บทที่ 4

การโปรแกรมเชิงเส้นตรง

4.1 บทนำ

การศึกษาเรื่องการจ่ายโหลดอย่างประหยัดที่คำนึงถึงอัตราการปล่อยก๊าซพิษจากโรงไฟฟ้าอาศัยการโปรแกรมเชิงเส้นตรงมาช่วยหาผลลัพธ์หรือค่าเหมาะสมที่สุด (การจ่ายโหลดอย่างประหยัดที่สุด) ก่อนที่จะกล่าวถึงรายละเอียดของปัญหาการออปติไมซ์ของการจ่ายโหลดอย่างประหยัด จำเป็นต้องทราบรายละเอียดของเทคนิคการโปรแกรมเชิงเส้นตรง [13,14,15,16,17,18,19]

การโปรแกรมเชิงเส้นตรงเป็นเทคนิคในการแก้ไขปัญหาทางการจัดสรรปัจจัยและทรัพยากรที่มีลักษณะความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องเป็นเชิงเส้นตรงทั้งสิ้น (all linear function) โดยมีจุดหมายเพื่อแก้ปัญหาและตัดสินใจให้เกิดผลตามแนวทางการดำเนินงานที่ดีที่สุด (optimal)

4.2 แบบจำลองของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง(Linear Programming Model)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง มีโครงสร้าง ดังนี้

1. มีฟังก์ชันหรือสมการกำหนดเป้าหมาย (Objective function) คือ การแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรเป็นสมการหรือฟังก์ชันที่จะทำการออปติไมซ์(Optimization)เพื่อให้ได้เป้าหมายสูงสุดหรือต่ำสุด (maximize, minimize)

2. มีสมการเงื่อนไขบังคับ (constraints) ซึ่งแสดงความจำกัดของเงื่อนไขบังคับในการออปติไมซ์ซึ่งแบ่งออกได้เป็น2ชนิดคือ เงื่อนไขบังคับแบบอสมการ (Inequality constraint) และเงื่อนไขบังคับแบบสมการ (Equality constraint)

3. ความสัมพันธ์ของตัวแปรในสมการต่าง ๆ ของแบบจำลองต้องมีลักษณะเชิงเส้นตรง (Linear form)คือ ตัวแปรทุกตัวในสมการเป้าหมายและสมการหรืออสมการของขอบข่ายจะต้องมี

ความสัมพันธ์เชิงเส้นเป็นกำลังเดียวกัน (โดยมากเป็นกำลังหนึ่ง)

4. ตัวแปรทุกตัวต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ (All positive value)

จากรูปแบบของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงนี้จะเห็นได้ว่า ตัววัดผลของการออปติไมซ์ (Measure of effectiveness) จะได้จากสมการกำหนดเป้าหมายซึ่งเราจะต้องพยายาม หาค่าเป็นไปตามเป้าหมาย โดยเทคนิคที่มีอยู่ตัวแปรต่าง ๆ จะเป็นตัวแทนจำนวนปริมาณที่มีอยู่จำกัด โดยการกำหนดสมการหรืออสมการขอบข่ายของปัญหาผลการวิเคราะห์จะได้เป็นค่าของตัวแปรที่จะนำไปตัดสินใจเพื่อดำเนินการให้ได้ตามเป้าหมาย การกำหนดขอบข่ายของปัญหาด้วยสมการหรืออสมการนั้นเรากำหนดขึ้นตามความเป็นจริง ซึ่งจะมีโอกาสอยู่ในแบบของอสมการมากกว่า

แบบจำลองของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงเพื่อให้ได้ค่าของตัวแปร เช่น $x_1, x_2, ..., x_n$ ที่ทำให้ผลการดำเนินงานที่มีค่าสูงสุดตามสมการเป้าหมายดังนี้

สมการเป้าหมาย : $\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ (4.1)

สมการหรืออสมการเงื่อนไข : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_i \geq 0 \; ; \; i = 1,2,...,n$$

โดยมี $Z = F(x_i)$:เป็นสมการเป้าหมาย

x_i :เป็นค่าตัวแปรที่แทนค่าในสมการเป้าหมาย

a_{ij} , C_j :เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีค่าคงที่

b_j :เป็นปริมาณเงื่อนไขที่จะนำมาใช้ในแต่ละอสมการซึ่งมีค่าคงที่ในตัวอย่างต่อไปนี้

เรามีตัวแปรที่จะสามารถเลือกเปลี่ยนได้อยู่ n ตัว การเพิ่มค่าตัวแปรตัวหนึ่งตัวใดมีผลทำให้ตัวแปรอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกันลดค่าลงไปด้วยภายใต้ขอบข่ายที่กำหนดเป็นสมการหรืออสมการโดยเครื่องหมายทางคณิตศาสตร์คือ = (เท่ากับ), ≤ (น้อยกว่าหรือเท่ากับ) และ ≥ (มากกว่าหรือเท่ากับ)

4.3 ขั้นตอนการทำโปรแกรมเชิงเส้นตรง

เพื่อช่วยให้เข้าใจลักษณะปัญหาและวิธีการใช้เทคนิคทางการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ซึ่งเราพอสรุปขั้นตอนการดำเนินงานได้ดังนี้

1. การจัดตั้งแบบจำลองของปัญหา (Model Formulation)

ก่อนอื่นต้องศึกษาข้อมูลองค์ประกอบของปัญหาให้เข้าใจ โดยเลือกเฉพาะองค์ประกอบที่สำคัญและมีอิทธิพลมาก แล้วจัดตั้งตัวแปรแทนส่วนประกอบของปัญหานั้น ๆ ให้ถูกต้องจนสามารถจัดตั้งส่วนประกอบดังนี้

ก. สมการกำหนดเป้าหมาย

ข. สมการหรืออสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรภายใต้ขอบข่ายต่าง ๆที่มีอยู่

ค. ให้แน่ใจว่าสมการหรืออสมการต่าง ๆ ที่ตั้งขึ้นแล้วเป็นไปในลักษณะของสมการเชิงเส้นตรงและมีค่าของตัวแปรทุกตัวเป็นค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

2. การหาผลลัพธ์ของแบบจำลองของปัญหา (Model Solution)

เมื่อสามารถจัดปัญหาเข้าแบบจำลองของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงเรียบร้อยแล้วเราจะสามารถหาผลลัพธ์จากแบบจำลองด้วยวิธีการดังกล่าวต่าง ๆ ดังนี้

ก. ในกรณีที่เป็นปัญหาที่มีตัวแปรเป็น 2 ตัว เราอาจใช้

1. วิธีกำจัดขอบข่ายของคำตอบ (Direct Elimination Method)
2. วิธีอนุมานทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Deduction Method)
3. วิธีกราฟ (Graphical Method)

ข. ในกรณีที่เป็นปัญหามีตัวแปรมากกว่า 2 ตัวขึ้นไป เราอาจใช้

1. วิธีทางพีชคณิตทั่วไป (General Algebraic Method)
2. วิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex Method)

4.4 การหาผลลัพธ์ของแบบจำลองของปัญหา (Model Solution)

รูปแบบของปัญหาทางการโปรแกรมเชิงเส้นตรง จะสามารถเขียนให้รัดกุมได้ดังนี้

สมการเป้าหมาย : Max. (Min) $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (4.2)

อสมการเงื่อนไข $a_{ij}x_j \quad (\leq, =, \geq)\ b_1$

$a_{mj}x_j \quad (\leq, =, \geq)\ b_m$

และ $x_j \geq 0$

โดยมากระบบของปัญหาทางการโปรแกรมเชิงเส้น จะมีตัวแปรซึ่งเป็นองค์ประกอบของระบบจำนวนมากซึ่งมีความซับซ้อนมาก การหาผลลัพธ์จึงมักจะใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ

อย่างไรก็ตาม ปัญหาทางการโปรแกรมเชิงเส้นตรงส่วนมากจะเป็นปัญหาที่ซับซ้อนมีตัวแปรมากกว่า 2ตัว จึงจะขอกล่าวเพียงแต่วิธีการหาผลลัพธ์จากรูปแบบที่มีตัวแปรมากกว่า 2 ตัวขึ้นไป เพื่อที่จะนำเอาประโยชน์ของการใช้โปรแกรมเชิงเส้นตรงไปประยุกต์เข้ากับปัญหาการออปติไมซ์ จริงๆ โดยอาศัยหลักการหาผลลัพธ์ของตัวแปรในอสมการขอบข่ายซึ่งถ้ามีคำตอบเดียว(Unique Solution) เราก็สามารถนำมาแทนค่าหาผลลัพธ์จากสมการเป้าหมายได้ตามต้องการ

กรณีที่ปัญหาเป็นแบบมีตัวแปรมากกว่า2 ตัว เรามีวิธีหาผลลัพธ์ของแบบจำลองปัญหาได้ 2 วิธี คือ

1). วิธีทางพีชคณิตทั่วไป

2). วิธีซิมเพล็กซ์

รายละเอียดของทั้ง 2 วิธีจะได้กล่าวถัดไป

4.5 วิธีทางพีชคณิตทั่ว ๆ ไป (General Algebraic Method) [14,17]

รูปแบบทางการโปรแกรมเชิงเส้นตรงดังกล่าวมาแล้วจะเป็นดังนี้

$$\text{Max.}Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \tag{4.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} X_j \ (\leq, =, \geq)\ b_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} X_j \ (\leq, =, \geq)\ b_m$$

$$X_j \geq 0$$

เมื่อเขียนเป็นรูป เมทริกซ์ จะเป็น

$$\text{Max.}Z = CX \tag{4.4}$$

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

วิธีทางพีชคณิตนี้จะได้นำเอาส่วนที่แสดงขอบข่ายมาหาค่าของ X_i โดยการคูณสมการขอบข่าย ด้วย Inverse ของ A คือ A^{-1} จะได้ผลดังนี้

$$A^{-1} AX \leq A^{-1}b \tag{4.5}$$

$$I X \leq A^{-1}b$$

$$X \leq A^{-1}b$$

ค่าของ X_i ซึ่งได้จากวิธีทางพีชคณิตตามหลักของเมทริกซ์ สามารถหามาได้จากสมการดังนี้

$$[A \mid I \mid b] \tag{4.6}$$

$$[A^{-1}A \mid A^{-1}I \mid A^{-1}b]$$

$$[I \mid A^{-1} \mid A^{-1}b]$$

I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) และ A^{-1} คือ เมทริกซ์ผกผัน(Inverse Matrix) ของ A เพื่อใช้วิธีการดังกล่าวมาแล้ว เราจะต้องหาเมทริกซ์ผกผันโดยวิธี Gauss Jordan Elimination Method [16] โดยเปลี่ยน เมทริกซ์ A ให้เป็น I จะทำให้เกิด $A^{-1}B$ เป็นผลลัพธ์ในตัว และผลลัพธ์ของปัญหาจะมีเท่ากับ $[X_1] = [A^{-1}b]$

เนื่องจากวิธีทางพีชคณิตนี้เป็นการหาค่าX_iจากสมการแสดงขอบข่าย โดยที่ไม่ได้พิจารณาสมการเป้าหมายผลลัพธ์ที่ได้จะใช้เป็นค่าแทนสมการเป้าหมาย ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องจริง ๆ ก็ต่อเมื่อค่าขอบข่ายเป็นลักษณะสมการแทนที่จะเป็นอสมการซึ่งจะมีผลลัพธ์เพียงอย่างเดียว ซึ่งวิธีนี้มีโอกาสที่จะให้ค่าผลลัพธ์ผิดไปจากที่ควรจะเป็น ดังนั้นวิธีการนี้จึงเป็นวิธีที่ไม่เหมาะสมทั้งนี้เพราะว่าผลลัพธ์ที่ได้ได้มาโดยการไม่นำสมการเป้าหมายมาคิด อย่างไรก็ตามความเข้าใจวิธีการนี้จะช่วยให้เข้าใจวิธีการซิมเพล็กซ์(Simplex Method) ได้ดียิ่งขึ้น

4.6 วิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex Method)

จากวิธีทางพีชคณิตที่กล่าวมาแล้วเราไม่ได้นำสมการเป้าหมายมาคิดด้วย ผลลัพธ์จึงถูกต้องตามสมการขอบข่ายแต่ไม่ถูกต้องที่สุด นอกจากนี้ถ้าหากปัญหามีขนาดกว้างขึ้นคือมีตัวแปรมากขึ้นจะเป็นการยุ่งยากในการปรับค่าตัวแปรตัวแล้วตัวเล่า การแก้ปัญหาจึงไม่สะดวกและรวดเร็วตามต้องการ การพัฒนาวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex Method) [15,16,17,18] เป็นวิธีทางพีชคณิตที่อาศัยทฤษฎีของเมทริกซ์เข้าร่วมจัดรูปแบบปัญหาให้มีระบบยิ่งขึ้น ช่วยให้สังเกตความเปลี่ยนแปลงของตัวแปรได้ง่ายและสามารถเข้าใจแนวทางที่ตัวแปรแต่ละตัวจะเปลี่ยนไปอย่างมีเหตุมีผล วิธีดังกล่าวจะเริ่มด้วย การเปลี่ยนตัวแปรต่าง ๆ ให้มีผลต่อสมการเป้าหมายโดยมีผลแนวโน้มสู่เป้าหมายในทางที่เร็วที่สุด การจัดรูปสมการเข้าเป็นตารางแล้วดำเนินการตามขั้นตอนที่ถูกต้องและทำให้ได้ผลลัพธ์ตามเป้าหมาย ผลลัพธ์ใด ๆ อันเกิดจากาค่าตัวแปรที่ใช้ได้ (Satisfy) ในสมการหรืออสมการขอบข่ายย่อมถือเป็น ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ ผลลัพธ์ใกล้เคียงเป้าหมายที่สุดถือเป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุดและผลลัพธ์ที่ดีที่สุดซึ่งเกิดผลตามเป้าหมายเดียวกันอาจมีได้หลาย ๆ อัน

ก่อนที่จะกล่าวถึงขั้นตอนการดำเนินงานตามวิธีซิมเพล็กซ์ เราต้องศึกษาส่วนที่เกี่ยวพันกับปัญหาในลักษณะดังต่อไปนี้เสียก่อน

1. ในการทำออปติไมซ์เซชันหาค่าคำตอบสูงสุด (Maximization) ของสมการเป้าหมายมีความสัมพันธ์กับค่าต่ำสุด (Minimzation) ดังนี้

$$\text{Max.}Z = \sum_j C_j X_j \qquad (4.7)$$

มีผลเท่ากับ $$\text{Min.}W = -\text{Max.}Z = \sum_j -C_j X_j$$

2. การคูณเครื่องหมายลบเข้าไปในอสมการ จะมีผลทำให้เครื่องหมายอสมการเปลี่ยนจากค่ามากกว่าเป็นน้อยกว่า หรือในทางตรงข้าม เช่น

$$a_1X_1 + a_2X_2 \geq b \quad (4.8)$$

มีผลเท่ากับ $-a_1X_1 - a_2X_2 \leq b$

3. สมการใด ๆ อาจแทนได้ด้วยอสมการในทิศทางตรงกันข้ามสองสมการ เช่น

$$a_1X_1 + a_2X_2 = b \quad (4.9)$$

สามารถแทนได้ด้วย $a_1X_1 + a_2X_2 \leq b$ และ $a_1X_1 + a_2X_2 \geq b$

หรือ $a_1X_1 + a_2X_2 \leq b$ และ $-a_1X_1 - a_2X_2 \leq -b$

4. ถ้าทางซ้ายมือของอสมการเป็นค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) จะสามารถเปลี่ยนเป็นอสมการสองสมการ เช่น

$$|a_1X_1 + a_2X_2| \leq b \quad (4.10)$$

มีผลเท่ากับ $a_1X_1 + a_2X_2 \geq -b$ และ $-a_1X_1 - a_2X_2 \leq -b$

ในการดำเนินการตามขั้นตอนจะเปลี่ยนระบบอสมการของขอบข่ายให้เป็นสมการของขอบข่ายโดยการเพิ่มตัวแปรสมมติขึ้น ซึ่งจะเป็นรูปแบบสมการขยาย (Augmented Form) ทำได้ดังนี้

$$Max.Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ,...., + C_nX_n \quad (4.11)$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ,...., + a_{1n}X_n \leq b_1 \quad (4.11.1)$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ,...., + a_{2n}X_n \geq b_2 \quad (4.11.2)$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ,...., + a_{mn}X_n = b_m \quad (4.11.3)$$

รูปแบบสมการขยายจะเป็น

$$Max.Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ,...., + C_nX_n$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ,...., + a_{1n}X_n + X_{n+1} = b_1 \quad (4.11.4)$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ,...., + a_{2n}X_n - X_{n+2} + X_{n+3} = b_2 \quad (4.11.5)$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ,...., + a_{mn}X_n + X_{n+k} = b_m \quad (4.11.6)$$

ตัวแปรที่เพิ่มขึ้นมาในสมการขยายพอแยกได้ดังนี้

1. กรณีที่อสมการขอบข่ายเป็นอยู่ในรูปน้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\leq$) เราสามารถเพิ่มค่า

ตัวแปรซึ่งคิดเป็นค่าของส่วนของตัวแปรที่เหลือลงไปทางซ้ายมือของอสมการ แล้วเปลี่ยนเครื่องหมายอสมการให้เป็นสมการของขอบข่ายนั้น ๆ เช่นค่า X_{n+1} จากอสมการ(4.11.4) ตัวแปรที่เพิ่มขึ้นนี้เรียกว่า ตัวแปรเพิ่ม (Slack Variable)

2. กรณีที่อสมการขอบข่ายเป็นอยู่ในรูปมากกว่า หรือเท่ากับ ($\geq$)เราลดค่าตัวแปรซึ่งคิดเป็นค่าของตัวแปรส่วนเกินจากทางซ้ายมือของอสมการ และเปลี่ยนอสมการเป็นสมการของขอบข่ายนั้นๆเช่นค่า-X_{n+2} จากอสมการ (4.11.5) เป็นส่วนแสดงว่าค่าทางซ้ายมือมากกว่าค่าทางขวามืออยู่ X_{n+2} ซึ่ง X_{n+2} เป็น ตัวแปรเพิ่ม (Slack variable) เช่นกัน แต่เครื่องหมายเป็นลบ ซึ่งจะเรียกตัวแปรเพิ่มที่มีเครื่องหมายลบว่า Surplus Variable จากหลักการทางเมทริกซ์นั้นตัวแปรที่ให้ผลลัพธ์แต่ละครั้งเมื่อคำนวณหา จะมีสัมประสิทธิ์เท่ากับบวกหนึ่ง (+1) ซึ่งเป็นเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ตัวแปรที่เป็น ตัวแปรของผลลัพธ์(Basic Variable) มีลักษณะเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ และตามข้อกำหนดของวิธีซิมเพล็กซ์ ได้กำหนดว่าผลลัพธ์เบื้องต้นที่เป็นไปได้ (Initial Feasible Solution) จะมีค่าตัวแปรที่เป็นตัวแปรของผลลัพธ์(Basic Variable) มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เท่านั้นสำหรับวิธีซิมเพล็กซ์ จึงได้กำหนดให้ตัวแปรเพิ่ม(Slack Variable) เท่านั้นที่เป็นตัวแปรของผลลัพธ์ในผลลัพธ์อันดับแรกของปัญหา แต่เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ Surplus Variable เป็นลบหนึ่ง (-1) ด้วยเหตุนี้จึงต้องเพิ่มตัวแปรอีกตัวหนึ่งขึ้น คือ X_{n+3} เพื่อให้หาผลลัพธ์เบื้องต้นของปัญหาได้ แต่ค่า X_{n+3} นั้นตั้งขึ้นมาเพียงเพื่อช่วยให้หาผลลัพธ์เบื้องต้นได้เท่านั้น ในการหาผลลัพธ์ขั้นต่อไปจึงจำเป็นต้องกำจัดตัวแปร X_{n+3} นี้ออกไปโดยการปรับค่าX_{n+3}จนกว่าจะมีค่าเป็นศูนย์ไปในที่สุด ถ้ากำจัดไม่หมดก็แสดงว่าปัญหานี้ผลลัพธ์คำตอบไม่ได้ค่า X_{n+3} นี้เราเรียกว่า ตัวแปรเพิ่ม(Artificial Variable)

3. กรณีที่เป็นสมการขอบข่ายอยู่แล้ว (=) เราเพียงแต่เพิ่มค่าตัวแปรช่วย เช่น X_{m+k} ในอสมการ (4.11.6) เป็นตัวแปรเพิ่ม(Artificial Variable)ดังกล่าวมาแล้วในท้ายกรณีที่ 2 โดยสรุปจะเขียนตัวแปรเพิ่มขึ้นมาดังนี้

$\leq$	+S
$\geq$	-S+R
=	+R

S = Slack Variable (4.12)

R = Artificial Variable

I 16892665

4.6.1 ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล็กซ์

ดังได้กล่าวมาแล้วปัญหาของการทำออปติไมซ์ มีเงื่อนไขของสมการขอบข่ายในรูปของสมการอยู่ 3 ลักษณะ คือ

1. รูปของอสมการที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\leq$) ซึ่งจะทำให้เกิดสมการขอบข่ายได้โดยการเพิ่มค่าตัวแปรที่เรียกว่า ตัวแปรเพิ่ม(Slack Variable)

2. รูปของอสมการซึ่งอยู่ในลักษณะของสมการอยู่แล้ว (=)

3. รูปแบบอสมการที่อยู่ในลักษณะมากกว่าหรือเท่ากับ ($\geq$)

ซึ่งในลักษณะรูปอสมการที่ 2 และ 3 นี้จำเป็นจะต้องเพิ่มตัวที่มีความหมาย ในเชิงตัวเลขที่เรียกว่า ตัวแปรเพิ่ม(Artificial Variable) เข้าไปประกอบเป็นส่วนของเมทริกซ์เอกลักษณ์ ซึ่งการหาผลลัพธ์ของรูปอสมการที่ 2 และ 3 นี้ ย่อมแตกต่างจากการหาค่าผลลัพธ์ของรูปอสมการที่ 1 ซึ่งมีวิธีการหาผลลัพธ์แบบซิมเพล็กซ์ ธรรมดา ซึ่งมีขั้นตอนในการหาผลลัพธ์ไม่ยุ่งยาก ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล็กซ์แบบธรรมดาก่อน แล้วจึงค่อยกล่าวถึงวิธีการในการหาผลลัพธ์ในปัญหาที่มีเงื่อนไขของสมการขอบข่ายในรูปอสมการที่ 2 และ 3 ต่อไป

ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยวิธี ซิมเพล็กซ์ มีดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1

จากรูปแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรง จัดรูปแบบสมการขยายเข้าสู่ตารางดังต่อไปนี้

$$\text{Max. } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 \tag{4.13}$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \leq b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \leq b_2$$

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 \leq b_3$$

สมการขยายจะเป็น

$$\begin{aligned}
Z - C_1X_1 - C_2X_2 - C_3X_3 \qquad\qquad\qquad &= 0 \qquad (4.14)\\
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + X_4 \qquad\quad &= b_1\\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \quad + X_5 \quad &= b_2\\
a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 \qquad\quad + X_6 &= b_3
\end{aligned}$$

ตารางเพื่อหาผลลัพธ์เบื้องต้น (Initial Feasible Solution) จะเป็นดังนี้

(1)	(2)	(3)			(4)			(5)
	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
Z	1	$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$	0	0	0	0 (6)
X_4	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	0	b_1
X_5	0	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	0	b_2 (7)
X_6	0	a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	1	b_3

(4.15)

โดยกำหนดให้

(1) : ตัวแปรของผลลัพธ์ (Basic Variable)

(2) : ค่าเป้าหมาย (Objective Value)

(3) : ตัวแปรเปลี่ยน (Decision Variable)

(4) : ตัวแปรเพิ่ม (Slack or Artificial Variable)

(5) : ผลลัพธ์ (Solution)

(6) : สมการเป้าหมาย

(7) : สมการเงื่อนไข

ภายในตารางจะเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรโดยมีหลักเกณฑ์ของวิธีซิมเพล็กซ์ กำหนดไว้ว่าตัวแปรเพิ่มนั้นต้องเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ สำหรับผลลัพธ์เบื้องต้น

ขั้นตอนที่ 2

พิจารณาจากค่าต่างๆบนตารางในขั้นตอนที่ 1 ซึ่งถือว่าเป็นผลลัพธ์เบื้องต้นได้ดังนี้

(1). เริ่มค่าตัวแปรเปลี่ยน (Decision Variable) หรือ Nonbasic Variable เป็นศูนย์หมดคือ X_1, X_2, $X_3 = 0$ อันนี้เป็นจุดเริ่มต้นที่มั่นใจได้ว่าตัวแปรทุกตัวต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

(2). ค่าของสมการเป้าหมายซึ่งได้จาก $Z - C_1X_1 - C_2X_2 - C_3X_3 = 0$ จะมีค่า $Z = 0$ ด้วย

(3). ค่าตัวแปรเพิ่มต่าง ๆ อ่านจากผลลัพธ์ค่าตัวแปรของผลลัพธ์ (Basic Variable) ได้ดังนี้

$$X_4 = b_1 \tag{4.16}$$

$$X_5 = b_2$$

$$X_6 = b_3$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u>

พิจารณาทดสอบถึงผลลัพธ์ที่ดีที่สุดซึ่งเรียกว่าการทดสอบหลักเกณฑ์ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด (Optimality Criterion) จะเห็นได้ว่าในบางครั้งแม้แต่ผลลัพธ์เบื้องต้นก็อาจเป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุดอยู่แล้ว แต่โดยมากเรามักจะหาผลลัพธ์ที่ดีกว่าได้โดยใช้หลักเกณฑ์ทดสอบผลลัพธ์ที่ดีที่สุด

เราจะรู้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จะดีที่สุดแล้วหรือยัง โดยการวิเคราะห์สมการเป้าหมาย $Z - C_1X_1 - C_2X_2 - C_3X_3 = 0$ โดยการเริ่มแรกด้วย $X_1, X_2, X_3 = 0$ มีผลทำให้ $Z=0$จะเห็นได้ว่าถ้าเราเพิ่มค่าของตัวแปร X_1, X_2หรือX_3 ตัวหนึ่งตัวใดจะมีผลทำให้ค่า Z สูงขึ้นเช่น $Z - C_1X_1 - C_2X_2 = C_3X_3$ นั่นคือถ้าเพิ่มค่า X_3 เพียงค่าเดียวจะมีผล ทำให้ $Z = C_3X_3$ คือมีค่าสูงขึ้นเท่ากับ C_3X_3 จากข้อสังเกตนี้เองจะเห็นได้ว่า ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ในตารางที่เป็นสมการเป้าหมายยังมีค่าเป็นลบอยู่ในตาราง การเพิ่มค่าตัวแปรของสัมประสิทธิ์นั้น ๆ จะมีผลทำให้ค่าของสมการเป้าหมายเพิ่มขึ้น หรืออีกนัยหนึ่ง ถ้าค่า C_1, C_2,และ C_3 ดังกล่าวยังติดเครื่องหมายลบอยู่การดำเนินการเพื่อหาผลลัพธ์ที่ดีขึ้นยังต้องทำกันต่อไป

<u>หมายเหตุ</u> กรณีดังกล่าวข้างต้นใช้กับปัญหาเพื่อให้ได้ผลลัพธ์สูงสุด ถ้าจะให้ได้ผลลัพธ์ต่ำสุดก็ใช้เครื่องหมายในทางตรงข้ามกับข้างต้นเป็นหลักเกณฑ์ของผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ซึ่งจะเป็นวิธีที่ใช้แก้ปัญหา

<u>ขั้นตอนที่ 4</u>

(1) พิจารณาหาตัวแปรที่จะเพิ่มค่าซึ่งมีผลทำให้ค่าของสมการเป้าหมายเพิ่มขึ้น การเพิ่มค่าตัวแปร พิจารณาจากค่าตัวแปรที่ให้ค่าของสมการเป้าหมายเพิ่มได้มากที่สุด สังเกตได้จากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเปลี่ยนมีค่าลบสูงสุด ซึ่งเมื่อย้ายข้างมาด้านขวาของสมการเป้าหมายในตารางจะเป็นสัมประสิทธิ์บวกสูงสุดถือเป็นตัวที่จะเพิ่มค่า จากตาราง ถ้า C_2 มีค่าลบสูงสุด X_2 จะเป็นตัวที่เราเพิ่มค่าให้ก่อน ส่วนจะเพิ่มค่าเป็นเท่าไรจะได้ติดตามกันต่อไป

(2) พิจารณาตัวแปรเพื่อลดค่าจากตัวแปรเพิ่ม(Slack or Artificial Variable) ซึ่งมีค่า $X_4 = b_1$, $X_5 = b_2$, $X_6 = b_3$

การจะลดค่าตัวไหนก่อนจะใช้หลักเกณฑ์ของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้(Feasibility Criterion) เข้ามาช่วย

การพิจารณาหาตัวลดค่าเพื่อเพิ่มค่า X_2 นั้นจะต้องลดค่าตัวแปรเพิ่มให้มากที่สุดภายใต้เงื่อนไขขอบข่ายที่ว่า ค่าตัวแปรเพิ่มที่ลดนั้นต้องไม่เป็นค่าลบ จากสมการขอบข่ายในตารางจะเห็นได้ว่าจะลดค่า X_4, X_5 หรือ X_6 ได้ทั้งนั้น ส่วนจะให้ลดตัวไหนนั้นต้องเลือกใช้ส่วนที่อยู่ภายใต้เงื่อนไขขอบข่ายทั้งสามอันได้หมดโดยการพิจารณาจากผลหารที่เกิดจากผลลัพธ์ค่าตัวแปรในตารางและแถวตั้งของค่าตัวแปรเปลี่ยนที่จะเพิ่มค่า X_2 จะได้ผลหารตามแนวนอนตัวต่อตัวดังนี้ b_1/a_{12},b_2/a_{22},b_3/a_{32} เลือกค่าผลหารน้อยที่สุดแสดงเป็นตัวลดค่าของตัวแปรเพิ่มตามแนวนอนคือ X_4, X_5 หรือ X_6 เช่น ถ้า b_2/a_{32} น้อยที่สุด ตัวแปรที่จะลดค่าคือ X_5 สาเหตุที่เราถือค่าผลหารน้อยที่สุดเป็นแนวช่วยตัดสินตัวแปรลดค่า ก็เพราะว่าค่าตัวแปรที่เพิ่มค่านั้นต้องอยู่ในขอบข่ายทุก ๆ สมการขอบข่าย ถ้าเราถือเอาผลหารมากมาเป็นเกณฑ์ จะทำให้ขาดคุณสมบัติในสมการขอบข่ายที่มีตัวผลหารน้อยกว่าและทำให้ผิดหลักเกณฑ์ของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้

ตัวแปรเข้า (4.16)

		Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
	Z	1	C	C	C	0	0	0	0
	X_4	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	0	b_1
ตัวแปรออก	X_5	0	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	0	b_2
	X_6	0	a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	1	b_3

เราเรียกตัวที่เพิ่มค่าของตัวแปรในตารางว่า ตัวแปรเข้า (X_2) และตัวแปรที่ลดค่าว่าตัวแปรออก (X_5) พิจารณาจากแนวนอนของตัวแปรออกจะได้สมการ

$$a_{22}X_2 + X_5 = b_2 \text{ โดย } X_1, X_3 = 0 \qquad (4.17)$$

เมื่อลดค่า $X_5 = 0$ จะได้ $X_2 = b_2/a_{22}$

เราแทนค่า X_2 เป็นตัวแปรเข้ามีค่า b_2/a_{22} ในตารางโดยวิธีหารแนวนอนของตัวแปรลดค่าหรือตัวแปรออกด้วยa_{22} สัมประสิทธิ์ในช่องที่เกิดจากการตัดกันของแถวยืนของตัวแปรเข้าและแถวนอนของตัวแปรออกจะมีค่าเป็น 1 และเราเรียกจุดนี้ว่า จุดหมุน (Pivot Point)

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> จากจุดหมุน

เราใช้วิธีทางพีชคณิตดังกล่าวมาแล้วทำสัมประสิทธิ์อื่น ๆ ในแถวยืนให้เป็นศูนย์ ผลที่ได้จะทำให้ค่า Z มีผลลัพธ์สูงขึ้นดังนี้

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
Z	1	$-C_1$	0	$-C_3$	0	C_5	0	$C_2 \quad b_2$
X_4	0	a_{11}	0	a_{13}	1	a_{15}	0	b_1
X_2	0	a_{21}	1	a_{23}	0	a_{25}	0	b_2
X_6	0	a_{31}	0	a_{33}	0	a_{35}	1	b_3

(4.18)

เมื่อได้ตารางแสดงผลการดำเนินการตามขั้นตอนที่ 5 แล้วให้กลับไปเริ่มในขั้นตอนที่ 3 ต่อไปจนกว่าจะได้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด (Optimal Solution) การดำเนินตามขั้นตอนที่กล่าวมาแล้วเราใช้กรณีที่จะเพิ่มค่าสมการเป้าหมายให้สูงขึ้นแต่ถ้าเกิดมีปัญหาให้หาค่าต่ำสุด การดำเนินงานอาจทำได้อย่างเดียวกันเพียงแต่พิจารณาในมุมกลับกันคือพยายามหาตัวแปรเปลี่ยนที่ทำให้ค่าสมการเป้าหมายลดลงเร็วที่สุด การพิจารณาว่าต่ำสุดแล้วหรือยังก็อาศัยสัมประสิทธิ์ในตารางว่ามีค่าเป็นลบหมดแล้วหรือยัง ถ้ายังคงมีค่าบวกอยู่เราก็ดำเนินการจนกว่าจะได้ค่าต่ำสุด หรือในอีกทางหนึ่งเราอาจทำได้ด้วยหลักที่ว่า

$$-\text{Max.}(-Z) = \text{Min.}Z \qquad (4.19)$$

แล้วดำเนินการ Max. สมการของ -Z ดังนี้

$$\text{Max.}(-Z) = -\ C_jX_j$$

จากวิธีซิมเพล็กซ์ที่กล่าวมาแล้วเป็นปัญหาที่มีเงื่อนไขของสมการขอบข่ายในรูปของอสมการซึ่งมีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับ ($\leq$) เท่านั้น แต่ถ้ามีกรณีที่อสมการอยู่ในลักษณะเท่ากับ (=) หรือลักษณะมากกว่าหรือเท่ากับ ($\geq$) ถ้าเราใช้วิธีซิมเพล็กซ์แบบธรรมดาเหมือนอย่างที่กล่าวมาแล้วจะไม่

สามารถหาผลลัพธ์ออกมาได้ จึงจำเป็นต้องอาศัยวิธีการที่พัฒนามาใช้หาในปัจจุบัน วิธีการที่นิยมใช้กันแพร่หลายในการหาผลลัพธ์คือวิธีของ Big-M

4.6.2 ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยวิธี Big-M [15,16]

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่า ในกรณีของอสมการขอบข่ายที่อยู่ในลักษณะเท่ากับ (=) หรือลักษณะมากกว่าหรือเท่ากับ (≥) จะต้องเพิ่มค่าตัวแปรที่เรียกว่า Artificial Variable ซึ่งโดยความหมายแล้วจะเป็นตัวแปรที่ไม่มีความหมายทางตัวเลข ดังนั้นค่าของตัวแปรชนิดนี้จะเป็นอื่นไปไม่ได้นอกจากศูนย์ ค่า M คือค่าสมมุติที่มีค่าสูงมากใช้ประกอบเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรชนิด Artificial Variable และบรรจุในสมการเป้าหมายจากสมการดังต่อไปนี้ M จะเป็นสัมประสิทธิ์ในสมการเป้าหมายที่ขยายรูปแบบแล้ว

สมการเป้าหมาย $\text{Max.}Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$ (4.20)

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \leq b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \geq b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3$$

รูปแบบสมการขยาย $Z - C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + MR_1 + MR_2 = 0$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + S_2 = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 - S_1 + R_1 = b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + R_2 = b_3$$

ในสมการเป้าหมาย เมื่อใส่ตารางตามหลักการหาผลลัพธ์แบบวิธีซิมเพล็กซ์เราจะพยายามเพิ่มค่าตัวแปรซึ่งมีผลทำให้ค่าZ เพิ่มเร็วที่สุดโดยพิจารณาค่าที่เป็นลบของสัมประสิทธิ์สูงสุดดังนั้นในสมการเป้าหมายตามตัวอย่างนี้ค่าสัมประสิทธิ์ของ R_1 และ R_2 เป็นค่าบวก M ซึ่งสมมุติว่ามีค่าสูงมาก ๆ จึงเป็นตัวกำหนดไม่ให้เพิ่มค่าของ R_1 และ R_2 ซึ่งจะต้องเป็นศูนย์เท่านั้น ดังนั้นการใส่สัมประสิทธิ์ M ได้แก่ Artificial Variable ในสมการเป้าหมายจึงเป็นหลักเกณฑ์สำคัญมาก ตัวอย่างข้างเป็นการหาผลลัพธ์มีเป้าหมายสูงสุด เครื่องหมาย M ในสมการการเป้าหมายของรูปแบบสมการขยายจะเป็นบวก (+) ถ้าเป้าหมายต้องการผลลัพธ์ต่ำสุดเครื่องหมาย M ในรูปแบบสมการขยายดังกล่าวจะเป็นค่าลบ (-) การจัดเข้ารูปแบบเพื่อใช้วิธีซิมเพล็กซ์

เพื่อที่จะหาผลลัพธ์ได้ในวิธีซิมเพล็กซ์ จำเป็นที่จะต้องปรับรูปปัญหาที่มีตัวแปรแบบ Artificial Variable ให้มาอยู่ในรูปแบบของวิธีซิมเพล็กซ์แบบธรรมดาที่ได้กล่าวไปแล้ว คือการปรับรูปแบบปัญหาให้ได้เป็นผลลัพธ์เบื้องต้น คือเป็นตาราง Initial Solution ซึ่งเราจะได้ผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยการขจัดสัมประสิทธิ์ซึ่งเราสามารถขจัดสัมประสิทธิ์ได้สองวิธีดังนี้

ก. วิธีแทนค่าธรรมดา

จากรูปแบบสมการขยายหาค่าตัวแปร Artificial ในสมการขอบข่ายแล้วคูณด้วยสัมประสิทธิ์ M นำไปแทนค่าในสมการเป้าหมาย เปลี่ยนสมการเป้าหมายเป็นผลลัพธ์เบื้องต้น จากสมการข้างต้น $R_1 = b_2 - a_{21}X_1 - a_{22}X_2 - a_{23}X_3 + S_1$ (4.21)

$$R_2 = b_3 - a_{31}X_1 - a_{32}X_2 - a_{33}X_3$$

$$M(R_1 + R_2) = M(b_2 + b_3) - M(a_{21} + a_{31})X_1 - M(a_{22} + a_{32})X_2$$

$$- M(a_{23} + a_{33})X_3 + MS_1$$

แทนในสมการเป้าหมายจะเป็น

$$Z - C_1 + M(a_{21} + a_{31})X_1 - C_2 + M(a_{22} + a_{32})X_2 - C_3 + M(a_{23} + a_{33}) + MS_1$$

$$= -M(b_2 + b_3)$$

ข. วิธีRow-Operator

วิธีนี้เหมือนกับวิธีทางพีชคณิตในขั้นตอนที่ทำให้สัมประสิทธิ์ในแถวยืนเป็นศูนย์ คือทำสัมประสิทธิ์ที่มีค่า M ใน Artificial Variable ให้เป็นศูนย์นั่นเองผลลัพธ์ที่ได้จะเหมือนวิธีแทนค่าธรรมดา

เมื่อได้ตารางของผลลัพธ์เบื้องต้นแล้ว การดำเนินการเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ตามเป้าหมายตามวิธีซิมเพล็กซ์ จะดำเนินไปเหมือนขั้นตอนที่กล่าวมาแล้ว

การแก้ปัญหาโดยใช้การโปรแกรมเชิงเส้นตรงนี้ ปัญหาโดยมากจะมีลักษณะซับซ้อนมากและมีตัวแปรเกี่ยวข้องจำนวนมาก จะหาผลลัพธ์ตามวิธีการต่าง ๆ ที่กล่าวมาจะต้องใช้เวลามากในการหาตัวเพิ่มและตัวลดในแต่ละขั้นตอน ในปัจจุบันปัญหาที่ซับซ้อนของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงสามารถใช้คอมพิวเตอร์ช่วยหาผลลัพธ์ซึ่งจะประหยัดเวลา ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการรวดเร็วขึ้นและใช้นำไปตัดสินใจใช้งานได้ทันใจ การเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ ในระบบของปัญหาจะมีผลอย่างไรกับผลลัพธ์ เราก็สามารถกำหนดได้ทันที