค 6.1 ป.4/1, ค 6.1 ป.4/2, ค 6.1 ป.4/3,
ค 6.1 ป.4/4, ค 6.1 ป.4/5, ค 6.1 ป.4/6

หน่วยที่ 3 การหาร เวลา 16 ชั่วโมง

ศึกษา ฝึกทักษะการคิดคำนวณ การคิดเชิงสัมพันธ์และฝึกการแก้ปัญหาเกี่ยวกับ**ความรู้**ในเรื่องการหารที่ตัวหารไม่เกินสามหลัก โจทย์ปัญหาการหารที่ตัวหารไม่เกินสามหลัก การบวก ลบ คูณ หารระคน การเฉลี่ย โจทย์ปัญหาการบวก ลบ คูณ หารระคน การสร้าง โจทย์ปัญหาการบวก การลบ การคูณ การหาร โดยจัดประสบการณ์มุ่งเน้นให้นักเรียนได้ใช้**ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์** ได้แก่ ความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำเสนอ และการเชื่อมโยงความรู้ เพื่อให้ผู้เรียนมี**คุณลักษณะ**ที่ต้องการคือมีความตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ

รหัสตัวชี้วัด

ค 1.2 ป. 4/1, ค 1.2 ป. 4/2, ค 6.1 ป.4/1, ค 6.1 ป.4/2, ค 6.1 ป.4/3,
ค 6.1 ป.4/4, ค 6.1 ป.4/5 ค 6.1 ป.4/6

1.4 จัดทำโครงสร้างรายหน่วย รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เรื่องการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับและศูนย์ ดังตารางที่ 8 ตารางที่ 8 โครงสร้างรายหน่วย

ชื่อหน่วยการเรียนรู้	ตัวชี้วัด	สาระการเรียนรู้	เวลา (ชั่วโมง)
1.การบวกและการลบ	ค 1.2 ป.4/1	การบวกและการลบ <ul style="list-style-type: none"> • การบวกจำนวนที่หลายหลัก <ul style="list-style-type: none"> - การบวกจำนวนที่หลายหลักสองจำนวน 3 - การบวกจำนวนสามจำนวน 1 • การลบจำนวนที่หลายหลัก <ul style="list-style-type: none"> - การลบจำนวนที่หลายหลักสองจำนวน <ul style="list-style-type: none"> • การลบจำนวนสองจำนวนที่ตัวตั้งมากกว่า 10,000 และไม่มีการกระจาย 1 • การลบจำนวนสองจำนวนที่ตัวตั้งมากกว่า 10,000 และมีกระจาย 1 • การบวก ลบระคน (2) • โจทย์ปัญหาการบวกและการลบ (2) • โจทย์ปัญหาการบวก ลบระคน (2) 	12
	ค 1.2 ป.4/2		(4)
	ค 6.1 ป.4/1		
	ค 6.1 ป.4/2		
	ค 6.1 ป.4/3		(2)
	ค 6.1 ป.4/4		
	ค 6.1 ป.4/5		
	ค 6.1 ป.4/6		

ตารางที่ 8 (ต่อ) โครงสร้างรายหน่วย

ชื่อหน่วย การเรียนรู้	ตัวชี้วัด	สาระการเรียนรู้	เวลา (ชั่วโมง)
2.การคูณ	ค 1.2 ป.4/1	การคูณ	12
	ค 1.2 ป.4/2	• การคูณจำนวนหนึ่งหลักกับจำนวนที่มากกว่าสี่หลัก	(1)
	ค 6.1 ป.4/1	• การคูณจำนวนสองหลักกับจำนวนสามหลัก	(4)
	ค 6.1 ป.4/2	- การคูณจำนวนที่เป็นพหุคูณของ 10 กับจำนวนสามหลัก	1
	ค 6.1 ป.4/3	- การคูณจำนวนสองหลักกับ 100, 200, 300, ..., 900	2
	ค 6.1 ป.4/4	- การคูณจำนวนสองหลักกับจำนวนสามหลัก	1
	ค 6.1 ป.4/5	• การคูณจำนวนหลายหลัก	(4)
	ค 6.1 ป.4/6	- การคูณจำนวนสามหลักกับจำนวนสามหลัก - การคูณจำนวนที่มากกว่าสามหลักกับจำนวนที่มากกว่าสามหลัก	2 2
	• โจทย์ปัญหาการคูณจำนวนหนึ่งหลักกับจำนวน มากกว่าสี่หลัก	(1)	
	• โจทย์ปัญหาการคูณจำนวนมากกว่าหนึ่งหลักกับจำนวน มากกว่าสองหลัก	(2)	
3.การหาร	ค 1.2 ป.4/1	การหาร	16
	ค 1.2 ป.4/2	• การหารที่ตัวหารมีหนึ่งหลัก	(3)
	ค 6.1 ป.4/1	- การหารซึ่งตัวตั้งเป็นพหุคูณของ 10 100 1,000 และตัวหารเป็นจำนวนที่มีหนึ่งหลัก	1
	ค 6.1 ป.4/2	- การหารที่ตัวตั้งไม่เกินสี่หลักและตัวหารมีหนึ่งหลัก	1
	ค 6.1 ป.4/3	- การหารสั้น	1
	ค 6.1 ป.4/4	• การหารที่ตัวหารมีสองหลัก	(4)
	ค 6.1 ป.4/5	- การหารด้วย 10, 20, 30, ..., 90 ผลหารมีหนึ่งหลัก	1
	ค 6.1 ป.4/6	- การหารด้วย 10, 20, 30, ..., 90 ผลหารมีสองหลัก	1
		- การหารที่ตัวหารมีสองหลัก	2
		• การหารที่ตัวหารมีสามหลัก	(2)
		• การบวก ลบ คูณ หารระคน	(2)
		• การเฉลี่ย	(1)
	• โจทย์ปัญหาการหารที่ตัวหารไม่เกินสามหลัก	(2)	
	• โจทย์ปัญหาการบวก ลบ คูณ หารระคน	(2)	

1.5 จัดทำโครงสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์
 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เรื่องการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับและศูนย์ ดังตารางที่ 9

ตารางที่ 9 โครงสร้างแผนการจัดการเรียนรู้

ชื่อหน่วย การเรียนรู้	แผนการ จัดการเรียนรู้ ที่	สาระการเรียนรู้	เวลา (ชั่วโมง)
1. การบวก และ การลบ	1-3	การบวกและการลบ <ul style="list-style-type: none"> การบวกจำนวนที่หลายหลัก <ul style="list-style-type: none"> - การบวกจำนวนที่หลายหลักสองจำนวน 	3
	4	<ul style="list-style-type: none"> - การบวกจำนวนสามจำนวน 	1
	5	<ul style="list-style-type: none"> การลบจำนวนที่หลายหลัก <ul style="list-style-type: none"> - การลบจำนวนที่หลายหลักสองจำนวน <ul style="list-style-type: none"> • การลบจำนวนสองจำนวนที่ตัวตั้งมากกว่า 10,000 และไม่มีการกระจาย 	1
	6	<ul style="list-style-type: none"> • การลบจำนวนสองจำนวนที่ตัวตั้งมากกว่า 10,000 และมีการกระจาย 	1
	7-8	<ul style="list-style-type: none"> การบวก ลบระคน 	2
	9-10	<ul style="list-style-type: none"> โจทย์ปัญหาการบวกและการลบ 	2
	11-12	<ul style="list-style-type: none"> โจทย์ปัญหาการบวก ลบระคน 	2
	2. การคูณ	13	การคูณ <ul style="list-style-type: none"> การคูณจำนวนหนึ่งหลักกับจำนวนที่มากกว่าสี่หลัก
14		<ul style="list-style-type: none"> การคูณจำนวนสองหลักกับจำนวนสามหลัก <ul style="list-style-type: none"> - การคูณจำนวนที่เป็นพหุคูณของ 10 กับจำนวนสามหลัก 	1
15		<ul style="list-style-type: none"> - การคูณจำนวนสองหลักกับ 100 	1

ตารางที่ 9 (ต่อ) โครงสร้างแผนการจัดการเรียนรู้

ชื่อหน่วย การเรียนรู้	แผนการ จัดการ เรียนรู้ที่	สาระการเรียนรู้	เวลา (ชั่วโมง)
	16	- การคูณจำนวนสองหลักกับ 200, 300,...,900	1
	17	- การคูณจำนวนสองหลักกับจำนวนสามหลัก	1
	18-19	• การคูณจำนวนหลายหลัก - การคูณจำนวนสามหลักกับจำนวนสามหลัก	2
	20-21	- การคูณจำนวนที่มากกว่าสามหลักกับจำนวนที่มากกว่าสามหลัก	2
	22	• โจทย์ปัญหาการคูณจำนวนหนึ่งหลักกับจำนวน มากกว่าสี่หลัก • โจทย์ปัญหาการคูณจำนวนมากกว่าหนึ่งหลักกับจำนวนมากกว่าสองหลัก	1
	23-24		2
3. การหาร		การหาร	
	25	• การหารที่ตัวหารมีหนึ่งหลัก - การหารซึ่งตัวตั้งเป็นพหุคูณของ 10 100 1,000 และตัวหารเป็นจำนวนที่มีหนึ่งหลัก	1
	26	- การหารที่ตัวตั้งไม่เกินสี่หลักและตัวหารมีหนึ่งหลัก	1
	27	- การหารสั้น • การหารที่ตัวหารมีสองหลัก	1
	28	- การหารด้วย 10, 20, 30,...,90 ผลหารมีหนึ่งหลัก	1
	29	- การหารด้วย 10, 20, 30,...,90 ผลหารมีสองหลัก	1
	30-31	- การหารที่ตัวหารมีสองหลัก	2
	32-33	• การหารที่ตัวหารมีสามหลัก	2
	34-35	• การบวก ลบ คูณ หารระคน	2
	36	• การเฉลี่ย	1
	37-38	• โจทย์ปัญหาการหารที่ตัวหารไม่เกินสามหลัก	2
	39-40	• โจทย์ปัญหาการบวก ลบ คูณ หารระคน	2
		รวม	40

1.6 เขียนแผนการจัดการเรียนรู้ โดยแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ใช้เวลา 1 ชั่วโมง ซึ่งประกอบด้วย ชื่อเรื่อง จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ การวัดและประเมินผล โดยกำหนดขั้นตอนหลัก 4 ขั้นตอนของ

กระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่สร้างขึ้นสอดคล้องกับแผนการจัดการเรียนรู้ปกติ แผนละ 2 ชั้นตอน ดังนั้นในกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน 1 รอบ จะใช้เวลา 2 ชั่วโมง หรือ 2 แผนการจัดการเรียนรู้

1.7 พัฒนาสื่อการเรียนรู้ โดยจัดทำสื่อเป็นบัตรประโยคสัญลักษณ์ตามกิจกรรมในแผนการจัดการเรียนรู้

2. สร้างและพัฒนาเครื่องมือเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล เพื่อประเมินผลกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษาที่พัฒนาขึ้น โดยพัฒนาเครื่องมือเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่ แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ซึ่งเป็นแบบวัดที่มีลักษณะข้อคำถามเป็นแบบปลายเปิดแล้วให้นักเรียนแสดงวิธีคิดและให้เหตุผลประกอบ นอกจากนี้ประเมินจากแบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน และแบบสัมภาษณ์ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยมีการดำเนินการสร้างดังนี้

2.1 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต เป็นแบบวัดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อใช้ในการทดสอบความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน ซึ่งความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา ในงานวิจัยนี้หมายถึงความสามารถของนักเรียนในการแสดงเหตุผลเกี่ยวกับวิธีคิดหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน และการดำเนินการที่เกี่ยวข้อง โดยไม่เน้นการคิดคำนวณ ซึ่งอาจอยู่ในรูปของการอธิบายหรือแสดงวิธีคิดด้วยภาพที่ใช้ลูกศรเชื่อมโยงแสดงการให้เหตุผล หรือคำอธิบายโดยใช้ภาษาของนักเรียนเอง การให้เหตุผลสนับสนุนการคิดด้วยข้อความคาดการณ์ หรือการอ้างรูปทั่วไปประกอบคำตอบได้อย่างสมเหตุสมผล โดยจะให้ทดสอบนักเรียนทั้งก่อนและหลังการทดลอง ผู้วิจัยดำเนินการสร้างดังนี้

- 1) ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับวิธีการสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา จากตำรา เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
- 2) ศึกษาหลักสูตรและกำหนดขอบเขตเนื้อหาที่จะสร้างแบบทดสอบของวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช

3) วิเคราะห์เนื้อหาและพฤติกรรมที่ต้องการทดสอบ เพื่อกำหนดกรอบเนื้อหาของแบบทดสอบ ซึ่งแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา เป็นเครื่องมือเพื่อใช้ในการตรวจสอบความสามารถของนักเรียนในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ไม่ใช่แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ดังนั้นกรอบเนื้อหาที่ใช้ในการสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับศึกษานี้ ผู้วิจัยดำเนินการสร้างแบบวัดตามประเภทของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในฐานะที่เป็นรูปทั่วไปของเลขคณิต ซึ่งแบ่งออกเป็น 5 ด้านคือ

- (1) สมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน
 - (2) สมบัติของการดำเนินการของจำนวน
 - (3) การเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน
 - (4) การแก้ปัญหาประโยคจำนวนที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวน
 - (5) การมองจำนวนในเชิงพีชคณิต
- โดยมีรายละเอียดแต่ละด้านดังนี้

- (1) สมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน

1.1 “จำนวนใดบวกกับศูนย์ย่อมได้ผลบวกเท่ากับจำนวนนั้น”

$$\text{รูปทั่วไป } a + 0 = a$$

1.2 “จำนวนเดียวกันเมื่อนำมาลบกันผลลบจะเท่ากับศูนย์”

$$\text{รูปทั่วไป } a - a = 0$$

1.3 “จำนวนใดคูณกับหนึ่งย่อมได้ผลคูณเท่ากับจำนวนนั้น”

$$\text{รูปทั่วไป } a \times 1 = a$$

1.4 “จำนวนใดหารด้วยหนึ่งย่อมได้ผลหารเท่ากับจำนวนนั้น”

$$\text{รูปทั่วไป } a \div 1 = a$$

- (2) สมบัติของการดำเนินการของจำนวน

2.1 “สมบัติการสลับที่ของการบวก”

$$\text{รูปทั่วไป } a + b = b + a$$

2.2 “สมบัติการสลับที่ของการคูณ”

$$\text{รูปทั่วไป } a \times b = b \times a$$

2.3 “สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก”

$$\text{รูปทั่วไป } (a + b) + c = a + (b + c)$$

2.4 “สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ”

$$\text{รูปทั่วไป } (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

(3) การเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน

3.1 การแสดงความสัมพันธ์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ

โดยการบวก

3.2 การแสดงความสัมพันธ์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ

โดยการลบ

3.3 การแสดงความสัมพันธ์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ

โดยการคูณ

3.4 การแสดงความสัมพันธ์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ

โดยการหาร

(4) การแก้ปัญหาค่าปริยายที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวน

4.1 รูปทั่วไป $a + b = \square + c$

4.2 รูปทั่วไป $a + \square = b + c$

4.3 รูปทั่วไป $a - b = c - \square$

4.4 รูปทั่วไป $\square - a = b - c$

(5) การมองจำนวนในเชิงพีชคณิต

5.1 จำนวนคู่รวมกับจำนวนคี่ย่อมเป็นจำนวนคี่

5.2 จำนวนคี่รวมกับจำนวนคี่ย่อมเป็นจำนวนคู่

5.3 จำนวนคู่คูณกับจำนวนคี่ย่อมเป็นจำนวนคู่

5.4 จำนวนคี่คูณกับจำนวนคี่ย่อมเป็นจำนวนคี่

4) สร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ซึ่งลักษณะของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนี้เป็นเครื่องมือเพื่อใช้ในการตรวจสอบความสามารถของนักเรียนในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต จึงเป็นแบบวัดที่มีลักษณะข้อคำถามแบบปลายเปิด เพื่อให้นักเรียนแสดงผลเกี่ยวกับวิธีคิดแบบวัดมี 2 ฉบับที่เป็นคู่ขนานกัน ฉบับละ 20 ข้อ โดยจะใช้ทดสอบนักเรียนก่อนและหลังการทดลอง

5) สร้างเกณฑ์การให้คะแนนการวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตตามสภาพจริง

6) นำแบบวัดและเกณฑ์การให้คะแนนที่สร้างเสร็จไปให้ผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 ท่าน (รายชื่อในภาคผนวก ก) ตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหา และความสอดคล้องตาม จุดประสงค์กับพฤติกรรมที่ต้องการวัด ลักษณะการใช้คำถามและการใช้ภาษา โดยกำหนด คุณสมบัติของผู้เชี่ยวชาญ เป็นผู้ที่มีความเชี่ยวชาญด้านการสอนวิชาคณิตศาสตร์ หรือเป็นผู้มี คุณวุฒิการศึกษาด้านการสอนวิชาคณิตศาสตร์ไม่ต่ำกว่าระดับมหาบัณฑิต จากนั้นนำมาปรับปรุง แก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ ซึ่งได้เสนอแนะปรับปรุงแก้ไขแบบวัดความสามารถในการ ให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา ดังนี้คือ

(1) การให้ความคิดเห็นได้ถูกต้องหรือไม่ถูกต้องนั้นไม่ควรนำมาเป็น เกณฑ์ให้คะแนน เนื่องจากเป็นแบบวัดเพื่อต้องการดูว่านักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผล เชิงพีชคณิตหรือไม่เท่านั้น

(2) ปรับเกณฑ์การให้คะแนนเป็น 0-2 เนื่องจากความสามารถในการให้ เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษาในงานวิจัยนี้หมายถึงความสามารถของนักเรียนใน การแสดงเหตุผลเกี่ยวกับวิธีคิดหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนและการดำเนินการที่เกี่ยวข้อง โดยไม่เน้นการคิดคำนวณ ซึ่งอาจอยู่ในรูปของการอธิบายหรือแสดงวิธีคิดด้วยภาพที่ใช้ลูกศร เชื่อมโยงแสดงการให้เหตุผล หรือคำอธิบายโดยใช้ภาษาของนักเรียนเอง การให้เหตุผลสนับสนุน การคิดด้วยข้อความคาดการณ์ หรือการอ้างรูปทั่วไปประกอบคำตอบได้อย่างสมเหตุสมผล ดังนั้น เกณฑ์ในการให้คะแนนควรมีดังนี้

0 คะแนน หมายถึง ไม่ปรากฏข้อความหรือสัญลักษณ์หรือ แผนภาพใดเลย โดยไม่รวมถึงการให้เหตุผลแสดงความคิดที่เป็นการคิดคำนวณ

1 คะแนน หมายถึง มีข้อความสัญลักษณ์หรือแผนภาพแต่ ยังไม่ปรากฏข้อสรุปในรูปแบบข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปแบบทั่วไป

2 คะแนน หมายถึง มีข้อความสัญลักษณ์หรือแผนภาพหรือมี ข้อสรุปในรูปแบบข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปแบบทั่วไป

(3) ปรับภาษาและจัดกลุ่มข้อความที่มีลักษณะเดียวกันไว้ด้วยกัน ผู้วิจัยได้นำข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญมาปรับปรุงแก้ไขโดยมี รายละเอียดของเกณฑ์ในการให้คะแนน ดังแสดงในตารางที่ 10

ตารางที่ 10 เกณฑ์ในการให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับ
ประถมศึกษา

คะแนน	ด้าน	เกณฑ์ในการให้คะแนน
0	1) สมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน	ไม่ปรากฏข้อความ สัญลักษณ์ หรือแผนภาพ เพื่อแสดงให้เห็นสมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน
	2) สมบัติของการดำเนินการของจำนวน	ไม่ปรากฏการใช้ข้อความ สัญลักษณ์ หรือแผนภาพ เพื่ออ้างถึงสมบัติของการดำเนินการของจำนวน
	3) การเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน	ไม่ปรากฏข้อความ สัญลักษณ์ หรือแผนภาพ เพื่ออธิบายเหตุผลในการนำเสนอสมมติการเท่ากันมา
	4) การแก้ปัญหาประโยคจำนวนที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวน	คำนวณหาจำนวนที่หายไป
	5) การมองจำนวนในเชิงพีชคณิต	อธิบายเหตุผลโดยแสดงการคำนวณหาผลลัพธ์ก่อน แล้วจึงสรุปว่า <input type="checkbox"/> เป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ แต่ไม่ปรากฏข้อความ สัญลักษณ์ หรือแผนภาพใดใด ที่กล่าวถึงผลลัพธ์ที่ได้จากการดำเนินการระหว่างจำนวนคู่และจำนวนคี่
1	1) สมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน	มีข้อความ สัญลักษณ์ หรือแผนภาพ เพื่อแสดงให้เห็นสมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน แต่ยังไม่ปรากฏประโยคภาษาหรือประโยคสัญลักษณ์ ในรูปทั่วไป
	2) สมบัติของการดำเนินการของจำนวน	มีการแสดงเหตุผลโดยใช้การคำนวณผลลัพธ์ แต่มีข้อความ สัญลักษณ์ หรือแผนภาพ เพื่ออ้างถึงสมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน แต่ยังไม่ถูกต้องชัดเจน
	3) การเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน	ใช้วิธีการคำนวณ ที่มีข้อความ สัญลักษณ์ หรือแผนภาพ ในการนำเสนอสมมติการเท่ากันมาคำนวณหาจำนวนที่หายไป แต่ไม่ปรากฏหลักฐานที่บ่งบอกว่าจำนวนที่มาแทนที่ <input type="checkbox"/> นั้นต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ผลลัพธ์ของเครื่องหมายเท่ากับมีจำนวนเท่ากัน
	4) การแก้ปัญหาประโยคจำนวนที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวน	
	5) การมองจำนวนในเชิงพีชคณิต	มีการนำข้อสรุปผลลัพธ์ที่ได้จากการดำเนินการระหว่างจำนวนคู่และจำนวนคี่มาอ้างอิงในการอธิบายวิธีหาคำตอบที่ไม่ได้เกิดจากการคำนวณ แต่ไม่สมบูรณ์

ตารางที่ 10 (ต่อ) เกณฑ์ในการให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับ
ประถมศึกษา

คะแนน	ด้าน	เกณฑ์ในการให้คะแนน
2	1) สมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน	มีข้อความ สัญลักษณ์ หรือแผนภาพ เพื่อแสดงให้เห็นสมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน และอยู่ในรูปทั่วไป
	2) สมบัติของการดำเนินการของจำนวน	มีการแสดงเหตุผลโดยไม่ใช้การคำนวณผลลัพธ์ แต่แสดงเหตุผลโดยใช้ข้อความ สัญลักษณ์ หรือแผนภาพ เพื่ออ้างถึงสมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวนในรูปทั่วไป อย่างถูกต้องชัดเจน
	3) การเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน	ใช้วิธีการคำนวณ ที่มีข้อความ สัญลักษณ์ หรือแผนภาพ ในการนำสมบัติการเท่ากันมาคำนวณหาจำนวนที่หายไป พร้อมทั้งมีหลักฐานที่บ่งบอกว่าจำนวนที่มาแทนที่ <input type="checkbox"/> นั้นต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ผลลัพธ์ของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน หรือใช้การแทนค่า <input type="checkbox"/> ด้วยจำนวนใดจำนวนหนึ่งจนกว่าจะได้จำนวนที่ทำให้ผลลัพธ์ของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน
	4) การแก้ปัญหาระยะจำนวนที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวน	
	5) การมองจำนวนในเชิงพีชคณิต	มีการนำข้อสรุปผลลัพธ์ที่ได้จากการดำเนินการระหว่างจำนวนคู่และจำนวนคี่มาอ้างอิงเหตุผลในการตอบโดยไม่ใช้การคำนวณได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์

7) นำแบบวัดและเกณฑ์การให้คะแนนมาพิจารณาปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ และนำแบบวัดที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง เพื่อตรวจสอบความเข้าใจและความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ของข้อสอบแต่ละข้อของแบบวัด

8) นำผลการตรวจสอบความเข้าใจและความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ของข้อสอบแต่ละข้อของแบบวัด มาปรับปรุงแบบวัดจนได้แบบวัดฉบับสมบูรณ์ที่พร้อมจะนำไปใช้ในการทดสอบก่อนทดลองและหลังทดลอง

2.2 แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน

แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน เป็นแบบบันทึกที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อใช้บันทึกสิ่งที่เกิดขึ้นในขณะที่ดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอน โดยมีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

- 1) ศึกษาขั้นตอนกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนและสภาพการจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน
- 2) กำหนดประเด็นหลักสำคัญในการบันทึก
- 3) สร้างแบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน
- 4) นำแบบบันทึกที่สร้างขึ้นไปให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความเหมาะสมและครอบคลุมพฤติกรรมที่ต้องการสังเกต
- 5) ปรับปรุงแก้ไขแบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญ

2.3 แบบสัมภาษณ์นักเรียนในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

แบบสัมภาษณ์นักเรียนในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นเครื่องมือวิจัยเพื่อใช้ในการเก็บข้อมูลเชิงลึก ซึ่งประกอบด้วยชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ และแบบสัมภาษณ์

- 1) ชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา เพื่อที่จะดูการดำเนินการหาคำตอบของนักเรียนได้โดยตรงว่ามีพฤติกรรมในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษาหรือไม่ ในชุดคำถามประกอบด้วยส่วนของโจทย์คำถามและส่วนเขียนตอบที่ให้นักเรียนแสดงวิธีคิดหาคำตอบ มีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

(1) ศึกษาลักษณะของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อใช้เป็นแนวทางในการกำหนดโจทย์คำถามเพื่อสัมภาษณ์เชิงลึก

(2) สร้างชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ ซึ่งมี 5 ชุดคือ สมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน สมบัติของการดำเนินการของจำนวน การเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน การแก้ปัญหาประโยคจำนวนที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวน และการมองจำนวนในเชิงพีชคณิต

(3) นำชุดคำถามที่สร้างขึ้นให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสมของโจทย์คำถาม และความสอดคล้องกับแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

(4) ปรับปรุงแก้ไขชุดคำถามตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญ

2) แบบสัมภาษณ์

แบบสัมภาษณ์ ประกอบด้วยแนวคำถามที่ใช้ประกอบการสัมภาษณ์แบบเจาะลึกเกี่ยวกับการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา ตามชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ ซึ่งมี 5 ชุด โดยมีคำถามตามประเด็นเป็นคำถามเพื่อให้ได้ข้อมูลลึกลงไปมากขึ้น มีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

(1) ศึกษาโจทย์คำถามจากชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ เพื่อสร้างประเด็นหรือข้อคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ให้สอดคล้องกับโจทย์คำถามแต่ละข้อ

(2) สร้างแบบสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างโดยมีประเด็นที่จะถามชัดเจน เพื่อให้ทราบถึงวิธีการคิดหาคำตอบของนักเรียนในชุดคำถามทั้ง 5 ชุด

(3) นำประเด็นคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ไปให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม

(4) นำชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์และแบบสัมภาษณ์ที่ปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์และความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ในการสัมภาษณ์

(5) นำผลของการทดลองใช้และข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญมาปรับปรุงแก้ไขชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์และแบบสัมภาษณ์

ระยะที่ 3 การทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษาที่พัฒนาขึ้น ประกอบไปด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้

- 1) กำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
- 2) ดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน
- 3) วิเคราะห์ข้อมูล

1. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 4-6 สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษากรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนดาราคาม กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยมีรายละเอียดในการเลือกกลุ่มตัวอย่างดังนี้

1.1 กำหนดเกณฑ์ในการพิจารณาคัดเลือกโรงเรียน ดังนี้

- 1) เป็นโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษา
ประถมศึกษากรุงเทพมหานคร
- 2) เป็นโรงเรียนที่มีการจัดนักเรียนแต่ละห้องแยกคละระดับ
ความสามารถ
- 3) มีจำนวนนักเรียนในห้องไม่เกิน 30 คน
- 4) เป็นนักเรียนที่มาจากครอบครัวหลากหลายอาชีพ

1.2 การคัดเลือกโรงเรียนที่ใช้ทดลองโดยการเลือกแบบเจาะจง (Purposive Sampling) โดยเลือกโรงเรียนดาราคาม กรุงเทพมหานคร สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษากรุงเทพมหานคร

1.3 การคัดเลือกห้องเรียน ผู้วิจัยคัดเลือกห้องเรียนเพื่อเป็นห้องทดลองและห้องควบคุม ด้วยวิธีการดังนี้

1) นำผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ภาคปลายของนักเรียนทุกห้องเรียนมาหาค่าเฉลี่ย แล้วเลือกสองห้องเรียนที่นักเรียนมีระดับเกรดเฉลี่ยใกล้เคียงกัน พบว่าห้องเรียนที่มีเกรดเฉลี่ยใกล้เคียงกันสองห้องคือ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4/1 มีเกรดเฉลี่ย 3.38 คะแนน และชั้นประถมศึกษาปีที่ 4/2 มีเกรดเฉลี่ย 3.61 คะแนน

2) นำมาทดสอบความแปรปรวนโดยใช้การทดสอบค่าเอฟ (F-test) พบว่าความแปรปรวนไม่แตกต่างกัน จึงทำการทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของเกรดเฉลี่ยก่อนการทดลองด้วยการทดสอบที (t-test) ซึ่งพบว่าไม่แตกต่างกัน แสดงว่านักเรียนทั้งสองห้องมีความรู้พื้นฐานไม่แตกต่างกัน

1.4 การสุ่มเพื่อใช้เป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ใช้วิธีการจับสลาก ปรากฏว่าสุ่มได้นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4/2 เป็นกลุ่มทดลอง และชั้นประถมศึกษาปีที่ 4/1 เป็นกลุ่มควบคุม

2. ดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

ผู้วิจัยดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน โดยดำเนินการดังนี้

2.1 การกำหนดแบบแผนการทดลอง

ในการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษาชั้นนี้ ผู้วิจัยใช้วิธีการวิจัยแบบกึ่งทดลอง (Quasi-Experimental Research) ซึ่งเป็นแบบการทดลองที่มีกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง และมีการทดสอบก่อนและหลังการทดลอง(The Pretest-Posttest Control Group Design) ดังแบบแผนการทดลองในตารางที่ 11 ดังนี้

ตารางที่ 11 แบบแผนการทดลอง

กลุ่มตัวอย่าง	การวัดก่อนการทดลอง		การวัดหลังการทดลอง
E	O ₁	X	O ₂
C	O ₃		O ₄

E คือ กลุ่มทดลอง

C คือ กลุ่มควบคุม

O₁, O₃ คือ ผลที่วัดก่อนการทดลอง

O₂, O₄ คือ ผลที่วัดหลังการทดลอง

X คือ ตัวแปรจัดกระทำ (การเรียนโดยใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้

แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต)

2.2 การดำเนินการก่อนการทดลองใช้กระบวนการเรียน

การสอน

1) ติดต่อผู้อำนวยการโรงเรียนดาราคามเพื่อประสานขอความร่วมมือในการนำกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นไปทดลองใช้

2) ชี้แจงวัตถุประสงค์ของการวิจัย ขั้นตอนการวิจัย แนวทางในการจัดการเรียนรู้ และการประเมินผลกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นให้แก่ผู้อำนวยการโรงเรียน และครูผู้รับผิดชอบการสอนในวิชาคณิตศาสตร์ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนดาราคาม

3) ประสานความร่วมมือกับผู้รับผิดชอบการสอนในวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนดาราคาม ในการจัดทำกำหนดการสอน ตารางสอน และขอบเขตเนื้อหาที่ทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

2.3 การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

การดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น และเก็บรวบรวมข้อมูล มีขั้นตอนดังนี้

1) การดำเนินการก่อนการทดลอง ผู้วิจัยดำเนินการวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษาทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ผลการทดสอบความแปรปรวนของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตก่อนเรียน ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 แสดงว่านักเรียนทั้งสองกลุ่มมีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตไม่แตกต่างกัน

2) การดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน ผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการสอนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม รวมสองห้อง ห้องละ 40 ชั่วโมง เป็นเวลา 10 สัปดาห์ ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 ตั้งแต่เดือนกรกฎาคม 2553 ถึงเดือนกันยายน 2553 เนื้อหาที่ใช้ในการจัดการเรียนการสอนในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมใช้เนื้อหาเดียวกันคือ รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 บทที่ 2 การบวกและการลบ บทที่ 4 การคูณ และบทที่ 5 การหาร โดยกลุ่มทดลองดำเนินการเรียนการสอนตามกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ส่วนกลุ่มควบคุมดำเนินการเรียนการสอนตามแบบปกติซึ่งเป็นไปตามแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยแสดงการเปรียบเทียบแนวการสอนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ดังตารางที่ 12

ตารางที่ 12 เปรียบเทียบแนวการสอนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<p>1. ชั้นนำ (5 นาที)</p> <p>เป็นขั้นทบทวนพื้นฐานความรู้เดิมของนักเรียนก่อนนำเข้าสู่เนื้อหาใหม่ โดยใช้ยุทธวิธีต่าง ๆ ในการทบทวนความรู้เดิม เช่น การนำประโยคสัญลักษณ์มาให้ให้นักเรียนพิจารณา อภิปรายหาคำตอบ การสนทนาซักถาม การตอบคำถามครูด้วยการคิดในใจ การเล่นเกม การทบทวนเรื่องเดิม โดยการยกตัวอย่างประกอบสื่อ</p>	<p>1. ชั้นนำ (5 นาที)</p> <p>เป็นขั้นทบทวนพื้นฐานความรู้เดิมของนักเรียนก่อนนำเข้าสู่เนื้อหาใหม่ โดยใช้ยุทธวิธีต่าง ๆ ในการทบทวนความรู้เดิม เช่น การนำประโยคสัญลักษณ์มาให้ให้นักเรียนพิจารณา อภิปรายหาคำตอบ การสนทนาซักถาม การตอบคำถามครูด้วยการคิดในใจ การเล่นเกม การทบทวนเรื่องเดิมโดยการยกตัวอย่างประกอบสื่อ</p>

ตารางที่ 12 เปรียบเทียบแนวการสอนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม (ต่อ)

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<p>2. ชั้นสอน</p> <p>ช่วงที่ 1 (15 นาที)</p> <p>เป็นขั้นที่ใช้กระบวนการเรียนการสอนที่สร้าง ชั้น 4 ขึ้นตอน โดย</p> <p>ขั้นที่ 1 และ 2 ใช้ในชั่วโมงที่ 1,3,5,...,39</p> <p>ขั้นที่ 3 และ 4 ใช้ในชั่วโมงที่ 2,4,6,...,40 ดังนี้</p> <p>ขั้นที่ 1 การค้นหาความสัมพันธ์ ครูให้นักเรียน สังเกตหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน ที่อยู่ข้าง ซ้ายและข้างขวาของเครื่องหมายเท่ากับ โดยที่ จำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับนั้น จะต้องมีค่าเท่ากันเสมอ ด้วยการนำโจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการ เท่ากัน ที่สามารถใช้แนวความคิดเชิงสัมพันธ์ในการ หาคำตอบโดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ มา เป็นประเด็นให้นักเรียนอภิปราย สังเกต ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของ เครื่องหมายเท่ากับ และเมื่อประเมินด้วย การ สอบถามแล้วพบว่า นักเรียนไม่สามารถบอก หรือ ระบุความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนได้ ครู เสริมต่อ การเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการใช้คำถามเพื่อชี้ นำ กระตุ้นให้นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์ และ สนับสนุนให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น อภิปรายร่วมกัน</p> <p>ขั้นที่ 2 การใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ โดยการนำ โจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหา เกี่ยวกับการเท่ากันจากขั้นที่ 1 ที่นักเรียนสังเกต พบความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของ เครื่องหมายเท่ากับแล้ว ให้นักเรียนหาคำตอบ</p>	<p>2. ชั้นสอน (35 นาที)</p> <p>เป็นชั้นสอนเนื้อหาใหม่ ซึ่งครูจัดกิจกรรม โดยใช้ของจริง หรือโดยใช้รูปภาพ หรือโดยใช้ สัญลักษณ์ ประกอบการอธิบายยกตัวอย่าง ซึ่งดำเนินจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามสาระ การเรียนรู้แกนกลาง รายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ตาม หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เรื่องการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับและศูนย์ กับคู่มือ ครูและหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ของ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และ เทคโนโลยี (สสวท.) ในบทที่ 2 การบวกและ การลบ บทที่ 4 การคูณ และบทที่ 5 การหาร</p> <p>3. ชั้นสรุป (5 นาที)</p> <p>เป็นชั้นของการให้นักเรียนช่วยกันสรุป สาระสำคัญของเรื่องที่เรียนเป็นวิธีคิด</p> <p>4. ชั้นฝึกทักษะ (15 นาที)</p> <p>เป็นชั้นการนำความรู้ที่ได้รับไปใช้โดย การฝึกทักษะจากหนังสือเรียน หรือบัตรงาน</p>

ตารางที่ 12 เปรียบเทียบแนวการสอนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม (ต่อ)

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<p>โดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ด้วยวิธีการสังเกต เปรียบเทียบใช้เทคนิคการเพิ่ม หรือลด หรือสลับที่ หรือเปลี่ยนกลุ่มของจำนวนที่เท่ากันทั้งสองข้าง เมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่านักเรียนไม่ได้ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์มาช่วยในการหาคำตอบ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการยกตัวอย่างแสดงให้เห็นถึงวิธีการคิดที่ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และอธิบายประกอบโดยการเขียนภาพลูกศร เชื่อมโยงระหว่างจำนวน เพื่อให้นักเรียนได้เห็นแนวทางในการคิด หลังจากนั้นจึงให้นักเรียนเขียนบันทึกแสดงการคิด</p> <p>ขั้นที่ 3 การสร้างข้อสรุป โดยการนำโจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากันจากขั้นที่ 2 ที่นักเรียนหาคำตอบโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ให้นักเรียนนำข้อสังเกตจากความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ มาเขียนสรุป ซึ่งอาจเขียนสรุปเป็นข้อความ คาคาการณ์ คือการเขียนสรุปในสิ่งที่สังเกตได้เป็น คำกล่าว หรือข้อความที่คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง แล้วตรวจสอบความถูกต้องโดยการยกตัวอย่าง ประโยคสัญลักษณ์ที่คล้ายกันมาสนับสนุน คัดค้าน หรือยืนยันข้อสรุปที่ได้ หรือเขียนสรุปในรูปทั่วไป คือการเขียนสรุปในสิ่งที่สังเกตได้ในรูปประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวแปรแทนจำนวนใด ๆ ตัวแปรนี้อาจเขียนเป็นรูปต่าง ๆ เช่น</p>	

ตารางที่ 12 เปรียบเทียบแนวการสอนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม (ต่อ)

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<p>□, △, ○ หรือ พยัญชนะภาษาไทย หรือ พยัญชนะภาษาอังกฤษ การตรวจสอบความถูกต้องของข้อสรุปในรูปทั่วไป ทำเหมือนกับข้อความคาดการณ์ เมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนยังไม่สามารถเขียนสรุปได้ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการใช้คำถามชี้แนะ หรือยกตัวอย่างจนนักเรียนสามารถเขียนสรุปได้</p> <p>ขั้นที่ 4 การตรวจสอบและยืนยัน</p> <p>ข้อสรุป โดยการนำข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปทั่วไปที่นักเรียนสร้างไว้ในขั้นที่ 3 มาตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ เมื่อประเมินนักเรียนด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนไม่สามารถหาเหตุผลโดยการยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่น ๆ มาตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนโดยการสนทนาร่วมกัน พร้อมทั้งยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่น ๆ ให้นักเรียนใช้เป็นแนวทางในการยืนยันข้อสรุปที่สร้างไว้</p> <p>ช่วงที่ 2 (20 นาที)</p> <p>เป็นขั้นสอนเนื้อหาใหม่ ซึ่งครูจัดกิจกรรมโดยใช้ของจริง หรือใช้รูปภาพ หรือโดยใช้สัญลักษณ์ประกอบการอธิบายยกตัวอย่างซึ่งดำเนินจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้แกนกลาง รายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เรื่องการบวก การลบ</p>	

ตารางที่ 12 เปรียบเทียบแนวการสอนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม (ต่อ)

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<p>การคูณ การหารจำนวนนับและศูนย์ กับคู่มือครูและหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้ พื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ของ สสวท. ในบทที่ 2 การบวกและการลบ บทที่ 4 การคูณ และบทที่ 5 การหาร</p> <p>3. ขั้นสรุป (5 นาที) เป็นขั้นของการให้นักเรียนช่วยกันสรุป สาระสำคัญของเรื่องที่เรียนเป็นวิธีลด</p> <p>4. ขั้นฝึกทักษะ (15 นาที) เป็นขั้นการนำความรู้ที่ได้รับไปใช้ โดยการฝึกทักษะจากหนังสือเรียน หรือบัตรงาน</p>	

3) การดำเนินการหลังการทดลอง หลังจากจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผู้วิจัยดำเนินการวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษาทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

3. การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลทั้งเชิงปริมาณ และเชิงคุณภาพ ดังนี้

3.1 การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

ผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์คะแนนจากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษาของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป SPSS/PC⁺ for WINDOW ดังนี้

1) เปรียบเทียบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตก่อนและหลังการทดลองของนักเรียนกลุ่มทดลอง โดยใช้สถิติ t-test สำหรับกลุ่มตัวอย่างที่ไม่เป็นอิสระกันที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05

2) เปรียบเทียบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตหลังการทดลอง ระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมโดยใช้สถิติ t-test สำหรับกลุ่มตัวอย่างที่เป็นอิสระกันที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05

3.2 การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

ผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพโดยการวิเคราะห์และสรุปจากข้อมูลต่อไปนี้

1) ผลจากการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตก่อนและหลังการทดลองของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

2) ผลจากการบันทึกพฤติกรรมการเรียนของนักเรียน ซึ่งได้จากในระหว่างที่ดำเนินการสอนจะมีครูผู้สอนคณิตศาสตร์ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เป็นผู้สังเกตพฤติกรรมการเรียนของนักเรียนโดยใช้แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียนของนักเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งจะสังเกตการแสดงออกของนักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมกลุ่มละ 6 คน ที่ครูผู้สอนคัดเลือกจากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ของแต่ละกลุ่มดังนี้ นักเรียนที่ได้เกรดเฉลี่ย 4.00 จำนวน 2 คน นักเรียนที่ได้เกรดเฉลี่ยตั้งแต่ 3 ขึ้นไปแต่ไม่ถึง 4 จำนวน 2 คน นักเรียนที่ได้เกรดเฉลี่ยตั้งแต่ 2 ขึ้นไปแต่ไม่ถึง 3 จำนวน 2 คน

3) ผลจากการบันทึกการสัมภาษณ์เชิงลึก โดยผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการสัมภาษณ์ในระหว่างการทดลองจนกระทั่งสิ้นสุดการทดลอง โดยสัมภาษณ์นักเรียนในกลุ่มทดลอง 6 คน และนักเรียนในกลุ่มควบคุม 6 คน ซึ่งใช้นักเรียนกลุ่มเดียวกับที่ครูผู้สอนคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 คัดเลือกมาสังเกตพฤติกรรม

ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากผลจากการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตก่อนและหลังการทดลองของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ผลจากการบันทึกพฤติกรรมการเรียนของนักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมกลุ่มละ 6 คน และผลจากการบันทึกการสัมภาษณ์เชิงลึกของนักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมกลุ่มละ 6 คน มาวิเคราะห์พิจารณาจากสิ่งต่าง ๆ ที่แสดงให้เห็นถึงการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา แล้วนำมาจัดเป็นหมวดหมู่เพื่อพิจารณาความสัมพันธ์ของข้อมูลส่วนต่าง ๆ ว่าเป็นผลจากการใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยเน้นแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษา แล้วนำผลของการวิเคราะห์ข้อมูลทั้งหมดที่ได้มานำเสนอในลักษณะพรรณนาความ

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวทางการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา มีผลการวิเคราะห์ข้อมูลแบ่งออกเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวทางการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

ตอนที่ 2 ผลการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวทางการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

ตอนที่ 1 ผลการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวทางการคิดเชิงสัมพันธ์ และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวทางการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ดำเนินการพัฒนาขึ้นจากแนวคิด ทฤษฎี และหลักการจัดการเรียนการสอนตามแนวทางการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ทำให้ได้กระบวนการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต สรุปได้ดังแผนภาพที่ 15

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการ	วัตถุประสงค์
<p>1) การช่วยให้นักเรียนรู้จักการแสดงจำนวนของแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับที่แสดงจำนวนที่เท่ากัน โดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ เสริมต่อการเรียนรู้ด้วยการใช้คำถามชี้้นำให้สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากัน การให้นักเรียนมีส่วนร่วมโดยการอภิปรายแลกเปลี่ยนแนวคิด</p> <p>2) การทำให้มีการยืดหยุ่นในการคิดเกี่ยวกับการดำเนินการทางเลขคณิต ด้วยการเปรียบเทียบการแสดงจำนวนทางเลขคณิต โดยปราศจากการคิดคำนวณ ครูเสริมต่อการเรียนรู้โดยการยกตัวอย่างแสดงวิธีคิดให้นักเรียนเห็นแนวทางในการคิด ใช้คำถามชี้้นำให้นักเรียนกล้าพูดแสดงความคิดเห็นที่ได้จากการสังเกต จำแนกความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนอย่างต่อเนือง</p> <p>3) การจัดให้เปลี่ยนผ่านจากพื้นฐานเลขคณิตสู่พื้นฐานพีชคณิต เสริมต่อการเรียนรู้ โดยการให้นักเรียนแสดงหลักฐานต่าง ๆ เพื่อสนับสนุนและยืนยันการคิด และนำไปสู่การสร้างข้อสรุป มีการตรวจสอบความเข้าใจที่ถูกต้องและชัดเจนของนักเรียน</p>	<p>เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา</p>



ขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน	บทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นที่ 1 การค้นหาความสัมพันธ์	<ol style="list-style-type: none"> นำโจทย์เกี่ยวกับการเท่ากันมาเป็นประเด็นให้นักเรียนอภิปราย ประเมินความเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่อยู่ข้างซ้ายและข้างขวาของเครื่องหมายเท่ากับ ด้วยการสอบถาม ใช้คำถามเพื่อชี้้นำให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากันและหาคำตอบโดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ส่งเสริมให้นักเรียนได้อภิปรายร่วมกัน 	<ol style="list-style-type: none"> ตอบคำถามเกี่ยวกับโจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหาตามความรู้ความเข้าใจเดิม สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากัน เพื่อหาคำตอบโดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ฝึกอธิบายหรือแสดงวิธีคิด มีส่วนร่วมในการอภิปรายโดยแสดงความคิดเห็น
ขั้นที่ 2 การใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์	<ol style="list-style-type: none"> ประเมินความเข้าใจการใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบ ด้วยการสอบถาม ยกตัวอย่างแสดงให้เห็นถึงวิธีคิดเชิงสัมพันธ์ ส่งเสริมให้นักเรียนได้อธิบายหรือแสดงวิธีคิด โดยเลือกวิธีคิดของนักเรียนที่แสดงให้เห็นถึงวิธีคิดเชิงสัมพันธ์มานำเสนอ ตรวจสอบความถูกต้องการเขียนบันทึกแสดงการคิดของนักเรียน 	<ol style="list-style-type: none"> ตอบคำถามโจทย์เกี่ยวกับการเท่ากันตามความรู้ความเข้าใจเดิม ฝึกอธิบายหรือแสดงวิธีคิดเชิงสัมพันธ์ มีส่วนร่วมในการอภิปรายโดยแสดงความคิดเห็น เขียนบันทึกแสดงการคิด
ขั้นที่ 3 การสร้างข้อสรุป	<ol style="list-style-type: none"> ประเมินการสร้างข้อสรุปจากข้อสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับด้วยการสอบถาม ส่งเสริมให้นักเรียนได้สร้างข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปทั่วไป โดยใช้คำถามนำให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่ได้อภิปรายมาแล้วเพื่อให้นักเรียนนำไปสู่เป็นข้อสรุป ตรวจสอบความถูกต้องข้อสรุป 	<ol style="list-style-type: none"> สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์เพื่อนำไปเป็นข้อมูลในการสรุป ฝึกเขียนข้อสรุปจากประโยคสัญลักษณ์ที่มีความสัมพันธ์เหมือนกันมาเป็นข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปทั่วไป
ขั้นที่ 4 การตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป	<ol style="list-style-type: none"> นำข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปทั่วไปที่นักเรียนสร้างไว้มาเป็นประเด็นให้นักเรียนอภิปรายเพื่อนำไปสู่การตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ ประเมินการตรวจสอบ เพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ด้วยการสอบถาม ยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่นที่มีความสัมพันธ์เหมือนกันที่จะนำมาตรวจสอบข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุป 	<ol style="list-style-type: none"> ยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่นที่มีความสัมพันธ์เหมือนกันที่จะนำมาตรวจสอบข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปทั่วไปที่สร้างขึ้นด้วยตนเอง หรือเลียนแบบอย่างของครูหรือเพื่อน มีส่วนร่วมในการอภิปรายและถกเถียงเพื่อยืนยันข้อสรุปที่สร้างไว้



ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต
--

แผนภาพที่ 15 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

รายละเอียดของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิด การเสริมต่อการเรียนรู้มีดังต่อไปนี้

หลักการ

หลักการของกระบวนการเรียนการสอนได้มาจากการสังเคราะห์แนวคิดการคิด เชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ซึ่งหลักการของกระบวนการเรียนการสอนมีดังนี้

1) การช่วยให้นักเรียนรู้จักการแสดงจำนวนของแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับที่แสดง จำนวนที่เท่ากัน โดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ด้วยการใช้คำถามซึ่งนำให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากัน การให้นักเรียนมีส่วนร่วมโดยการอภิปรายแลกเปลี่ยนแนวคิด

หลักการนี้เป็นการช่วยให้นักเรียนรู้จักการแสดงจำนวนของแต่ละข้างของเครื่องหมาย เท่ากับที่แสดงจำนวนที่เท่ากัน โดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ด้วยการใช้ คำถามซึ่งนำให้สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากัน เปิด โอกาสและสนับสนุนนักเรียนเข้ามาร่วมอภิปราย ให้โอกาสนักเรียนพูดในสิ่งที่คิดออกมาดัง ๆ หรือ เขียนแสดงวิธีการคิด หรือแสดงแบบอย่างของการคิดเพื่อเป็นการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ระหว่าง นักเรียนด้วยกัน

2) การทำให้มีการยืดหยุ่นในการคิดเกี่ยวกับการดำเนินการทางเลขคณิต ด้วยการ เปรียบเทียบการแสดงจำนวนทางเลขคณิตโดยปราศจากการคิดคำนวณ ครูเสริมต่อการเรียนรู้โดย การยกตัวอย่างแสดงวิธีคิดให้นักเรียนเห็นแนวทางในการคิด ใช้คำถามซึ่งนำให้นักเรียนกล้าพูด แสดงความคิดเห็นที่ได้จากการสังเกต จำแนกความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนอย่างต่อเนื่อง

หลักการนี้เป็นการทำให้มีการยืดหยุ่นในการคิดเกี่ยวกับการดำเนินการทางเลขคณิต ด้วยการแสดงวิธีคิดหาคำตอบโดยการเปรียบเทียบจำนวน หลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ และเสริมต่อ การเรียนรู้ของนักเรียนให้เข้าใจเกี่ยวกับเรื่องที่เรียนด้วยการช่วยเหลือที่หลากหลายวิธีการ ได้แก่ ครูยกตัวอย่างแสดงวิธีคิดให้เป็นแบบอย่าง ใช้คำถามซึ่งนำให้นักเรียนกล้าพูดแสดงความคิดเห็น ที่ได้จากการสังเกตอย่างสม่ำเสมอ

3) การจัดให้เปลี่ยนผ่านจากพื้นฐานเลขคณิตสู่พื้นฐานพีชคณิต ครูเสริมต่อการเรียนรู้ โดยการให้นักเรียนแสดงหลักฐานต่าง ๆ เพื่อสนับสนุนและยืนยันการคิด และนำไปสู่การสร้าง ข้อสรุป มีการตรวจสอบความเข้าใจที่ถูกต้องและชัดเจนของนักเรียน

หลักการนี้เป็นการจัดให้เปลี่ยนผ่านจากพื้นฐานเลขคณิตสู่พื้นฐานพีชคณิต โดยการให้นักเรียนมุ่งสนใจความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนและการดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับโดยไม่เน้นการคิดคำนวณ นำข้อสังเกตจากความสัมพันธ์ที่พบ มาหาข้อสรุปและหาหลักฐานเพื่อยืนยันหรือคัดค้านข้อสรุปที่พบ และเสริมต่อการเรียนรู้ด้วยการให้โอกาสนักเรียนมีส่วนร่วมหรือแสดงหลักฐานต่าง ๆ เพื่อสนับสนุนและยืนยันการคิด และนำไปสู่การสร้างข้อสรุป มีการตรวจสอบ ความเข้าใจที่ถูกต้องและชัดเจนในการคิดนักเรียน

วัตถุประสงค์

กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีวัตถุประสงค์เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน ประถมศึกษา

เนื้อหา

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ ในระดับประถมศึกษา

ขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน

กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ประกอบด้วยขั้นตอนการเรียนการสอน 4 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 การค้นหาความสัมพันธ์ เป็นการให้นักเรียนสังเกตหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่อยู่ข้างซ้ายและข้างขวาของเครื่องหมายเท่ากับ โดยที่จำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากันนั้นจะต้องมีความเท่ากันเสมอ ด้วยการนำโจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากัน ที่สามารถใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบโดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ มาเป็นประเด็นให้นักเรียนอภิปราย สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ และเมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนไม่สามารถบอก หรือระบุความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนได้ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการใช้คำถามเพื่อชี้นำกระตุ้นให้นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์ และสนับสนุนให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น อภิปรายร่วมกัน

บทบาทครู

- (1) นำโจทย์เกี่ยวกับการเท่ากันมาเป็นประเด็นให้นักเรียนอภิปราย
- (2) ประเมินความเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่อยู่ข้างซ้ายและข้างขวาของเครื่องหมายเท่ากับ ด้วยการสอบถาม
- (3) ใช้คำถามเพื่อชี้ให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากันและหาคำตอบโดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ
- (4) ส่งเสริมให้นักเรียนได้อภิปรายร่วมกัน

บทบาทนักเรียน

- (1) ตอบคำถามโจทย์เกี่ยวกับการเท่ากันตามความรู้ความเข้าใจเดิม
- (2) สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากันเพื่อหาคำตอบโดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ
- (3) ฝึกอธิบายหรือแสดงวิธีคิด
- (4) มีส่วนร่วมในการอภิปรายโดยแสดงความคิดเห็น

ขั้นที่ 2 การใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ โดยการนำโจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากันจากขั้นที่ 1 ที่นักเรียนสังเกตพบความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับแล้ว ให้นักเรียนหาคำตอบโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ด้วยวิธีการสังเกต เปรียบเทียบ ใช้เทคนิคการเพิ่ม หรือลด หรือสลับที่ หรือ เปลี่ยนกลุ่มของจำนวนที่เท่ากันทั้งสองข้าง เมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนไม่ได้ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์มาช่วยในการหาคำตอบ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการยกตัวอย่างแสดงให้เห็นถึงวิธีการคิดที่ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และอธิบายประกอบโดยการเขียนภาพลูกศรเชื่อมโยงระหว่างจำนวน เพื่อให้นักเรียนได้เห็นแนวทางในการคิด หลังจากนั้นจึงให้นักเรียนเขียนบันทึกแสดงการคิด

บทบาทครู

- (1) ประเมินความเข้าใจการใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบ ด้วยการสอบถาม
- (2) ยกตัวอย่างแสดงให้เห็นถึงวิธีคิดเชิงสัมพันธ์
- (3) ส่งเสริมให้นักเรียนได้อธิบายหรือแสดงวิธีคิด โดยเลือกวิธีคิดของนักเรียนที่แสดงให้เห็นถึงการคิดเชิงสัมพันธ์มานำเสนอ
- (4) ตรวจสอบความถูกต้อง การเขียนบันทึกแสดงการคิดของนักเรียน

บทบาทนักเรียน

- (1) ตอบคำถามโจทย์เกี่ยวกับการเท่ากันตามความรู้ความเข้าใจเดิม
- (2) ฝึกอธิบายหรือแสดงวิธีคิดเชิงสัมพันธ์
- (3) มีส่วนร่วมในการอภิปรายโดยแสดงความคิดเห็น
- (4) เขียนบันทึกแสดงการคิด

ขั้นที่ 3 การสร้างข้อสรุป โดยการนำโจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหา เกี่ยวกับการเท่ากันจากขั้นที่ 2 ที่นักเรียนหาคำตอบโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และ หลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ให้นักเรียนนำข้อสังเกตจากความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของ เครื่องหมายเท่ากับมาเขียนสรุป ซึ่งอาจเขียนสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ คือการเขียนสรุปในสิ่งที่ สังเกตได้เป็นคำกล่าว หรือข้อความที่คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง แล้วตรวจสอบความถูกต้องโดย การยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์ที่คล้ายกันมาสนับสนุน คัดค้าน หรือยืนยันข้อสรุปที่ได้ หรือ เขียนสรุปในรูปทั่วไป คือการเขียนสรุปในสิ่งที่สังเกตได้ในรูปประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวแปรแทน จำนวนใด ๆ ตัวแปรนี้อาจเขียนเป็นรูปต่าง ๆ เช่น \square , \triangle , \circ หรือ พยัญชนะภาษาไทย หรือ พยัญชนะภาษาอังกฤษ การตรวจสอบความถูกต้องของข้อสรุปในรูปทั่วไป ทำเหมือนกับข้อความ คาดการณ์ เมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนยังไม่สามารถเขียนสรุปได้ ครูเสริมต่อ การเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการใช้คำถามชี้แนะ หรือยกตัวอย่างจนนักเรียนสามารถเขียนสรุปได้

บทบาทครู

- (1) ประเมินการสร้างข้อสรุปจากข้อสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของ เครื่องหมายเท่ากับด้วยการสอบถาม
- (2) ส่งเสริมให้นักเรียนได้สร้างข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปทั่วไป โดยใช้คำถาม นำให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่ได้อภิปรายมาแล้วเพื่อให้นักเรียนนำไปสู่เป็น ข้อสรุป
- (3) ตรวจสอบความถูกต้องข้อสรุป

บทบาทนักเรียน

- (1) สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์เพื่อนำไปเป็นข้อมูลใน การสรุป
- (2) ฝึกเขียนข้อสรุปจากประโยคสัญลักษณ์ที่มีความสัมพันธ์เหมือนกันมาเป็นข้อความ คาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปทั่วไป

ขั้นที่ 4 การตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป โดยการนำข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปทั่วไปที่นักเรียนสร้างไว้ในขั้นที่ 3 มาตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ เมื่อประเมินนักเรียนด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนไม่สามารถหาเหตุผลโดยการยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่น ๆ มาตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ ครูเสริมต่อการเรียนรู้นักเรียนโดยการสนทนาร่วมกัน พร้อมทั้งยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่น ๆ ให้นักเรียนใช้เป็นแนวทางในการยืนยันข้อสรุปที่สร้างไว้

บทบาทครู

- (1) นำข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปทั่วไปที่นักเรียนสร้างไว้มาเป็นประเด็นให้นักเรียนอภิปรายเพื่อนำไปสู่การตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้
- (2) ประเมินการตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ด้วยการสอบถาม
- (3) ยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่นที่มีความสัมพันธ์เหมือนกันที่จะนำมาตรวจสอบข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุป

บทบาทนักเรียน

- (1) ยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่นที่มีความสัมพันธ์เหมือนกันที่จะนำมาตรวจสอบข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปทั่วไปที่สร้างขึ้นด้วยตนเองหรือเลียนแบบอย่างของครูหรือเพื่อน
- (2) มีส่วนร่วมในการอภิปรายและถกเถียงเพื่อยืนยันข้อสรุปที่สร้างไว้

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา มีการวัดและประเมินผลตามสภาพจริง โดยสังเกตจากการตอบคำถาม การอธิบายและแสดงเหตุผลของนักเรียน การตรวจแบบฝึกหัด และทดสอบความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน จากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา

ตอนที่ 2 ผลการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

การทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน

ประถมศึกษา นำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนดาราคาม กรุงเทพมหานคร จำนวน 1 ห้องเรียน และใช้กระบวนการเรียนการสอนแบบปกติอีก 1 ห้องเรียน เพื่อประเมินคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น

การนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อประเมินคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน แบ่งเป็น 2 ประเด็น ดังนี้

1. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ ประกอบด้วย

1.1 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตก่อนการเรียนและหลังการเรียนของกลุ่มทดลอง

1.2 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตหลังการเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

2. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

รายละเอียดของผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็นดังนี้

1. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

1.1 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตก่อนการเรียนและหลังการเรียนของกลุ่มทดลอง ปรากฏในตารางที่ 13

ตารางที่ 13 วิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตก่อนการเรียนและหลังการเรียนของกลุ่มทดลอง

กลุ่มทดลอง	n	df	คะแนนเต็ม	ก่อนเรียน		หลังเรียน		t
				\bar{x}	SD	\bar{x}	SD	
ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต	26	25	40	0.92	0.98	13.81	9.81	6.804*

* $p < .05$

จากตารางที่ 13 พบว่า ค่าเฉลี่ยของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ หลังการเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

1.2 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตหลังการเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ปรากฏในตารางที่ 14

ตารางที่ 14 การวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตหลังการเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	n	df	คะแนนเต็ม	\bar{x}	SD	t
กลุ่มทดลอง	26	50	40	13.81	9.81	6.117*
กลุ่มควบคุม	26			1.69	2.41	

* $p < .05$

จากตารางที่ 14 พบว่า ค่าเฉลี่ยของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตหลังการเรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

ในการวิจัยเรื่องการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพจึงให้ความสนใจต่อความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา ซึ่งผู้วิจัยและผู้เชี่ยวชาญอีก 2 ท่าน ได้ทำการวิเคราะห์ข้อมูลจากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนและแบบสัมภาษณ์นักเรียนในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต หลังจากนั้นผู้วิจัยนำข้อมูลต่าง ๆ มาพิจารณาจัดเป็นกลุ่มตามกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ทั้ง 4 ชั้น และตามประเภทของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในฐานะที่เป็นรูปทั่วไปของเลขคณิต

การนำเสนอผลในส่วนนี้แบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่ 1 คุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ และส่วนที่ 2 ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา

ส่วนที่ 1 คุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

จากการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณในตารางที่ 13 และตารางที่ 14 พบว่ากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ สามารถเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษาได้ โดยพิจารณาจากคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการจัดกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ สามารถให้เหตุผลเชิงพีชคณิตได้ดีกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่ได้รับการจัดกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ โดยนักเรียนกลุ่มทดลองสามารถแสดงเหตุผลเกี่ยวกับวิธีคิดหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนและการดำเนินการที่เกี่ยวข้องโดยไม่เน้นการคิดคำนวณ เมื่อพิจารณาตามกระบวนการเรียนการสอนทั้ง 4 ขั้น คือ

- ขั้นที่ 1 การค้นหาความสัมพันธ์
- ขั้นที่ 2 การใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์
- ขั้นที่ 3 การสร้างข้อสรุป
- ขั้นที่ 4 การตรวจสอบและยืนยันคำตอบ

และพิจารณาตามประเภทของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในฐานะที่เป็นรูปทั่วไปของเลขคณิตทั้ง 5 ประเภท คือ

- (1) สมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน
- (2) สมบัติของการดำเนินการของจำนวน
- (3) การเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน
- (4) การแก้ปัญหาประโยคจำนวนที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวน
- (5) การมองจำนวนในเชิงพีชคณิต

สามารถสรุปคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ได้ดังนี้

- ขั้นที่ 1 การค้นหาความสัมพันธ์

การที่ครูได้นำประโยคสัญลักษณ์เกี่ยวกับการเท่ากันที่สามารถใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบ โดยหลีกเลี่ยงการใช้การคิดคำนวณหาคำตอบ มาเป็นประเด็นให้นักเรียนอภิปราย เพื่อทำให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของประโยคสัญลักษณ์นั้น ในระยะเริ่มแรกของขั้นนี้ นักเรียนทั้งหมดมักอภิปรายโดยแสดงเหตุผล

ประกอบด้วยการคิดคำนวณ แต่หลังจากที่นักเรียนกลุ่มทดลองได้รับการช่วยเหลือโดยครูใช้คำถามเพื่อชี้ให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากันและหาคำตอบโดยการหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณหลาย ๆ ตัวอย่าง พบว่าในระยะหลังนักเรียนสามารถร่วมอภิปรายให้เหตุผลโดยใช้การสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากันได้ โดยส่วนใหญ่จะให้เหตุผลโดยใช้การสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในเรื่อง สมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน และสมบัติของการดำเนินการของจำนวน ส่วนในเรื่องการเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน การแก้ปัญหาประโยคจำนวนที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวน และการมองจำนวนในเชิงพีชคณิตนั้น จะมีเฉพาะนักเรียนกลุ่มเก่งที่ให้เหตุผลโดยใช้การสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน

ขั้นที่ 2 การใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์

การที่ครูได้นำประโยคสัญลักษณ์เกี่ยวกับการเท่ากันที่สามารถใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบ โดยหลีกเลี่ยงการใช้การคิดคำนวณหาคำตอบ มาให้นักเรียนพิจารณาและแสดงวิธีคิดอย่างหลากหลายวิธีเพื่อหาคำตอบนั้น ในระยะเริ่มแรกของขั้นนี้ ในเรื่องสมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน และสมบัติของการดำเนินการของจำนวน มีนักเรียนส่วนน้อยที่แสดงวิธีคิดในเชิงความสัมพันธ์โดยหลีกเลี่ยงการใช้การคิดคำนวณ แต่ในเรื่องการเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน การแก้ปัญหาประโยคจำนวนที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวน และการมองจำนวนในเชิงพีชคณิตนั้น ไม่มีนักเรียนคนใดที่ยกตัวอย่างแสดงให้เห็นถึงวิธีคิดในเชิงความสัมพันธ์โดยหลีกเลี่ยงการใช้การคิดคำนวณ เมื่อดำเนินการสอนตามขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน โดยครูยกตัวอย่างแสดงให้เห็นถึงวิธีคิดเชิงสัมพันธ์ ดังเช่น

$$\begin{array}{c}
 \text{ศูนย์วิทยุทรัพยากร} \\
 \text{จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย} \\
 \begin{array}{ccc}
 & -1 & \\
 & \curvearrowright & \\
 8 + 4 & = & 7 + 5 \\
 & \curvearrowleft & \\
 & +1 &
 \end{array}
 \end{array}$$

เมื่อนักเรียนเห็นตัวอย่างแล้ว นักเรียนส่วนใหญ่เขียนบันทึกแสดงการคิดโดยแสดงวิธีคิดคล้าย ๆ กับที่ครูยกตัวอย่าง จะมีเพียงส่วนน้อยที่พยายามที่จะคิดแตกต่างจากครูแต่ยังคงคำนึงถึงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน ดังแผนภาพที่ 16

แผนภาพที่ 16 แสดงบันทึกวิธีคิดของนักเรียน

ขั้นที่ 3 การสร้างข้อสรุป

การที่ครูนำข้อสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่นักเรียนได้อภิปรายมาให้นักเรียนช่วยกันเขียนสรุป ซึ่งอาจเขียนสรุปเป็นข้อความคาดการณ์หรือเขียนสรุปในรูปทั่วไป ในระยะเริ่มแรกของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ นักเรียนกลุ่มทดลองส่วนใหญ่สามารถอธิบายหรือสรุปในรูปข้อความคาดการณ์หรือในรูปทั่วไป ในเรื่องสมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน สมบัติของการดำเนินการของจำนวน และการมองจำนวนในเชิงพีชคณิต โดยใช้ภาษาของตนเองในรูปคำพูด เช่น สรุปว่า “ตัวไหนบวกกับศูนย์ได้ตัวนั้น เพราะศูนย์ไม่มีค่า” หรือ “อะไรบวกกับศูนย์ได้ตัวนั้น” เมื่อครูให้การช่วยเหลือโดยการแนะนำ ภายหลังจากนักเรียนส่วนใหญ่จะเปลี่ยนจากคำว่า “ตัวไหน” หรือ “อะไร” เป็น “จำนวนใด” แต่ในระยะต้นนักเรียนไม่สามารถสรุปในรูปสัญลักษณ์หรือการอ้างรูปทั่วไปได้ ครูต้องให้การช่วยเหลือโดยการจัดกิจกรรมที่ใช้สัญลักษณ์หลาย ๆ รูปแบบเพื่อแทนตัวไม่ทราบค่า หรือ ตัวแปร เช่น \triangle , \square , \circ หรือตัวอักษรภาษาไทย หรือตัวอักษรภาษาอังกฤษ จนนักเรียนคุ้นเคยแล้วจึงแนะนำนักเรียนว่าในสาขานิยมใช้สัญลักษณ์แทนตัวไม่ทราบค่า หรือตัวแปรด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก เช่น $a - a = 0$ เมื่อ a แทนจำนวนใด ๆ เป็นต้น

ส่วนการสรุปในเรื่องการเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน และการแก้ปัญหาค่าปริศนาที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวนนั้น นักเรียนจะไม่สรุปในรูปข้อความคาดการณ์หรือในรูปทั่วไป แต่จะสรุปในรูปการเขียนลูกศรแสดงความสัมพันธ์

ขั้นที่ 4 การตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป

การที่ครูนำข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปแบบทั่วไปที่นักเรียนสร้างไว้ มาให้นักเรียนตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ โดยนักเรียนยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่นที่มีความสัมพันธ์เหมือนกันมาตรวจสอบ ในเรื่องสมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน สมบัติของการดำเนินการของจำนวน และการมองจำนวนในเชิงพีชคณิตนั้น นักเรียนส่วนใหญ่สามารถยกตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างมายืนยันข้อสรุปได้ง่าย แต่ในเรื่องการเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน และการแก้ปัญหาประโยคจำนวนที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวนนั้น นักเรียนสามารถยกตัวอย่างมายืนยันข้อสรุปได้แต่ต้องเลียนแบบจากเพื่อน โดยอาจเพิ่มหรือลดจำนวนจากตัวอย่างที่เพื่อนนำเสนอ

จากการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ พบว่ากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ เป็นกระบวนการเรียนการสอนที่สามารถเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษาได้ โดยพิจารณาจากข้อมูลดังกล่าวข้างต้น

ส่วนที่ 2 ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา

จากตารางที่ 13 และตารางที่ 14 พบว่าความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีคะแนนเฉลี่ยแตกต่างกันมาก และเมื่อพิจารณาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองภายหลังการเรียนจะเห็นว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตสูงกว่าก่อนการเรียนมาก แต่ยังพบว่าภายหลังการเรียนค่าการกระจายของนักเรียนกลุ่มทดลองมีค่าสูงมาก แสดงว่าความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองมีความแตกต่างกันเป็นอย่างมาก ดังรายละเอียดจากตารางที่ 15 แสดงจำนวนนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมที่ตอบโจทย์คำถามในแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่ได้คะแนนตามเกณฑ์ที่วัด จำแนกตามช่วงคะแนน (คะแนนเต็ม 40 คะแนน)

ตารางที่ 15 แสดงจำนวนนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมในแต่ละช่วงคะแนน

ช่วงคะแนน	กลุ่มทดลอง		กลุ่มควบคุม	
	ก่อนเรียน	หลังเรียน	ก่อนเรียน	หลังเรียน
0	11	-	13	14
1-5	15	7	13	9
6-10	-	5	-	3
11-15	-	3	-	-
16-20	-	3	-	-
21-25	-	4	-	-
26-30	-	3	-	-
31-35	-	1	-	-
36-40	-	-	-	-

จากตารางที่ 15 จะเห็นว่าก่อนเรียนระดับความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันนัก แต่ระดับคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมมาก และระดับความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองมีพัฒนาการสูงขึ้นจากก่อนเรียนเป็นอันมาก

จากตารางที่ 13 -15 สรุปในภาพรวมของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนทั้งสองกลุ่มได้กว้าง ๆ ดังนี้

นักเรียนกลุ่มทดลองที่เป็นกลุ่มเก่ง สามารถพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตอย่างก้าวกระโดด นั่นคือคะแนนก่อนเรียนของนักเรียนกลุ่มเก่งจะค่อนข้างต่ำแต่ภายหลังจากเรียนนักเรียนกลุ่มดังกล่าว จะมีคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มทดลองมาก ซึ่งตรงข้ามกับนักเรียนกลุ่มอ่อนที่ความแตกต่างระหว่างคะแนนก่อนเรียนกับหลังเรียนโดยมีคะแนนเพิ่มขึ้นจากเดิมเพียงเล็กน้อย ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากนักเรียนกลุ่มเก่งมีความสามารถในการเรียนรู้ได้ดีกับวิธีการช่วยเหลือแนะนำโดยการอภิปรายแลกเปลี่ยนวิธีการคิด ในขณะที่นักเรียนกลุ่มอ่อนไม่ชอบแสดงการคิด

นักเรียนกลุ่มควบคุม แสดงให้เห็นว่ายังไม่ได้รับการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต เนื่องจากมีคะแนนก่อนเรียนและหลังเรียนไม่แตกต่างกัน ถึงแม้ว่านักเรียนกลุ่มเก่งจะมีคะแนนเพิ่มขึ้นเล็กน้อย อาจเป็นเพราะได้รับความรู้ในการเรียนเลขคณิตซึ่งมีพื้นฐานเดียวกันกับพีชคณิตในเรื่องสมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน และสมบัติของการดำเนินการของจำนวน

ในการศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนนั้น เนื่องจากโจทย์ในแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน และชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์เชิงลึก เป็นเนื้อหาที่ไม่ได้เรียนโดยตรงในห้องเรียนมาก่อน การที่นักเรียนสามารถตอบคำถามได้ถูกต้อง หรือดำเนินการให้เหตุผลได้ จึงเป็นสิ่งบ่งบอกว่ากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ สามารถส่งเสริมนักเรียนให้เกิดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต เพื่อให้ทราบถึงความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองในเชิงลึก ผู้วิจัยได้ใช้การสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ และการสัมภาษณ์เชิงลึกกับนักเรียนกลุ่มทดลองจำนวน 6 คน การตอบคำถามในการสัมภาษณ์แบ่งออกเป็นสองขั้นตอนคือ 1) การตอบคำถามในชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ 2) การสัมภาษณ์แบบเจาะลึกเป็นรายบุคคลถึงวิธีการคิดและการให้เหตุผลในขณะหาคำตอบ เพื่อศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในการทำชุดคำถามและดูว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตอย่างไร สามารถสร้างข้อสรุปในรูปแบบข้อความคาดการณ์หรือในรูปแบบทั่วไปได้หรือไม่ หรือสามารถให้เหตุผลโดยยกตัวอย่างยืนยันข้อสรุปในรูปแบบข้อความคาดการณ์หรือในรูปแบบทั่วไปได้หรือไม่

การศึกษาถึงความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน เนื้อหาของคำถามที่ใช้ในการศึกษาถึงความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณและการหารในชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งเป็นชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์เชิงลึก โดยคำถามจำแนกตามประเภทของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในฐานะที่เป็นรูปทั่วไปของเลขคณิต 5 ประเภท ได้แก่ สมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน สมบัติของการดำเนินการของจำนวน การเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน การแก้ปัญหาระยะไกล จำนวนที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวน และการมองจำนวนในเชิงพีชคณิต โดยกำหนดโจทย์ให้นักเรียนแสดงวิธีคิดหาคำตอบ ประเภทละ 1 ข้อ จากนั้นดำเนินการสัมภาษณ์เชิงลึกในแต่ละข้อตัวอย่างคำถาม เช่น ทำไมจึงตอบเช่นนั้น คิดได้อย่างไร นักเรียนรู้ได้อย่างไรว่าคำตอบนี้ถูกต้อง ในความคิดของนักเรียนเครื่องหมายเท่ากับหมายถึงอะไร นักเรียนสังเกตเห็นอะไรที่ถูกต้องเสมอ

ทุกครั้ง นักเรียนอธิบายสรุปเป็นคำพูดได้อย่างไร นักเรียนรู้ได้อย่างไรว่าคำพูดนี้ถูกต้องเสมอ นักเรียนสรุปคำพูดนี้เป็นสัญลักษณ์ได้อย่างไร จากนั้นได้นำผลจากการสัมภาษณ์เชิงลึกมาสรุปตามพฤติกรรมที่บ่งบอกถึงความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในแต่ละประเภทของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในฐานะที่เป็นรูปทั่วไปของเลขคณิต 5 ประเภท ดังตารางที่ 16

ตารางที่ 16 ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองจำนวน 6 คน ที่ได้จากการสัมภาษณ์เชิงลึก

การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในฐานะที่เป็นรูปทั่วไปของเลขคณิต	พฤติกรรมที่บ่งบอกถึงความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน			
	อธิบายสรุปเป็นคำพูด	อธิบายสรุปด้วยภาพลูกศร	อธิบายสรุปด้วยการยกตัวอย่าง	สรุปคำพูดเป็นสัญลักษณ์
สมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน	4 คน	-	1 คน	4 คน
สมบัติของการดำเนินการของจำนวน	4 คน	-	1 คน	4 คน
การเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน	2 คน	2 คน	2 คน	-
การแก้ปัญหาประโยคจำนวนที่มีจำนวนหายไปหนึ่งจำนวน	-	2 คน	4 คน	-
การมองจำนวนในเชิงพีชคณิต	5 คน	-	1 คน	-

จากตารางที่ 16 พบว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้ง 6 คน แสดงพฤติกรรมที่บ่งบอกถึงความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตโดยการอธิบายในรูปคำพูดมากที่สุด รองลงมาคือการแสดงพฤติกรรมอธิบายสรุปด้วยการยกตัวอย่าง ส่วนการแสดงพฤติกรรมที่ใช้น้อยคือการสรุปคำพูดเป็นสัญลักษณ์ และการอธิบายสรุปด้วยภาพลูกศร เป็นที่น่าสังเกตว่า ถึงแม้ว่านักเรียนกลุ่มทดลองทั้ง 6 คน นี้จะได้ฝึกการสรุปคำพูดเป็นสัญลักษณ์ และการอธิบายสรุปด้วยภาพลูกศรมาแล้ว แต่พบว่ามึนักเรียนที่เก่งเพียง 2 คนเท่านั้นที่อธิบายสรุปด้วยภาพลูกศร

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่อง การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา เป็นการวิจัยเชิงพัฒนา มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) พัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา และ 2) เพื่อศึกษาคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ โดยพิจารณาจาก 2.1) การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนก่อนและหลังจากเรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ และ 2.2) การเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระหว่างกลุ่มที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้กับกลุ่มที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ ได้ดำเนินการวิจัย แบ่งเป็น 3 ระยะ คือ

ระยะที่ 1 การพัฒนากระบวนการเรียนการสอน มีการพัฒนา ดังนี้

1. ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยพิจารณาศึกษา มาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด ความสำคัญที่ต้องจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และคุณภาพของผู้เรียน ตามสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และหลักการจัดการเรียนการสอน คณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา

2. ศึกษาแนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดเรียนการสอนตามแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้และการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา

3. พัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้

4. ตรวจสอบคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน

4.1 ตรวจสอบกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นโดยผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อนำข้อเสนอแนะมาปรับปรุงแก้ไขกระบวนการเรียนการสอน และสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ตามขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอนที่อิงแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ โดยใช้สาระการเรียนรู้เรื่อง การบวกจำนวนที่มีหลายหลักสองจำนวน เป็นจำนวน 2 แผนการจัดการเรียนรู้ เพื่อตรวจสอบความเป็นไปได้ในการนำไปใช้ในสภาพจริง

4.2 ตรวจสอบกระบวนการเรียนการสอนโดยนำแผนการจัดการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นไปดำเนินการทดลองสอนกับนักเรียนที่มีลักษณะใกล้เคียงกับกลุ่มตัวอย่าง

5. แก้ไขปรับปรุงกระบวนการเรียนการสอน นำข้อเสนอแนะจากผู้ทรงคุณวุฒิ และที่ได้จากการทดลองสอนมาปรับปรุงแก้ไขขั้นตอนการเรียนการสอนและการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

ระยะที่ 2 การเตรียมการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

1. สร้างแผนการจัดการเรียนรู้และสื่อการเรียนรู้

1.1 วิเคราะห์ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ในเรื่องการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับและศูนย์ กับคู่มือครูและหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ในบทที่ 2 การบวกและการลบ บทที่ 4 การคูณ และบทที่ 5 การหาร คัดกรองมโนทัศน์และสาระที่เหมาะสมกับการใช้กระบวนการเรียนการสอนที่อิงแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ แล้วจัดทำเป้าหมายหลักของการจัดการเรียนรู้ จัดทำคำอธิบายรายหน่วย และจัดทำโครงสร้างรายหน่วย

1.2 จัดทำโครงสร้างแผนการจัดการเรียนรู้รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เรื่องการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับและศูนย์ โดยแบ่งชั่วโมงในการสอนออกเป็น 3 เรื่องได้แก่ การบวกและการลบ 12 ชั่วโมง การคูณ 12 ชั่วโมง และการหาร 16 ชั่วโมง รวม 40 ชั่วโมง

1.3 เขียนแผนการจัดการเรียนรู้ โดยแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ใช้เวลา 1 ชั่วโมง ซึ่งประกอบด้วย ชื่อเรื่อง จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้

ที่อิงแนวความคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวความคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ และการประเมินผลการเรียนรู้

1.4 จัดทำสื่อการเรียนรู้โดยทำบัตรประโยคสัญลักษณ์ตามกิจกรรมในแผนการจัดการเรียนรู้

2. สร้างและพัฒนาเครื่องมือเก็บรวบรวมข้อมูล

2.1 สร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา มี 2 ฉบับที่เป็นคู่ขนานกัน และสร้างเกณฑ์การให้คะแนนเพื่อวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต จากนั้นนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหา และความสอดคล้องตามจุดประสงค์กับพฤติกรรมที่ต้องการวัด ลักษณะการใช้คำถามและการใช้ภาษาและนำแบบทดสอบไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง เพื่อตรวจสอบความเข้าใจและความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ของข้อสอบแต่ละข้อของแบบวัด

2.2 สร้างแบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน และแบบสัมภาษณ์นักเรียนในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ซึ่งประกอบด้วยชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ และแบบสัมภาษณ์ จากนั้นนำแบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน และแบบสัมภาษณ์นักเรียนในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ซึ่งประกอบด้วยชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ เหตุผลในการให้คำตอบของนักเรียน และแบบสัมภาษณ์นักเรียนที่สร้างขึ้น ไปให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความเหมาะสม และครอบคลุมพฤติกรรมที่ต้องการสังเกต และสัมภาษณ์

ระยะที่ 3 การทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน

1. กำหนดประชากร และกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนดาราคาม กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม โดยนำผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ภาคปลายของนักเรียนทุกห้องเรียนมาหาค่าเฉลี่ย แล้วเลือกสองห้องเรียนที่นักเรียนมีระดับเกรดเฉลี่ยใกล้เคียงกัน พบว่าห้องเรียนที่มีเกรดเฉลี่ยใกล้เคียงกันสองห้องคือ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4/1 มี เกรดเฉลี่ย 3.38 คะแนน และชั้นประถมศึกษาปีที่ 4/2 มี เกรดเฉลี่ย 3.61คะแนน นำมาทดสอบความแปรปรวนโดยใช้การทดสอบค่าเอฟ (f-test) พบว่าความแปรปรวนไม่แตกต่างกันจึงทำการทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของเกรดเฉลี่ยก่อนการทดลองด้วยการทดสอบค่าที (t-test) ซึ่งพบว่าไม่แตกต่างกัน แสดงว่านักเรียนทั้งสองห้องมีความรู้พื้นฐานไม่แตกต่างกัน แล้วใช้การสุ่มเพื่อใช้เป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยวิธีการ

จับสลาก ได้นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4/2 เป็นกลุ่มทดลอง และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4/1 เป็นกลุ่มควบคุม

2. ดำเนินการทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา โดยใช้วิธีการวิจัยแบบกึ่งทดลอง (Quasi-Experimental Research) ซึ่งเป็นแบบการทดลองที่มีกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง และมีการทดสอบก่อนและหลังการทดลอง (The Pretest-Posttest Control Group Design) โดยดำเนินการเป็น 3 ระยะ คือ 1) การดำเนินการก่อนทดลองใช้กระบวนการเรียนการสอน ได้ดำเนินการทดสอบนักเรียนด้วยแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา 2) การดำเนินการทดลอง ได้ดำเนินการสอนนักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยกลุ่มทดลองได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา ส่วนกลุ่มควบคุมได้รับการสอนตามกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ ใช้เวลาสอนห้องเรียนละ 40 ชั่วโมง เป็นเวลา 10 สัปดาห์ 3) ดำเนินการหลังการทดลอง โดยดำเนินการทดสอบนักเรียนด้วยแบบวัดคู่ขนานกับแบบวัดที่ใช้วัดผลก่อนการทดลอง สำหรับการวิเคราะห์ข้อมูลทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ โดยนำคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษาของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม มาวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป SPSS/PC⁺ for WINDOW เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตก่อนและหลังการทดลองของนักเรียนกลุ่มทดลองด้วยสถิติ t-test สำหรับกลุ่มตัวอย่างที่ไม่เป็นอิสระกันที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05 เปรียบเทียบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตหลังการทดลองระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยสถิติ t-test สำหรับกลุ่มตัวอย่างที่เป็นอิสระกันที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05 แล้วนำข้อมูลที่ได้จากผลการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตก่อนและหลังการทดลองของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ผลจากการบันทึกพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 6 คน และผลจากการบันทึกการสัมภาษณ์เชิงลึกของนักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 6 คน มาวิเคราะห์พิจารณาจากสิ่งต่าง ๆ ที่แสดงให้เห็นถึงการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา

สรุปผลการวิจัย

1. ผลการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา

ผลการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา ประกอบด้วย องค์ประกอบที่สำคัญ 4 ประการ คือ หลักการ วัตถุประสงค์ ขั้นตอนการเรียนการสอน และการประเมินผลการเรียนรู้ ในแต่ละองค์ประกอบสรุปได้ดังนี้

1.1 หลักการของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา เป็นกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น เพื่อใช้จัดการเรียนการสอนที่เน้นให้นักเรียนมีความเข้าใจในเรื่องการใช้เครื่องหมายเท่ากับ (=) ให้ถูกต้อง โดยครูให้การช่วยเหลือสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียน ซึ่งมีหลักการของกระบวนการเรียนการสอน 3 ประการ คือ 1) การช่วยให้นักเรียนรู้จักการแสดงจำนวนของแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับที่แสดงจำนวนที่เท่ากัน โดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ เสริมต่อการเรียนรู้ด้วยการใช้คำถามชี้้นำให้สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากัน การให้นักเรียนมีส่วนร่วมโดยการอภิปรายแลกเปลี่ยนแนวคิด 2) การทำให้มีการยืดหยุ่นในการคิดเกี่ยวกับการดำเนินการทางเลขคณิต ด้วยการเปรียบเทียบการแสดงจำนวนทางเลขคณิตโดยปราศจากการคิดคำนวณ เสริมต่อการเรียนรู้โดยการยกตัวอย่างแสดงวิธีคิดให้นักเรียนเห็นแนวทางในการคิด ใช้คำถามชี้้นำให้นักเรียนกล้าพูดแสดงความคิดเห็นที่ได้จากการสังเกต จำแนกความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนอย่างต่อเนื่อง และ 3) การจัดให้เปลี่ยนผ่านจากพื้นฐานเลขคณิตสู่พื้นฐานพีชคณิต เสริมต่อการเรียนรู้โดยการให้นักเรียนแสดงหลักฐานต่าง ๆ เพื่อสนับสนุนและยืนยันการคิด และนำไปสู่การสร้างข้อสรุปมีการตรวจสอบความเข้าใจที่ถูกต้องและชัดเจนของนักเรียน

1.2 วัตถุประสงค์ของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีวัตถุประสงค์เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา

1.3 ขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ประกอบด้วยขั้นตอนการเรียนการสอน 4 ขั้น ดังนี้

1.3.1 ขั้นการค้นหาคำความสัมพันธ์ เป็นการให้นักเรียนสังเกตหาคำความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่อยู่ข้างซ้ายและข้างขวาของเครื่องหมายเท่ากับ โดยที่จำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับนั้นจะต้องมีความเท่ากันเสมอ ด้วยการนำโจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากัน ที่สามารถใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบโดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ มาเป็นประเด็นให้นักเรียนอภิปราย สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ และเมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนไม่สามารถบอก หรือระบุความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนได้ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการใช้คำถามเพื่อชี้แนะกระตุ้นให้นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์ และสนับสนุนให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น อภิปรายร่วมกัน

1.3.2 ขั้นการใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ เป็นการนำโจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากันจากขั้นที่ 1 ที่นักเรียนสังเกตพบความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับแล้ว ให้นักเรียนหาคำตอบโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ด้วยวิธีการสังเกต เปรียบเทียบ ใช้เทคนิคการเพิ่ม หรือลด หรือสลับที่ หรือเปลี่ยนกลุ่มของจำนวนที่เท่ากันทั้งสองข้าง เมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนไม่ได้ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์มาช่วยในการหาคำตอบ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการยกตัวอย่างแสดงให้เห็นถึงวิธีการคิดที่ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และอธิบายประกอบโดยการเขียนภาพลูกศรเชื่อมโยงระหว่างจำนวน เพื่อให้นักเรียนได้เห็นแนวทางในการคิด หลังจากนั้นจึงให้นักเรียนเขียนบันทึกแสดงการคิด

1.3.3 ขั้นการสร้างข้อสรุป เป็นการนำโจทย์ โจทย์ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากันจากขั้นที่ 2 ที่นักเรียนหาคำตอบโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ให้นักเรียนนำข้อสังเกตจากความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมาเขียนสรุป ซึ่งอาจเขียนสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ คือการเขียนสรุปในสิ่งที่สังเกตได้เป็นคำกล่าว หรือข้อความที่คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง แล้วตรวจสอบความถูกต้องโดยการยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์ที่คล้ายกันมาสนับสนุน คัดค้าน หรือยืนยันข้อสรุปที่ได้ หรือเขียนสรุปในรูปแบบทั่วไป คือการเขียนสรุปในสิ่งที่สังเกตได้ในรูปประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวแปรแทนจำนวนใด ๆ ตัวแปรนี้อาจเขียนเป็นรูปต่าง ๆ เช่น \square , \triangle , \circ หรือพยัญชนะภาษาไทย หรือพยัญชนะภาษาอังกฤษ การตรวจสอบความถูกต้องของข้อสรุปในรูปแบบทั่วไป ทำเหมือนกับข้อความคาดการณ์ เมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่า นักเรียนยังไม่สามารถเขียนสรุปได้ ครูเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการใช้คำถามชี้แนะ หรือยกตัวอย่างจนนักเรียนสามารถเขียนสรุปได้

1.3.4 **ขั้นการตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป** เป็นการนำข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปทั่วไปที่นักเรียนสร้างไว้ในขั้นที่ 3 มาตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ เมื่อประเมินนักเรียนด้วยการสอบถามแล้วพบว่านักเรียนไม่สามารถหาเหตุผลโดยการยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่น ๆ มาตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ ครูเสริมต่อการเรียนรู้นักเรียนโดยการสนทนา ร่วมกัน พร้อมทั้งยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่น ๆ ให้นักเรียนใช้เป็นแนวทางในการยืนยันข้อสรุปที่สร้างไว้

1.4 การประเมินผลการเรียนรู้ ในการจัดกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวความคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเฉพาะเรื่องความสัมพันธ์ของจำนวนที่เกี่ยวข้อง การบวก การลบ การคูณ การหาร จำนวนนับ และศูนย์ของนักเรียนประถมศึกษา ดำเนินการประเมินการเรียนรู้ตามสภาพจริงโดยสังเกตจากการตอบคำถาม การอธิบายและแสดงเหตุผลของนักเรียน การตรวจแบบฝึกหัด และทดสอบความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนจากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเฉพาะเรื่องความสัมพันธ์ของจำนวนที่เกี่ยวข้อง การบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับ และศูนย์ของนักเรียนประถมศึกษา

2. ผลการประเมินคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวความคิดเชิงสัมพันธ์กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา

2.1 ผลการตรวจสอบคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน โดยผู้ทรงคุณวุฒิ

ผลการตรวจสอบคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวความคิดเชิงสัมพันธ์กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา โดยผู้ทรงคุณวุฒิพบว่า องค์ประกอบของกระบวนการเรียนการสอน อยู่ในระดับเหมาะสมดี ค่าเฉลี่ย 2.67 และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.47

2.2 ผลการตรวจสอบคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอน โดยนำไปทดลองใช้กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

ได้ดำเนินการเพื่อศึกษาผลของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวความคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา โดยสร้างเครื่องมือทดลอง ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ตาม

กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น และสร้างเครื่องมือวิจัย ได้แก่ 1) แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา 2) แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน และ 3) แบบสัมภาษณ์นักเรียนในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ซึ่งปรากฏผลสรุปได้ ดังนี้

2.2.1 ผลการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือทดลอง และเครื่องมือวิจัย

2.2.1.1 ผลการตรวจคุณภาพของเครื่องมือทดลอง

ผลการตรวจคุณภาพของเครื่องมือทดลอง ซึ่งได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ตามกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเฉพาะเรื่องความสัมพันธ์ของจำนวนที่เกี่ยวข้องกับการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับ และศูนย์ของนักเรียนประถมศึกษาโดยผู้ทรงคุณวุฒิ พบว่า แผนการจัดการเรียนรู้มีความเหมาะสมอยู่ในระดับเหมาะสมดี ค่าเฉลี่ย 2.73 และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.32

2.2.1.2 ผลการคุณภาพของเครื่องมือวิจัย

ผลการตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือวิจัย ซึ่งได้แก่ 1) แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเฉพาะเรื่องความสัมพันธ์ของจำนวนที่เกี่ยวข้องกับการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับ และศูนย์ในระดับประถมศึกษา 2) แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน 3) แบบสัมภาษณ์นักเรียนในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต พบว่า เครื่องมือวิจัยทั้ง 3 ฉบับ มีค่าดัชนีความสอดคล้องเท่ากับ 1.00

2.2.2 ผลการทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

การทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง ได้ดำเนินการตามแบบแผนการวิจัยกึ่งทดลองแบบมีกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง ซึ่งมีการประเมินผลการเรียนรู้ 2 ระยะเวลาคือ ทดสอบก่อนเรียน และทดสอบหลังเรียน กลุ่มทดลองได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ กลุ่มควบคุมได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ ผลการทดลองสรุปได้ดังนี้

2.2.2.1 นักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเฉพาะเรื่องความสัมพันธ์ของจำนวนที่เกี่ยวข้องกับการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับ และศูนย์หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลองอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05

2.2.2.2 นักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเฉพาะเรื่องความสัมพันธ์ของจำนวนที่เกี่ยวข้อง การบวก การลบ การคูณ การหาร จำนวนนับ และศูนย์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการเรียนการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05

อภิปรายผลการวิจัย

การวิจัยเรื่องการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา มีประเด็นการอภิปราย ดังนี้

1. ข้อมูลเบื้องต้นเกี่ยวกับความเข้าใจในการใช้เครื่องหมายเท่ากับ (=) ที่ได้จากการสำรวจกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-6 ในโรงเรียนประถมศึกษาแห่งหนึ่ง โดยใช้ประโยคสัญลักษณ์ $8 + 4 = \square + 5$ พบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับไม่ถูกต้อง จำแนกได้ 3 กลุ่มคือ กลุ่มแรกเป็นกลุ่มที่มีจำนวนนักเรียนที่ไม่เข้าใจเครื่องหมายเท่ากับมากที่สุดคือ เข้าใจว่าหลังเครื่องหมายเท่ากับคือคำตอบที่ได้จากการคำนวณค่าของจำนวนที่อยู่หน้าเครื่องหมายเท่ากับเท่านั้น กลุ่มนี้จะตอบว่า 12 กลุ่มที่สองเข้าใจว่าคำตอบคือ การนำจำนวนทั้งหมดมารวมกัน กลุ่มนี้จะตอบว่า 17 และกลุ่มที่ 3 เป็นกลุ่มที่ไม่มีหลักในการคิดหาคำตอบ กลุ่มนี้จึงมีคำตอบที่หลากหลายซึ่งหาที่มาของคำตอบไม่ได้ ดังนั้นการที่นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับไม่ถูกต้อง จึงจำเป็นต้องได้รับการแก้ไข ซึ่งจากการศึกษางานวิจัยของ Sfard (1991) และ Carpenter, Franke และ Levi (2003), Carpenter และคนอื่นๆ (2003), Blanton และ Kaput (2005), Stephens (2006), Jacob และคนอื่นๆ (2007), Van De Walle (2007) ได้ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์มาช่วยทำให้นักเรียนเข้าใจการใช้เครื่องหมายเท่ากับได้ถูกต้อง โดยแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์นี้มุ่งเน้นการพิจารณาประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับโดยรวม ใช้การเปรียบเทียบจำนวนในแต่ละข้างของเครื่องหมายเพื่อหาคำตอบโดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ การฝึกให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ จากประโยคสัญลักษณ์ที่เกี่ยวข้อง การบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับ และศูนย์ จะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจในเรื่องการใช้เครื่องหมายเท่ากับมากขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับ Van De Walle (2007) ได้เสนอว่าการนำแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์มาใช้ในกิจกรรมการเรียน

การสอนในเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการใช้ศูนย์ การบวก การลบ และตามด้วยสมบัติต่าง ๆ ของจำนวน จะส่งผลให้เกิดประโยชน์ 2 ประการคือ 1) นักเรียนได้พัฒนาความเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับ โดยนักเรียนใช้การดำเนินการของจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ และสามารถให้ความหมายของเครื่องหมายเท่ากับที่ว่าเท่ากันมาช่วยในการแก้ปัญหาประโยคจำนวนเปิด 2) นักเรียนที่ใช้ความสัมพันธ์ในการค้นหาการดำเนินการของจำนวนในแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับมากกว่าการคิดคำนวณโดยตรงจะสามารถเรียนพีชคณิตในระดับสูงขึ้นไปได้อย่างง่าย

แต่จากการทดลองพบว่า การให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจากประโยคสัญลักษณ์ที่เกี่ยวกับ การบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับ และศูนย์นั้น ไม่ใช่เรื่องง่าย เพราะนักเรียนมุ่งเน้นในการคิดคำนวณเพื่อหาคำตอบจึงไม่ได้ให้ความสนใจในการสังเกตความสัมพันธ์เพื่อมาช่วยหาคำตอบโดยหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ในการสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนนี้ นักเรียนต้องการความช่วยเหลือจากครูในการเสริมต่อการเรียนรู้ โดยการช่วยเหลือด้วยการใช้คำถามกระตุ้น นำทางให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนอยู่เสมอ จะช่วยให้นักเรียนตระหนักถึงความเท่ากัน และมองเห็นแนวทางในการหาคำตอบได้ง่ายขึ้น เมื่อนักเรียนพบโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับการเท่ากัน นักเรียนจะใช้การสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนของทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับก่อนที่จะหาคำตอบ

2. ลักษณะของกระบวนการเรียนการสอนนี้ ดำเนินการสอนโดยใช้เนื้อหาตามหลักสูตรปกติ และใช้กระบวนการเรียนการสอนแบบปกติ กล่าวคือ กระบวนการเรียนการสอนแบบปกติที่ใช้ทั่วไปในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยขั้นตอน 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นที่ 1 เป็นขั้นทบทวนพื้นฐานความรู้เดิมของนักเรียนก่อนนำเข้าสู่เนื้อหาใหม่ โดยการใช้สนทนา ชักถาม อภิปราย เพื่อให้นักเรียนระลึกถึงสิ่งที่เคยเรียนและเตรียมความพร้อมเพื่อเรียนเนื้อหาใหม่ ขั้นที่ 2 เป็นขั้นสอนเนื้อหาใหม่ ซึ่งดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้แกนกลาง รายวิชา พื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ขั้นที่ 3 ขั้นสรุป เป็นขั้นของการให้นักเรียนช่วยกันสรุปสาระสำคัญของเรื่องที่เรียนเป็นวิธีลัด และขั้นที่ 4 ขั้นฝึกทักษะ เป็นขั้นการนำความรู้ที่ได้รับไปใช้ โดยการฝึกทักษะจากแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน หรือใบงาน แต่กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดเสริมต่อการเรียนรู้ แม้ว่าการจัดการเรียนการสอนจะประกอบด้วย 4 ขั้นตอนเช่นเดียวกับแบบปกติทั่วไป หากแต่ขั้นที่สองคือขั้นการสอนนั้น แบ่งออกเป็นขั้นย่อย ๆ อีก 4 ขั้น ได้แก่ ขั้นที่ 1 การค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนก่อนและหลังเครื่องหมายเท่ากับ ขั้นที่ 2 การใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบจากโจทย์เกี่ยวกับการเท่ากันในขั้นที่ 1 ขั้นที่ 3

การสร้างข้อสรุป โดยนำข้อสังเกตจากความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจากโจทย์เกี่ยวกับการเท่ากันในชั้นที่ 2 มาเขียนสรุปในรูปแบบข้อความคาดการณ์ หรือในรูปแบบทั่วไป และชั้นที่ 4 การตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป โดยการนำข้อสรุปที่นักเรียนสร้างไว้ในชั้นที่ 3 มาตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ ซึ่งจะเห็นได้ว่า ขั้นตอนการสร้างข้อสรุปในกระบวนการเรียนการสอนที่สร้างขึ้น จะต่างจากขั้นสรุปสาระสำคัญของเรื่องที่เรียนในชั้นที่สามของการสอนโดยปกติทั่วไป โดยที่การฝึกสรุปในรูปแบบข้อความคาดการณ์ หรือในรูปแบบทั่วไปนั้นเป็นพื้นฐานสำคัญต่อการเรียนพีชคณิต ดังที่ Kaput (1999) กล่าวถึงพีชคณิตว่าเป็นเรื่องเกี่ยวข้องกับการสรุปในรูปแบบทั่วไปและการแสดงจำนวนที่ใช้การสร้างภาษาที่เป็นทางการมากขึ้น ทั้งนี้ในขั้นสุดท้ายของการจัดการเรียนการสอนทั้งสองแบบ ยังคงเป็นเรื่องของการฝึกทักษะเช่นเดียวกันกับแบบปกติ

3. กระบวนการเรียนการสอนในชั้นสอน เมื่อใช้การสอนแต่ละขั้นไปแล้ว

ชั้นที่ 1 การค้นหาความสัมพันธ์ เป็นชั้นที่นักเรียนต้องใช้ทักษะการสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ เพื่อร่วมอภิปรายและแสดงความคิดเห็นว่านักเรียนได้สังเกตพบความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนอย่างไร มีการเพิ่มขึ้น หรือลดลง หรือสลับที่ ดังนั้นครูผู้สอนจึงเป็นผู้ที่มีบทบาทสำคัญเป็นอย่างมากต่อการให้ความช่วยเหลือนักเรียน เพื่อให้ นักเรียนมีทักษะในการสังเกตและพูดแสดงความคิดเห็น โดยใช้คำถามชี้แนะ

ในชั้นตอนนี้มีจุดเด่นคือ เมื่อนักเรียนได้รับการฝึกการสังเกตความสัมพันธ์ของจำนวนระหว่างเครื่องหมายเท่ากับอยู่เป็นประจำ จะทำให้นักเรียนเข้าใจเรื่องจำนวนที่เท่ากันของกลุ่มจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ เพราะได้สังเกตพบว่าความสัมพันธ์ของจำนวนระหว่างเครื่องหมายเท่ากับ มีทั้งเพิ่มขึ้นด้วยจำนวนที่เท่ากัน หรือลดลงด้วยจำนวนที่เท่ากัน หรือสลับที่กัน หรือเปลี่ยนกลุ่มของจำนวนทั้งสองข้าง แต่ไม่ว่าความสัมพันธ์ของจำนวนนั้นจะเพิ่ม หรือลด หรือสลับที่ หรือเปลี่ยนกลุ่มของจำนวนทั้งสองข้าง ค่าของจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะยังคงเท่ากันเสมอ ซึ่งส่งผลทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในเรื่องเครื่องหมายเท่ากับถูกต้อง ดังนั้นการเรียนการสอนจากกระบวนการสอนในชั้นนี้ ที่ทำให้นักเรียนมีความเข้าใจที่ถูกต้องในการใช้เครื่องหมายเท่ากับ เป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งต่อการเรียนพีชคณิตในระดับสูงขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับ Van de walle (2007) ที่กล่าวว่า การเข้าใจในเครื่องหมายเท่ากับของนักเรียนให้ถูกต้องเป็นเรื่องที่สำคัญ เหตุผลประการแรกคือ เพราะเป็นสิ่งสำคัญสำหรับนักเรียนที่จะมองเห็นและเข้าใจความสัมพันธ์ในระบบจำนวน ซึ่งเครื่องหมายเท่ากับเป็นวิธีการหลักในการแสดงความสัมพันธ์เหล่านี้ เหตุผลประการที่สองคือ ถ้านักเรียนไม่เข้าใจในเครื่องหมายเท่ากับ จะทำให้นักเรียนมีปัญหาในการเรียนพีชคณิต

ขั้นที่ 2 การใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ เป็นขั้นที่นักเรียนฝึกหาคำตอบจากโจทย์ที่เกี่ยวกับการเท่ากันโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ด้วยวิธีการสังเกต เปรียบเทียบ ใช้เทคนิคการเพิ่มหรือลด หรือลบที่ หรือเปลี่ยนกลุ่มของจำนวนที่เท่ากันทั้งสองข้าง มาช่วยซึ่งหลีกเลี่ยงการคิดคำนวณ ในขั้นตอนนี้มีจุดเด่นคือ เมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่าในช่วงแรกที่ใช้ขั้นตอนนี้ นักเรียนไม่ได้ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์มาช่วยในการหาคำตอบ ครูจึงเสริมต่อการเรียนรู้โดยการยกตัวอย่างแสดงให้เห็นถึงการใช้นี้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ เช่น การเขียนลูกศรโยงจำนวนซึ่งสัมพันธ์กันให้เห็นการเปรียบเทียบว่าเพิ่มขึ้น หรือลดลง หรือลบที่ หรือเปลี่ยนกลุ่ม ซึ่งเป็นวิธีการที่นักเรียนไม่คุ้นเคย สิ่งสำคัญเมื่อนักเรียนมองเห็นวิธีการในการคิดหาคำตอบที่ครูแสดงให้เห็นแล้ว ครูต้องฝึกให้นักเรียนเขียนบันทึกแสดงวิธีคิด เพื่อเป็นร่องรอยในการคิด และครูควรใช้คำถามท้าทายเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนคิดต่อ

ในขั้นตอนนี้มีจุดเด่นคือ การฝึกให้นักเรียนใช้วิธีคิดโดยการเปรียบเทียบความสัมพันธ์ แล้วเขียนแสดงวิธีคิดโดยเขียนลูกศรโยงจำนวนซึ่งสัมพันธ์กันให้เห็นการเปรียบเทียบนั้น ทำให้นักเรียนมองเห็นลักษณะการเปลี่ยนแปลงของจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งจะทำให้มองเห็นว่าเครื่องหมายเท่ากับนั้นแสดงถึงความเท่ากันของจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับเสมอ ทำให้ความเข้าใจในเรื่องเครื่องหมายเท่ากับชัดเจนขึ้น

ขั้นที่ 3 การสร้างข้อสรุป เป็นขั้นที่นักเรียนต้องฝึกเขียนข้อสรุป โดยนำข้อสังเกตที่ได้จากความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจากขั้นที่ 2 มาเขียนสรุป ซึ่งอาจเขียนสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ คือการเขียนสรุปในสิ่งที่สังเกตได้เป็นคำกล่าว หรือข้อความที่คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง หรือเขียนสรุปในรูปทั่วไป คือการเขียนสรุปในสิ่งที่สังเกตได้ในรูปประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวแปรแทนจำนวนใด ๆ ตัวแปรนี้อาจเขียนเป็นรูปต่าง ๆ เช่น $\square, \triangle, \circ$ หรือพยัญชนะภาษาไทย หรือพยัญชนะภาษาอังกฤษ เมื่อประเมินด้วยการสอบถามแล้วพบว่าในช่วงแรกที่ใช้ขั้นตอนนี้ นักเรียนยังไม่สามารถเขียนสรุปได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งข้อสรุปในรูปทั่วไป ครูต้องเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการใช้คำถามชี้แนะจนนักเรียนสามารถเขียนสรุปได้ เมื่อให้นักเรียนนำคำพูดมาเขียนสรุปในรูปข้อความคาดการณ์ ครูต้องชี้แนะนักเรียนว่า คำพูดว่า “เลขไหน” “ตัวไหน” “อะไร” เราจะเขียนเป็นข้อความว่า “จำนวนใด” เช่น เขียนสรุปเป็นข้อความว่า “จำนวนใดบวกกับศูนย์ได้จำนวนนั้น” ทั้งนี้ในช่วงแรกครูต้องแนะนำให้เขียนทราบบก่อนว่ารูปต่าง ๆ เช่น $\square, \triangle, \circ$ หรือพยัญชนะภาษาไทย หรือพยัญชนะภาษาอังกฤษ สามารถเขียนเพื่อแทนตัวแปรหรือตัวไม่ทราบค่าได้ เช่น $\triangle + 0 = \triangle$ ขั้นตอนนี้ จุดเด่นคือ การที่นักเรียนสามารถเขียนข้อสรุปได้โดยเฉพาะอย่างยิ่งการเขียนข้อสรุปในรูปทั่วไป ซึ่งเป็นทักษะที่จำเป็นในการเรียน

พีชคณิตในระดับที่สูงขึ้น ดังที่ Jacob และคนอื่น ๆ (2007) กล่าวว่านักเรียนประถมศึกษาสามารถแสดงรูปทั่วไปได้ โดยใช้ภาษาของตัวเอง และสามารถแสดงรูปทั่วไปโดยใช้ตัวแปร เช่น $s + 0 = s$, $p + r = r + p$ ถ้านักเรียนขาดความเข้าใจในรูปทั่วไป นักเรียนก็จะไม่เข้าใจสมบัติพื้นฐานของการดำเนินการของจำนวน

ขั้นที่ 4 การตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป เป็นขั้นที่นักเรียนนำข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปทั่วไปที่สร้างไว้ในขั้นที่ 3 มาตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ ในขั้นนี้เป็นการประเมินความรู้และความเข้าใจของนักเรียน โดยดูจากการยกตัวอย่างเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ ในขั้นตอนนี้ครูเสริมต่อการเรียนรู้โดยการสนับสนุนนักเรียนให้มีส่วนร่วมในการตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป ซึ่งนักเรียนที่เรียนอ่อนก็สามารถยกตัวอย่างเพื่อยืนยันข้อสรุปได้ แต่ทั้งนี้ต้องดูตัวอย่างจากเพื่อนคนอื่น ๆ ก่อน ครูต้องเปิดโอกาสนักเรียนทุกคนได้มีส่วนร่วมในการอภิปรายและโต้แย้งเพื่อยืนยันข้อสรุปที่นำมาอภิปรายได้ ตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์ที่นักเรียนยืนยันข้อสรุปในรูปข้อความคาดการณ์ “จำนวนใดบวกกับศูนย์ได้จำนวนนั้น” หรือข้อสรุปในรูปทั่วไป $\Delta + 0 = \Delta$ เช่น $24 + 0 = 24$, $25 + 0 = 25$, $26 + 0 = 26$

กล่าวโดยสรุปในกระบวนการเรียนการสอนนี้ ในแต่ละขั้นตอนจะมีความสัมพันธ์ต่อเนื่องกัน ซึ่งจะมีลักษณะคล้ายกับเป็นวงจรปฏิบัติ เมื่อนักเรียนได้รับการฝึกด้วยขั้นตอนการเรียนการสอนหลาย ๆ วงจรอย่างต่อเนื่อง อาจทำให้นักเรียนพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเพิ่มขึ้น และจุดเด่นอีกประการหนึ่งของกระบวนการเรียนการสอนนี้คือ ขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอนทั้ง 4 ขั้น จะมีการประเมินการเรียนรู้ของนักเรียนทุกขั้นตอน เมื่อนักเรียนประสบปัญหาการเรียนรู้ครูต้องเสริมต่อการเรียนรู้ในทันที ด้วยวิธีการที่หลากหลายได้แก่ การใช้คำถามชี้แนะเพื่อให้เกิด การยกตัวอย่างแสดงวิธีคิดให้ดู การใช้คำถามนำไปสู่การสรุป และการสนับสนุนให้นักเรียนยกตัวอย่างมาตรวจสอบเพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้

4. ผลของการสังเกตการสอน พฤติกรรมในการเรียนรู้ของนักเรียนที่แสดงถึงความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน ซึ่งสังเกตพบว่านักเรียนมีพฤติกรรมอยู่ 4 แบบ คือ 1) อธิบายสรุปเป็นคำพูดด้วยภาษาของตนเอง 2) อธิบายสรุปด้วยภาพลูกศร 3) อธิบายสรุปด้วยการยกตัวอย่าง 4) สรุปคำพูดเป็นสัญลักษณ์ คืออ้างด้วยรูปทั่วไป

4.1 อธิบายสรุปเป็นคำพูดด้วยภาษาของตนเอง จากการสังเกตพบว่านักเรียนอธิบายสรุปเป็นคำพูดด้วยภาษาของตนเองมากที่สุด โดยภาษาพูดจะเป็นภาษาตามความเข้าใจของนักเรียนเอง ซึ่งครูจะปล่อยให้ให้นักเรียนพูดด้วยภาษาของตนเองก่อนในระยะต้น

แล้วจึงค่อยปรับให้เป็นภาษาที่เป็นทางการมากขึ้นภายหลัง ตัวอย่างคำพูดอธิบายสรุปของนักเรียนที่พบ เช่น

“จำนวนใดบวกกับศูนย์ย่อมได้ผลบวกเท่ากับจำนวนนั้น” นักเรียนจะใช้ภาษาพูดของนักเรียนเอง ดังนี้ “อะไรบวกกับศูนย์ได้ตัวนั้น” “ตัวไหนบวกกับศูนย์ได้ตัวนั้น” “ศูนย์ไม่มีค่าบวกกับอะไรก็ได้ตัวนั้น”

“จำนวนเดียวกันเมื่อนำมาลบกันผลลบจะเท่ากับศูนย์” นักเรียนจะใช้ภาษาพูดของนักเรียนเอง ดังนี้ “ตัวมันเองลบกันจะได้ศูนย์” “ตัวที่เหมือนกันลบกันได้ศูนย์” “ตัวไหนลบด้วยตัวนั้นได้ศูนย์”

“จำนวนใดคูณกับหนึ่งย่อมได้ผลคูณเท่ากับจำนวนนั้น” นักเรียนจะใช้ภาษาพูดของนักเรียนเอง ดังนี้ “อะไรคูณกับหนึ่งได้ตัวนั้น” “หนึ่งคูณกับอะไรได้ตัวเดิม”

“จำนวนใดหารด้วยหนึ่งย่อมได้ผลหารเท่ากับจำนวนนั้น” นักเรียนจะใช้ภาษาพูดของนักเรียนเอง ดังนี้ “อะไรหารกับหนึ่งได้ตัวนั้น” “หนึ่งหารอะไรได้ตัวเดิม” “หนึ่งหารอะไรได้เท่าเดิม”

“สมบัติการสลับที่ของการบวก” นักเรียนจะใช้ภาษาพูดของนักเรียนเอง ดังนี้ “การบวกสลับที่กันได้ค่าเท่าเดิม” “ตัวเลขเหมือนกันเพียงแต่สลับกันอยู่”

“สมบัติการสลับที่ของการคูณ” นักเรียนจะใช้ภาษาพูดของนักเรียนเอง ดังนี้ “ตัวเลขสลับที่กันได้ค่าเท่ากัน” “ตัวเลขเหมือนกันเพียงแต่สลับกันอยู่คูณกันก็เท่ากัน”

“สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก” นักเรียนจะใช้ภาษาพูดของนักเรียนเอง ดังนี้ “ตัวเลขเหมือนกันเลยทุกตัวเมื่อบวกกันก็ต้องเท่ากัน”

“สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ” นักเรียนจะใช้ภาษาพูดของนักเรียนเอง ดังนี้ “ตัวเลขเหมือนกันเลยทุกตัวเมื่อคูณกันก็ต้องเท่ากัน”

เป็นที่น่าสังเกตว่า นักเรียนกลุ่มเก่งสองคนจะแย้งกันพูดสรุปทุกครั้ง นักเรียนกลุ่มกลางสองคนจะพูดสรุปเป็นส่วนใหญ่ อาจเป็นเพราะนักเรียนกลุ่มเก่งและกลุ่มกลางมีพื้นฐานความเข้าใจในเรื่องสมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน และสมบัติของการดำเนินการของจำนวน ส่วนนักเรียนกลุ่มอ่อนอีกสองคนยังไม่มีพื้นฐานในเรื่องนี้ จึงไม่สามารถสรุปเป็นคำพูดของตนเองได้จะพูดสรุปก็ต่อเมื่อให้นักเรียนกลุ่มเก่งและกลุ่มกลางพูดสรุปก่อน และเมื่อครูซักถามก็จะพูดตามเพื่อน ซึ่งครูต้องให้การชื่นชมนักเรียนเสมอเมื่อนักเรียนสามารถพูดสรุปได้ ถึงแม้จะเป็นการพูดเลียนแบบเพื่อนก็ตาม

4.2 อธิบายสรุปด้วยการยกตัวอย่าง พฤติกรรมนี้ นักเรียนกลุ่มเก่งและกลุ่มกลางชอบอธิบายสรุปด้วยการยกตัวอย่างเป็นคำพูด ส่วนนักเรียนกลุ่มอ่อนจะไม่พูดอะไรเลย

ครูต้องใช้คำถามเพื่อชี้ให้นักเรียนตอบ ซึ่งอาจยกตัวอย่างซ้ำกับเพื่อน ยกตัวเช่น “สมบัติการสลับที่ของการบวก” นักเรียนกลุ่มเก่งจะพูดว่า “ยี่สิบห้าบวกสามสิบเท่ากับสามสิบบวกยี่สิบห้า” นักเรียนกลุ่มกลางก็จะเลียนแบบเพียงแต่ปรับจำนวนไม่ให้ซ้ำกับเพื่อน เช่น “ยี่สิบบวกสี่สิบเท่ากับสี่สิบบวกยี่สิบ”

4.3 อธิบายสรุปโดยการเขียนภาพลูกศรเชื่อมโยงระหว่างจำนวน ใช้ลูกศรเชื่อมโยงแสดงการเปรียบเทียบจำนวนในแต่ละด้านของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงวิธีการคิดของนักเรียน ยกตัวอย่างเช่น

A handwritten equation $8 + 5 = 7 + 6$ on a light green background. Two curved arrows above the equation indicate the transformation: one arrow starts at the number 8 and points to 7, and another arrow starts at the number 5 and points to 6. The number 8 has a small '-1' written above it, and the number 5 has a small '-1' written above it, indicating the subtraction of 1 from each term.

แผนภาพที่ 17 แสดงบันทึกวิธีคิดของนักเรียน

A handwritten equation $5 \times 84 = 10 \times 42$ on lined paper. Two curved arrows above the equation indicate the transformation: one arrow starts at the number 5 and points to 10, and another arrow starts at the number 84 and points to 42. The number 5 has a small 'x 2' written above it, and the number 84 has a small 'x 2' written above it, indicating multiplication by 2 for both terms.

แผนภาพที่ 18 แสดงบันทึกวิธีคิดของนักเรียน

A handwritten equation on lined paper: $60 \times 48 = 6 \times 480$. Above the equation, there is a curved arrow pointing from 60 to 6, with a division symbol $\div 10$ above it. Below the equation, there is another curved arrow pointing from 48 to 480, with a division symbol $\div 10$ below it. A checkmark is visible at the bottom right of the equation.

แผนภาพที่ 19 แสดงบันทึกวิธีคิดของนักเรียน

A handwritten equation on lined paper: $90 \times 45 = 9 \times 450$. Below the equation, there is a curved arrow pointing from 90 to 9, with a multiplication symbol $\times 10$ above it. Another curved arrow points from 45 to 450, with a multiplication symbol $\times 10$ below it.

แผนภาพที่ 20 แสดงบันทึกวิธีคิดของนักเรียน

ในการอธิบายสรุปโดยการเขียนภาพลูกศรเชื่อมโยงระหว่างจำนวนนี้ มีนักเรียนกลุ่มเก่งที่มักจะแสดงพฤติกรรมนี้ อาจเป็นเพราะนักเรียนสามารถสังเกตเห็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนและเห็นว่าการเปลี่ยนแปลงที่เพิ่มขึ้น หรือลดลงเท่าใด จึงสามารถโยงความสัมพันธ์ให้เห็นได้ ส่วนนักเรียนกลุ่มกลางจะแสดงพฤติกรรมนี้ ถ้าใจหยิ่งไม่ยาก และสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ได้ชัด สำหรับนักเรียนกลุ่มอ่อนไม่แสดงพฤติกรรมนี้เลย อาจเป็นเพราะนักเรียนไม่เข้าใจ ถึงแม้ครูจะให้เขียนบันทึกการคิดลงในสมุด นักเรียนกลุ่มนี้ก็จะลอกเพื่อนโดยไม่ได้คำนึงถึงหัวลูกศร และไม่รู้ว่าลูกศรที่โยงระหว่างจำนวนนั้นมีการเปลี่ยนแปลงโดยการเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร

4.4 สรุปคำพูดเป็นสัญลักษณ์ หรืออ้างด้วยรูปทั่วไป พฤติกรรมนี้นักเรียนกลุ่มเก่งและกลุ่มกลาง สามารถสรุปในรูปทั่วไปได้ โดยมักใช้รูป \square , \triangle แทนตัวแปร นักเรียนไม่ชอบใช้พยัญชนะภาษาไทย หรือพยัญชนะภาษาอังกฤษ แทนตัวแปร อาจเป็นเพราะนักเรียนต้องการใช้ภาษาของตัวเองจึงชอบเขียนสิ่งที่เป็นรูปภาพมากกว่าการเขียนเป็นตัวอักษร ส่วนนักเรียนกลุ่มอ่อนจะไม่สรุปในรูปทั่วไป อาจเป็นเพราะไม่เข้าใจว่า \square, \triangle แทนตัวแปรอย่างไร สังเกตเห็นว่านักเรียนกลุ่มนี้มักจะนั่งมองดูเพื่อนเฉย ๆ เมื่อครูให้เขียนสรุปลงในสมุดก็จะลอกเพื่อน ตัวอย่างการสรุปในรูปทั่วไปของนักเรียนที่พบ เช่น

“จำนวนใดบวกกับศูนย์ย่อมได้ผลบวกเท่ากับจำนวนนั้น” รูปทั่วไป $a + 0 = a$ โดยที่ a แทนจำนวนใด ๆ นักเรียนมักจะเขียนสรุป ดังนี้ $\square + 0 = \square$, $\triangle + 0 = \triangle$

“จำนวนเดียวกันเมื่อนำมาลบกันผลลบจะเท่ากับศูนย์” รูปทั่วไป $a - a = 0$ โดยที่ a แทนจำนวนใด ๆ นักเรียนมักจะเขียนสรุป ดังนี้ $\square - \square = 0, \triangle - \triangle = 0$

“จำนวนใดคูณกับหนึ่งย่อมได้ผลคูณเท่ากับจำนวนนั้น” รูปทั่วไป $a \times 1 = a$ โดยที่ a แทนจำนวนใด ๆ นักเรียนมักจะเขียนสรุป ดังนี้ $\square \times 1 = \square, \triangle \times 1 = \triangle$

“จำนวนใดหารด้วยหนึ่งย่อมได้ผลหารเท่ากับจำนวนนั้น” รูปทั่วไป $a \div 1 = a$ โดยที่ a แทนจำนวนใด ๆ นักเรียนมักจะเขียนสรุป ดังนี้ $\square \div 1 = \square, \triangle \div 1 = \triangle$

การสรุปคำพูดเป็นสัญลักษณ์ หรืออ้างด้วยรูปทั่วไป นักเรียนกลุ่มเก่งและกลุ่มกลางสามารถอธิบายสรุปเป็นคำพูดด้วยภาษาของตนเอง แต่เมื่อเขียนอ้างเหตุผลประกอบการคิด นักเรียนกลุ่มเก่งจะอ้างด้วยรูปทั่วไป โดยนักเรียนกลุ่มนี้ให้เหตุผลว่า ไม่ต้องเขียนยาว ส่วนนักเรียนกลุ่มกลาง มีบางคนที่สรุปเป็นคำพูด หรือสรุปในรูปทั่วไป แต่นักเรียนกลุ่มต่ำไม่สรุปในรูปใดเลย

5. ผลจากการสัมภาษณ์เชิงลึกกับนักเรียนกลุ่มทดลองจำนวน 6 คน การตอบคำถามในการสัมภาษณ์ทำให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน แบ่งออกเป็นสองขั้นตอนคือ 1) การตอบคำถามในชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ 2) การสัมภาษณ์แบบเจาะลึกเป็นรายบุคคลถึงการคิดและการให้เหตุผลในขณะหาคำตอบ เพื่อดูว่านักเรียนมีการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตอย่างไร พบว่าพฤติกรรมที่บ่งบอกถึงความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตโดยการอธิบายในรูปคำพูดด้วยภาษาของตนเองมากที่สุด รองลงมาคือการแสดงพฤติกรรมอธิบายสรุปด้วยการยกตัวอย่าง ส่วนการแสดงพฤติกรรมที่ใช้น้อยคือ การสรุปคำพูดเป็นสัญลักษณ์ และการอธิบายสรุปด้วยภาพลูกศร เป็นที่น่าสังเกตว่าถึงแม้นักเรียนกลุ่มทดลองทั้ง 6 คน นี้จะได้ฝึกการสรุปคำพูดเป็นสัญลักษณ์ และการอธิบายสรุปด้วยภาพลูกศรมาแล้ว แต่พบว่านักเรียนกลุ่มเก่งเพียง 2 คน เท่านั้นที่อธิบายสรุปด้วยภาพลูกศร นอกนั้นจะอธิบายในรูปคำพูด และอธิบายสรุปด้วยการยกตัวอย่าง ทั้งนี้อาจเป็นเพราะเนื่องมาจากนักเรียนกลุ่มเก่งมีพื้นฐานในเรื่องสมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน และสมบัติของการดำเนินการของจำนวนดีอยู่แล้ว ประกอบกับมีความสามารถในการเรียนรู้ได้ดีกับวิธีการช่วยเหลือแนะนำโดยการใช้คำถามของครูในช่วงทดลอง และการอภิปรายแลกเปลี่ยนวิธีการคิด ทำให้สามารถนำความรู้ที่ได้รับมาใช้ในการแก้ปัญหาได้ ในขณะที่นักเรียนกลุ่มกลางและกลุ่มอ่อนไม่นำพฤติกรรมที่เคยฝึกได้ในห้องเรียนมาใช้ตอบคำถามครูในช่วงสัมภาษณ์

6. คำถามที่ใช้ในแต่ละชั้นของกระบวนการเรียนการสอน

ขั้นที่ 1 การค้นหาความสัมพันธ์ คำถามที่ครูใช้ชี้แนะ เช่น

“นี่คือเครื่องหมายอะไร” (ชี้ที่เครื่องหมายเท่ากับ)

“ในความคิดของนักเรียนเครื่องหมายเท่ากับคืออะไร”

“นักเรียนสังเกตเห็นอะไรระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ”

“นักเรียนเปรียบเทียบจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับแล้วพบว่า.....”

ขั้นที่ 2 การใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ ครูควรใช้คำถามท้าทายเพื่อกระตุ้นให้นักเรียน

คิดต่อ เช่น

“ใครมีวิธีคิดที่แตกต่างจากนี้บ้าง”

“นักเรียนลองคิดวิธีใหม่ดูสิ”

“ใครมีวิธีคิดที่แปลกกว่านี้”

ขั้นที่ 3 การสร้างข้อสรุป ตัวอย่างคำถามที่ใช้เพื่อให้นักเรียนสรุปในรูปข้อความ

คาดการณ์ เช่น

“นักเรียนสรุปวิธีคิดเป็นคำพูดได้อย่างไร”

“นักเรียนนำคำพูดที่สรุปมาเขียนเป็นข้อความได้ไหม”

ตัวอย่างคำถามที่ใช้เพื่อให้นักเรียนสรุปในรูปทั่วไป เช่น

“นักเรียนสรุปคำพูดนี้เป็นประโยคสัญลักษณ์ได้อย่างไร”

ขั้นที่ 4 การตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป คำถามที่ครูใช้ในขั้นนี้ เช่น

“นักเรียนรู้ได้อย่างไรว่า จำนวนใดบวกด้วยศูนย์จะเท่ากับจำนวนนั้น ถูกต้องเสมอ”

“นักเรียนสามารถยกตัวอย่างเพื่อยืนยันว่าข้อสรุปนี้ถูกต้องเสมอได้หรือไม่”

“นักเรียนลองยกตัวอย่างเพื่อยืนยันว่าข้อสรุปนี้ถูกต้องเสมอ”

คำถามต่าง ๆ ที่ยกตัวอย่างมาในแต่ละชั้น ล้วนแล้วแต่เป็นบทบาทของครูที่จะต้องนำไปใช้ในชว่กกิจกรรมการเรียนการสอน การใช้คำถามในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน เป็นคำถามสำหรับนักเรียนทุกคนในชั้นเรียน ไม่ได้แยกคำถามสำหรับนักเรียนกลุ่มเก่งปานกลาง และอ่อน แต่จะให้ความสนใจใช้คำถามซ้ำกับกลุ่มนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจ ดังนั้นเมื่อนักเรียนคนใดไม่เข้าใจสิ่งที่เรียนรู้ ครูจะใช้คำถามทบทวนซ้ำจนกว่านักเรียนจะเข้าใจ การใช้คำถามของครูในกระบวนการเรียนการสอนนี้ เป็นการเสริมต่อการเรียนรู้ของนักเรียนด้วยการใช้

คำถามมากที่สุด ซึ่งคำถามในแต่ละชั้นของกระบวนการเรียนการสอนจะมีความแตกต่างกันตามวัตถุประสงค์ที่จะให้การช่วยเหลือนักเรียนในแต่ละชั้น

ข้อสังเกตจากการวิจัย

จากการทดลองสอนที่ใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวทางการคิดเชิงสัมพันธ์กับแนวทางการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา ได้พบข้อสังเกตบางประการดังนี้

1. การฝึกให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์หรือใช้แนวทางการคิดเชิงความสัมพันธ์อยู่เสมอจะทำให้ให้นักเรียนเป็นคนช่างสังเกต และมีวิธีคิดหาคำตอบที่หลากหลายมากขึ้น ไม่มุ่งเน้นหาคำตอบด้วยขั้นตอนวิธีการทางเลขคณิตเพียงอย่างเดียว

2. เวลาที่ใช้ในช่วงแรกจะใช้เวลามากในการอธิบายเพราะนักเรียนยังไม่คุ้นเคยในการใช้แนวทางการคิดเชิงความสัมพันธ์ ครูต้องช่วยเหลือโดยการยกตัวอย่างหรือแสดงวิธีคิดให้ดู เช่น การเขียนลูกศรแสดงวิธีคิด หรือการสรุปคำพูดในรูปสัญลักษณ์ เป็นต้น แต่เมื่อสอนตามกระบวนการเรียนการสอนทั้ง 4 ชั้น ผ่านไป 3-4 รอบ นักเรียนจะใช้เวลาเรียนน้อยลง ครูก็จะลดบทบาทลงด้วย

3. ในช่วงแรกของการเรียนการสอนการให้เหตุผลสนับสนุนการคิดของนักเรียนจะใช้วิธีการคิดคำนวณหาคำตอบมาอ้าง แต่เมื่อนักเรียนได้เรียนตามกระบวนการเรียนการสอนทั้ง 4 ชั้น นักเรียนที่เก่งจะสามารถให้เหตุผลโดยการอ้างรูปทั่วไป เช่น $a + b = b + a$ เมื่อ a และ b แทนจำนวนใด ๆ หรืออ้างข้อสรุปในรูปข้อความคาดการณ์ เช่น จำนวนใดคูณกับศูนย์ย่อมได้ศูนย์ หรืออ้างเหตุผลโดยยกตัวอย่างวิธีคิดโดยเขียนลูกศรแสดงความสัมพันธ์ให้เห็น เป็นต้น ส่วนนักเรียนที่เรียนอ่อนจะไม่แสดงความคิดเห็นใด ๆ แต่มักบันทึกแสดงวิธีการคิดโดยเลียนแบบวิธีคิดของครูหรือเพื่อน

4. ข้อจำกัดในการใช้กระบวนการเรียนการสอนคือ นักเรียนส่วนใหญ่ไม่มีทักษะในการสังเกต ไม่ชอบพูดแสดงความคิดเห็น ไม่ชอบเขียนหนังสือโดยเฉพาะอย่างยิ่งการเขียนสรุปความคาดการณ์ที่มีข้อความมาก นักเรียนจะเขียนช้ามากจนถึงไม่ยอมเขียน ดังนั้นครูผู้สอนจึงเป็นผู้ที่มีบทบาทสำคัญเป็นอย่างมากต่อการให้ความช่วยเหลือนักเรียนที่มีปัญหาเหล่านี้

5. ทักษะในการใช้คำถามของครูก็เป็นเรื่องที่สำคัญ เพราะการใช้คำถามชี้แนะจะนำไปให้นักเรียนไปสู่ความเข้าใจ และสามารถเรียนรู้ต่อไปได้

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

จากผลการวิจัยครั้งนี้มีข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้ดังนี้

1.1 ข้อเสนอแนะสำหรับผู้บริหาร

ผู้บริหารควรสนับสนุนให้ครูนำกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษาไปใช้ โดยส่งเสริมให้ครูมีความรู้ความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับการพัฒนา การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา โดยอาจจัดให้มีการประชุมเชิงปฏิบัติการเพื่อให้ความรู้ความเข้าใจที่ถูกต้อง

1.2 ข้อเสนอแนะสำหรับครู ศึกษานิเทศก์ และหน่วยงานที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนาการสอนคณิตศาสตร์

1.2.1 กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา กิจกรรมสำคัญของกระบวนการเรียนการสอนนี้สำหรับครูคือ การออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ การสร้างโจทย์สำหรับการพัฒนาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ และการใช้คำถามที่เน้นให้นักเรียนแสดงเหตุผล ส่วนกิจกรรมสำคัญของนักเรียนคือ การสังเกตและการวิเคราะห์ความสัมพันธ์เพื่อนำมาใช้ในการสร้างข้อสรุปและการตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป

1.2.2 กระบวนการจัดการเรียนการสอนแต่ละชั้นครูสามารถเลือกโจทย์สำหรับการพัฒนาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ตามลักษณะของเนื้อหาและศักยภาพของนักเรียนให้สอดคล้องกับกระบวนการในแต่ละชั้น

2. ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ควรมีการศึกษาผลของการใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา โดยใช้กับนักเรียนชั้นอื่น ๆ ในระดับประถมศึกษาที่ไม่ใช่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4

2.2 ควรมีการศึกษาผลของการใช้กระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่มีการแบ่งระดับตามผลการเรียนคณิตศาสตร์ เพื่อศึกษาความเหมาะสมและข้อจำกัดของกระบวนการเรียนการสอนต่อนักเรียนในระดับผลการเรียนในระดับต่าง ๆ

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

- กมล โพธิ์เย็น. (2547). **รูปแบบการพัฒนาความคิดอย่างเป็นระบบเพื่อเสริมสร้างความสามารถด้านทักษะการเขียนภาษาไทยของนักศึกษาปริญญาตรีโดยใช้แนวคิดทฤษฎีไตรอาร์ชิกและวิธีการแบบสแกฟโฟลด์**. วิทยานิพนธ์ปริญญา ดุษฎีบัณฑิต สาขาจิตวิทยาการศึกษา. กรุงเทพมหานคร: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัย.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). **หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพมหานคร: ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- กฤษณะ ไสขุมา. (2546). **กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ เรื่องแบบรูปและการให้เหตุผล สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3**. วิทยานิพนธ์ปริญญา มหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ชาญชัย ยมดิษฐ์. (2548). **เทคนิคและวิธีการสอนร่วมสมัย**. กรุงเทพมหานคร: หลักพิมพ์.
- ชีรา ลำดวนหอม. (2546). **กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ เรื่องแบบรูปและการให้เหตุผล สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6**. วิทยานิพนธ์ปริญญา มหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ทีศนา แคมมณี. (2548). **ศาสตร์การสอน: องค์ความรู้เพื่อการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ**. กรุงเทพมหานคร: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ธัญสุดา จีรจิตตยากร. (2549). **การพัฒนา รูปแบบการเรียนรู้การสอนเพื่อเสริมสร้างการคิดตรรกคณิตศาสตร์สำหรับเด็กปฐมวัย**. วิทยานิพนธ์ปริญญา ดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์. สาขาวิชาการศึกษาปฐมวัย. กรุงเทพมหานคร: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ธนาชาติ หล่อนกลาง. (2550). **การพัฒนา รูปแบบการเรียนรู้การสอนวัฒนธรรมท้องถิ่นตามแนวการสอนประสบการณ์การอ่านแบบเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถการอ่านภาษาอังกฤษเพื่อความเข้าใจและเจตคติต่อวัฒนธรรมท้องถิ่นของนักศึกษามหาวิทยาลัยราชภัฏ**. วิทยานิพนธ์ปริญญา ดุษฎีบัณฑิต สาขาหลักสูตรและการสอน. กรุงเทพมหานคร: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

- บุญชม ศรีสะอาด. (2546). **การวิจัยสำหรับครู**. กรุงเทพมหานคร: สุวีริยาสาส์น.
- บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. (2526). **การทดสอบแบบอิงเกณฑ์: แนวคิดและวิธีการ**. กรุงเทพมหานคร: ภาคพื้นฐานการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ .
- วสันต์ ทองไทย. (2546). **การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนเพื่อเสริมสร้างจิตพิสัยในการเรียนรู้สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษา**. วิทยานิพนธ์ปริญญาคุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาการวิจัยและพัฒนาหลักสูตร. กรุงเทพมหานคร: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2544). **คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2547). **มองคุณภาพการศึกษา ตะวันออกจากการประเมินผลนักเรียนนานาชาติ**. กรุงเทพมหานคร: เซเว่น พรินติ้ง กรุ๊ป .
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2550). **การให้เหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544**. กรุงเทพมหานคร: เอส.พี.เอ็น. การพิมพ์ จำกัด.
- สิริพร ทิพย์คง. (2545). **หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์**. กรุงเทพมหานคร: พัฒนาคุณภาพวิชาการ.
- สุภาพร บุญหนัก. (2544). **การพัฒนาชุดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยวิธีการแก้ปัญหาเรื่องความเท่ากันทุกประการเพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต สาขาการมัธยมศึกษา. กรุงเทพมหานคร: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สุรางค์ ไคว์ตระกูล. (2548). **จิตวิทยาการศึกษา**. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์.
- อรรถัย มูลคำ และสุวิทย์ มูลคำ. (2544). **Child centered: Storyline Method: การบูรณาการหลักสูตรและการสอนโดยเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ**. กรุงเทพมหานคร: มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- อารีย์ ศรีเดือน. (2547). **การพัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบปฏิบัติการ เรื่องการประยุกต์ 1 เพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา. กรุงเทพมหานคร: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

อัมพร ม้าคนอง. (2546). **คณิตศาสตร์: การสอนและการเรียนรู้**. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภาษาอังกฤษ

Arend, R. I. (1994). **Leraning to Teach**. 3rd ed. New York: McGraw-Hill.

Arens, Shheila A. and Meyer, Rhonda D. (2000). **Algebraic Thinking: Implications for Rethinking Pedagogy and Professional Development**. Aurora, CO: Mid-Continent Research for Education and Learning. (ERIC Document Reproduction Service No. ED449983).

Baroody, A.J.; and Ginsburg, H.P. (1983). **The Effects of Instrution on Children's Understanding of the "Equals" Sign**. *Elementary School Journal*. 84: 199-212.

Battista, M.; and Brown, C. (1998). **Using Spreadsheets to Promote Algebraic Thinking**. *Teaching Children Mathematics*. January: pp. 470-478.

Behr, M.; Erlwanger, S.; and Nichols, E. (1975). **How Children View Equality Sentences**. (PMDC Tech. Rep. No. 3.). Tallahassee, FL: Florida State University. (ERIC No. ED144802)

Behr, M.; Erlwanger, S.; and Nichols, E. (1980). **How Children View the Equal Sign**. *Mathmatics Teaching*. 92: 13-18 in *Instructional Contexts*. Allyn and Bacon: Needham Heights, M.A..

Blanton, M., and Kaput, J. (2005). **Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning**. *Journal for Research in Mathematics Education*. 36: pp. 412-446.

Byrnes, B. (2001). **Cognitive Development and Learning 2005. The Development of Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: A Cross-Cultural Comparative Perspective**. *International Reviews of Mathematical Education (ZDM)*, 37, 2005.

Cai, J., Lew, H.C., Morris, A., Moyer, J.C., Ng, S.F. and Schmittau, J. (2005). **Developing Elementary Teachers' Algebra Eyes and Ears**. *Teaching Children Mathematics*, 10(2), 70-77.

- Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Empson, S.B., and Levi, L.W. (1999). **Children's mathematics: Cognitively guided instruction**. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Carpenter, T. P., and Lehrer, R. (1999). **Teaching and Learning Mathematics with Understanding**. In E. Fennema and T. R. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*. pp.19-32. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Carpenter, T.P., and Levi, L. (2000). **Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in Primary Grades**. Madison: National Center for Improving Student Learning Achievement in Mathematics and Science, University of Wisconsin-Madison.
- Carpenter, T.P., Levi, L. and Farnsworth, V. (2000). **Building a foundation for learning algebra in the elementary grades**. In *Brief: Vol.1, No. 2*. Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. [Online]. Available from <http://www.wisc.wcer.edu/ncisla>. (2007, November 22).
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. and Levi, L. (2003). **Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School**. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Carpenter, T. P., Levi, L, Franke, M. L. and Zeringue, J. K. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. **International Reviews of Mathematical Education (ZDM)**, 37, 2005.
- Carraher, D. W., Schliemann, A.D., Brizuela, B. M., and Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**, 37: 87-115.
- Clark, K.F. and Graves, M.F. (2005). Scaffold students' comprehension of text. **The Reading Teacher**, 58(6): pp. 570-580.
- Clement, T. (1982). Algebra Word Problem Solution: Thought Processes Underlying a Common Misconception. **Journal for Research in Mathematics Education**, 13(1), pp.16-30.

- Davis, R.B. (1964). **Discovery in Mathematics: A Text for Teacher**. Palo Alto, CA: Addison-Wesley.
- Dick W. and Carey L. (1997). **The Systematic Design of Instruction**. 4 th ed. New York: Longman.
- Dixon-Krauss, L. (1996). **Vygotsky in the Classroom: Mediated Literacy Instruction and Assessment**. New York: Longman Publishers.
- Eggen,P. and Kauchak, D. (1997). **Educational psycholog: Windows on Classroom**. 3rd ed. New Iersy: Prentice-Hall.
- Erlwanger, S., and Berlanger, M. (1983). **Interpretations of the Equal Sign among Elementary School Children**. Proceedings of the North Amarian Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Ewing McMahan, B. (2000). **Scaffolding: A Suitable Teaching Characteristic in One-To-One Teaching in Maths Recovery**. In Bana, Jack and Chapman, Anne, Eds. Proceedings Mathematics Education Beyond 2000, pp. 417-423, Fremantle, Western Australia.
- Falkner, P. Karen; Levi, Linda; and Carpenter P. Thomas. (1999). **Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra**. [Online]. Available from: <http://www.wcer.wisc.edu/ncisla/publication>. (2007, November 22)
- Farnsworth, V. (2003). **Algebraic Skill and Strategies for Elementary Teachers and Students**. In Brief: Vol. 3, No. 1. Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Franke, M.L., Carpenter, T.P., Levi, L., and Fennema, E. (2001). Capturing teachers generative growth: A follow-up study of professional development in mathematics. **American Educational Research Journal**, 38: 653-689.
- George W. Gagnon, Jr. and Michelle Collay. (1996). **Constructivist Learning Design**. [Online]. Available from www.prainbow.com/cld/cldp.html. (2008, January 31).

- Greenes, C., and Findell, C. (1999). **Developing Students' Algebraic Reasoning Abilities in Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12**. Edited by Lee V. Stiff and Frances R. Curcio. pp. 127-137. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Guilford, J.P. and Hoepfner. (1971). **The Analysis of Intelligence**. NY: McGraw - Hill.
- Hanna, G. and Yackel, E. (2003). **Reasoning and Proof**. In A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics. Kilpatrick, J., Martin, G.w. and Schifter, D. editors. pp. 227 – 236. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Herbert, K., and Brown, R.H. (1997). **Patterns as Tools for Algebraic reasoning**. Teaching Children Mathematics 3. pp. 340-345.
- Hogan, K., and Pressley, M. (1997). **Scaffolding Student Learning: Instructional Approaches and Issues**. Brookline Books, Inc.: Cambridge, M.A.
- Hunter, J. (2007). **Relational or calculational thinking: students solving open number equivalence problems**. In J. Watson and K. Beswick (Eds.), Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. 421-429. Sydney: MERGA.
- Hunter, J., and Anthony G. (2008). **Developing Relational Thinking in an Inquiry Environment**. In Figueras, O. and Sepulveda, A. (Eds.). Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Morelia, Michoacan, Mexico: PME.
- Irwin, K.C. and Britt, M. S. (2005). **Algebraic thinking in the Numeracy Project: Year one of a three-year study**. In Findings from the New Zealand Numeracy Development Project 2004 (pp. 47-55). Wellington: Ministry of Education.
- Jacobs, V.R., Franke, M.L., Carpenter, T.P. and Levi, L., and Battey, D. (2007). Professional Development Focussed on Children's Algebraic Reasoning in Elementary school. **Journal for Research in Mathematics Education**, 38: 258-288.

- Jones, Ian.; and Pratt, Dave. (2006). **Three Utilities for The Equal Sign**. [Online]. Available from http://www.warwick.ac.uk/icll/skills/eportfolio/students/eportfolio/dictionary/current/edrface/publication/jones_threeutilities.pdf. (2007, November 22).
- Kaput, J.J. (1998). **Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by “Algebra Fying”** The K-12 Curriculum. In S. Fennel (Ed.), *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum: Proceeding of a National Symposium* (pp.25-26). Washinton, DC: National Research Council, National Academy Press.
- Kaput, J.J., and Blanton, M. L. (2000). **Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics: Making It Implementable on a Massive Scale**. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. (ERIC Document Reproduction Service No. ED441663).
- Kaput, J.J. (2000). **Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by “Algebrafying”** the K-12 Curriculum. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. (ERIC Document Reproduction Service No. ED441664).
- Kemp JE., Morrison GR. and Ross SM. (1994). **Designing Effective Instruction**. New York: Macmillan College.
- Kenney, P.A. and Silver, E.A. (1997). **Results from Sixth Mathatics Assessment of the National Assessment of Eduational Progress**. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Kierran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies In Mathematics**. 12: 317-326.
- Kieran, Karolyn. (1992). **The Learning and Teaching of School Algebra**. In *Handbook of Research on Mathematic Teaching and Learning*. Edited by Douglas A. Grouws pp.390-418. New York: Macmillan.

- Knuth, E.J., Alibali, M. W., Weinberg, A., Mcneil, N.M. and Stephens, A.C. (2005). **Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equality and variable.** Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik ZInternational Rviews on Mathmatical Education, 37(1), 68-76.
- Knuth, Eric J.; et al. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter Evidence from solving questions. **Journal for Research in Mathematics Education.** 37(4): 297-312.
- Koehler J. (2004). **Learning to Think Relationally: Thinking Relationally to Learn.** Madison: University of Wisconsin.
- Konold, C. (1991). **Understanding Students' Beliefs about Probability.** in Radical Constructivism in Mathematics Education, ed. E.v.Glaserfeld, Amsterdam: Kluwer, pp. 139-156.
- Krulik, S. and Rudnick, J. (1993). **Reasoning and Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers.** Needham Heights, Mass: Allyn and Bacon.
- Lappan, G. and Scharm, P.W. (1989). **Communication and Reasoning: Critical Dimensions of Sense Making in Mathematics.** in New Directions for Elementary School Mathematics Yearbook. pp. 94 – 30. VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Larkin, M.J.. (2001). **Providing Support for Student Independence through Scaffolded Instruction.** Council for Exceptional Children. 34(1): 30-34.
- MacGregor, M. and Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. **Educational Studies in Mathematics,** 33(1), 1-19.
- Matz, Marilyn. (1982). **Towards a Process Model for School Algebra Errors.** In Intelligent Tutoring Systems. Edited by Derick Sleemann and John Seeley Brown. Pp 25-50. New york: Academic Press.
- Mcneil, N. M. and Alibali, M. W. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. **Journal of Cognition and Development,** 6: 285-306.

- Molina, M, Castro, E, and Ambrose, R. (2005/2006). Enriching arithmetic learning by promoting relational thinking. **International Journal of Learning**, 12: 265-270.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1998). **The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum**. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- O'Daffer, P.G. and Thornquist, B.A. (1993). **Critical Thinking, Mathematical Reasoning and Proof**. In Research Ideas for the Classroom, High School Mathematics. pp. 39 – 56. New York: Macmillan Publishing Company.
- Piaget, Jean. (1964). **Cognitive Development in Children**. In R.E. Ripple & V.N. Rockie st (Eds.), Cornell University.
- Randolph, Q.Q. (2003). **Longman Dictionary of Contemporary English**. London: University College.
- Rittle-Johnson, B. and Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural understanding: Does one lead to the other. **Journal of Educational Psychology**, 91(1), 175-189.
- Rosenshine, B., and Guenther, J. (1992). **Using Scaffolds for Teaching Higher Level Cognitive Strategies**. In J.W. Keefe; and H.J. Wallberg(eds.), Teaching for Teaching, pp. 35-48. Virginia: National Association of Secondary School Principals.
- Rosenshine, B., and Meister, C. (1992). The Use of Scaffolds for Teaching Higher-Level Cognitive Strategies. **Educational Leadership** 49(7): 26-33.
- Schifter, Deborah. (1999). **Reasoning about Operations: Early Algebraic Thinking in Grades K-6**. In Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12, Year Book. Edited by Lee V. Stiff and Frances R. Curcio. pp. 62-81. Reston, Va: The National Council of Teachers of Mathematics.

- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, 22, 1-36.
- Stephens, A.C. (2006). Equivalence and Relational Thinking: Preservice Elementary Teachers' Awareness of Opportunities and Misconceptions. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 9: 249-278.
- Stephens, M. (2006). **Describing and exploring the power of relational thinking**. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, and M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces* (Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. 479-486). Sydney: MERGA.
- Usiskin, Zalman. (1999). **Doing Algebra in Grades K-4**. In *Algebraic Thinking Grades K-12: Reading from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*. Edited by Barbara Moses. pp. 5-13. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Van De Walle, J.A. (2007). **Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally**. (6nd edition). Boston: Pearson Education.
- Vygotsky, L.S. (1978). **Mind in Society: The development of Higher Psychological Process**. M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, and E. Souberman (eds.), Cambridge, MA.: Harvard University Press.
- Vygotsky, L. S. (1981). **The development of higher forms of attention in childhood**. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology*. Armonk, N.Y.: Sharpe.
- Winn, W. (1993). Instructional Design and Situated Learning: Paradox and Partnership. **Educational Technology**. 33: 16-21.
- Wood, D., Bruner, J., and Ross, G. (1976). The Role of Tutoring in Problem Solving. **Journal of Child Psychology**, 17: 89-100.
- Yackel, Erna. (1997). A Foundation for Algebraic Reasoning in the Early Grades. **Teaching Children Mathematics**, 3: 276-280.



ภาคผนวก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก ก

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนและ
แผนการจัดการเรียนรู้

1. รองศาสตราจารย์ ดร.จิราภรณ์ ศิริทวี ข้าราชการบำนาญ
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
2. รองศาสตราจารย์ ดร.นพพร แหยมแสง คณะศึกษาศาสตร์
มหาวิทยาลัยรามคำแหง
3. อาจารย์คณิต เพ็ชรปัญญา ข้าราชการบำนาญ โรงเรียนทุ่งมหาเมฆ
พนักงานสหทบสาขาคณิตศาสตร์ประถมศึกษา
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และ
เทคโนโลยี

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบแบบวัดความสามารถให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชานนท์ จันทรา คณะศึกษาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
2. อาจารย์ ดร.รุ่งทิภา แยมรุ่ง คณะศึกษาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
3. อาจารย์นิรันดร์ ตัณฑ์ชัย ข้าราชการบำนาญ โรงเรียนวัดหงส์รัตนาราม
พนักงานสหทบสาขาคณิตศาสตร์ประถมศึกษา
สถาบันส่งเสริมการสอน วิทยาศาสตร์และ
เทคโนโลยี



ภาคผนวก ข

ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553
บทที่ 2 การบวกและการลบ เรื่อง การบวกจำนวนหลายหลักสองจำนวน เวลา 1 ชั่วโมง

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 ด้านความรู้ เมื่อกำหนดโจทย์การบวกจำนวนหลายหลักสองจำนวนให้ นักเรียนสามารถหาคำตอบและแสดงวิธีทำได้

1.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ: นักเรียนสามารถ

- 1) อธิบาย/แสดงเกี่ยวกับวิธีการหาผลบวกได้
- *2) สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากันได้
- *3) ใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบได้

1.3 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์: นักเรียนสามารถ

- 1) ให้เหตุผลที่แสดงถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบได้
- 2) แสดงความคิดเห็นทั้งต่อครูและเพื่อนได้
- 3) รับฟังความคิดเห็นของครูและเพื่อนได้

2. สาระสำคัญ

- 1) การบวกเป็นการนำรวมจำนวนสิ่งต่าง ๆ ตั้งแต่สองกลุ่มขึ้นไป
- 2) การบวกจำนวนหลายหลักใช้วิธีบวกจำนวนในหลักเดียวกันเข้าด้วยกัน และถ้าผลบวกในหลักใดเป็นจำนวนสองหลักให้ทดจำนวนที่ครบสิบไปรวมกับจำนวนที่อยู่หลักถัดไปทางซ้าย

* สำหรับกลุ่มทดลอง

3. สารการเรียนรู้

การบวกจำนวนที่มีผลบวกไม่เกิน 10,000 ทั้งที่มีการทดและไม่มีการทด

ตัวอย่างที่ 1 $\begin{array}{r} 4,567 \\ + 231 \\ \hline 4,798 \end{array}$	ตัวอย่างที่ 2 $\begin{array}{r} 1 \\ 4,674 \\ + 1,813 \\ \hline 6,487 \end{array}$	ตัวอย่างที่ 3 $\begin{array}{r} 11 \\ 2,657 \\ + 1,480 \\ \hline 4,137 \end{array}$	ตัวอย่างที่ 4 $\begin{array}{r} 11 \\ 5,608 \\ + 3,573 \\ \hline 9,181 \end{array}$
---	--	---	---

4. กิจกรรมการเรียนรู้

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<p>ขั้นนำ : (5 นาที)</p> <p>1) ทบทวนความสัมพันธ์ของค่าประจำหลัก โดยครูให้นักเรียนช่วยกัน ตอบคำถาม ดังนี้</p> <p> ก่หน่วย เป็น 1 สิบบ (10 หน่วย)</p> <p> ก่สิบบ เป็น 1 ร้อย (10 สิบบ)</p> <p> ก่ร้อย เป็น 1 พัน (10 ร้อย)</p> <p> ก่พัน เป็น 1 หมื่น (10 พัน)</p> <p> ก่หมื่น เป็น 1 แสน (10 หมื่น)</p>	<p>ขั้นนำ : (5 นาที)</p> <p>1) ครูนำเข้าสู่บทเรียนโดยนำประโยคสัญลักษณ์มาให้ นักเรียนพิจารณาว่าถูกต้องหรือไม่ เพราะเหตุใด</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $8 + 4 = 4 + 8$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $35 + 54 = 54 + 35$ </div> <p>2) ทบทวนความสัมพันธ์ของค่าประจำหลัก โดยครูให้นักเรียน ช่วยกันตอบคำถาม ดังนี้</p>

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
กี่แสน เป็น 1 ล้าน (10 แสน)	กี่หน่วย เป็น 1 สิบล (10 หน่วย)
2) ให้นักเรียนร่วมกันตอบคำถามของครูด้วยวาจา ดังนี้	กี่สิบล เป็น 1 ร้อย 10 สิบล
(1) 2 + 5 (7)	กี่ร้อย เป็น 1 พัน (10 ร้อย)
20 + 50 (70)	กี่พัน เป็น 1 หมื่น (10 พัน)
200 + 500 (700)	กี่หมื่น เป็น 1 แสน (10 หมื่น)
2,000 + 5,000 (7,000)	กี่แสน เป็น 1 ล้าน (10 แสน)
(2) 6 + 4 (10)	3) ให้นักเรียนร่วมกันตอบคำถามของครูด้วยวาจา ดังนี้
60 + 40 (100)	(1) 2 + 5 (7)
600 + 400 (1,000)	20 + 50 (70)
6,000 + 4,000 (10,000)	200 + 500 (700)
(3) 300 + 400 + 500 (1,200)	2,000 + 5,000 (7,000)
(4) 600 + 700 + 800 (2,100)	(2) 6 + 4 (10)
3) ครูนำประโยคสัญลักษณ์มาให้ให้นักเรียนพิจารณาว่าถูกต้องหรือไม่	60 + 40 (100)
เพราะเหตุใด	600 + 400 (1,000)
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $8 + 4 = 4 + 8$ </div>	6,000 + 4,000 (10,000)
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $35 + 54 = 54 + 35$ </div>	(3) 300 + 400 + 500 (1,200)
	(4) 600 + 700 + 800 (2,100)

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<p>ชั้นสอน : (35 นาที) ช่วงที่ 1 : (15 นาที)</p> <p>สอนตามกระบวนการ เรียนการสอนที่ผู้วิจัย สร้างขึ้นใน ชั้นที่ 1 การค้นหาค่าความสัมพันธ์</p> <p>4) จากประโยคสัญลักษณ์ที่สามารถใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบมาให้นักเรียนพิจารณาหาคำตอบแล้วร่วมกันอภิปรายถึงวิธีการหาคำตอบว่าสามารถหาคำตอบด้วยวิธีใดได้บ้าง</p> <p>ครู : ประโยคนี้ $8 + 4 = 4 + 8$ ถูกหรือผิด (ถูก)</p> <p>ครู : นักเรียนรู้ได้อย่างไรว่าถูก (เพราะ $8 + 4$ ได้ 12 และ $4 + 8$ ได้ 12 เช่นเดียวกัน ดังนั้น $8 + 4 = 4 + 8$)</p> <p>ครู : ใครมีวิธีคิดที่แตกต่างจากนี้ (คำตอบจากนักเรียนอาจมีมากกว่า 1 คำตอบ เช่น มีจำนวนเหมือนกันบวกกันแต่สลับที่กัน)</p> <p>5) ครูแสดงให้นักเรียนเห็นว่า $8 + 4 = 4 + 8$ โดยใช้ตัวนับ ดังนี้</p> <p style="text-align: center;">○○○○ ○○ ○○ ○○○○ ○○○○ ○○ ○○ ○○○○</p> <p>จะเห็นได้ว่า $8 + 4 = 12$ และ $4 + 8 = 12$ ดังนั้น $8 + 4 = 4 + 8$</p> <p>6) ครูอธิบายเพิ่มเติมโดยแสดงวิธีคิดที่ใช้ในการคิดเชิงสัมพันธ์เพื่อให้นักเรียนเห็นแนวทางในการหาคำตอบโดยไม่เน้นการคิดคำนวณ</p>	<p>ชั้นสอน : (35 นาที)</p> <p>4) ให้นักเรียนหาผลบวกโดยคิดในใจ จากแบบฝึกหัดข้อ 1 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้น ป.4 ของ สสวท. หน้า 16 แล้วร่วมกันตอบคำถามครูด้วยวาจา ดังนี้</p> <p>(1) $4 + 3$ (7) $40 + 30$ (70) $400 + 300$ (700) $4,000 + 3,000$ (7,000)</p> <p>(2) $8 + 2$ (10) $80 + 20$ (100) $800 + 200$ (1,000) $8,000 + 2,000$ (10,000)</p> <p>(3) $2 + 7$ (9) $20 + 70$ (90) $200 + 700$ (9,000) $2,000 + 7,000$ (90,000)</p>

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม		
<p>โดยการให้นักเรียนสังเกตประโยคสัญลักษณ์โดยมองทุกจำนวนที่อยู่ในสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ</p> <p>ครู : 8 + 4 ผังซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับ กับ 4 + 8 ผังขวาของเครื่องหมายเท่ากับ มีจำนวนสองจำนวนที่นำมาบวกกันเหมือนกันหรือไม่ (เหมือนกัน)</p> <p>ครู : จำนวนทั้งสองนั้นคืออะไร (8 และ 4)</p> <p>ครู : จำนวนทั้งสองนั้นจัดวางในตำแหน่งที่เหมือนกันหรือไม่ (ไม่)</p> <p>ครู : จำนวนทั้งสองจัดวางตำแหน่งเท่ากันอย่างไร (สลับที่กัน)</p> <p>ครู : จำนวนสองจำนวนที่เหมือนกันแต่สลับที่กัน แล้วนำมาบวกกัน นักเรียนคิดว่ายังคงเท่ากันหรือไม่ (เท่ากัน)</p> <p>ครู : นั่นคือ จำนวนทางด้านซ้ายกับจำนวนทางด้านขวาของเครื่องหมายเท่ากับยังคงเท่ากันอยู่หรือไม่ (เท่ากัน)</p> <p>ครู : แสดงว่าประโยคนี้ $8 + 4 = 4 + 8$ ถูกหรือผิด (ถูก)</p>	(4)	1 + 9	(10)
		10 + 90	(100)
		100 + 900	(1,000)
		1,000 + 9,000	(10,000)
	(5)	200 + 400 + 500	(1,100)
	(6)	300 + 200 + 800	(13,000)
	(7)	900 + 500 + 600	(2,000)
	(8)	800 + 500 + 400	(1,700)
	5) ครูยกตัวอย่างโจทย์การบวกที่มีผลบวกไม่เกิน 10,000 บนกระดาษ 1 ตัวอย่างโดยใช้การถาม-ตอบกับนักเรียนในขณะที่ยกตัวอย่าง ดังนี้		
	<p style="text-align: center;">ตัวอย่างที่ 1</p> $\begin{array}{r} 4,567 \\ + 231 \\ \hline 4,798 \end{array}$		

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม						
	<p>6) ให้นักเรียนเลือกโจทย์การบวกจากครูคนละ 1 โจทย์ ซึ่งมีอยู่ โจทย์ ใครได้คำตอบแล้วให้นำผลงานไปติดบนกระดาน ดังนี้</p> <table border="1" data-bbox="1361 499 1998 722"> <thead> <tr> <th>ตัวอย่างที่ 2</th> <th>ตัวอย่างที่ 3</th> <th>ตัวอย่างที่ 4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td> $\begin{array}{r} 1 \\ 4,674 \\ \underline{1,813}^+ \\ 6,487 \end{array}$ </td> <td> $\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 2,657 \\ \underline{1,480}^+ \\ 4,137 \end{array}$ </td> <td> $\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 5,608 \\ \underline{3,573}^+ \\ 9,181 \end{array}$ </td> </tr> </tbody> </table>	ตัวอย่างที่ 2	ตัวอย่างที่ 3	ตัวอย่างที่ 4	$\begin{array}{r} 1 \\ 4,674 \\ \underline{1,813}^+ \\ 6,487 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 2,657 \\ \underline{1,480}^+ \\ 4,137 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 5,608 \\ \underline{3,573}^+ \\ 9,181 \end{array}$
ตัวอย่างที่ 2	ตัวอย่างที่ 3	ตัวอย่างที่ 4					
$\begin{array}{r} 1 \\ 4,674 \\ \underline{1,813}^+ \\ 6,487 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 2,657 \\ \underline{1,480}^+ \\ 4,137 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 5,608 \\ \underline{3,573}^+ \\ 9,181 \end{array}$					
<p>สอนตามกระบวนการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นใน ชั้นที่ 2 การใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์</p> <p>7) ครูนำประโยคสัญลักษณ์ที่สามารถใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบ $35 + 54 = 54 + 35$ มาให้นักเรียนพิจารณาคำตอบแล้วให้นักเรียนจับคู่ บันทึกอธิบายการคิดโดยไม่เน้นการคิดคำนวณแล้วนำเสนอผลงาน เพื่อให้เพื่อนตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบ</p> <p>8) ให้นักเรียนคู่เดิมยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงความสัมพันธ์คล้ายกับ $35 + 54 = 54 + 35$ มาคู่ละ 1 ประโยค</p> <p>ช่วงที่ 2: (20 นาที)</p> <p>9) ครูยกตัวอย่างโจทย์การบวกที่มีผลบวกไม่เกิน 10,000 บนกระดานโดยใช้การถาม-ตอบกับนักเรียนในขณะที่ยกตัวอย่าง ดังนี้</p>	<p>ขั้นสรุป : (5 นาที)</p> <p>7) ครูและเพื่อน ๆ ช่วยกันตรวจสอบผลงานที่ติดบนกระดานแล้วร่วมกันอภิปรายและสรุปให้ได้ว่า การบวกจำนวนหลายหลักใช้วิธีบวกจำนวนในหลักเดียวกันเข้าด้วยกันและถ้าผลบวกในหลักใดเป็นจำนวนสองหลักให้ทดจำนวนที่ครบสิบไปรวมกับจำนวนที่อยู่ในหลักถัดไปทางซ้าย</p> <p>ขั้นฝึกทักษะ : (15 นาที)</p> <p>8) ครูนำโจทย์การบวกมาให้นักเรียนฝึกเพิ่มเติม โดยให้นักเรียนเลือกทำ หาผลบวกไม่เกิน 100 (2 ข้อ) หาผลบวก</p>						

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม								
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th data-bbox="497 395 680 448">ตัวอย่างที่ 1</th> <th data-bbox="692 395 875 448">ตัวอย่างที่ 2</th> <th data-bbox="887 395 1070 448">ตัวอย่างที่ 3</th> <th data-bbox="1081 395 1265 448">ตัวอย่างที่ 4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="497 448 680 612"> $\begin{array}{r} 4,567 \\ 231 \\ \hline 4,798 \end{array} +$ </td> <td data-bbox="692 448 875 612"> $\begin{array}{r} 4,674 \\ 1,813 \\ \hline 6,487 \end{array} +$ </td> <td data-bbox="887 448 1070 612"> $\begin{array}{r} 11 \\ 2,657 \\ 1,480 \\ \hline 4,137 \end{array} +$ </td> <td data-bbox="1081 448 1265 612"> $\begin{array}{r} 11 \\ 5,608 \\ 3,573 \\ \hline 9,181 \end{array} +$ </td> </tr> </tbody> </table>	ตัวอย่างที่ 1	ตัวอย่างที่ 2	ตัวอย่างที่ 3	ตัวอย่างที่ 4	$\begin{array}{r} 4,567 \\ 231 \\ \hline 4,798 \end{array} +$	$\begin{array}{r} 4,674 \\ 1,813 \\ \hline 6,487 \end{array} +$	$\begin{array}{r} 11 \\ 2,657 \\ 1,480 \\ \hline 4,137 \end{array} +$	$\begin{array}{r} 11 \\ 5,608 \\ 3,573 \\ \hline 9,181 \end{array} +$	<p>ไม่เกิน 1,000 (2 ข้อ) และหาผลบวกไม่เกิน 10,000 (2 ข้อ)</p> <p>9) ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้ พื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ของ สสวท. หน้า 16 ข้อ 2 เป็นการบ้าน</p>
ตัวอย่างที่ 1	ตัวอย่างที่ 2	ตัวอย่างที่ 3	ตัวอย่างที่ 4						
$\begin{array}{r} 4,567 \\ 231 \\ \hline 4,798 \end{array} +$	$\begin{array}{r} 4,674 \\ 1,813 \\ \hline 6,487 \end{array} +$	$\begin{array}{r} 11 \\ 2,657 \\ 1,480 \\ \hline 4,137 \end{array} +$	$\begin{array}{r} 11 \\ 5,608 \\ 3,573 \\ \hline 9,181 \end{array} +$						
<p>ขั้นสรุป: (5 นาที)</p> <p>10) จากตัวอย่างทั้ง 4 ตัวอย่าง ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายและสรุปให้ได้ว่า “การบวกจำนวนที่มีหลายหลักใช้วิธีบวกจำนวนในหลักเดียวกันเข้าด้วยกัน และถ้าผลบวกในหลักใดเป็นจำนวนที่มีสองหลักให้ทดจำนวนที่ครบสิบไปรวมกับจำนวนที่อยู่ในหลักถัดไปทางซ้าย”</p> <p>ขั้นฝึกทักษะ: (15 นาที)</p> <p>11) ครูนำโจทย์การบวกมาให้ให้นักเรียนฝึกเพิ่มเติม โดยให้นักเรียนเลือกทำ หาผลบวกไม่เกิน 100 (2 ข้อ) หาผลบวกไม่เกิน 1,000 (2 ข้อ) และหาผลบวกไม่เกิน 10,000 (2 ข้อ)</p>									

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
12) ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ของ สสวท. หน้า 16 ข้อ 1 และ 2 เป็นการบ้าน	

5. สื่อ / อุปกรณ์การเรียนรู้

- 1) บัตรประโยคสัญลักษณ์

$$8 + 4 = 4 + 8$$

$$35 + 54 = 54 + 35$$

- 2) ตัวนับ

- 3) โจทย์การบวกสำหรับฝึกเพิ่มเติม

หาผลบวกไม่เกิน 100

$$\begin{array}{r} 40 \\ + \\ \hline 35 \end{array} \quad \begin{array}{r} 26 \\ + \\ \hline 43 \end{array} \quad \begin{array}{r} 53 \\ + \\ \hline 36 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ + \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ + \\ \hline 35 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ + \\ \hline 49 \end{array} \quad \begin{array}{r} 34 \\ + \\ \hline 66 \end{array} \quad \begin{array}{r} 27 \\ + \\ \hline 73 \end{array}$$

หาผลบวกไม่เกิน 1,000

$$\begin{array}{r} 456 \\ + \\ \hline 35 \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \\ + \\ \hline 301 \end{array} \quad \begin{array}{r} 666 \\ + \\ \hline 321 \end{array} \quad \begin{array}{r} 257 \\ + \\ \hline 107 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 483 \\ + \\ \hline 284 \end{array} \quad \begin{array}{r} 300 \\ + \\ \hline 700 \end{array} \quad \begin{array}{r} 368 \\ + \\ \hline 483 \end{array} \quad \begin{array}{r} 550 \\ + \\ \hline 450 \end{array}$$

หาผลบวกไม่เกิน 10,000

$$\begin{array}{r} 4,567 \\ + \\ \hline 231 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5,608 \\ + \\ \hline 3,271 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2,657 \\ + \\ \hline 1,430 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,094 \\ + \\ \hline 6,732 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4,674 \\ + \\ \hline 1,813 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,000 \\ + \\ \hline 9,000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,355 \\ + \\ \hline 477 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,248 \\ + \\ \hline 803 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,709 \\ + \\ \hline 296 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4,784 \\ + \\ \hline 3,346 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4,369 \\ + \\ \hline 5,631 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2,705 \\ + \\ \hline 7,294 \end{array}$$

- 4) แบบฝึกหัดในหนังสือสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ของ สสวท. หน้า 16

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553
บทที่ 2 การบวกและการลบ เรื่อง การบวกจำนวนหลายหลักสองจำนวน เวลา 1 ชั่วโมง

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 ด้านความรู้ เมื่อกำหนดโจทย์การบวกจำนวนหลายหลักสองจำนวนให้ นักเรียนสามารถหาคำตอบและแสดงวิธีทำได้

1.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ: นักเรียนสามารถ

- 1) อธิบาย/แสดงเกี่ยวกับวิธีการหาผลบวกได้
- * 2) เขียนสรุปข้อความคาดการณ์จากประโยคสัญลักษณ์ที่กำหนดให้ได้
- * 3) เขียนสรุปในรูปแบบทั่วไปจากข้อความคาดการณ์ได้
- * 4) ยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์มาตรวจสอบข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุปในรูปแบบทั่วไปได้

1.3 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์: นักเรียนสามารถ

- 1) ให้เหตุผลที่แสดงถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบได้
- 2) แสดงความคิดเห็นทั้งต่อครูและเพื่อนได้
- 3) รับฟังความคิดเห็นของครูและเพื่อนได้

2. สาระสำคัญ

- 1) การบวกเป็นการนำรวมจำนวนสิ่งต่าง ๆ ตั้งแต่สองกลุ่มขึ้นไป
- 2) การบวกจำนวนหลายหลักใช้วิธีบวกจำนวนในหลักเดียวกันเข้าด้วยกัน และถ้าผลบวกในหลักใดเป็นจำนวนสองหลักให้ทดจำนวนที่ครบสิบไปรวมกับจำนวนที่อยู่ในหลักถัดไปทางซ้าย

* สำหรับกลุ่มทดลอง

3. สารการเรียนรู้

การบวกจำนวนหลายหลักสองจำนวน

การบวกจำนวนสองจำนวนที่ผลบวกมากกว่า 10,000 และไม่มีการทด

ตัวอย่าง $13,456 + 34,212 = \square$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 13,456 \\ + 34,212 \\ \hline 47,668 \end{array}$$

ตอบ ๔๗,๖๖๘

4. กิจกรรมการเรียนรู้

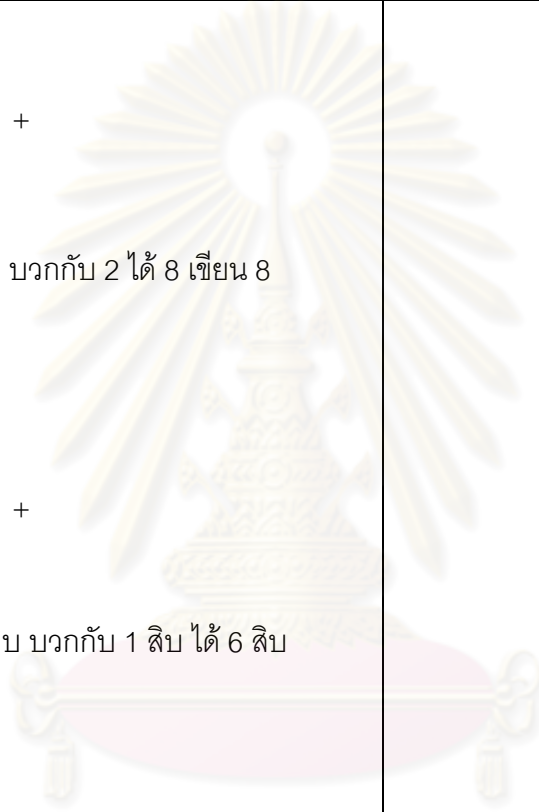
กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<p>ชั้นนำ : (5 นาที)</p> <p>1) ให้นักเรียนทุกคนหาผลบวกโดยคิดในใจแล้วจับสลากตามเลขที่ของนักเรียนให้ตอบคำถามของครูด้วยวาจา ดังนี้</p> <p>(1) $460 + 300$ (760)</p> <p>(2) $240 + 500$ (740)</p> <p>(3) $800 + 150$ (950)</p> <p>(4) $2,800 + 400$ (3,200)</p>	<p>ชั้นนำ : (5 นาที)</p> <p>1) ครูนำเข้าสู่บทเรียนโดยนำประโยคสัญลักษณ์มาให้ให้นักเรียนพิจารณาว่าถูกต้องหรือไม่ เพราะเหตุใด</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">$8 + 4 = 4 + 8$</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">$9 + 6 = 6 + 9$</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">$15 + 24 = 24 + 15$</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">$35 + 54 = 54 + 35$</div> </div>

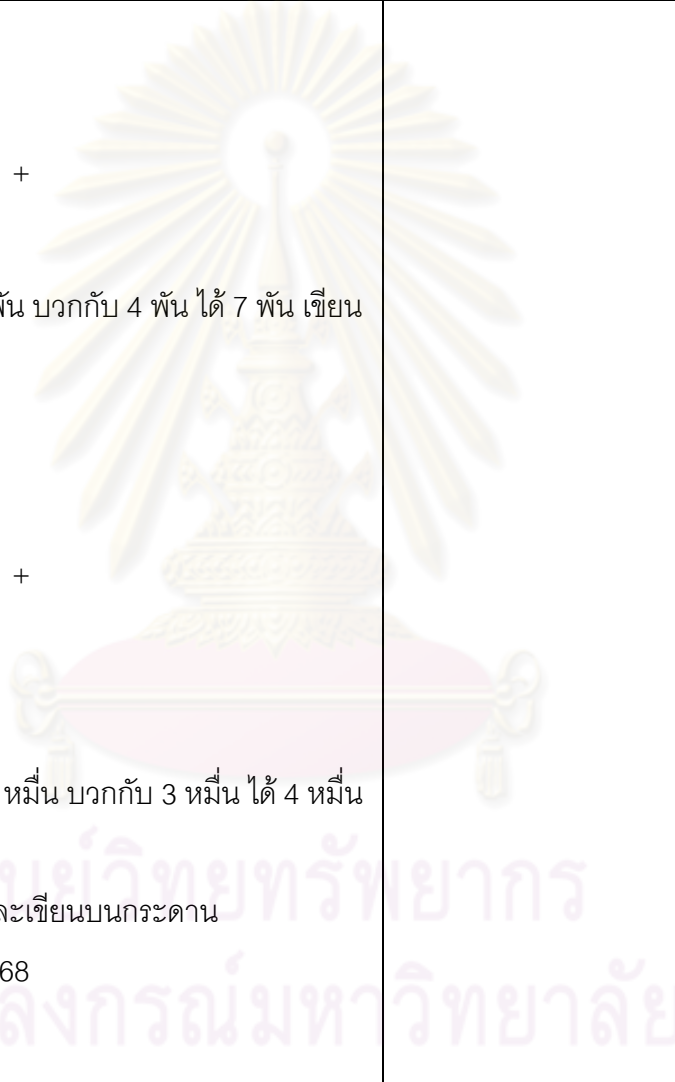
กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม		
(5) 3,500 + 700 (4,200)	2) ให้นักเรียนทุกคนหาผลบวกโดยคิดในใจแล้วจับสลากตามเลขที่		
(6) 2,700 + 300 (3,000)	ของนักเรียนให้ตอบคำถามของครูด้วยวาจา ดังนี้		
(7) 7,060 + 50 (7,110)	(1) 460 + 300 (760)		
(8) 5,500 + 570 (6,070)	(2) 240 + 500 (740)		
(9) 5,400 + 700 (6,100)	(3) 800 + 150 (950)		
(10) 3,000 + 1,770 (4,770)	(4) 2,800 + 400 (3,200)		
2) ครูนำประโยคสัญลักษณ์มาให้ให้นักเรียนพิจารณาว่า	(5) 3,500 + 700 (4,200)		
ถูกต้องหรือไม่ เพราะเหตุใด	(6) 2,700 + 300 (3,000)		
<table border="1" data-bbox="573 751 1211 826"> <tr> <td data-bbox="573 751 875 826">$8 + 4 = 4 + 8$</td> <td data-bbox="875 751 1211 826">$9 + 6 = 6 + 9$</td> </tr> </table>	$8 + 4 = 4 + 8$	$9 + 6 = 6 + 9$	(7) 7,060 + 50 (7,110)
$8 + 4 = 4 + 8$	$9 + 6 = 6 + 9$		
<table border="1" data-bbox="573 855 1211 930"> <tr> <td data-bbox="573 855 875 930">$15 + 24 = 24 + 15$</td> <td data-bbox="875 855 1211 930">$35 + 54 = 54 + 35$</td> </tr> </table>	$15 + 24 = 24 + 15$	$35 + 54 = 54 + 35$	(8) 5,500 + 570 (6,070)
$15 + 24 = 24 + 15$	$35 + 54 = 54 + 35$		
<p>ขั้นสอน : (35 นาที)</p> <p>ช่วงที่ 1: (15 นาที)</p>	(9) 5,400 + 700 (6,100)		
3) จากประโยคสัญลักษณ์ที่ใช้ในข้อ 2 ให้นักเรียนช่วยกัน	(10) 3,000 + 1,770 (4,770)		
อภิปรายว่าแต่ละประโยคสัญลักษณ์นั้นมีวิธีการหาคำตอบที่	ขั้นสอน : (35 นาที)		
ไม่เน้นการคิดคำนวณเหมือนกันอย่างไร	3) ครูเขียนโจทย์การบวกจำนวนสองจำนวนที่ผลบวกมากกว่า		
<div style="border: 1px dashed black; padding: 5px;"> <p>สอนตามกระบวนการ เรียนการสอนที่ผู้วิจัย สร้างขึ้นใน ชั้นที่ 3 การสร้างข้อสรุป</p> </div>	10,000 และไม่มีการทดบนกระดาน $13,456 + 34,212 = \square$		
	ต่อจากนั้นครูอธิบายขั้นตอนการบวกในแนวตั้ง โดยให้นักเรียน		
	ช่วยกันหาผลบวกที่ละหลักอีกครั้งหนึ่ง เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปหลักการ		
	บวกจำนวนที่หลายหลัก ดังนี้		

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม																																																											
<table border="1" data-bbox="510 309 1218 464"> <tr> <td data-bbox="510 309 860 384">$8 + 4 = 4 + 8$</td> <td data-bbox="860 309 1218 384">$9 + 6 = 6 + 9$</td> </tr> <tr> <td data-bbox="510 384 860 464">$15 + 24 = 24 + 15$</td> <td data-bbox="860 384 1218 464">$35 + 54 = 54 + 35$</td> </tr> </table> <p data-bbox="519 472 1218 804">ครู : ประโยคสัญลักษณ์ทั้ง 4 ประโยคนี้ มีวิธีคิดหาคำตอบโดยไม่เน้นการคิดคำนวณเหมือนกันอย่างไรบ้าง (เหมือนกันคือจำนวนแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับที่บวกกันสลับที่กันอยู่ ทำให้รู้ว่าทุกประโยคเท่ากัน)(คำตอบจากนักเรียนอาจมีมากกว่า 1 คำตอบ และอาจอธิบายด้วยภาษาของตนเอง)</p> <p data-bbox="519 820 1218 983">4) ครูตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ โดยครูอาจช่วยต่อข้อความกับนักเรียนเพื่อให้ได้ข้อสรุปที่สมบูรณ์และช่วยเขียนตามคำพูดของนักเรียน ดังนี้</p> <p data-bbox="519 999 1218 1283">ครู : เราจะสรุปวิธีคิดหาคำตอบที่เหมือนกันนี้ว่าอย่างไรดี (จำนวนสองจำนวนที่นำมาบวกกันสามารถสลับที่กันได้โดยที่ผลบวกยังคงเท่าเดิม หรือข้อความอื่น ๆ จากคำตอบของนักเรียน ถ้าไม่มีนักเรียนสรุปได้ ครูต้องช่วยแนะนำจนนักเรียนสามารถสรุปได้)</p>	$8 + 4 = 4 + 8$	$9 + 6 = 6 + 9$	$15 + 24 = 24 + 15$	$35 + 54 = 54 + 35$	<p data-bbox="1240 277 1469 309">บวกในหลักหน่วย</p> <table border="1" data-bbox="1285 325 1603 496"> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td colspan="4"></td> <td>8</td> </tr> </table> <p data-bbox="1240 504 2002 536">หาผลบวกในหลักหน่วยคือ 6 บวกกับ 2 ได้ 8 เขียน 8 ในหลักหน่วย</p> <p data-bbox="1240 616 1433 647">บวกในหลักสิบ</p> <table border="1" data-bbox="1285 663 1603 834"> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td colspan="4"></td> <td>6</td> </tr> <tr> <td colspan="4"></td> <td>8</td> </tr> </table> <p data-bbox="1240 842 2002 935">หาผลบวกในหลักสิบ คือ 5 สิบ บวกกับ 1 สิบ ได้ 6 สิบ เขียน 6 ในหลักสิบ</p> <p data-bbox="1240 1015 1447 1046">บวกในหลักร้อย</p> <table border="1" data-bbox="1285 1062 1603 1233"> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td colspan="3"></td> <td>6</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td colspan="3"></td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> </table> <p data-bbox="1240 1241 2002 1334">หาผลบวกในหลักร้อยคือ 4 ร้อย บวกกับ 2 ร้อย ได้ 6 ร้อย เขียน 6 ในหลักร้อย</p>	1	3	4	5	6	3	4	2	1	2					8	1	3	4	5	6	3	4	2	1	2					6					8	1	3	4	5	6	3	4	2	1	2				6	6				6	8
$8 + 4 = 4 + 8$	$9 + 6 = 6 + 9$																																																											
$15 + 24 = 24 + 15$	$35 + 54 = 54 + 35$																																																											
1	3	4	5	6																																																								
3	4	2	1	2																																																								
				8																																																								
1	3	4	5	6																																																								
3	4	2	1	2																																																								
				6																																																								
				8																																																								
1	3	4	5	6																																																								
3	4	2	1	2																																																								
			6	6																																																								
			6	8																																																								

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<p>5) จากข้อความที่สรุปได้นี้ ถ้าครูเขียน \square แทนจำนวนที่ 1 และเขียน \triangle แทนจำนวนที่ 2 นักเรียนคิดว่า</p> $\square + \triangle = \triangle + \square \quad \text{หรือไม่}$ <p>(เท่ากัน แต่รูป \square และรูป \triangle ต้องเท่ากัน)</p> <p>6) ถ้าครูให้ \square แทนด้วยพยัญชนะภาษาไทย “ก” และให้ \triangle แทนด้วยพยัญชนะภาษาไทย “ข” แล้วครูเขียนสรุปใหม่ $\square + \triangle = \triangle + \square$ โดยที่ ก และ ข แทนจำนวนใด ๆ นักเรียนคิดว่ายังคงเท่ากันไหม (เท่ากัน)</p> <p>7) ถ้าครูให้ \square แทนด้วยพยัญชนะภาษาอังกฤษ “a” และให้ \triangle แทนด้วยพยัญชนะภาษาอังกฤษ “b” แล้วเขียนสรุปใหม่ ได้ว่า $\square + \triangle = \triangle + \square$ โดยที่ a และ b แทนจำนวนใด ๆ นักเรียนคิดว่ายังคงเท่ากันไหม (เท่ากัน)</p> <p>8) ครูแนะนำนักเรียนว่าข้อความ “จำนวนสองจำนวนที่นำมาบวกกันสามารถสลับที่กันโดยที่ผลบวกยังคงเท่าเดิม” นั้นสามารถสรุปโดยใช้ตัวอักษรเป็นตัวได้ว่า $a + b = b + a$ โดยที่ a และ b แทนจำนวนใด ๆ</p>	<p>บวกในหลักพัน</p> $\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ 3 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 7 \quad 6 \quad 6 \quad 8 \end{array} +$ <p>หาผลบวกในหลักพัน คือ 3 พัน บวกกับ 4 พัน ได้ 7 พัน เขียน 7 ในหลักพัน</p> <p>บวกในหลักหมื่น</p> $\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ 3 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ 4 \quad 7 \quad 6 \quad 6 \quad 8 \end{array} +$ <p>หาผลบวกในหลักหมื่น คือ 1 หมื่น บวกกับ 3 หมื่น ได้ 4 หมื่น เขียน 4 ในหลักหมื่น</p> <p>ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปและเขียนบนกระดาน</p> $13,456 + 34,212 = 47,668$ <p>4) ครูยกตัวอย่างโจทย์การบวกจำนวนสองจำนวนที่ผลบวกมากกว่า 10,000 และไม่มีทศบนกระดาน อีก 2 ข้อ โดยให้นักเรียนช่วยกันหาผลบวกที่ละหลักบนกระดาน</p>

	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<div style="border: 1px dashed black; padding: 5px;"> <p>สอนตามกระบวนการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นใน ชั้นที่ 4 การตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป</p> </div> <p>ช่วงที่ 2: (20 นาที)</p>	<p>9) ให้นักเรียนยกตัวอย่างมาตรวจสอบข้อสรุปในรูปทั่วไปที่สร้างขึ้น โดยครูใช้คำถาม ดังนี้</p> <p>ครู : นักเรียนคิดว่าข้อสรุปที่ได้นี้ $a + b = b + a$ โดยที่ a และ b แทนจำนวนใด ๆ จะใช้ได้กับประโยคสัญลักษณ์ใดได้บ้าง ให้นักเรียนจับคู่กันทดลองยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่น ๆ เพื่อตรวจสอบดูว่าข้อสรุปที่ได้ถูกต้องหรือไม่ ต่อจากนั้นให้ยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์อื่น ๆ ด้วยตนเองเพื่อตรวจสอบข้อสรุปนี้มาคนละ 5 ประโยค โดยให้ทำการบ้าน</p> <p>10) ครูเขียนโจทย์การบวกจำนวนสองจำนวนที่ผลบวกมากกว่า 10,000 และไม่มีทศนิยมกระดาน $13,456 + 34,212 = \square$ ต่อจากนั้นครูอธิบายขั้นตอนการบวกในแนวตั้ง โดยให้นักเรียนช่วยกันหาผลบวกที่ละหลักอีกครั้งหนึ่ง เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปหลักการบวกจำนวนที่หลายหลัก ดังนี้</p>	<p>(1) $15,420 + 32,469$</p> <p>(2) $31,805 + 47,668$</p> <p>ขั้นสรุป : (5 นาที)</p> <p>5) ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปว่า “การบวกจำนวนสองจำนวนที่หลายหลัก ยังคงใช้หลักการเหมือนการบวกจำนวนสองจำนวนที่ผลบวกไม่เกิน 10,000 กล่าวคือ นำจำนวนที่อยู่ในหลักเดียวกันมาบวกกัน ดังนั้นการแสดงวิธีหาผลบวกในแนวตั้งจะต้องเขียนเลขโดดในหลักเดียวกันให้ตรงกัน”</p> <p>ขั้นฝึกทักษะ : (15 นาที)</p> <p>6) ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดการบวกจำนวนหลายหลักสองจำนวน (ไม่มีการทด) ข้อ 1-4 และให้ทำข้อ 5-10 เป็นการบ้าน</p>

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<p>บวกในหลักหน่วย</p> $\begin{array}{rcccc c} 1 & 3 & 4 & 5 & & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & & 2 \\ \hline & & & & & 8 \end{array}$ <p>หาผลบวกในหลักหน่วยคือ 6 บวกกับ 2 ได้ 8 เขียน 8 ในหลักหน่วย</p> <p>บวกในหลักสิบ</p> $\begin{array}{rcccc c} 1 & 3 & 4 & & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & & 1 & 2 \\ \hline & & & & 6 & 8 \end{array}$ <p>หาผลบวกในหลักสิบ คือ 5 สิบ บวกกับ 1 สิบ ได้ 6 สิบ เขียน 6 ในหลักสิบ</p> <p>บวกในหลักร้อย</p> $\begin{array}{rccc cc} 1 & 3 & & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & & 2 & 1 & 2 \\ \hline & & & 6 & 6 & 8 \end{array}$ <p>หาผลบวกในหลักร้อย คือ 4 ร้อย บวกกับ 2 ร้อย ได้ 6 ร้อย เขียน 6 ในหลักร้อย</p>	 <p>ศูนย์วิทยทรัพยากร มหาวิทยาลัย</p>

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<p>บวกในหลักพัน</p> $\begin{array}{r} 1 \quad \boxed{3} \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ 3 \quad \boxed{4} \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 7 \quad 6 \quad 6 \quad 8 \end{array} +$ <p>หาผลบวกในหลักพัน คือ 3 พัน บวกกับ 4 พัน ได้ 7 พัน เขียน 7 ในหลักพัน</p> <p>บวกในหลักหมื่น</p> $\begin{array}{r} \boxed{1} \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ 3 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 4 \quad 7 \quad 6 \quad 6 \quad 8 \end{array} +$ <p>หาผลบวกในหลักหมื่น คือ 1 หมื่น บวกกับ 3 หมื่น ได้ 4 หมื่น เขียน 4 ในหลักหมื่น</p> <p>ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปและเขียนบนกระดาน</p> $13,456 + 34,212 = 47,668$	

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<p>ขั้นสรุป: (5 นาที)</p> <p>11) ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปว่า การบวกจำนวนสองจำนวนที่หลายหลัก ยังคงใช้หลักการเหมือนการบวกจำนวนสองจำนวนที่ผลบวกไม่เกิน 10,000 กล่าวคือ นำจำนวนที่อยู่ในหลักเดียวกันมาบวกกัน ถ้าผลบวกจำนวนในหลักใดเป็นสองหลักให้ทดจำนวนที่ครบสิบไปรวมกับผลบวกของจำนวนในหลักถัดไปทางซ้าย ดังนั้น การแสดงวิธีหาผลบวกในแนวตั้ง จะต้องเขียนเลขโดดในหลักเดียวกันให้ตรงกัน</p> <p>ขั้นฝึกทักษะ: (15 นาที)</p> <p>12) ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ของ สสวท. หน้า 17 และทำแบบฝึกหัดการบวกจำนวนที่มีหลายหลักสองจำนวน (ไม่มีการทด) เป็นการบ้าน</p>	

5. สื่อ / อุปกรณ์การเรียนรู้

1) บัตรประโยคสัญลักษณ์

$$8 + 4 = 4 + 8$$

$$9 + 6 = 6 + 9$$

$$15 + 24 = 24 + 15$$

$$35 + 54 = 54 + 35$$

2) แบบฝึกหัดการบวกจำนวนหลายหลักสองจำนวน (ไม่มีการทด)

(1) $13,674 + 56,225$	(6) $123,456 + 876,543$
(2) $40,187 + 9,701$	(7) $517,230 + 12,548$
(3) $12,345 + 87,654$	(8) $1,345,072 + 3,333,300$
(4) $4,152 + 61,304$	(9) $45,000,743 + 2,418,004$
(5) $301,743 + 674,032$	(10) $5,210,631 + 10,318,214$

3) แบบฝึกหัดในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ของ สสวท. หน้า 17

6. การประเมินการเรียนรู้

- 1) สังเกตการณ์อธิบาย / แสดงเหตุผล
- 2) ประเมินจากผลการทำแบบฝึกหัด

7. บันทึกผลการสอน

.....

.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ลงชื่อ.....

(นางสาวโศจิวัฒน์ เสริฐศรี)

ผู้สอน



ภาคผนวก ค

ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

- แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต
- แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน
- แบบสัมภาษณ์นักเรียนในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

ศูนย์วิจัยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

1. ในข้อ (1) – (8) ให้พิจารณาประโยคสัญลักษณ์ ถ้าเห็นว่าถูกต้องให้เขียนเครื่องหมาย ✓ หน้า คำว่า “ถูก” หรือถ้าเห็นว่าผิดให้เขียนเครื่องหมาย ✗ หน้าคำว่า “ผิด” พร้อมทั้งอธิบายหรือแสดง เหตุผลเกี่ยวกับวิธีคิดที่ทำให้รู้ว่า “ถูก” หรือ “ผิด” ซึ่งแต่ละข้อสามารถอธิบายหรือแสดงวิธีคิดได้ มากกว่า 1 วิธี

(1)

ประโยคสัญลักษณ์	ความคิดเห็น
$471,384 + 0 = 471,384$ ถูก ผิด

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

(2)

ประโยคสัญลักษณ์	ความคิดเห็น
$1,307 + 1,856 = 1,309 + 1,854$ ถูก ผิด

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

(3)	ประโยคสัญลักษณ์	ความคิดเห็น
	$632,801 - 632,801 = 0$ ถูก ผิด

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(4)	ประโยคสัญลักษณ์	ความคิดเห็น
	$4,674 - 1,382 = 4,671 - 1,379$ ถูก ผิด

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(5) ประโยคสัญลักษณ์	ความคิดเห็น
145,783 × 1 = 145,783 ถูก ผิด

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(6) ประโยคสัญลักษณ์	ความคิดเห็น
135 × 120 = 270 × 60 ถูก ผิด

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(7)	ประโยคสัญลักษณ์	ความคิดเห็น
	$384,206 \div 1 = 384,206$ ถูก ผิด

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(8)	ประโยคสัญลักษณ์	ความคิดเห็น
	$2,000 \div 50 = 4,000 \div 100$ ถูก ผิด

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. ในข้อ (9) – (16) ให้หาจำนวนแทน \square เพื่อให้ประโยคสัญลักษณ์ในแต่ละข้อถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายหรือแสดงเหตุผลเกี่ยวกับวิธีคิดที่ทำให้ได้คำตอบ ซึ่งแต่ละข้อสามารถอธิบายหรือแสดงวิธีคิดได้มากกว่า 1 วิธี

(9)

$$23 + 15 = \square + 12 \quad \text{จำนวนที่แทน } \square \text{ คือจำนวนใด}$$

คำตอบ จำนวนที่แทน \square คือ.....

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(10)

$$73 + \square = 75 + 47 \quad \text{จำนวนที่แทน } \square \text{ คือจำนวนใด}$$

คำตอบ จำนวนที่แทน \square คือ.....

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(11)

$$(306 + 167) + \square = 306 + (167 + 543) \quad \text{จำนวนที่แทน } \square \text{ คือจำนวนใด}$$

คำตอบ จำนวนที่แทน \square คือ

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(12)

$$23,069 + 84,167 = \square + 23,069 \quad \text{จำนวนที่แทน } \square \text{ คือจำนวนใด}$$

คำตอบ จำนวนที่แทน \square คือ

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(13)

$$76 - 48 = 71 - \square \quad \text{จำนวนที่แทน } \square \text{ คือจำนวนใด}$$

คำตอบ จำนวนที่แทน \square คือ

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(14)

$$\square - 18 = 60 - 14 \quad \text{จำนวนที่แทน } \square \text{ คือจำนวนใด}$$

คำตอบ จำนวนที่แทน \square คือ

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ศูนย์วิทยพัทยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(15)

$(\square \times 840) \times 123 = 194 \times (840 \times 123)$ จำนวนที่แทน \square คือจำนวนใด

คำตอบ จำนวนที่แทน \square คือ

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(16)

$14,523 \times 6,840 = 6,840 \times \square$ จำนวนที่แทน \square คือจำนวนใด

คำตอบ จำนวนที่แทน \square คือ

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ในข้อ (17) – (20) พิจารณาประโยคสัญลักษณ์ว่าจำนวนที่แทน \square เป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ แล้วเขียนเครื่องหมาย \checkmark หน้าคำว่า “จำนวนคู่” หรือ “จำนวนคี่” พร้อมทั้งอธิบายหรือแสดงผลเกี่ยวกับวิธีคิดที่ทำให้รู้ว่าเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ ซึ่งแต่ละข้อสามารถอธิบายหรือแสดงวิธีคิดได้มากกว่า 1 วิธี

(17)

ประโยคสัญลักษณ์	ความคิดเห็น
$\square + 43,279 = 85,631$ จำนวนคู่ จำนวนคี่

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

(18)

ประโยคสัญลักษณ์	ความคิดเห็น
$674,385 + \square = 1,269,048$ จำนวนคู่ จำนวนคี่

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

(19)	ประโยคสัญลักษณ์	ความคิดเห็น
	$\square \times 136 = 16,864$ จำนวนคู่ จำนวนคี่

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(20)	ประโยคสัญลักษณ์	ความคิดเห็น
	$543 \times \square = 68,961$ จำนวนคู่ จำนวนคี่

แสดงเหตุผลที่ตอบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ชุดคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์

1. $1,236,428 + 0 = 1,236,428$ ถูกหรือผิด ตอบ

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ.....

2. $10,089 + 98,001 = \dots\dots\dots + 10,089$

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ.....

3. $1,576 + 1,024 = 1,578 + 1,022$ ถูกหรือผิด ตอบ

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ.....

4. $35,246 + 47,081 = \square$ เป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ ตอบ

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ.....

5. $35 + 17 = \dots\dots\dots + 14$

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบสัมภาษณ์

ชื่อนักเรียนที่ถูกสัมภาษณ์.....เลขที่.....ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4/.....

เป็นนักเรียนที่ได้เกรดเฉลี่ย 4.00 3 ขึ้นไปแต่ไม่ถึง 4 2 ขึ้นไปแต่ไม่ถึง 3 1 ขึ้นไปแต่ไม่ถึง 2

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....เวลา.....

ประเด็นที่สัมภาษณ์

บันทึกคำตอบของนักเรียน

1. สมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวน

1.1 ทำไมจึงตอบเช่นนั้น/ คิดได้อย่างไร

.....
.....
.....

1.2 นักเรียนสังเกตเห็นอะไรที่เป็นจริงเสมอ

.....
.....
.....

1.3 นักเรียนอธิบายสรุปเป็นคำพูดว่าอย่างไร

.....
.....
.....

1.4 นักเรียนรู้ได้อย่างไรว่าคำพูดนี้เป็นจริงเสมอ.....

.....
.....
.....

1.5 นักเรียนสรุปคำพูดนี้เป็นสัญลักษณ์ได้อย่างไร

.....
.....
.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประเด็นที่สัมภาษณ์

บันทึกคำตอบของนักเรียน

2. สมบัติของการดำเนินการของจำนวน

2.1 ทำไมจึงตอบเช่นนั้น/ คิดได้อย่างไร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.2 นักเรียนสังเกตเห็นอะไรที่เป็นจริงเสมอ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.3 นักเรียนอธิบายสรุปเป็นคำพูดว่าอย่างไร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.4 นักเรียนรู้ได้อย่างไรว่าคำพูดนี้เป็นจริงเสมอ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.5 นักเรียนสรุปคำพูดนี้เป็นสัญลักษณ์ได้อย่างไร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประเด็นที่สัมภาษณ์

บันทึกคำตอบของนักเรียน

3. การเท่ากันในฐานะที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน

3.1 ทำไมจึงตอบเช่นนั้น/ คิดได้อย่างไร

.....

.....

.....

.....

.....

3.2 นี่คือเครื่องหมายอะไร (ชี้ที่เครื่องหมายเท่ากับ)

.....

.....

.....

3.3 ในความคิดของนักเรียนเครื่องหมายเท่ากับ
หมายถึงอะไร

.....

.....

.....

.....

3.4 นักเรียนรู้ได้อย่างไรว่าคำตอบนี้ถูกต้อง

.....

.....

.....

.....

ประเด็นที่สัมภาษณ์

บันทึกคำตอบของนักเรียน

4. การมองจำนวนในเชิงพีชคณิต

4.1 ทำไมจึงตอบเช่นนั้น/ คิดได้อย่างไร

.....

.....

.....

.....

.....

4.2 นักเรียนสังเกตเห็นอะไรที่เป็นจริงเสมอ

.....

.....

.....

.....

.....

4.3 นักเรียนอธิบายสรุปเป็นคำพูดว่าอย่างไร

.....

.....

.....

.....

.....

4.4 นักเรียนรู้ได้อย่างไรว่าคำพูดนี้เป็นจริงเสมอ

.....

.....

.....

.....

4.5 นักเรียนสรุปคำพูดนี้เป็นสัญลักษณ์ได้อย่างไร

.....

.....

.....

.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประเด็นที่สัมภาษณ์

บันทึกคำตอบของนักเรียน

5. การแก้ปัญหาประโยคจำนวนที่มีบางจำนวนหายไปหนึ่งจำนวน

5.1 ทำไมจึงตอบเช่นนั้น/ คิดได้อย่างไร

.....

.....

.....

.....

5.2 นี่คือเครื่องหมายอะไร
(ชี้ที่เครื่องหมายเท่ากับ)

.....

.....

.....

.....

.....

5.3 ในความคิดของนักเรียนเครื่องหมายเท่ากับ
หมายถึงอะไร

.....

.....

.....

5.4 นักเรียนรู้ได้อย่างไรว่าคำตอบนี้ถูกต้อง

.....

.....

.....

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาว โศจิวัจน์ เสริฐศรี เกิดเมื่อวันที่ 11 กรกฎาคม 2505 ที่อำเภอเมือง จังหวัดเลย สำเร็จการศึกษาปริญญาตรี ครุศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์) จากวิทยาลัยครูพระนคร ปีการศึกษา 2528 สำเร็จการศึกษาปริญญาโทศึกษาศาสตร์มหาบัณฑิต (หลักสูตรและการสอน) จากมหาวิทยาลัยขอนแก่น ปีการศึกษา 2538 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชา หลักสูตรและการสอน จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2549 ปัจจุบันเป็นผู้ชำนาญสาขา คณิตศาสตร์ประถมศึกษา สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย