บทที่ 2

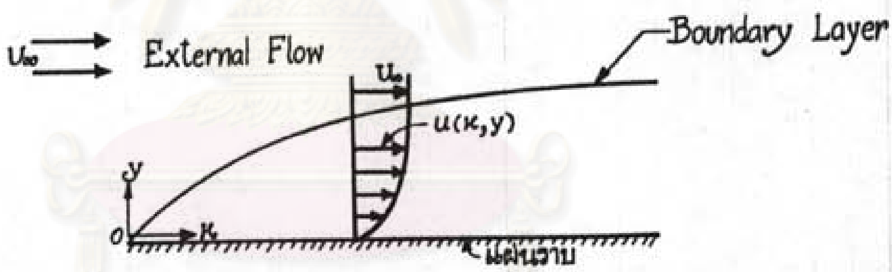
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

2.1 นิยามของ Boundary Layer

Prandtl เป็นผู้ให้คำนิยามสำหรับBoundary Layer ไว้ว่า "เมื่อของไหลที่มีความหนืดน้อยมากไหลผ่านผิวของวัตถุ ขอบเขตของการไหล (region of flow) ของของไหลบริเวณเหนือผิวของวัตถุที่มีการไหลผ่านของของไหลดังกล่าว จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ

1) ชั้นของของไหลที่มีลักษณะบางมาก บริเวณใกล้กับผิวของวัตถุ เรียกว่า "Boundary Layer" (ดังรูปที่ 2.1)

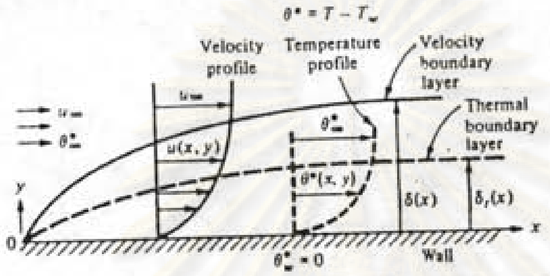
2) ชั้นของของไหล บริเวณส่วนนอกของ Boundary Layer เรียกว่า "Potential flow หรือ External flow" ของไหลในส่วนนี้จะมีความเร็ว(Free Steam Velocity)และอุณหภูมิคงที่ "



รูปที่ 2.1 การเกิดBoundary Layerเมื่อของไหลไหลผ่านวัตถุชนิดที่มีผิวราบ

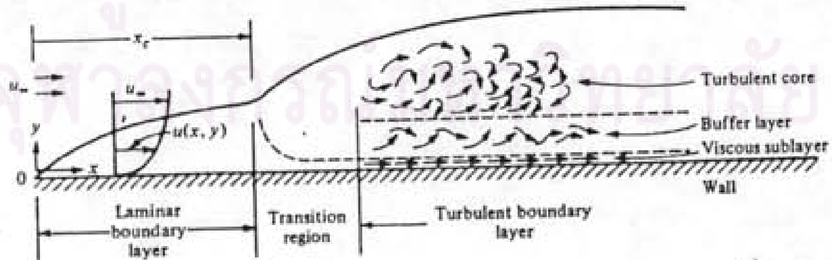
Boundary Layer เกิดจากอิทธิพลของแรงเสียดทานการไหล (shear force) ซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากคุณสมบัติความหนืด (viscosity) ของของไหล ซึ่งแรงเสียดทานการไหลนี้จะกระทำต่ออนุภาคของของไหลในบริเวณใกล้กับผิวของวัตถุ ทำให้อนุภาคของของไหลมีการเคลื่อนที่ช้าลง ปริมาณแรงเสียดทานการไหลที่กระทำต่ออนุภาคของของไหลจะไม่สม่ำเสมอในแต่ละหน้าตัดการไหล แต่จะขึ้นอยู่กับระยะห่างจากผิวของวัตถุ โดยจะมีค่ามากที่สุดที่ผิวของวัตถุ ดังนั้นจึงทำให้เกิดค่าเกรเดียนท์ของความเร็ว (Velocity Gradient) ขึ้นที่บริเวณใกล้กับผิวของวัตถุ ค่าเกรเดียนท์ของความเร็วนี้ เป็นตัวการที่ทำให้เกิดความแตกต่างของความเร็วของของไหลที่แต่ละหน้าตัดของการไหล เมื่อของไหลไหลผ่านผิวของวัตถุเป็นระยะทางมากขึ้น แรงเสียดทานการ

ไหลจะมีค่ามากขึ้นทำให้ค่าเกรเดียนท์ของความเร็วมากขึ้นตามไปด้วย ดังนั้นถ้าทำการพล็อตจุดในตำแหน่งที่ความเร็วของของไหลในแนวแกนyมีค่าเท่ากับ99%ของความเร็วในช่วง External Flowไปตามแนวแกนxแล้ว จะได้เส้นแบ่งขอบเขตของการไหลเนื่องจากความเร็วที่แตกต่างกัน เรียกว่า " <u>Velocity boundary-layer</u>" (ดังรูปที่ 2.2) ทำนองเดียวกันแรงเสียดทานการไหลก็มีอิทธิพลต่ออุณหภูมิของของไหลบริเวณใกล้กับผิวของวัตถุ ทำให้เกิดค่าเกรเดียนท์ของอุณหภูมิ (Temperature Gradient) และเกิดการแบ่งขอบเขตของการไหล เนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิของของไหลขึ้น เรียกว่า "<u>Thermal boundary-layer</u>"



รูปที่ 2.2 Velocity และ Thermal boundary-layer ที่เกิดขึ้นเนื่องจากของไหลไหลผ่านแผ่นราบ

สำหรับของไหลที่มีการไหลแบบราบเรียบ (smooth) ในระยะแรกของการไหลผ่านผิวของวัตถุ จะเกิด Boundary Layer ชนิด Laminar boundary-layer. (ดังรูปที่ 2.3) แต่เมื่อความหนาของ Laminar boundary-layer เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ในขณะที่การไหลมีระยะมากขึ้นจนกระทั่งถึงระยะวิกฤต จะเกิดการรบกวนการไหลภายใน Boundary Layer เรียกช่วงนี้ว่า "<u>Transition region</u>" หลังจากผ่านช่วงนี้ไปแล้วจะเกิดการเปลี่ยนแปลง Boundary Layer เป็น Turbulent boundary-layer ซึ่งอนุภาคของของไหลในช่วงนี้จะมีทิศทางการเคลื่อนที่ไม่แน่นอน อย่างไรก็ตามในบริเวณใกล้กับผิวของวัตถุมากๆมากนั้น อนุภาคของของไหลยังคงมีการเคลื่อนที่แบบราบเรียบ จึงเกิดการแบ่งชั้นของการไหลในส่วนนี้เรียกว่า "<u>Viscous sublayer</u>"



รูปที่ 2.3 การเกิดLaminarและTurbulent boundary-layers เนื่องจากของไหลไหลผ่านแผ่นราบที่มีความยาวมากๆ

ในการวิจัยนี้ จะทำการศึกษาการไหลของของไหลผ่านแผ่นราบในช่วงของ Laminar boundary-layer เท่านั้น ดังนั้นส่วนเกี่ยวข้องที่จะต้องทำการศึกษาได้แก่Velocity boundary -layer และ Thermal boundary-layer ที่เกิดขึ้นบนแผ่นราบ

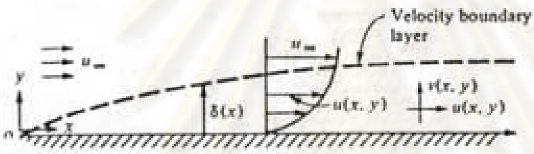
2.1.1 <u>Velocity Boundary-layer บนแผ่นราบ</u>

เพื่อให้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ง่ายขึ้นจึงตั้งสมมติฐานสำหรับของไหลที่ไหลผ่านแผ่นราบ ดังต่อไปนี้

1 ของไหลมีคุณสมบัติเป็นของไหลอัดตัวไม่ได้ (incompressible fluid) ลักษณะของการไหลไม่ขึ้นกับเวลา (steady flow)

2 ความดันของของไหลในแนวแกนyมีค่าคงที่ (dp/dy=0)

3 ของไหลมีคุณสมบัติทางกายภาพคงที่ตลอดช่วงการไหลผ่านแผ่นราบ



รูปที่ 2.4 โคออร์ดิเนตของความเร็วของของไหลภายในVelocity boundary-layerที่เกิดขึ้นบนแผ่นราบ

กำหนดให้ $u(x,y)$, $v(x,y)$ เป็นความเร็วของของไหลภายใน Boundary Layer ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ (ดังรูปที่ 2.4)

U_∞ เป็นความเร็วของการไหลในช่วง external flow

$\delta(x)$ เป็นความหนาของ velecity boundary-layer ที่ระยะ x ใดใด โดยทั่วไปในทางปฏิบัติจะถือว่า $\delta(x)$ คือตำแหน่งในแนวแกน y ที่ความเร็ว $u(x,y)$ มีค่าประมาณ 99% ของ U_∞ แต่ในการแก้ปัญหาทางทฤษฎี จะสมมติให้ $u(x,y) \simeq U_\infty$

สมการการเคลื่อนที่ของของไหล ซึ่งจะนำมาใช้หาความสัมพันธ์ในรูปสมการของความเร็วของของไหลภายในVelocity boundary-layer ได้แก่ สมการความต่อเนื่องของการไหล (Continuity equation) และ สมการโมเมนตัมของการเคลื่อนที่(Momentum equation of motion)

สมการ Continuity ; $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$ ....(2.1)

สมการโมเมนตัมในแกน x ; $\rho(u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y) = \rho\nu\partial^2 u/\partial y^2 - dp/dx$ ...(2.2)
จากรูปที่ 2.4 จะได้เงื่อนไขของสภาวะขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนี้คือ

ที่ระยะ $y=0$; $u(x,y)=0$, $v(x,y)=0$ ....(2.3a)
ที่ระยะ $y = \delta(x)$; $u(x,y) = U_\infty$ ....(2.3b)

สำหรับสมการโมเมนตัมในแกน y นั้นมิได้นำมาเกี่ยวข้องในการแก้ปัญหา เพราะว่าความดันในทิศทาง y ไม่มีการเปลี่ยนแปลง นอกจากนี้เทอม dp/dx ในสมการที่ (2.2) มีค่าเป็นศูนย์จากการแทนค่าเงื่อนไขจากสมการที่ (2.3b) ลงในสมการที่ (2.2)

เพื่อที่จะหาสมการการกระจายของความเร็วในvelocity boundary-layer จะใช้วิธีอินทิกรัล (Integral method) ซึ่งเป็นวิธีประมาณค่า (approximation) นำมาพัฒนาใช้เป็นครั้งแรกโดย von Kármán มีขั้นตอนการแก้ปัญหาดังต่อไปนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> ทำการอินทิเกรต (integrate) สมการที่(2.2) เทียบกับ y ในช่วง $0<y<\delta(x)$

$$\int_0^{\delta(x)} u(\partial u/\partial x)dy + \int_0^{\delta(x)} v(\partial u/\partial y)dy = \nu\{(\partial u/\partial y)\Big|_{y=\delta(x)} - (\partial u/\partial y)\Big|_{y=0}\}$$

แทนค่าสมการที่ (2.3b) ลงในสมการข้างบน เทอม $\partial u/\partial y\Big|_{y=\delta(x)} = 0$ จะได้ว่า

$$\int_0^{\delta(x)} u(\partial u/\partial x)dy + \int_0^{\delta(x)} v(\partial u/\partial y)dy = -\nu\partial u/\partial y\Big|_{y=0} \qquad .....(2.4)$$

โดยที่ $u \equiv u(x,y)$ และ $\delta = \delta(x)$
แทนค่าสมการที่ (2.1) ลงในสมการ (2.4) แล้วจัดรูปใหม่เพื่อขจัดตัวแปร v(x,y) ออกจากสมการจะได้ว่า

$$d\{\int_0^{\delta} u(U_\infty - u)dy\}/dx = \nu\partial u/\partial y\Big|_{y=0} \quad ; 0<y<\delta \qquad ....(2.5)$$

สมการที่ (2.5) มีชื่อเรียกว่า "<u>the momentum integral equation</u>"
<u>ขั้นตอนที่ 2</u> เลือกสมการการกระจายความเร็ว u(x,y) ในช่วง $0<y<\delta(x)$ ให้อยู่ในรูปของสมการโพลีโนเมียลกำลังสาม (cubic polynomial) ดังสมการ

$$u(x,y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 \qquad ....(2.6)$$

โดยที่ a_0, a_1, a_2, a_3 เป็นค่าสัมประสิทธิ์ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของ x การหาค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้จะต้องใช้เงื่อนไขจากสภาวะขอบเขต 4 ประการดังนี้คือ

ที่ระยะ $y=0$: $u = 0$ และ $\partial^2 u/\partial y^2 = 0$ ....(2.7a)

ที่ระยะ $y=\delta$: $u = U_\infty$ และ $\partial u/\partial y = 0$ ....(2.7b)

เทอมที่สองของสมการที่ (2.7a) ได้จากการแทนค่าสมการที่ (2.3a) ลงในสมการที่ (2.2) เมื่อแทนค่าเงื่อนไขต่างๆจากสมการที่ (2.7a) และ (2.7b) ลงในสมการที่(2.6) จะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ a_0, a_1, a_2, a_3 ในเทอมของ $\delta(x)$ เมื่อแทนค่าที่หาได้ลงในสมการที่ (2.6) จะได้สมการการกระจายของความเร็วดังนี้

$$u(x,y)/U_\infty = (3y/2\delta) - (y/\delta)^3/2 \qquad \text{....(2.8)}$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> แทนค่าสมการการกระจายความเร็วลงในสมการที่ (2.5)

$$U_\infty^2 \frac{d}{dx}\left\{\int_0^\delta \left[\frac{3y}{2\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\left[1 - \frac{3y}{2\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy\right\} = \nu U_\infty \frac{3}{2\delta} \qquad \text{....(2.9)}$$

ทำการอินทีเกรตแล้วจัดรูปใหม่

$$\delta d\delta = (140\nu/13U_\infty)dx \qquad \text{....(2.10)}$$

สมการที่ (2.10) เป็น Ordinary differential equation ซึ่งสามารถแก้สมการได้โดยอาศัยเงื่อนไขที่สภาวะขอบเขตคือ

ที่ระยะ $x=0$: $\delta(x) = 0$ ....(2.11)

อินทีเกรตสมการที่ (2.10) ในช่วงระหว่าง x=0 ถึง x และ y=0 ถึง $\delta(x)$ แล้วแทนค่าด้วยสมการที่ (2.11) จะได้คำตอบดังสมการข้างล่าง

$$\delta^2(x) = 280\nu x/13U_\infty \qquad \text{....(2.12)}$$

เมื่อทำการถอดรากกำลังสอง จะได้ค่าของความหนาของ velocity boundary-layer ดังนี้

$$\delta(x) = 4.64(\nu x/U_\infty)^{1/2} \qquad \text{....(2.13)}$$

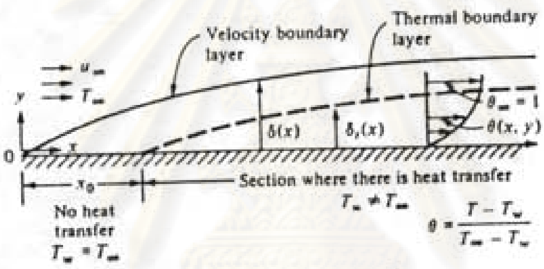
จัดรูปสมการที่ (2.13) ใหม่

$$\delta(x)/x = 4.64/Re_x^{1/2} \qquad ....(2.14)$$

เมื่อ Re_x คือ ค่าLocal Reynold number มีค่าเท่ากับ $U_\infty x/\nu$

2.1.2 Thermal Boundary-layer บนแผ่นราบ

พิจารณาของไหลที่มีอุณหภูมิ T_∞ ไหลผ่านแผ่นราบด้วยความเร็ว U_∞ ลักษณะการไหลเป็นแบบลามินาร์(Laminar flow) แผ่นราบถูกรักษาให้มีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ T_w สมมติว่าการถ่ายเทความร้อนระหว่างแผ่นราบกับของไหล เริ่มเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง $x=x_o$ ดังนั้นในช่วง $0<x<x_o$ อุณหภูมิของแผ่นราบจะมีค่าเป็น T_∞ และในช่วง $x>x_o$ อุณหภูมิของแผ่นราบจะเป็น T_w ด้วยเหตุนี้ Thermal Boundary-layer จะเริ่มเกิดที่ตำแหน่ง $x=x_o$ (ดังรูปที่ 2.5)



รูปที่ 2.5 โคออร์ดิเนตของอุณหภูมิของของไหลภายในThermal boundary-layerที่เกิดขึ้นบนแผ่นราบ

กำหนดให้ $T(x,y)$ เป็นค่าอุณหภูมิที่ตำแหน่ง x,y ใดใด ของของไหลภายใน Thermal-Boundary-layer

$\delta_t(x)$ เป็นความหนา (Thickness) ของ Thermal Boundary-layer

ในทางปฏิบัติถือว่า $\delta_t(x)$ คือระยะในแกน y ที่อุณหภูมิ $T(x,y)$ มีค่าประมาณ 99% ของ T_∞ แต่ในทางทฤษฎี จะสมมติให้ที่ระยะ $y = \delta_t(x)$ อุณหภูมิ $T(x,y)$ มีค่าเท่ากับ T_∞ โดยประมาณ

สมการพลังงาน(Energy equation) สำหรับของไหลชนิดอัดตัวไม่ได้ มีการไหลแบบไม่ขึ้นกับเวลา (steady flow) ของไหลมีคุณสมบัติทางกายภาพคงที่ตลอดการไหลและไม่คิดผลเนื่องจากความหนืดในของไหลที่มีต่ออุณหภูมิของของไหล จะเป็นดังสมการ

$$u\partial T/\partial x + v\partial T/\partial y = \alpha\partial^2 T/\partial y^2 \quad ; T = T(x,y) \quad ....(2.15)$$

α คือคุณสมบัติ Thermal Diffusivity มีค่าเท่ากับ $k/\rho C_p$

สมมติเทอมไร้มิติ $$\theta(x,y) = (T(x,y) - T_s)/(T_\infty - T_s) \quad ....(2.16)$$

สมการที่ (2.15) สามารถเขียนใหม่ในรูปของเทอมไร้มิติ $\theta \equiv \theta(x,y)$ ได้ดังนี้

$$u\partial\theta/\partial x + v\partial\theta/\partial y = \alpha\partial^2\theta/\partial y^2 \quad ; x>x_o \quad ....(2.17)$$

จากรูปที่ 2.5 จะได้สภาวะขอบเขต ที่จะนำมาใช้ในการแก้สมการดังนี้

ที่ระยะ $y=0$; $\theta(x,y) = 0$ ....(2.18a)

ที่ระยะ $y = \delta_t(x)$; $\theta(x,y) = 1$ ....(2.18b)

การวิเคราะห์หาการกระจายของอุณหภูมิ $T(x,y)$ จะยังคงใช้วิธีอินทิกรัล(Integral method) ซึ่งมีขั้นตอนการแก้ปัญหาดังต่อไปนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> ทำการอินทีเกรตสมการที่(2.15) เทียบกับตัวแปร y ตั้งแต่ y=o ถึง y=H เมื่อ H เป็นค่าคงที่มีค่ามากกว่า $\delta(x)$และ $\delta_t(x)$ จะได้สมการข้างล่างนี้

$$\int_0^H u(\partial\theta/\partial x)dy + \int_0^H v(\partial\theta/\partial y)dy = \alpha\left(\partial\theta/\partial y\Big|_{y=H} - \partial\theta/\partial y\Big|_{y=0}\right) \quad ....(2.19)$$

เนื่องจากเงื่อนไขในสมการที่ (2.18b) จะได้ว่า $\partial\theta/\partial y\Big|_{y=H} = 0$ ดังนั้นสมการที่ (2.19)จะเหลือเพียง

$$\int_0^H u(\partial\theta/\partial x)dy + \int_0^H v(\partial\theta/\partial y)dy = -\alpha\left(\partial\theta/\partial y\Big|_{y=0}\right) \quad ....(2.20)$$

แทนค่าสมการที่ (2.1) ลงในสมการที่ (2.20) แล้วจัดรูปสมการใหม่เพื่อขจัดตัวแปร $v(x,y)$ ออกจากสมการ จะได้สมการข้างล่างนี้

$$d\left[\int_0^{H=\delta_t(x)} u(1-\theta)dy\right]/dx = \alpha\partial\theta/\partial y\Big|_{y=0} \quad ....(2.21)$$

สมการที่ (2.21) มีชื่อเรียกว่า "<u>The Energy Integral equation</u>"

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> เลือกสมการการกระจายของอุณหภูมิ $T(x,y)$ ให้อยู่ในรูปของสมการโพลีโนเมียลกำลังสาม(Cubic Polynomial) ดังนี้

$$\theta(x,y) = b_o + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 \quad ....(2.22)$$

โดยที่ b_0, b_1, b_2, b_3 เป็นค่าสัมประสิทธิ์คงที่ การแก้สมการเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้จะต้องอาศัยเงื่อนไขจากสภาวะขอบเขต 4 ประการคือ

ที่ระยะ $y=0$; $\theta(x,y) = 0$ และ $\partial^2\theta/\partial y^2 = 0$ ....(2.23a)

ที่ระยะ $y = \delta_t(x)$; $\theta(x,y) = 1$ และ $\partial\theta/\partial y = 0$ ....(2.23b)

เงื่อนไขที่สองในสมการ(2.23a)ได้จากการแทนค่า $u(x,y)\big|_{y=0} = 0 = v(x,y)\big|_{y=0}$ ลงในสมการที่ (2.17) เมื่อทำการแทนค่าสมการที่(2.23a)และ(2.23b) ลงในสมการที่ (2.22)จะได้สมการการกระจายของอุณหภูมิดังนี้

$$\theta(x,y) = \frac{3y}{2\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \qquad ....(2.24)$$

แทนค่าสมการที่ (2.8) และสมการที่ (2.24) ลงในสมการที่ (2.21) จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{d}{dx}\left\{u_\infty\int_0^{\delta_t}\left[\frac{3y}{2\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\left[1 - \frac{3y}{2\delta_t} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3\right]dy\right\} = \frac{3\alpha}{2\delta_t} \qquad ....(2.25a)$$

หรือ

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_0^{\delta_t}\left[\left(\frac{3}{2\delta}\right)y - \left(\frac{9}{4\delta\delta_t}\right)y^2 + \left(\frac{3}{4\delta\delta_t^3}\right)y^4 - \left(\frac{1}{2\delta^3}\right)y^3 + \left(\frac{3}{4\delta^3\delta_t}\right)y^4 - \left(\frac{1}{4\delta^3\delta_t^3}\right)y^6\right]dy\right\} = \frac{3\alpha}{2\delta_t U_\infty} \qquad ....(2.25b)$$

ทำการอินทิเกรตสมการที่ (2.25b) ตลอดทั้งสมการจะได้

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3\delta_t^2}{4\delta} - \frac{3\delta_t^2}{4\delta} + \frac{3\,\delta_t^2}{20\delta} - \frac{1\,\delta_t^4}{8\delta^3} + \frac{3\delta_t^4}{20\delta} - \frac{1\,\delta_t^4}{28\delta^3}\right) = \frac{3\alpha}{2\delta_t U_\infty} \qquad ....(2.26)$$

กำหนดให้ $\Delta(x) = \delta_t(x)/\delta(x)$ แล้วแทนค่าลงในสมการที่ (2.26) จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left[\delta\left(\frac{3}{20}\Delta^2 - \frac{3}{280}\Delta^4\right)\right] = \frac{3\alpha}{2\delta\Delta U_\infty} \quad ; \; \Delta \equiv \Delta(x) \qquad ....(2.27)$$

เพื่อทำให้สมการที่ (2.27) มีรูปแบบที่ง่ายต่อการแก้สมการ จึงพิจารณาในกรณีที่ $\delta(x) > \delta_t(x)$ กรณีดังกล่าวจะเป็นจริง เมื่อของไหลมีค่า Prandtl number มากกว่าหนึ่ง (Pr>1) ดังนั้นเมื่อสมมติให้ของไหลมีค่า Pr>1 จะได้ว่า $\Delta(x)<1$ ทำให้เทอม $3\Delta^4/280$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอม $3\Delta^2/20$ จึงตัดทิ้งไปได้ สมการที่ (2.27) จึงเหลือเพียง

$$\delta\Delta\frac{d}{dx}\left(\delta\Delta^2\right) = \frac{10\alpha}{U_\infty} \qquad ....(2.28)$$

ทำการดิฟเฟอเรนชิเอตสมการที่ (2.28) เทียบกับตัวแปร x จะได้ว่า

$$2\delta^2\Delta^2(d\Delta/dx) + \Delta^3\delta(d\delta/dx) = 10\alpha/U_\infty$$

หรือ

$$(2\delta^2/3)\{d(\Delta^3)/dx\} + \delta\Delta^3 = 10\alpha/U_\infty \qquad ....(2.29)$$

จากสมการของ $\delta(x)$ (สมการที่ (2.12)) เมื่อนำมาดิฟเฟอเรนชิเอตเทียบกับ x จะได้

$$\delta d\delta/dx = 140\nu/13U_\infty \qquad ....(2.30)$$

แทนค่าสมการที่(2.30)ลงในสมการที่ (2.29) จะได้ว่า

$$x(d(\Delta^3)/dx) + 3\Delta^3/4 = 39\alpha/56\nu \qquad ....(2.31)$$

สมการที่ (2.31) เป็นสมการ ordinary differential กำลังหนึ่งของค่า Δ^3 จากการแก้สมการโดยหา particular solution และ complementary solution ได้ general solution ดังนี้

$$(\Delta(x))^3 = Cx^{-3/4} + 13\alpha/14\nu \qquad ....(2.32)$$

โดยที่ C คือค่าคงที่ ซึ่งสามารถหาค่าได้โดยอาศัยเงื่อนไขจากสภาวะขอบเขตต่อไปนี้

ที่ระยะ $x = x_o$; $\Delta(x) = 0$ ....(2.33)

แทนค่าสมการที่ (2.33) ลงในสมการที่ (2.32) จะได้ว่า

$$(\Delta(x))^3 = (13/14)Pr^{-1}[1 - (x_o/x)^{3/4}] \qquad ....(2.34)$$

เมื่อ Pr คือ ค่าPrandtl number เท่ากับ ν/α

ถ้าหากสมมติว่า การถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวของแผ่นราบกับของไหล เริ่มเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง x=0 แทนค่า $x=x_o$ ลงในสมการที่ (2.34) จะได้ว่า

$$\Delta(x) = \delta_t(x)/\delta(x) = (13/14)^{1/3}Pr^{-1/3} = 0.975Pr^{-1/3} \qquad ....(2.35)$$

เมื่อแทนค่า $\delta(x)$ จากสมการที่ (2.14)ลงในสมการที่ (2.35) จะได้สมการของ $\delta_t(x)$ ดังนี้

$$\delta_t(x) = 4.51x/(Re_x^{1/2}Pr^{1/3}) \qquad ....(2.36)$$

2.2 <u>การพาความร้อนแบบบังคับบนแผ่นราบ</u> (Force convective heat transfer over flat-plate)

การถ่ายเทความร้อนบริเวณผิวของแผ่นราบกับของไหลที่ไหลผ่าน จะเป็นการถ่ายเทความร้อนแบบการนำความร้อน (Conduction heat transfer) ซึ่งมีสมการดังต่อไปนี้

$$q(x) = -k\partial T(x,y)/\partial y\Big|_{y=0}$$

$$q(x) = k(T_\infty - T_s)\partial\theta/\partial y\Big|_{y=0} \qquad ....(2.37)$$

เมื่อ k คือค่าคุณสมบัติความนำความร้อน(thermal conductivity) ของของไหล มีหน่วยเป็น W/m-K (ระบบ SI)

$q(x)$ คืออัตราการถ่ายเทความร้อนต่อหน่วยพื้นที่ สามารถหาค่าได้จาก Newton's law of cooling ดังสมการข้างล่างนี้

$$q(x) = h(x)(T_\infty - T_s) \qquad ....(2.38)$$

เมื่อ $h(x)$ คือค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนแบบการพาความร้อน (Local convective heat transfer coefficient) มีหน่วย W/m^2-K

จากสมการที่ (2.37) และ (2.38) จะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$h(x) = k\partial\theta/\partial y\Big|_{y=0} \qquad ....(2.39)$$

เมื่อนำสมการที่ (2.24) มาทำการดิฟเฟอเรนชิเอตเทียบกับตัวแปร y แล้วแทนค่า y=0 ได้ว่า

$$\partial\theta/\partial y\Big|_{y=0} = 3/2\delta_t \qquad ....(2.40)$$

แทนค่าสมการที่ (2.40) ลงในสมการที่ (2.39)

$$h(x) = 3k/2\delta_t \qquad \ldots.(2.41)$$

แทนค่า δ_t จากสมการที่ (2.36) ลงในสมการที่ (2.41) แล้วจัดรูปใหม่ จะได้ว่า

$$Nu_x = h(x)x/k \qquad \ldots.(2.42)$$

หรือ

$$Nu_x = 0.331Pr^{1/3}Re^{1/2} \qquad \ldots.(2.43)$$

เมื่อ Nu_x คือค่า Local Nusselt number

สมการที่ (2.43) เป็นสมการสำหรับประมาณค่า(approximation solution)เท่านั้น ส่วนสมการที่ถูกต้อง(exact solution) จะได้จากสมการที่วิเคราะห์โดย Pohlhausen ซึ่งมีรูปสมการดังนี้

$$Nu_x = 0.332Pr^{1/3}Re^{1/2} \quad ; Re_x<5x10^5 \qquad \ldots.(2.44)$$

สมการที่ (2.43) ได้จากวิธีประมาณค่าโดยสมมติว่าของไหลมีค่า Pr>1 แต่อย่างไรก็ตามเมื่อเปรียบเทียบกับสมการที่ (2.44) ซึ่งเป็นสมการ exact แล้ว พบว่าสมการที่ (2.43) มีความถูกต้องสำหรับค่า Prandtl number ในช่วงตั้งแต่ 0.6 ถึง 10 ซึ่งครอบคลุมชนิดของของไหลทั้งก๊าซและของเหลว ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนแบบการพาความร้อนโดยเฉลี่ย ,h_m จะหาได้จาก

$$h_m = (\int_0^L h(x)dx)/L \qquad \ldots.(2.45)$$

แทนค่า h(x) จากสมการที่ (2.42) ลงในสมการที่ (2.45) จะได้ว่า

$$h_m = 2h(x)\Big|_{x=L} \qquad \ldots.(2.46)$$

หรือ

$$Nu_m = 0.662Pr^{1/3}Re^{1/2} \quad ;Re<5x10^5 \qquad \ldots.(2.47)$$

ทำนองเดียวกันสำหรับสมการที่ (2.44) จะได้ว่า

$$Nu_m = 0.664Pr^{1/3}Re^{1/2} \qquad \ldots.(2.48)$$

ในการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน ,h_m คุณสมบัติทางกายภาพของของไหลที่เกี่ยวข้องในการคำนวณ จะใช้ค่าคุณสมบัติที่อุณหภูมิเฉลี่ย (Arithmetic mean) ระหว่างอุณหภูมิของของไหลในช่วง external flow,T_∞ กับอุณหภูมิผิวของแผ่นราบ,T_s ซึ่งสามารถเปิดหาได้จากตารางในภาคผนวก ก

2.3 สมการที่จะนำไปใช้ในการคำนวณ

2.3.1 สมการการพาความร้อนเนื่องจากลมที่พัดผ่านแผงรับแสงอาทิตย์

$$Q_{CONV} = h_w A(T_s - T_m) \qquad \text{....(2.49)}$$

2.3.2 สมการ Nusselt number

$$Nu = h_w L/k_m \qquad \text{....(2.50)}$$

2.3.3 สมการ Reynold number

$$Re = \rho_m U_\infty L/\mu_m \qquad \text{....(2.51)}$$

2.3.4 สมการ Prandtl number

$$Pr = Cp_m \mu_m /k_m \qquad \text{....(2.52)}$$

2.3.5 สมการความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรไร้มิติ สำหรับการพาความร้อนแบบบังคับในทางทฤษฎี

$$Nu = 0.664Re^{1/2}Pr^{1/3} \qquad \text{....(2.53)}$$

2.3.6 สมการการคาดคะเนค่าh_w โดย McAdums(1954)

$$h_w = 5.7 + 3.8v \qquad \text{....(2.54)}$$

2.3.7 <u>สมการการคาดคะเนค่าh_w โดย Watmuff et.al(1977)</u>

$$h_w = 2.8 + 3.0v \qquad \ldots.(2.55)$$

2.3.8 <u>สมการการคาดคะเนค่าh_w โดยSparrowและTien</u>

$$h_w = (0.931/Pr^{2/3})(\rho_a Cp_a v/Re^{1/2}) \qquad \ldots.(2.56)$$