บทที่ 2

ตัวสถิติและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากรมีหลายแบบซึ่งได้พัฒนาขึ้นเรื่อยๆพร้อมทั้งได้มีผลงานวิจัยศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของตัวสถิติต่างๆ ซึ่งจะได้กล่าวเกี่ยวกับตัวสถิติที่ศึกษาครั้งนี้ พร้อมทั้งผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องพอเป็นสังเขป ดังนี้

รูปแบบข้อมูล

population	1	2	k
observation	y_{11}	y_{21}	y_{k1}
	y_{12}	y_{22}	y_{k2}
	.	.	.
	.	.	.
	.	.	.
	y_{1n}	y_{2n}	y_{kn}
sum	$y_{1.}$	$y_{2.}$	$y_{k.}$
sample mean	$\bar{y}_{1.}$	$\bar{y}_{2.}$	$\bar{y}_{k.}$
population mean	u_1	u_2	u_k
population variance	σ_1^2	σ_2^2	σ_k^2

ให้ y_{ij} = ค่าสังเกตจากประชากรที่ i หน่วยทดลองที่ j

$y_{i.}$ = ผลรวมของค่าสังเกตจากหน่วยทดลองจากประชากรที่ i

$= \sum_{j=1}^{n} y_{ij}$

$\bar{y}_{i.}$ = ค่าเฉลี่ยของประชากรที่ i = $y_{i.}/n$

$y_{..}$ = ผลรวมของค่าสังเกตทั้งหมด

$\bar{y}_{..}$ = ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตทั้งหมด

ตัวสถิติที่ใช้ในการศึกษา

2.1 การทดสอบแบบเอฟ (F-test)

การวิเคราะห์ความแปรปรวน เป็นวิธีการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากรตั้งแต่สามประชากรขึ้นไป หลักการสำคัญที่ใช้ในการทดสอบสมมุติฐานด้วยวิธีนี้ คือ การแยกความแปรปรวนหรือความแตกต่างของข้อมูลที่เกิดขึ้นทั้งหมดออกจากสาเหตุต่างๆแล้ว พิจารณาสัดส่วนของความแปรปรวนหรือความแตกต่างระหว่างประชากรและความแปรปรวนหรือความแตกต่างภายในประชากรเดียวกันว่ามีค่ามากน้อยเพียงใด ถ้าอัตราส่วนดังกล่าวมีมาก แสดงว่าความแปรปรวนหรือความแตกต่างระหว่างประชากรมีมากเมื่อเทียบกับความแปรปรวนหรือความแตกต่างภายในประชากรเดียวกัน สามารถสรุปได้ว่า จำนวนประชากรทั้งหมดที่นำมาทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยมีค่าเฉลี่ยของประชากรอย่างน้อยหนึ่งประชากร ที่แตกต่างจากประชากรอื่นๆที่นำมาทดสอบ ซึ่งวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนจะแตกต่างกันไปตาม ลักษณะแผนการทดลอง แผนการทดลองที่ใช้ในการวิจัยนี้ใช้แผนการทดลองแบบสุ่มโดยสมบูรณ์ (Completely Randomized Design) หรือ ข้อมูลแบบจำแนกทางเดียว(one-way classification) ซึ่งเป็นแผนการทดลองที่ง่ายที่สุด การวิเคราะห์ความแปรปรวนจะแยกสาเหตุของความแปรปรวนของข้อมูลทั้งหมดว่า เนื่องมาจากอิทธิพลของสิ่งทดลอง (Treatment Effect) แต่เพียงอย่างเดียว ดังนั้น เพื่อให้แผนการทดลองนี้มีประสิทธิภาพมากที่สุด หน่วยทดลอง (Experimental Unit) ที่นำ

มาใช้ควรมีลักษณะเหมือนกันหรือคล้ายคลึงกันมากที่สุด (Homogeneous) หรือมีความแปรปรวนระหว่างหน่วยทดลองน้อยที่สุด

2.1.1 ตัวแบบเส้นตรงเชิงบวก (Linear Additive Model)

ค่า y ในตาราง สามารถแสดงในรูปของผลบวกขององค์ประกอบต่างๆ ซึ่งในกรณีนี้ได้แก่ ค่าเฉลี่ยโดยทั่วไป(General mean) คือ u ผลกระทบจากประชากรที่แตกต่างกัน (Treatment effect) คือ τ_i ความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม (Random error) ที่เกิดจากหน่วยทดลองที่ j ของประชากรที่ i คือ ϵ_{ij} เมื่อรวมเขียนเป็นตัวแบบเส้นตรงเชิงบวก (Linear additive model)

$$y_{ij} = u + \tau_i + \epsilon_{ij} \quad ; i = 1,\ldots,k \quad j = 1,\ldots,n$$

หรืออาจเขียนได้ในรูป

$$y_{ij} = u_i + \epsilon_{ij}$$

โดยที่ u_i คือ ค่าเฉลี่ยจริงของสิ่งทดลองที่ i ซึ่งมีค่าเท่ากับ $u + \tau_i$ นั่นเอง

2.1.2 ข้อสมมุติในการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบจำแนกทางเดียว

1 ϵ_{ij} มีการแจกแจงอย่างอิสระแบบปกติโดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนร่วมกันคือ σ^2

2 τ_i เป็นผลกระทบชนิดคงที่ (Fixed effect) หมายถึงสิ่งทดลองที่ใช้ในการทดลองถูกกำหนดให้คงที่ ทำให้ τ_i คงที่และ $\sum_{i=1}^{k}\tau_i = 0$

3 τ_i เป็นผลกระทบเชิงสุ่ม (Random effect) ในกรณีที่สิ่งทดลองที่ใช้ในการทดลองถูกเลือกอย่างสุ่ม จากประชากรของสิ่งทดลองทั้งหมด ค่า τ_i เป็นตัวอย่างสุ่มที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนเป็น σ^2

สมมุติฐานในการทดสอบคือ ไม่มีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากร ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$H_o : u_1 = u_2 = \ldots = u_k$$

H_a : มีค่าเฉลี่ยอย่างน้อยหนึ่งค่าที่แตกต่างจากค่าอื่น

2.1.3 วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวน

$$\text{Total SS} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - y_{..})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}^2 - y_{..}^2/kn$$

$$\text{Between group SS} = n\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{k}y_{i.}^2/n - y_{..}^2/kn$$

$$\text{Within group SS} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 = \text{Total SS} - SS_B$$

$y_{..}^2/kn$ เรียกว่า correction term (c)

ตาราง ANOVA

Source of variation	df	SS	MS	F
Between group	k-1	$\sum_{i=1}^{k}y_{i.}^2/n - c$	$SS_B/k-1=MS_B$	MS_B/MS_W
Within group	k(n-1)	by subtraction	$SS_W/k(n-1)=MS_W$	
Total	kn-1	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}^2 - c$		

ค่าประมาณของ ความแปรปรวนของประชากร (σ^2) คือ $S^2 = MS_w$

ปฏิเสธสมมุติฐานว่างเมื่อ F มีค่ามากกว่า F_α ที่องศาแห่งความเป็นอิสระ k-1 และ k(n-1)

2.2 ตัวสถิติ Likelihood ratio test

2.2.1 กรณี simple order

กรณีทราบ σ^2

ใช้ตัวสถิติ $\bar{\chi}_k^2 = [\sum_{i=1}^{k} n_i(\hat{u}_i^* - \hat{u})^2]/\sigma^2$

โดยที่ $\hat{u}_i^*$ = maximum likelihood estimator และการประมาณ $\hat{u}_i^*$ ขึ้นอยู่กับ สมมุติฐานแย้ง

ดังนั้นเมื่อพิจารณา สมมุติฐานแย้งแล้วจะได้ว่า ข้อมูลเหลือเพียง l ระดับ มีขนาด $N_1, N_2, \ldots, N_l$ มีค่าเฉลี่ย $Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$

ตัวสถิติ $\bar{\chi}_k^2 = [\sum_{i=1}^{\ell} N_i(Y_i - \hat{u})^2]/\sigma^2$

$= [\sum_{i=1}^{\ell} N_i(Y_i - \bar{Y})^2]/\sigma^2$

โดยที่ $\bar{Y} = \sum_{i=1}^{\ell} N_i Y_i / \sum_{i=1}^{\ell} N_i$

ปฏิเสธสมมุติฐานเมื่อค่าสถิติที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่า $\bar{\chi}^2$ ที่องศาความเป็นอิสระ (degree of freedom) เท่ากับ k ใช้ตาราง Bartholomew (1972)

Bartholomew (1959a:1959b:1961) สร้างตัวสถิติทดสอบโดยใช้ อัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

$$\lambda = L(w)/L(\Omega)$$

เมื่อ L(w) คือ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function) ของพารามิเตอร์ (parameter space) ภายใต้สมมุติฐานว่าง(H_o)

$L(\Omega)$ คือ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของพารามิเตอร์ ภายใต้สมมุติฐานเย้ง

ถ้ากำหนดให้ y_{ij} ;i=1,..,k และ j=1,..,n_i มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย u_i และความแปรปรวน σ_i^2 หรือ $y_{ij} \sim N(u_i, \sigma_i^2)$ ฟังก์ชันความหนาแน่น (probability density function) หรือ pdf. ของ y_{ij} คือ

$$p(y_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-(y_{ij}-u_i)^2/2\sigma_i^2}$$

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น คือ

$$L = \prod_{j=1}^{n_i} p(y_{1j})p(y_{2j})\dots p(y_{kj})$$

$$= (2\pi)^{-N/2}\prod_{i=1}^{k} \sigma_i^{-n_i} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sigma_i^2}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-u_i)^2\}$$

เมื่อ $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$

ภายใต้ H_o ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ u คือ

$$\hat{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \bar{y}_{..}$$

ภายใต้ สมมุติฐานแย้งตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดคือ $\hat{u}_i^*$

ดังนั้น

$$-2\log\lambda = \sum_{i=1}^{k} w_i n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-u)^2 - \sum_{i=1}^{k} w_i n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\hat{u}_i^*)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} w_i(\hat{u}_i^*-\hat{u})^2 + 2\sum_{i=1}^{k} w_i(\bar{y}_i-\hat{u}_i^*)(\hat{u}_i^*-\hat{u})$$

$$= \sum_{i=1}^{k} w_i(\hat{u}_i^*-\hat{u})^2$$

เมื่อ $w_i = \dfrac{n_i}{\sigma_i^2}$

$$\therefore \bar{X}_k^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(\hat{u}_i^* - \hat{u})^2}{\sigma^2}$$

ภายใต้ สมมุติฐานแย้งจำนวนข้อมูลเหลือเพียง 1 ระดับ มีค่าเฉลี่ย $Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$ มีขนาด $N_1, N_2, \ldots, N_l$ ดังนั้น

$$\bar{X}_k^2 = \sum_{i=1}^{l} N_i(Y_i - \hat{u})^2/\sigma^2$$

$$= \sum_{i=1}^{l} N_i(Y_i - \bar{Y})^2/\sigma^2$$

โดยที่ $\bar{Y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{l} N_i Y_i}{\sum_{i=1}^{l} N_i}$

กรณีไม่ทราบ σ^2

ใช้ตัวสถิติ $$\bar{E}_k^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{k} n_i(\hat{u}_i^* - \hat{u})^2\right]}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - u)^2}$$

$$= \frac{\hat{\sigma}^2 \bar{X}_k^2}{S_t}$$

= Between group SS / Total SS

(ใน Analysis of variance)

ปฏิเสธสมมุติฐานเมื่อค่าสถิติที่คำนวนได้มากกว่าค่า $\bar{E}^2$ ที่องศาความเป็นอิสระ (degree of freedom) เท่ากับ k ใช้ตาราง Gerald R. Chase (1974:574) ซึ่งในตารางค่า k+1 จะเท่ากับ k ของการวิจัย

ค่าความแปรปรวนอยู่ในรูปของ $\sigma_i^2 = a_i \sigma^2$ (i=1,...,k)

โดยที่ a_i เป็นค่าคงที่และทราบค่าและ σ^2 ไม่ทราบค่า

ภายใต้ H_o ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด คือ

$$\hat{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \bar{y}_{..}$$

$$\hat{\sigma}_o^2 = \sum_{i=1}^{k} a_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(y_{ij} - \hat{u})^2}{N}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น คือ

$$(2\pi\sigma^2)^{-N/2} \prod_{i=1}^{k} a_i^{-(n_i/2)} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{k} a_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - u_i)^2\right\}$$

$$\lambda = (\hat{\sigma}^2 / \hat{\sigma}_o^2)^{N/2}$$

$$\lambda^{2/N} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \hat{u}_i^*)^2 / \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \hat{u})$$

เมื่อ $a_i = 1$ (i=1,..,k)

ดังนั้น $\bar{E}_k^{2} = \sum_{i=1}^{k} n_i(\hat{u}_i^{*} - u)^2 / \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \hat{u})^2$

$= \sigma^2 \bar{\chi}_k^{2} / S_t$

โดยที่ S_t = total SS

ดังนั้น $\bar{E}_k^{2} = SS_B$ /Total SS

2.2.2 กรณี simple tree order

ใช้ตัวสถิติทดสอบเหมือนเดิมทั้งกรณีทราบ σ^2 และไม่ทราบ σ^2 ต่างตรงการประมาณค่า $\hat{u}^*$และเขตวิกฤต กรณีทราบ σ^2 ใช้ตาราง Tim Robertson and F.T. Wright (1985:112-113) ที่ $\nu = \infty$ และกรณีไม่ทราบ σ^2 ใช้ตารางเดียวกัน โดยที่ ν = N-k และ $L_{01} = (\nu \bar{E}_k^{2})/(1-\bar{E}_k^{2})$

<u>หมายเหตุ</u> k ในการทดลองเท่ากับ k+1 ในตาราง

การคำนวณค่า $\hat{u}^*$

กรณี $H_1 : u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_k$

วิธีการ

1. พิจารณาค่า $\bar{y}_i$ (i=1,...,k) ว่า เป็นไปตาม สมมุติฐานแย้งหรือไม่ คือถ้า $\bar{y}_1 > \bar{y}_2 > \ldots > \bar{y}_k$ ให้ $\hat{u}_i^{*} = \bar{y}_i$ (i=1,...,k)แต่ถ้าเป็นอย่างอื่นให้ทำข้อ 2

2. พิจารณาค่า $\bar{y}_1 \geq \bar{y}_2$ หรือไม่ ถ้ามากกว่า ให้ $\hat{u}_1^{*} = \bar{y}_1$ และ $\hat{u}_2^{*} = \bar{y}_2$ แต่ถ้าเป็นอย่างอื่นให้ เฉลี่ย $\bar{y}_1$ และ $\bar{y}_2$ จะได้ $\hat{u}_1^{*} = \hat{u}_2^{*} = (\bar{y}_1+\bar{y}_2)/2$ แล้วพิจารณา $\hat{u}_2^{*} \geq \bar{y}_3$ หรือไม่ถ้ามากกว่าให้ $\hat{u}_3^{*} = \bar{y}_3$ แต่ถ้าเป็นอย่างอื่นให้เฉลี่ย $\hat{u}_2^{*}$ และ $\bar{y}_3$ จะทำอย่างนี้จนกระทั่งหมดค่าเฉลี่ย

กรณี $H_2 : u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_k$

วิธีการ

ในทำนองเดียวกัน แต่พิจารณาจากมากเป็นน้อย

กรณี $H_3 : u_1 \geqslant u_i \ (i=2,\ldots,k)$

วิธีการ

1. พิจารณาถ้า $\bar{y}_1 \geqslant \bar{y}_i \ (i=2,\ldots,k)$ ให้ $\hat{u}_i^* = \bar{y}_i \ (i=1,\ldots,k)$
2. แต่ถ้าเป็นอย่างอื่นให้เฉลี่ยค่า $\bar{y}_1$ กับค่าที่ใหญ่ที่สุดของ $\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_k$ ทำจนกระทั่งได้ว่า $\bar{y}_1 \geqslant \bar{y}_i \ (i=2,\ldots,k)$

กรณี $H_4 : u_1 \leqslant u_i \ (i=2,\ldots,k)$

วิธีการ

1. พิจารณาถ้า $\bar{y}_1 \leqslant \bar{y}_i \ (i=2,\ldots,k)$ ให้ $\hat{u}_i^* = \bar{y}_i \ (i=1,\ldots,k)$
2. แต่ถ้าเป็นอย่างอื่นให้ เรียงค่าจากน้อยไปมากได้ $\bar{y}_2 \leqslant \bar{y}_3 \leqslant \ldots \leqslant \bar{y}_k$
3. หาค่าจำนวนเต็มที่เล็กที่สุดของ j ที่ทำให้

$$A_j = \left(n_1 y_1 + \sum_{i=2}^{j} n_i y_i\right) \Big/ \left(n_1 + \sum_{i=2}^{j} n_i\right) < \bar{y}_{j+1}$$

และให้ $\hat{u}_1^* = A_j$

2.3 Test based on scores (Armitage 1955:375-386) คำนวณค่าสถิติจากผลรวมความแตกต่างของค่าสังเกต ซึ่งจะได้ว่า

$$T = \sum_{i=2}^{k} \sum_{j=1}^{i-1} (y_i - y_j)$$

เมื่อ k = จำนวนประชากรที่ต้องการทดสอบ

ดังนั้นจะมีความแตกต่าง $(y_i - y_j)$ $(i>j)$ ทั้งหมด $\binom{k}{2}$ คู่

$$T = \sum_{i=1}^{k}(2i - k + 1)y_i$$

$$E(T) = \sum_{i=1}^{k}(2i - k + 1)u_i$$

$$Var(T) = \sum_{i=1}^{k}(2i - k + 1)^2\sigma^2$$

กรณีไม่ทราบ σ^2 แต่ละประชากรมีค่าสังเกต n ค่าด้วยค่าเฉลี่ย $\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_k$ ค่าสถิติกลายเป็น

$$T' = \sqrt{n}\sum_{i=1}^{k}(2i - k + 1)y_i \Big/ \{\sum_{i=1}^{k}(2i - k + 1)^2\}^{1/2} S$$

โดยที่ S เป็นค่าประมาณ คำนวณจาก $(\text{within group mean square})^{1/2}$

$$T' \sim \text{student t}$$

จากแนวความคิดดังที่กล่าวมาแล้ว สามารถสรุปเป็นกรณีทั่วไปได้ว่า
กรณีทราบ σ^2 ตัวสถิติคือ

$$T = \sum_{i=1}^{k}c_i n_i \bar{y}_i / \left(\sum_{i=1}^{k}c_i^2 n_i\right)^{1/2}\sigma$$

$$T \sim N\left(\sum_{i=1}^{k}c_i u_i,\ \sigma^2\sum_{i=1}^{k}c_i^2\right)$$

$$Z = (T - E(T))/\sqrt{Var(T)}$$

ปฏิเสธสมมุติฐานเมื่อ $Z > Z_\alpha$

กรณีไม่ทราบ σ^2 ตัวสถิติคือ

$$T' = (\sqrt{n}\sum_{i=1}^{k} c_i n_i \bar{y}_i)/(\sum_{i=1}^{k} c_i^2 n_i)^{1/2} S$$

S ประมาณจาก (within group mean square)$^{1/2}$ ใน ตาราง ANOVA

$$T' \sim t \ df \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)$$

ปฏิเสธสมมุติฐานเมื่อ T' ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่า t_α ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ

$\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)$

Abelson and Tukey (1963:1347-1369) เสนอสูตรการคำนวณค่า c_i ดังนี้

ภายใต้ สมมุติฐานแย้ง กรณี simple order

$$c_i = \sqrt{(i-1)\{1-(i-1)/k\}} - \sqrt{i(1-i/k)}$$

ภายใต้ สมมุติฐานแย้ง กรณี simple tree order

$$c_1 = (k-1)\sqrt{(k-1)/k}\ ,\ c_2=c_3=\ldots=c_k= -\sqrt{(k-1)/k}$$

ตัวสถิติอื่นๆที่เกี่ยวข้อง

1. ตัวสถิติของ Dunnett (1955,1964) ตัวสถิติทดสอบนี้คำนวณมาจากค่าที่มากที่สุดของอัตราส่วน

$$D = \max_{1 \le i \le k} \frac{X_i - X_0}{s\sqrt{n_i^{-1} + n_0^{-1}}}$$

เมื่อ $\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_i}$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{(N-k-1)}$$

$$N = \sum_{i=0}^{k} n_i$$

ปฏิเสธสมมุติฐานเมื่อ $D > D_{ตาราง}$

2. ตัวสถิติของ Williams (1972:519-531) ตัวสถิติทดสอบนี้คือ

$$\bar{t}_k = (\hat{M}_k - X_o)(2S^2/n)^{-1/2}$$

เมื่อ $\hat{M}_k$ = maximum likelihood (ML) estimate ของ M_i

ภายใต้สมมุติฐานแย้ง

S^2 = error mean square

X_o = control mean

ปฏิเสธสมมุติฐานเมื่อ $\bar{t}_k$ ที่คำนวนได้มากกว่าค่า $\bar{t}_{k,\alpha}$ ในตาราง Williams (1971) ที่มีองศาความเป็นอิสระ $\nu = nk$

3. Jonckheere's test (1954:133-145) ตัวสถิติทดสอบนี้ใช้สำหรับกรณีสมมุติฐานแย้งแบบ $u_1 \geq u_2 > \ldots \geq u_k$

$$S = 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}(p_{ij} - \frac{1}{2}n_i n_j)$$

เมื่อ $p_{ij} = \sum_{r=1}^{n_i}\sum_{s=1}^{n_j} p_{ir,js}$

$$p_{ir,js} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x_{ir} > x_{js} \\ \emptyset & \text{ถ้า } x_{ir} \leqslant x_{js} \quad (i<j) \end{cases}$$

$$S \sim N\left(\emptyset, \frac{1}{18}\left\{ N^2(2N+3) - \sum_{i=1}^{k} n_i^{2}(2n_i+3)\right\}\right)$$

ปฏิเสธสมมุติฐานเมื่อ $S \geqslant S_{\text{ตาราง}}$

เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่ $Z = (S - E(S))/\sqrt{Var(S)}$

ปฏิเสธสมมุติฐานเมื่อ $Z > Z_{\alpha}$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ สมมุติฐานแย้งคือ $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_k$

$$p_{ir,js} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x_{ir} < x_{js} \\ \emptyset & \text{ถ้า } x_{ir} \geqslant x_{js} \quad (i<j) \end{cases}$$

ปฏิเสธสมมุติฐานเมื่อ $S \leqslant S_{\text{ตาราง}}$

กรณีที่ขนาดตัวอย่างใหญ่ จะปฏิเสธสมมุติฐานเมื่อ $Z < Z_{\alpha}$

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาเกี่ยวกับการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยเพื่อเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบ มีดังต่อไปนี้

1. Williams(1971:103-117) เปรียบเทียบอำนาจการทดสอบระหว่าง one-sided t test, Dunnett's one-sided test, Bartholomew's $\bar{\chi}^2$ test และ Williams's $\bar{t}$ test

กรณี เมื่อ k=2 และ M_o=0 ปรากฏผลดังนี้

$\bar{t}$ test มีอำนาจการทดสอบน้อยกว่า t test เมื่อ M_1=0 แต่มากกว่าเมื่อ M_1 เพิ่มขึ้นมาเท่ากับ M_2

$\bar{t}$ test มีอำนาจการทดสอบมากกว่า Dunnett's test ทุกๆกรณี เมื่อ $M_1 < M_2$ และมีอำนาจการทดสอบเกือบเท่ากัน เมื่อ $M_1=M_2$

$\bar{t}$ test มีอำนาจการทดสอบน้อยกว่า Bartholomew's $\bar{\chi}^2$ test เมื่อ M_1=0 แต่เมื่อ M_1 เพิ่มขึ้น ($0<M_1\leq M_2$) ทำให้ $\bar{t}$ test มีอำนาจการทดสอบสูงกว่า Bartholmew's test

กรณี k>2

$\bar{t}$ test มีอำนาจการทดสอบสูงกว่า t test และ Dunnett's test เมื่อ k เพิ่มค่าขึ้นเรื่อยๆ

$\bar{t}$ test มีอำนาจการทดสอบน้อยกว่า Bartholomew's $\bar{\chi}^2$ test ยกเว้น กรณีที่ $M_1=M_2=\ldots=M_k$

2. Tim Robertson and F.T wright (1985:109-122) เปรียบเทียบอำนาจการทดสอบรหว่าง one-side t test, the likelihood ratio test และ Dunnett's one-sided test เมื่อไม่ทราบค่าσ^2 มีจำนวน treatment ทั้งหมด เท่ากับ k+1 โดยที่มี Alternative เป็น $H_A : u_o \leq u_i$ i=1,2,...,k ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างอำนาจการทดสอบของสถิติตัวที่สนใจหารด้วยอำนาจการทดสอบที่มากที่สุดของตัวสถิติทดสอบอีก 2 ตัวที่เหลือเรียกค่านี้ว่า the minimum relative power (MRP) เป็นตัวพิจารณา ได้ผลสรุปดังนี้

กรณีที่ค่า $n_o = n_i$ (i=1,2,..,k)

เมื่อขนาดตัวอย่างเล็กและ k=2 D มีค่า MRP มาก (85-91%) เมื่อค่า k เพิ่มขึ้น MRP ลดลงเหลือเพียง 60-65 %

อย่างไรก็ตามสำหรับทุกค่า k MRP ของ Likelihood ratio test มีค่ามากกว่า D เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่