บทที่ 3

ทฤษฎีการปรับแก้

## 3.1 คำนำ

การวัดหรือการสังเกต (Measurement or Observation) เป็นพื้นฐานสำหรับงานทางวิทยาศาสตร์และทางวิศวกรรม การวัดจะมีรากฐานที่ใช้อ้างอิงซึ่งเรียกว่า แบบจำลองเชิงคณิต (Mathematical Model) แบบจำลองแบ่งเป็น 2 ส่วนคือ ฟังก์ชันนอลโมเดล (Functional Model) ซึ่งพรรณาถึงคุณสมบัติที่ทราบได้แน่นอนกับสโตคาสติคโมเดล (Stochastic Model) ที่กล่าวถึงคุณสมบัติที่ทราบได้ไม่แน่นอนของตัวแปรที่เกี่ยวข้อง

การวัดจะกระทำขึ้นภายหลังที่ได้ตั้งโมเดลขึ้นมาแล้ว โมเดลจะประกอบด้วยองค์ (Element) ต่าง ๆ หลายตัว ในการวัดจะวัดค่าขององค์เพียงบางตัว เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ (Parameters) ของโมเดลนั้น ๆ การประเมินผลของค่าที่วัดได้ขึ้นอยู่กับเครื่องมือและวิธีการรังวัด บางครั้งค่าวัดไม่สามารถนำไปใช้ในโมเดลได้โดยตรง ก็ต้องเตรียมแปลงค่าหรือแก้ไขให้เหมาะสมกับแบบจำลองเช่น การแก้ความคลาดเคลื่อนมีระบบซึ่งเรียกว่า การทอนค่าหรือปรับแต่งค่า (Reduced or Preporcessed) ในส่วนของสโตคาสติคโมเดลขึ้นอยู่กับอิทธิพลบางอย่างที่ไม่สามารถควบคุมได้ การสร้างสโตคาสติคโมเดลต้องอาศัยคุณสมบัติทางสถิติของค่าวัด (Statistical Properties of Observations) มาช่วยในการพิจารณา

## 3.2 การปรับแก้ (Adjustment)

ในการวัดปริมาณใด ๆ ไม่สามารถที่จะทราบค่าที่แท้จริงได้ เนื่องจากจะมีความคลาดเคลื่อน (Errors) ติดอยู่ เพื่อเป็นการตรวจสอบความผิด (Mistake or Blunder) ที่อาจเกิดขึ้นในการวัด จึงต้องมีการวัดค่าให้มีข้อมูลมากกว่าจำนวนต่ำสุดที่จำเป็น ค่าคำตอบที่ได้จากข้อมูลที่มากเกินไปนี้ ตามปกติจะไม่แน่นอนในนัยที่ว่า ถ้าเอากลุ่มย่อย ๆ ของข้อมูลจำนวนเพียงพอ

ที่จะให้คำตอบมาหาคำตอบ แต่ละกลุ่มจะให้คำตอบต่างกัน การปรับแก้โดยทั่ว ๆ ไป จะให้คำตอบที่ไม่เป็นเอกภาพ ในการปรับแก้ที่จะให้ได้คำตอบเดียวหรือคำตอบที่เป็นเอกภาพ (Unique) จากข้อมูลที่มีอยู่ จึงต้องมีมาตรการบางอย่างเพิ่มเข้าไป อาทิเช่น เทคนิคของลีสท์สแควร์

ในแง่ของสถิติ การปรับแก้เป็นวิธีการที่จะให้ได้มาซึ่งค่าคาดคะเน (Estimates) ของตัวแปรสุ่ม (Stochastic Variables) และพารามิเตอร์ การแจกแจง (Distribution Parameters) โดยอาศัยข้อมูลจากตัวอย่าง (Sample) ที่สังเกตค่ามา ในกระบวนวิธีปรับแก้ทั้งหลาย "วิธีลีสท์สแควร์" (Least Squares Method) เป็นวิธีที่นิยมใช้กันมาก*

ถ้า $n_o$ เป็นจำนวนต่ำสุดที่จำเป็นในการแก้ปัญหา ค่าสังเกตที่เป็นอิสระแก่กันในเชิงฟังก์ชันมีจำนวน n จึงต้องปรับแก้เพื่อให้ได้ค่าคาดคะเนที่ดีที่สุดสำหรับข้อมูลที่มีอยู่ ให้ r แทนข้อมูลส่วนที่เกินมา ดังนั้น

$$r = n - n_o \tag{3-1}$$

ซึ่งเท่ากับลำดับชั้นของความเป็นอิสระ (Degrees of Freedom)

3.3 หลักการของลีสท์สแควร์ (The Least Squares Principle)

Mikhail (1976), Wolf (1980) และวิชา (2524) ได้กล่าวถึงหลักการของลีสท์สแควร์ พอสรุปได้ดังนี้

ให้ $L_b$ แทนเวคเตอร์ของเซ็ทค่าสังเกต

$\hat{L}_a$ แทนเวคเตอร์ของเซ็ทค่าคาดคะเนที่สอดคล้องกับแบบจำลอง

---

* จาก Mikhail (1976), P.101

ค่าความต่างของเซ็ททั้งสองเรียกว่า "เศษคงเหลือ (Residual)" คือ

$$V = \hat{L}_a - L_b \qquad (3\text{-}2)$$

เพื่อให้ได้เซ็ทของค่าคาดคะเนสำหรับ V และ $\hat{L}_a$ ที่สอดคล้องกับแบบจำลอง จึงต้องให้เซ็ทที่ต้องการมีคุณสมบัติเป็นไปตามเกณฑ์อันหนึ่งที่เรียกว่า "หลักการของลีสท์สแควร์" หลักดังกล่าวพยายามจะทำให้ค่าคาดคะเน $\hat{L}_a$ ใกล้เคียงกับ $L_b$ มากที่สุดโดยคำนึงถึงคุณสมบัติทางสโตคาสติคด้วย

หลักของลีสท์สแควร์ก็คือ

$$\phi = V'PV \rightarrow \text{minimum} \qquad (3\text{-}3)$$

โดยที่ $P_i$ เป็นแมทริกซ์น้ำหนักของค่าสังเกต (Weight Matrix of the Observations)

ในกรณีที่ค่าสังเกตไม่มีสหสัมพันธ์ (Uncorrelate) สมการ (3-3) จะกลายเป็น

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} (P_i V_i^2) \rightarrow \text{minimum} \qquad (3\text{-}4)$$

โดยที่ $P_i$ เป็น Diagonal Element ของแมทริกซ์ P และ $V_i$ เป็นเศษคงเหลือของค่าสังเกตตัวที่ i ที่สอดคล้องกัน

ในกรณีที่ค่าสังเกตทุกค่าไม่มีสหสัมพันธ์กันและมีน้ำหนักเท่ากันด้วย P จะกลายเป็นแมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) จะได้

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} (V_i)^2 \rightarrow \text{minimum} \qquad (3\text{-}5)$$

หลักการของลีสท์สแควร์ไม่จำเป็นต้องทราบรูปแบบของการแจกแจง สิ่งที่จำเป็นต้องทราบคือ แมทริกซ์ P หรือ Q ($P = Q^{-1}$) ในกรณีที่ความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution) ค่าคาดคะเนที่ได้จากลีสท์สแควร์จะมีคุณสมบัติบางประการเช่น จะเท่ากับค่าที่ได้จากวิธี "Maximum Likelihood"

3.4 <u>เทคนิคของลีสท์สแควร์</u> (The Techniques of Least Squares)

ในแบบจำลองที่สร้างขึ้น นอกจากค่าสังเกตแล้วอาจจะมีตัวแปรอื่นหรือค่าคงที่ (Numerical Constants) อยู่ด้วยก็ได้ กลุ่มของตัวแปรอื่นซึ่งเป็นปริมาณสโตคาสติคเหมือนกัน เรียกว่า "<u>พารามิเตอร์</u>" จำนวนของพารามิเตอร์จะแทนด้วยอักษร u ในการปรับแก้โดยหลักลีสท์สแควร์ สามารถทำได้หลายวิธีแตกต่างกันไปตามลักษณะของแบบจำลองเชิงคณิตที่ใช้ แต่ไม่ว่าจะใช้วิธีใดคำตอบสุดท้ายจะเหมือนกัน วิธีที่ใช้แบ่งได้ดังนี้

<u>วิธีสมการทั่วไป</u> (General Case-Combination of Observation Equations and Condition Equations)

แบบจำลองเชิงคณิต $F(L_a, X_a) = 0$

แบบจำลองเชิงคณิตในรูปสมการเชิงเส้น $AX + BV + W = 0$ (3-6)

<u>วิธีสมการค่าสังเกต</u> (Observation Equations)

แบบจำลองเชิงคณิต $L_a = F(X_a)$

แบบจำลองเชิงคณิตในรูปสมการเชิงเส้น $V = AX + L$ (3-7)

<u>วิธีสมการเงื่อนไข</u> (Condition Equations)

แบบจำลองเชิงคณิต $F(L_a) = 0$

แบบจำลองเชิงคณิตในรูปแบบสมการเชิงเส้น $BV + W = 0$ (3-8)

ในการปรับแก้ข้อมูลงานสำรวจโดยหลักลีสท์สแควร์ วิธีที่ใช้กันอยู่เสมอได้แก่ วิธีสมการค่าสังเกตและวิธีสมการเงื่อนไข การจะเลือกใช้วิธีใดนั้นมีข้อพิจารณาดังนี้

1. ความยากง่ายในการเขียนสมการแบบจำลองเชิงคณิตและการแปลงให้สมการนั้นเป็นสมการเชิงเส้น

2. ขีดจำกัดของอุปกรณ์ช่วยการคำนวณ

3. ความคล่องตัวที่จะสร้างขั้นตอนการคำนวณอย่างมีระบบและอำนวยประโยชน์ให้อย่างมากที่สุด เป็นข้อพิจารณาที่จะสร้างและพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการปรับแก้ในลักษณะที่ใช้ได้กับปัญหาที่มีขอบเขตกว้างและทุกกรณีของปัญหา

จากข้อพิจารณาดังกล่าว วิธีสมการค่าสังเกตจึงเป็นวิธีที่นิยมใช้ เพราะความยากง่ายของการเขียนแบบจำลองเชิงคณิตไม่ขึ้นกับลักษณะเรขาคณิตของปัญหา การสร้างสมการจะทำเป็นขั้นตอนซ้ำ ๆ กัน ซึ่งจะง่ายต่อการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ผลลัพท์จะให้ค่าปรับแก้ของพารามิเตอร์ รวมทั้งเป็นวิธีที่ Flexible ต่อการเปลี่ยนแปลงจำนวนข้อมูล ทำให้วิธีสมการค่าสังเกตเป็นวิธีที่เหมาะสมในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูป (Canned Program)

ส่วนวิธีสมการเงื่อนไข จำนวนเงื่อนไขจะน้อยกว่าจำนวนพารามิเตอร์ จำนวนสมการปกติจึงน้อยกว่าสมการค่าสังเกต ทำให้สามารถลดจำนวนหน่วยความจำในเครื่องคำนวณลงไป วิธีสมการเงื่อนไขจะให้ผลลัพท์เป็นค่าที่ปรับแก้แล้วของค่าสังเกต ($\hat{L}_a$) การหาค่าปรับแก้ของพารามิเตอร์จะต้องมีการคำนวณอีกต่างหาก โดยเอาค่าที่ปรับแก้แล้วของค่าสังเกตไปใช้ ความยากง่ายในการคำนวณหาค่าพารามิเตอร์จะขึ้นอยู่กับลักษณะเรขาคณิตของปัญหา ดังนั้นวิธีสมการเงื่อนไขจึงไม่ค่อย Flexible เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีสมการค่าสังเกต

อย่างไรก็ดีสำหรับในการวิจัยโครงข่ายงานวงรอบนี้ได้เลือกใช้วิธีสมการเงื่อนไขในการปรับแก้ เพื่อลดขนาดของสมการปกติ ซึ่งจะลดจำนวนหน่วยความจำในเครื่องสมองกลลงไปด้วย



3.5 <u>การปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์โดยวิธีสมการเงื่อนไข</u>

(Least Squares Adjustment by Method of Condition Equations)

ในแบบจำลองจะมีแต่ค่าสังเกตคือ เป็นกรณีที่ไม่มีพารามิเตอร์ปรากฏอยู่ในสมการ สมการแต่ละสมการจะแสดงเงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ระหว่างข้อมูลการวัดต่าง ๆ กลุ่มหนึ่ง สมการที่ใช้

ทุกสมการต้องเป็นอิสระต่อสมการอื่น ๆ ทั้งหมด สมการปกติที่ได้จึงจะมี Rank เต็ม สามารถนำไปแก้หาผลลัพท์ได้

ผลลัพท์ที่ได้คือ ค่าปรับแก้ของค่าวัด ($\hat{L}_a$) ถ้าต้องการทราบค่าปรับแก้ของพารามิเตอร์ก็สามารถหาได้โดยใช้กฎการแพร่ (Propagation) ขั้นตอนของการปรับแก้โดยสมการเงื่อนไขพอสรุปได้ดังนี้

| Steps | Dimension |
|---|---|
| - จำนวนค่าสังเกต | n |
| - จำนวนพารามิเตอร์ | u |
| - จำนวนสมการเงื่อนไข = n - u | r |
| - เวคเตอร์ของค่าสังเกต $L_b$ | (n, 1) |
| - Variance and Covariance Matrix ของ $L_b = \Sigma_{L_b}$ | (n, n) |
| - เลือก A Priori Variance of Unit Weight $\sigma_o^2$ | Scalar |
| - หา Weight Matrix $P = \sigma_o^2 \Sigma_{L_b}^{-1}$ | (n, n) |
| - แบบจำลองเชิงคณิต $F(L_a) = 0$ | r |
| - คำนวณหาแมทริกซ์ $B = \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right\|_{L_b}$ | (r, n) |
| - $W$ = Misclosure Vector = $F(L_b)$ | (r, 1) |
| - ตรวจสอบหน่วยจาก $BV + W = 0$ | |
| - Normal Matrix $M = BP^{-1}B'$ | (r, r) |
| - เวคเตอร์ของ Lagrange Multiplier $K = -M^{-1}W$ | (r, 1) |
| - หาเวคเตอร์ของเศษคงเหลือ $V = P^{-1}B'K$ | (n, 1) |
| - ค่าปรับแก้ของค่าสังเกต $\hat{L}_a = L_b + V$ | (n, 1) |
| - $V'PV = -K'W$ | Scalar |

| Steps | Dimension |
| --- | --- |
| - The A Posteriori Variance of Unit Weight | |
| $\hat{\sigma}_o^2 = \dfrac{V'PV}{r}$ | Scalar |
| - หา $Q_{\hat{L}_a} = (P^{-1} - P^{-1}B'M^{-1}BP^{-1})$ | (n, n) |
| - ทดสอบสมมุติฐาน $\hat{\sigma}_o^2 = \sigma_o^2$ ดูว่าจะปฏิเสธการปรับแก้หรือไม่ | |