ไฮเพอร์ริงและเซมิกรุปของการแปลงที่ให้โครงสร้างไฮเพอร์ริง

นาง ยุวรีย์ พันธ์กล้า

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2534

ISBN 974-578-377-3

HYPERRINGS AND TRANSFORMATION SEMIGROUPS ADMITTING HYPERRING STRUCTURE

Mrs. Yuwaree Punkla

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1991

ISBN 974-578-377-3

Thesis Title Hyperrings and Transformation Semigroups Admitting Hyperring Structure

By Mrs. Yuwaree Punkla

Department Mathematics

Thesis Advisor Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

Thavorn Vajrabhaya .... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D.)

Thesis Committee

Sidney S. Mitchell .... Chairman

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

Yupaporn Kemprasit .... Thesis Advisor

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

Yati Krisnangkura .... Member

(Dr. Yati Krisnangkura Ph.D.)

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

ยุวรีย์ พันธ์กล้า : ไฮเพอร์ริงและเซมิกรุปของการแปลงที่ให้โครงสร้างไฮเพอร์ริง (HYPERRINGS AND TRANSFORMATION SEMIGROUPS ADMITTING HYPERRING STRUCTURE) อ.ที่ปรึกษา : รศ.ดร.ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์, 65 หน้า.
ISBN 974-578-377-3

เรากล่าวว่าเซมิกรุป S <u>ให้โครงสร้างไฮเพอร์ริง</u> ถ้ามีไฮเพอร์โอเปอเรชัน + บน S^o ที่ทำให้ $(S^o,+,.)$ เป็นไฮเพอร์ริง โดยที่ . คือโอเปอเรชันของ S^o สำหรับเซต X ใด ๆ ให้ P_X = เซมิกรุปของการแปลงบางส่วนบนเซต X, T_X = เซมิกรุปของการแปลงเต็มบนเซต X, I_X = เซมิกรุปผกผันสมมาตรบนเซต X, G_X = กรุปสมมาตรบนเซต X, CP_X = เซมิกรุปของการแปลงบางส่วนแบบคงตัวของเซต X ทั้งหมด, CT_X = เซมิกรุปของการแปลงแบบคงตัวของเซต X ทั้งหมด, U_X = เซมิกรุปของการแปลงบางส่วนที่เกือบเป็นเอกลักษณ์ของเซต X ทั้งหมด, V_X = เซมิกรุปของการแปลงที่เกือบเป็นเอกลักษณ์ของเซต X ทั้งหมด, W_X = เซมิกรุปของการแปลงบางส่วนแบบหนึ่งต่อหนึ่งที่เกือบเป็นเอกลักษณ์ของเซต X ทั้งหมด, M_X = เซมิกรุปของการแปลงแบบหนึ่งต่อหนึ่งของเซต X ทั้งหมด, E_X = เซมิกรุปของการแปลงแบบทั่วถึงของเซต X ทั้งหมด, AM_X = เซมิกรุปของการแปลงที่เกือบเป็นหนึ่งต่อหนึ่งของเซต X ทั้งหมด และ AE_X = เซมิกรุปของการแปลงที่เกือบทั่วถึงของเซต X ทั้งหมด

ผลสำคัญของการวิจัยนี้มีดังนี้

<u>ทฤษฎีบท 1</u> ถ้า φ เป็นฮอมอมอร์ฟิซึมจากไฮเพอร์ริง A ไปบนไฮเพอร์ริง B แล้ว $A/\ker\varphi \cong B$

<u>ทฤษฎีบท 2</u> ให้ I และ J เป็นไฮเพอร์ไอดีลของไฮเพอร์ริง A จะได้ว่า
(1) $I/(I\cap J) \cong (I+J)/J$ และ (2) $(A/I)/(J/I) \cong A/J$ ถ้า $I \subseteq J$

<u>ทฤษฎีบท 3</u> ถ้า I เป็นไฮเพอร์ไอดีลของไฮเพอร์ริง A แล้วจะมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจากเซตของไฮเพอร์ริงย่อยทั้งหมดของ A ที่บรรจุ I ไปบนเซตของไฮเพอร์ริงย่อยทั้งหมดของ A/I ที่มี I เป็นศูนย์ โดยที่ฟังก์ชันนี้จะส่งเซตของไฮเพอร์ไอดีลทั้งหมดของ A ที่บรรจุ I ไปบนเซตของไฮเพอร์ไอดีลทั้งหมดของ A/I

<u>ทฤษฎีบท 4</u> สำหรับไฮเพอร์ริงสลับที่ A ใด ๆ ซึ่งมีเอกลักษณ์และ $|A| > 1$ A เป็นไฮเพอร์ฟิลด์เมื่อและต่อเมื่อ {0} และ A เท่านั้นที่เป็นไฮเพอร์ไอดีลของ A

<u>ทฤษฎีบท 5</u> ให้ I เป็นไฮเพอร์ไอดีลของไฮเพอร์ริงสลับที่ A จะได้ว่า (1) I เป็นไฮเพอร์ไอดีลเฉพาะของ A เมื่อและต่อเมื่อ A/I เป็นไฮเพอร์อินทิกรัลโดเมน (2) ถ้า A มีเอกลักษณ์ แล้ว I เป็นไฮเพอร์ไอดีลที่ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม เมื่อและต่อเมื่อ A/I เป็นไฮเพอร์ฟิลด์

<u>ทฤษฎีบท 6</u> ทุกไฮเพอร์อินทิกรัลโดเมนที่มีจำนวนสมาชิกจำกัดและมากกว่า 1 เป็นไฮเพอร์ฟิลด์เสมอ

<u>ทฤษฎีบท 7</u> ทุกไฮเพอร์อินทิกรัลโดเมนสามารถถูกฝังในไฮเพอร์ฟิลด์

<u>ทฤษฎีบท 8</u> ให้ X เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า (1) ถ้า $S = P_X, T_X, I_X, CP_X, CT_X, U_X, V_X, W_X, AM_X$ หรือ AE_X แล้ว S ให้โครงสร้างไฮเพอร์ริง เมื่อและต่อเมื่อ $|X| \leq 1$ (2) G_X ให้โครงสร้างไฮเพอร์ริงเสมอ (3) ถ้า $S = M_X$ หรือ E_X แล้ว S ให้โครงสร้างไฮเพอร์ริง เมื่อและต่อเมื่อ X เป็นเซตจำกัด

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต ยุวรีย์ พันธ์กล้า

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2533 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ....

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

YUWAREE PUNKLA : HYPERRINGS AND TRANSFORMATION SEMIGROUPS ADMITTING HYPERRING STRUCTURE. THESIS ADVISOR : ASSO. PROF. YUPAPORN KEMPRASIT, PH.D., 65 PP. ISBN 974-578-377-3

A semigroup S is said to <u>admit a hyperring structure</u> if there exists a hyperoperation $+$ on S^{o} such that $(S^{o},+,.)$ is a hyperring where $.$ is the operation of S^{o}. For a set X, let P_X = the partial transformation semigroup on X, T_X = the full transformation semigroup on X, I_X = the symmetric inverse semigroup on X, G_X = the symmetric group on X, CP_X = the transformation semigroup of all constant partial transformations of X, CT_X = the transformation semigroup of all constant transformations of X, U_X = the transformation semigroup of all almost identical partial transformations of X, V_X = the transformation semigroup of all almost identical transformations of X, W_X = the transformation semigroup of all almost identical 1-1 partial transformations of X, M_X = the transformation semigroup of all 1-1 transformations of X, E_X = the transformation semigroup of all onto transformations of X, AM_E = the transformation semigroup of all almost 1-1 transformations of X and AE_X = the transformation semigroup of all almost onto transformations of X.

The main results of this research are as follows :

<u>Theorem 1</u>. If φ is a homomorphism of a hyperring A onto a hyperring B, then $A/\ker\varphi \cong B$.

<u>Theorem 2</u>. Let I and J be hyperideals of a hyperring A. Then : (1) $I/(I\cap J) \cong (I+J)/J$ and (2) $(A/I)/(J/I) \cong A/J$ if $I \subseteq J$.

<u>Theorem 3</u>. If I is a hyperideal of a hyperring A, then there exists a bijection from the set of all subhyperrings of A containing I onto the set of all subhyperrings of A/I having I as their zero such that the bijection takes the set of all hyperideals of A containing I onto the set of all hyperideals of A/I.

<u>Theorem 4</u>. Let A be a commutative hyperring with identity and $|A| > 1$. Then A is a hyperfield if and only if $\{0\}$ and A are only hyperideals of A.

<u>Theorem 5</u>. Let I be a hyperideal of a commutative hyperring A. Then : (1) I is a prime hyperideal of A if and only if A/I is a hyperintegral domain. (2) If A has an identity, then I is a maximal hyperideal of A if and only if A/I is a hyperfield.

<u>Theorem 6</u>. A finite hyperintegral domain of order greater than 1 is a hyperfield.

<u>Theorem 7</u>. Every hyperintegral domain can be embedded in a hyperfield.

<u>Theorem 8</u>. Let X be a set. Then : (1) If $S = P_X, T_X, I_X, CP_X, CT_X, U_X, V_X, W_X, AM_X$ or AE_X, then S admits a hyperring structure if and only if $|X| \le 1$. (2) G_X admits a hyperring structure. (3) If $S = M_X$ or E_X, then S admits a hyperring structure if and only if X is finite.

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ลายมือชื่อนิสิต

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2533

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Assoc. Prof. Dr. Yupaporn Kemprasit, my thesis supervisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my father and mother for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS