



บทที่ 2

การคำนวณศักย์กระจายในสนามไฟฟ้าด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีหาผลลัพธ์โดยประมาณด้วยการแบ่งสนามไฟฟ้าที่สนใจออกเป็นส่วนย่อย ๆ ที่ต่อเนื่องกัน จากนั้นก็ประมาณค่าภายในส่วนย่อย ๆ ด้วยฟังก์ชันมาตรฐาน แล้วหาความสัมพันธ์ของศักย์ที่เกี่ยวข้องกันของส่วนย่อยๆที่ประกบกันเป็นสนามไฟฟ้า ผลของการมิเนชันพลังงานศักย์สะสมในสนามไฟฟ้าที่สร้างขึ้นจากความสัมพันธ์ของศักย์ จะเป็นระบบสมการพีชคณิตซึ่งมีผลลัพธ์เป็นศักย์ที่กระจายอยู่ในสนามไฟฟ้า เพราะศักย์ที่กระจายอยู่ในสนามไฟฟ้าใด ๆ จะกระจายในลักษณะที่ทำให้พลังงานศักย์ที่สะสมอยู่ในสนามไฟฟ้านั้น มีค่าต่ำสุดเสมอ [1, 2, 4]

2.1 หลักการเบื้องต้นของไฟไนต์เอลิเมนต์

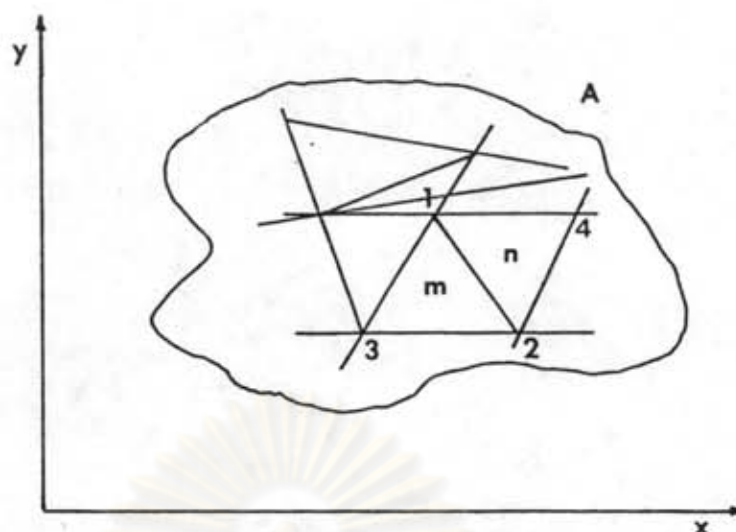
การหาผลลัพธ์ศักย์ในสนามไฟฟ้าที่สามารถอธิบายได้ด้วยสมการลาปลาซสองมิติโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น เริ่มจากการประมาณพลังงานศักย์ที่สะสมในสนามไฟฟ้า $w(u)$ ด้วยฟังก์ชันศักย์ $u(x, y)$ ในรูปของพหุนาม (Polynomial Function) ซึ่งประกอบด้วย ตัวแปร x ตัวแปร y และ ลัมประสิทธิ์ เช่น

$$\text{ลำดับที่ 1} \quad U(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y$$

$$\text{ลำดับที่ 2} \quad U(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$$

เป็นต้น

ในการแก้ปัญหาด้วยพหุนามลำดับที่ 1 และเราแบ่งบริเวณสนามไฟฟ้าที่สนใจออกเป็นสามเหลี่ยมย่อยที่มีจุดยอดและด้านร่วมกันหลายๆรูป ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 การแบ่งสนามไฟฟ้าออกเป็นรูปสามเหลี่ยมย่อย

ศักย์ที่อยู่บนขอบของรูปสามเหลี่ยมจะเปลี่ยนแปลงอย่างสม่ำเสมอจากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่งดังนั้นหากสามเหลี่ยมสองรูป เช่น สามเหลี่ยม 1-2-3 และ สามเหลี่ยม 1-2-4 ในรูปที่ 2.1 มีจุดยอดร่วมกันสองจุดคือ 1 และ 2 แรงดันบนด้าน 1-2 ก็จะต่อเนื่อง

จากการนิยามสามเหลี่ยม 1-2-3 ในรูปที่ 2.1 สมการทั่วไปของศักย์เมื่อประมาณด้วยพหุนามลำดับที่ 1 สามารถเขียนได้เป็น

$$U(x,y) = a + bx + cy \quad (2.1.1)$$

เมื่อ a , b , และ c เป็นสัมประสิทธิ์ที่สามารถหาได้จากศักย์ที่จุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยม 1-2-3 ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

เมื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ a , b , และ c จากสมการที่ (2.1.2) แล้วแทนค่าลงในสมการที่ (2.1.1) จะได้

$$\begin{aligned}
 U(x,y) &= [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^3 U_i \alpha_i(x,y) \quad (2.1.3)
 \end{aligned}$$

โดยที่ $\alpha_i = [(x_{i+1}y_{i-1} - x_{i-1}y_{i+1}) + (y_{i+1} - y_{i-1})x + (x_{i-1} - x_{i+1})y] / 2A^{(e)}$ (2.1.4)

$A^{(e)}$ = พื้นที่ของสามเหลี่ยม 1-2-3

1 = ดรรชนีที่เปลี่ยนแปลงแบบวัฏจักร (Cyclic) รอบจุดยอดของสามเหลี่ยม

จากสมการที่ (2.1.3) $\nabla U = \sum_{i=1}^3 U_i \nabla \alpha_i$ (2.1.5)

พลังงานศักย์สะสมต่อหน่วยความยาวตามแนวแกน z ในสามเหลี่ยมใด ๆ e จะเป็น [5]

$$\begin{aligned}
 W^{(e)} &= \frac{1}{2} \epsilon / |\nabla U|^2 dA^{(e)} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon \sum U_i / \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j dA^{(e)} U_j \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon \sum U_i S_{i,j}^{(e)} U_j
 \end{aligned}$$

เมื่อ $S_{i,j}^{(e)} = / \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j dA^{(e)}$

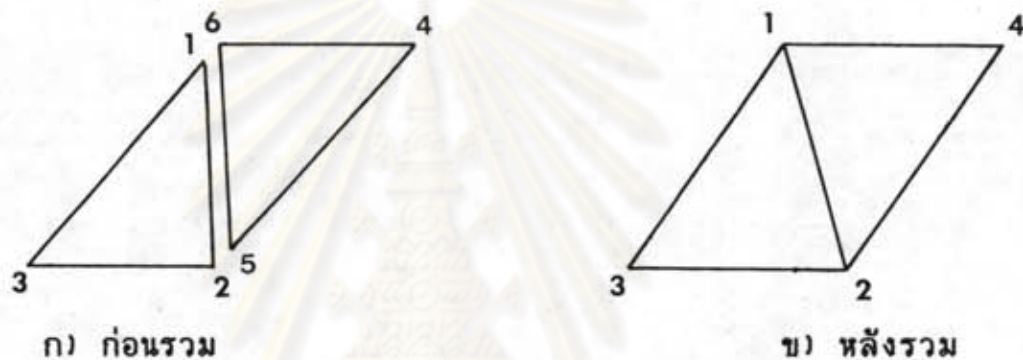
หรือในรูปของเมตริกซ์ $W^{(e)} = \frac{1}{2} \epsilon U^T S^{(e)} U$ (2.1.6)

พลังงานศักย์สะสมทั่วทั้งพื้นที่ A จะเท่ากับ

$$W = W^{(1)} + W^{(2)} + \dots + W^{(n)}$$

$$= \sum_{\text{all element}} W^{(e)}$$

การรวมพลังงานศักย์สะสมของสามเหลี่ยมสองรูปดังแสดงในรูปที่ 2.2 สามารถกระทำได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.2 แสดงการรวมพลังงานศักย์สะสมของสามเหลี่ยมสองรูป

จากรูปที่ 2.2 ก)

$$U_d^T = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6]_d \quad (2.1.7)$$

U_d หมายถึงค้ำของสามเหลี่ยมที่ยังไม่ได้รวมเข้าด้วยกัน พลังงานศักย์สะสมรวมของสามเหลี่ยมทั้งสองรูปจะเท่ากับ

$$W^{(m+n)} = U_d^T S_d U_d \quad (2.1.8)$$

โดยที่

$$S_d = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & & & \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & & & \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & & & \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ & & & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{(m)} & 0 \\ 0 & S^{(n)} \end{bmatrix}$$

เนื่องจากค้ำยจะต้องต่อเนื่องที่ด้านร่วมของรูปสามเหลี่ยมเมื่อสามเหลี่ยมสองรูปมีจุดยอดร่วมกัน และค้ำยบนด้านของรูปสามเหลี่ยมจากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่งจะต้องเปลี่ยนแปลงอย่างสม่ำเสมอ ค้ำยที่จุดยอดที่ร่วมกันจึงจำเป็นต้องเท่ากัน หรือกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่าค้ำยบนด้าน 1-2 ในรูปที่ 2.2 ข) จะมีความต่อเนื่องก็ต่อเมื่อค้ำยที่จุด 1 เท่ากับค้ำยที่จุด 6 และค้ำยที่จุด 2 เท่ากับค้ำยที่จุด 5 ความสัมพันธ์ของค้ำยในรูปที่ 2.2 จึงสามารถแสดงได้ด้วยสมการที่ (2.1.9)

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & 1 & & & & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (2.1.9)$$

หรือ

$$U_d = CU_c$$

U_c หมายถึงค้ำยของสามเหลี่ยมที่รวมเข้าด้วยกันแล้ว

C คือ เมตริกซ์แรกทางด้านขวามือของสมการที่ (2.1.9)

เมื่อรวมพลังงานค้ำยสะสมของสามเหลี่ยมทุกรูปทั่วพื้นที่ A แล้วสมการที่ (2.1.8) จึงสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{S} \mathbf{U} \quad (2.1.10)$$

เมื่อ $\mathbf{S} = \mathbf{C}^T \mathbf{S}_d \mathbf{C}$

โดยทั่วไป เงื่อนไขขอบเขตสำหรับสมการลาปลาซสองมิติจะมีส่วนหนึ่งเป็นเงื่อนไขขอบเขตแบบ Dirichlet คือ $U_n =$ ค่าคงที่ เวกเตอร์ \mathbf{U} ในสมการที่ (2.1.10) จึงมีส่วนหนึ่งเป็นค่าคงที่ด้วย ถ้าสมมติว่าการเรียงหมายเลขจุดในสนามไฟฟ้าเรียงโดยให้จุดที่ต้องการทราบค่าศักย์ขึ้นต้น แล้วตามด้วยจุดที่ถูกกำหนดด้วยเงื่อนไขขอบเขตแบบ Dirichlet หรือ $\mathbf{U} = [U_f \quad U_p]^T$ การมิโนมิซสมการที่ (2.1.10) จึงสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial}{\partial} \left[\mathbf{U}_f^T \quad \mathbf{U}_p^T \right] \begin{bmatrix} S_{ff} & S_{fp} \\ S_{pf} & S_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_f \\ U_p \end{bmatrix} / \partial \mathbf{U} = 0 \quad (2.1.11)$$

f หมายถึงจุดที่ต้องการทราบค่าศักย์

p หมายถึงจุดที่ถูกกำหนดด้วยเงื่อนไขขอบเขตแบบ Dirichlet

ในสมการที่ (2.1.11) เนื่องจากเราจะหาอนุพันธ์เทียบกับค่าศักย์ที่เปลี่ยนแปลงได้เท่านั้น ผลของสมการที่ (2.1.11) จึงเป็น

$$\begin{bmatrix} S_{ff} & S_{fp} \\ S_{pf} & S_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_f \\ U_p \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1.12)$$

$$S_{ff} U_f = -S_{fp} U_p \quad (2.1.13)$$

$$U_f = -S_{ff}^{-1} S_{fp} U_p \quad (2.1.14)$$

เพราะฉะนั้นศักย์ในสนามไฟฟ้าจึงเป็น

$$\mathbf{U} = [-S_{ff}^{-1} S_{fp} U_p \quad U_p]^T \quad (2.1.15)$$

สมการที่ (2.1.15) ได้แสดงให้เห็นถึงคุณสมบัติที่สำคัญของ
ไฟไนต์อีเล็มเมนต์ คือ ศักย์ที่ต้องการทราบค่าในสนามไฟฟ้าสามารถหาได้จากศักย์
ที่เงื่อนไขขอบเขตและเมตริกซ์ \mathcal{R} เท่านั้น

2.2 สมการของศักย์

ปัญหาทางด้านสนามแม่เหล็กไฟฟ้าจะเป็นไปตามสมการของแมกซ์เวลล์
ดังต่อไปนี้

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (2.2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t \quad (2.2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2.4)$$

สำหรับตัวกลางที่เป็นเชิงเส้นและ Isotropic ความสัมพันธ์ระหว่าง \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} ,
 \mathbf{H} , และ \mathbf{J} จะเป็น

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.2.6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.2.7)$$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณหาสนามไฟฟ้าเราจะแทนเวกเตอร์ \mathbf{E}
และ \mathbf{B} ด้วยฟังก์ชันของศักย์ คือ ศักย์สเกลาร์ U และ ศักย์เวกเตอร์ \mathbf{A}
ดังสมการ

$$\mathbf{E} = -\nabla U - \partial \mathbf{A} / \partial t \quad (2.2.8)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.2.9)$$

และกำหนดให้ $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mu \epsilon \partial U / \partial t - \mu \rho$ ตามเกณฑ์ของลอเรนตซ์ (Lorentz gauge) [6]

เนื่องจากเคิร์ลของเกรเดียนต์ของตัวแปรสเกลาร์ และไดเวอร์เจนซ์ของเคิร์ลของตัวแปรเวกเตอร์มีค่าเท่ากับศูนย์ สมการที่ (2.2.8) และ (2.2.9) จึงเป็นไปตามสมการที่ (2.2.1) และ (2.2.4) กำหนด สำหรับตัวกลางเชิงเส้นและเอกพันธ์ สมการที่ (2.2.3) จึงสามารถเขียนในเทอมของศักย์สเกลาร์ได้ดังนี้

$$\nabla^2 U + \mu \epsilon \partial^2 U / \partial t^2 - \mu \epsilon \partial U / \partial t = -\rho / \epsilon \quad (2.2.10)$$

หรือ

$$p \nabla^2 U + k^2 U = g \quad (2.2.11)$$

เมื่อ

$$p = \epsilon$$

$$k^2 = \epsilon (\mu \epsilon \partial^2 / \partial t^2 - \mu \epsilon \partial / \partial t)$$

$$g = -\rho$$

สมการนี้มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า Inhomogeneous scalar Helmholtz equation ซึ่งเป็นสมการที่เราคุ้นเคยกันเป็นอย่างดี

ก. สนามไฟฟ้าที่กำลังสนใจเป็นสนามไฟฟ้าสถิตและไม่มีประจุอิสระอยู่ภายในสนามไฟฟ้าสมการที่ (2.2.10) จะลดรูปลงเป็น $\nabla^2 U = 0$ ซึ่งก็คือสมการลาปลาซนั่นเอง

ข. สนามไฟฟ้าที่กำลังสนใจเป็นสนามไฟฟ้าสถิตและมีประจุอิสระอยู่ภายในสนามไฟฟ้าสมการที่ (2.2.10) จะลดรูปลงเป็น $\nabla^2 U = -\rho / \epsilon$ ซึ่งก็คือสมการปัวส์ซงนั่นเอง

2.3 Stationary Function

ดังที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 2.1 ว่า พลังงานศักย์สะสมต่ำสุดในสนามไฟฟ้าสถิตที่ไม่มีประจุอิสระสามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการ

$$W = \frac{1}{2} \int (\nabla U)^2 d\Omega = F(U) \quad (2.3.1)$$

โดยลดค่าเปอร์มิททิวิตีไว้เพื่อความสะดวกในการเขียนสมการ ซึ่งผลการอินทิเกรตทั่วทั้งสนามไฟฟ้าจะต้อง stationary รอบผลลัพธ์จริง $U = u$ จึงจะได้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตและเป็นผลลัพธ์จริง ในระบบแกนพิกัดเชิงสี่เหลี่ยมผืนผ้า u จะเป็นฟังก์ชันของพิกัด หรือ $u = u(x, y, z)$ และโดยทั่วไปเราจะเรียก $F(u)$ ในสมการที่ (2.3.1) ว่าฟังก์ชันของฟังก์ชัน U หรือ Functional U

เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดบนผิว S ซึ่งล้อมรอบสนามไฟฟ้า Ω ส่วนใหญ่จะมีอยู่สองประเภท คือ

- ก. เงื่อนไขขอบเขตแบบ Dirichlet ซึ่งกำหนดให้ u มีค่าคงที่บนผิว S_1
- ข. เงื่อนไขขอบเขตแบบ Homogeneous Neumann ซึ่งกำหนดให้ $\partial u / \partial n = 0$ บนผิวส่วนที่เหลือ S_2 $\partial u / \partial n$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของแรงดันในแนวที่ตั้งฉากกับผิว S และมีทิศทางที่พุ่งออกจากผิว S

เพื่อเป็นการยืนยันว่า $F(U)$ stationary รอบผลลัพธ์ $U = u$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตจริง เราจะประมาณ U โดยกำหนดให้

$$U = u + \theta h \quad (2.3.2)$$

- โดยที่ $\theta =$ จำนวนเล็กน้อยที่มีค่าเป็นบวกหรือลบ
 $h =$ ฟังก์ชันอิสระที่จุดใดในสนามไฟฟ้า แต่มีค่าเป็นศูนย์ที่ผิว S_1

แทนค่า U ในสมการที่ (2.3.2) ลงในสมการที่ (2.3.1)

$$F(u+\theta h) = F(u) + \theta \int \nabla u \cdot \nabla h \, d\Omega + \frac{1}{2} \theta^2 \int (\nabla h)^2 \, d\Omega \quad (2.3.3)$$

กระจายเทอมที่สองทางด้านขวามือของสมการที่ (2.3.3) ด้วยทฤษฎีบทของกรีนจะได้

$$F(u+\theta h) = F(u) - \theta \int h \nabla^2 u \, d\Omega + \theta \int h (\partial u / \partial n) \, dS + \theta^2 F(h) \quad (2.3.4)$$

โดยที่
$$F(h) = \frac{1}{2} \int (\nabla h)^2 \, d\Omega$$

จากการพิจารณาสมการที่ (2.3.4) จะพบว่า เทอมที่สองทางด้านขวามือมีค่าเท่ากับศูนย์เนื่องจากผลลัพธ์จริง u จะต้องสอดคล้องกับสมการลาปลาซ ($\nabla^2 u = 0$) และเทอมที่สามก็มีค่าเท่ากับศูนย์ด้วยเนื่องจาก h มีค่าเป็นศูนย์บนผิว S_1 และ $\partial u / \partial n$ มีค่าเป็นศูนย์บนผิว S_2 ดังนั้น

$$F(u + \theta h) = F(u) + \theta^2 F(h) \quad (2.3.5)$$

จากสมการที่ (2.3.5) จะเห็นว่า $F(u + \theta h)$ แตกต่างจาก $F(u)$ เท่ากับ $\theta^2 F(h)$ ซึ่งเป็นความแตกต่างที่น้อยกว่าการประมาณ $U = u + \theta h$

สนามไฟฟ้าสามมิติส่วนใหญ่สามารถแทนได้ด้วยสนามไฟฟ้าสองมิติถ้าหากสนามไฟฟ้านั้นมีสภาพสมมาตรในแนวใดแนวหนึ่ง เช่น สภาพสมมาตรตามระยะทาง (Translational Symmetry) หรือ สภาพสมมาตรรอบแกนหมุน (Axial Symmetry)

ปัญหาที่มีสภาพสมมาตรตามระยะทาง เช่น ตามแนวแกน z ในระบบแกนพิกัดเชิงขั้วเหลี่ยมมีนผ้า จะต้องมียุคสมบัติดังนี้

- ก. คุณสมบัติของตัวกลางไม่เปลี่ยนแปลงตามแนวแกน z
- ข. แหล่งกำเนิดสนามไฟฟ้าไม่เปลี่ยนแปลงตามแนวแกน z
- ค. พื้นที่หน้าตัดเมื่อมองตามแนวแกน z มีลักษณะเดิมเสมอ

$F(U)$ ในสมการที่ (2.3.1) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$F(U) = \kappa / (\nabla U(x, y))^2 dx dy \quad (2.3.6)$$

สำหรับปัญหาที่มีสภาพสมมาตรรอบแกนหมุน เช่น แกน z ในระบบแกนพิกัดทรงกระบอกก็จะต้องมีคุณสมบัติคล้ายกับปัญหาที่มีสภาพสมมาตรตามระยะทาง และ $F(U)$ ในสมการที่ (2.3.1) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$F(U) = \kappa / (\nabla U(r, z))^2 2\pi r dr dz \quad (2.3.7)$$

2.4 ฟังก์ชันประมาณ

ในการแก้ปัญหาสนามไฟฟ้าด้วยวิธีไฟไนต์อีเลเมนต์ เราจะแบ่งสนามไฟฟ้าสองมิติออกเป็นส่วนย่อยๆ ด้วยรูปสามเหลี่ยมและแบ่งสนามไฟฟ้าสามมิติด้วยรูปจตุรมุข (Tetrahedron) เนื่องจากรูปทรงทั้งสองสามารถวางตัวในสนามไฟฟ้าได้ดีกว่ารูปทรงแบบอื่น จากนั้นก็ประมาณศักย์ไฟฟ้า u ในสามเหลี่ยมต่างๆ ด้วยฟังก์ชันมาตรฐาน แล้วหาความสัมพันธ์ของศักย์ในสามเหลี่ยมต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกันซึ่งจะต้องมีความต่อเนื่องระหว่างสามเหลี่ยมย่อยๆ แต่ละรูป เพื่อที่จะได้แทนสนามไฟฟ้าได้อย่างถูกต้องนั้นก็คือ ฟังก์ชันมาตรฐาน u ที่สมมุติขึ้นจะต้องมีความต่อเนื่องเพื่อที่จะทำให้ สมการที่ (2.3.1) สามารถหาได้โดยตรง

ฟังก์ชันที่มีผู้นิยมใช้กันมากที่สุด คือ ฟังก์ชันพหุนาม เพราะตัวฟังก์ชันสามารถอินทิเกรตและสามารถหาอนุพันธ์ได้ง่าย นอกจากนี้ยังสามารถอธิบายคุณลักษณะที่ซับซ้อนของศักย์ที่สมมุติขึ้นได้เป็นอย่างดีพหุนามลำดับที่ m และมีจำนวน n พจน์ ในสองมิติสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + \dots + a_n y^m \\ &= \sum_{i=1}^n a_i x^i y^m \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

โดยที่

$$i = [(j + k) \cdot (j + k + 1) + k + 1] / 2$$

$$n = [(m + 1) \cdot (m + 2)] / 2$$

และต้องใช้การรวมกันทุกชุดของ j และ k จาก 0 ถึง m

ดังนั้นในกรณีของพหุนามลำดับที่ 1 สมการที่ (2.4.1) จะสามารถเขียนได้เป็น

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad (2.4.2)$$

สมการที่ (2.4.2) นี้มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า piecewise planar function ซึ่งประกอบด้วย พจน์คงที่ (a_1) และพจน์เชิงเส้น ($a_2 x, a_3 y$) พจน์คงที่สามารถใช้อธิบายเงื่อนไขขอบเขตได้เป็นอย่างดี และพจน์เชิงเส้นจำเป็นจะต้องมีก็เนื่องจากฟังก์ชันที่สมมุติขึ้นสำหรับ Functional $F(u)$ ในสมการที่ (2.3.1) จะต้องสามารถหาอนุพันธ์ได้อย่างน้อยหนึ่งครั้ง นอกจากนั้นแล้วพหุนามลำดับที่ 1 ยังสร้างความสัมพันธ์ที่ต่อเนื่องให้สามเหลี่ยมย่อยที่มีด้านร่วมกันอีกด้วย เพราะจะทำให้ศักย์ไฟฟ้าบนด้านที่ร่วมกันของสามเหลี่ยมเปลี่ยนแปลงอย่างสม่ำเสมอ ดังนั้นหากสามเหลี่ยมสองรูปมีจุดยอดร่วมกันสองจุด ศักย์ไฟฟ้าบนด้านที่ร่วมกันก็จะมีค่าต่อเนื่อง

คุณสมบัติที่น่าสนใจอีกประการหนึ่งของพหุนามลำดับที่ 1 ก็คือ พหุนามลำดับที่ 1 จะไม่ขึ้นกับตำแหน่งของสามเหลี่ยมในระบบแกนพิกัด เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมจะมีศักย์อยู่เพียงสามจุดที่จุดยอดซึ่งไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อมีการเลื่อนตำแหน่งของแกนพิกัด แม้ว่าสมการพีชคณิตของศักย์จะเปลี่ยนแปลง

2.5 Shape function หรือ Interpolation function

เนื่องจากในสนามไฟฟ้าสถิต ค่าสำคัญตามจุดต่างๆในสนามไฟฟ้าก็คือ ศักย์ไฟฟ้า ดังนั้นค่าของจุดใดในสนามไฟฟ้าจะสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_i u_i + \dots + \alpha_n u_n \quad (2.5.1)$$

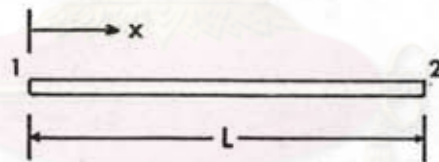
เมื่อ

u_i = ศักย์ที่จุด i ในสนามไฟฟ้า

α_i = Shape function ที่สัมพันธ์กับ u_i

n = จำนวนจุดทั้งหมดในสนามไฟฟ้า

เพื่อความสะดวกในการอธิบายความหมายของสมการที่ (2.5.1) เราจะใช้องค์ประกอบในหนึ่งมิติดังแสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 องค์ประกอบในหนึ่งมิติ

สมการที่ (2.5.1) ที่ใช้แทนค่าศักย์ไฟฟ้าสำหรับองค์ประกอบในหนึ่งมิติ สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \quad (2.5.2)$$

และฟังก์ชันพหุนามในสมการที่ (2.4.1) สำหรับองค์ประกอบในหนึ่งมิติที่วางในระบบแกนพิกัดเชิงสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะเป็น

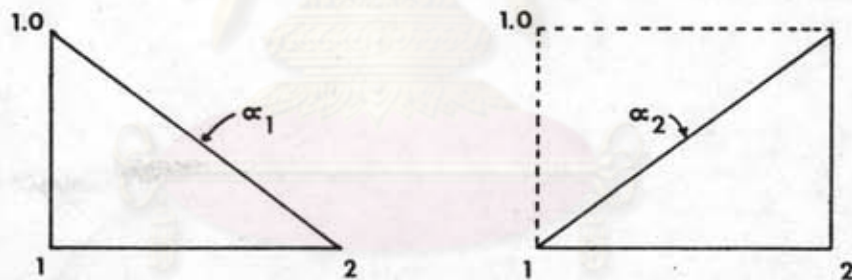
$$u = a_1 + a_2 x \quad (2.5.3)$$

เนื่องจากเงื่อนไขขอบเขตกำหนดให้จุดที่ 1 มีคีย์เท่ากับ u_1 และจุดที่ 2 มีคีย์เท่ากับ u_2 เมื่อแทนค่าลงในสมการที่ (2.5.3) จะหาค่าของสัมประสิทธิ์ a_1 และ a_2 ได้เป็น u_1 และ $(u_1 - u_2)/L$ ตามลำดับ สมการที่ (2.5.2) จึงสามารถเขียนได้เป็น

$$u = (1 - x/L)u_1 + (x/L)u_2 \quad (2.5.4)$$

เมื่อ $(1 - x/L) = \alpha_1$ และ $(x/L) = \alpha_2$

รูปที่ 2.4 ข้างล่างได้แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของค่า α_1 และ α_2 ตามระยะทาง x



รูปที่ 2.4 การเปลี่ยนแปลงของ Shape function α_1 และ α_2 ตามระยะทาง x

ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าค่าของ α_1 เป็นจำนวนที่ไม่มีหน่วย และมีค่าเท่ากับ 1 ที่จุด 1 เท่านั้น นั่นคือ α_1 เท่ากับ 1 ที่ $x = 0$ และ α_2 เท่ากับ 1 ที่ $x = L$ ตามที่ควรจะเป็นในสมการที่ (2.5.4)

2.6 ระบบแกนพิกัดซิมเพลกซ์ (Simplex coordinate)

จากรูปที่ 2.3 ถ้าหากเราวางองค์ประกอบในหนึ่งมิติลงบนระบบแกนพิกัด ζ ซึ่งมีค่าเปลี่ยนแปลงระหว่าง 0 ถึง 1 จากจุดที่ 1 และจุดที่ 2 ในรูป แล้วกำหนดให้ $\zeta = x/L$ ค่า Shape function ในสมการที่ (2.5.2) จะเป็น $\alpha_1 = (1 - \zeta)$ และ $\alpha_2 = \zeta$ ดังนั้นสมการที่ (2.5.2) สำหรับระบบแกนพิกัด ζ จึงสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$u = (1 - \zeta)u_1 + \zeta u_2 \quad (2.6.1)$$

ซึ่งมีความสะดวกมากกว่าการเขียนในระบบแกนพิกัดเชิงสี่เหลี่ยมผืนผ้า ระบบแกนพิกัด ζ นี้เราเรียกว่า ระบบแกนพิกัดซิมเพลกซ์, ระบบแกนพิกัด Homogeneous, หรือ ระบบแกนพิกัด Barycentric [2,7]

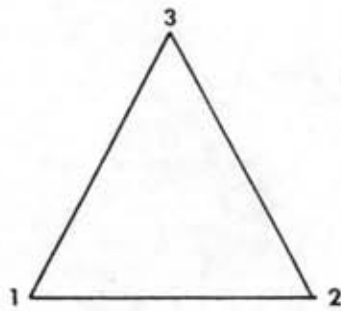
ซิมเพลกซ์ใน N มิติ สามารถอธิบายได้ด้วยรูปที่มีจุดยอด $N + 1$ จุด เช่น ซิมเพลกซ์ในหนึ่งมิติคือส่วนของเส้นตรง (เช่นรูปที่ 2.3 ซึ่งมีจุดที่ปลายทั้งสองข้างสองจุด), ซิมเพลกซ์ในสองมิติคือรูปสามเหลี่ยม (ซึ่งมีจุดยอดสามจุด), และ ซิมเพลกซ์ในสามมิติคือรูปสามเหลี่ยมสี่หน้า (ซึ่งมีจุดยอดสี่จุด) เป็นต้น

รูปที่ 2.5 ได้แสดงถึงรูปที่ใช้อธิบายซิมเพลกซ์ในหนึ่ง, สอง, และสามมิติ

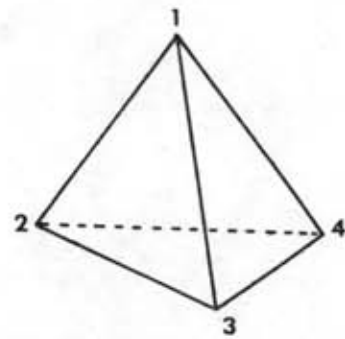
ศูนย์วิทยพัทยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1 ————— 2

ก. หนึ่งมิติ



ข. สองมิติ



ค. สามมิติ

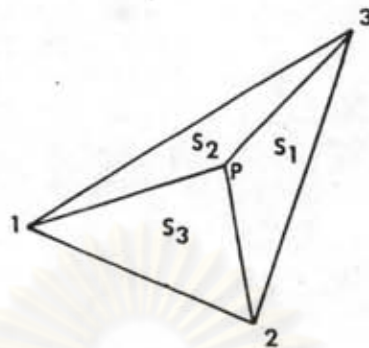
รูปที่ 2.5 รูปร่างที่ใช้อธิบายซิมเพลกซ์ในหนึ่ง, สอง, และสามมิติ

ขนาดของซิมเพลกซ์สามารถหาได้จากสมการที่ (2.6.2) คือ

$$\delta(S) = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(N)} \\ 1 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(N)} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 1 & x_{N+1}^{(1)} & & & x_{N+1}^{(N)} \end{vmatrix} \quad (2.6.2)$$

สมาชิกของตัวกำหนด (Determinant) ในสมการที่ (2.6.2) คือ พิกัดจุดยอดของซิมเพลกซ์ โดยที่บรรทัดล่างบอกถึงลำดับของจุดยอด และ บรรทัดบนบอกถึงทิศทางของแกนพิกัด ดังนั้นขนาดของซิมเพลกซ์ในสองมิติคือพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม และขนาดของซิมเพลกซ์ในสามมิติคือปริมาตรของรูปจตุรมุขนั่นเอง

สมมติว่ามีจุด P วางอยู่ในซิมเพลกซ์ S P จะแบ่ง S ออกเป็น N+1 ซิมเพลกซ์ย่อยซึ่งแต่ละซิมเพลกซ์ย่อยจะมี P เป็นจุดยอดจุดหนึ่งดังแสดงในรูปที่ 2.6 และจะเห็นว่าขนาดของซิมเพลกซ์ S สามารถหาได้จากผลรวมของขนาดของซิมเพลกซ์ย่อยดังนี้



รูปที่ 2.6 การแบ่งซิมเพลกซ์ S ออกเป็นซิมเพลกซ์ย่อยด้วยจุด P

$$f(S) = \sum_{k=1}^{N+1} f(S_k) \quad (2.6.3)$$

ดังนั้นการแบ่งซิมเพลกซ์ S ออกเป็นซิมเพลกซ์ย่อยๆ สามารถทำได้ด้วยการกำหนดจุด P ลงบนซิมเพลกซ์ S หรือหากมองในอีกแง่หนึ่งก็จะเห็นว่าขนาดของ $N+1$ ซิมเพลกซ์ย่อยจะกำหนดตำแหน่งของจุด P บนซิมเพลกซ์ S เราสามารถกำหนดให้ซิมเพลกซ์ย่อย m แทนได้ด้วยสมการ

$$f_m = f(S_m) / f(S) \quad (2.6.4)$$

เพื่อใช้กำหนดจุด P บนซิมเพลกซ์ S จากสมการที่ (2.6.2) และ (2.6.3) เราจึงสามารถสรุปได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{N+1} f_k = 1 \quad (2.6.5)$$

ถ้าจุด P ในระบบแกนพิกัดเชิงสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพิกัด x, y การเปลี่ยนระบบแกนพิกัดเชิงสี่เหลี่ยมผืนผ้าไปเป็นระบบแกนพิกัดขิมเพลกซ์ สามารถหาได้จากสมการที่ (2.6.2), (2.6.3), และ (2.6.4) คือ

$$z_1 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (2.6.6)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) / 2A \quad (2.6.7)$$

$$= [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] / 2A \quad (2.6.8)$$

โดยที่ $A = [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1] / 2$
 $=$ พื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุด (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , และ (x_3, y_3)
 เป็นจุดยอด

การหาขิมเพลกซ์ย่อย z_2 และ z_3 ที่เหลือก็คล้ายคลึงกับวิธีการหา z_1 ดังที่แสดงมาแล้ว ดังนั้นสมการที่ใช้เปลี่ยนระบบแกนพิกัดเชิงสี่เหลี่ยมผืนผ้าไปเป็นระบบแกนพิกัดขิมเพลกซ์ก็คือ

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} / 2A \quad (2.6.9)$$

จากการนิยามสมการที่ (2.6.4) จะเห็นว่าค่าของขิมเพลกซ์สำหรับจุดใดจุดหนึ่งจะเท่ากันเสมอแม้ว่าแกนพิกัดของระบบพิกัดจะเปลี่ยนไป และจะมีค่าเปลี่ยนแปลงระหว่าง 0 ถึง 1 เท่านั้น คุณสมบัติทั้งสองข้อนี้มีความสำคัญมากในการตั้งสมการไฟไนต์อีเลเมนต์ เพราะจะทำให้การตั้งสมการสามารถกระทำเพียงครั้งเดียวแล้วใช้ตลอดไปสำหรับการแบ่งสนามไฟฟ้าออกเป็นแบบใดแบบหนึ่ง

สำหรับ Shape Function ที่สร้างขึ้นจากระบบแกนพิกัดซิมเพลกซ์นั้น จะประกอบขึ้นจากพหุนาม Lagrange interpolation อันดับที่ n หลายพหุนาม พหุนาม m อันดับที่ n จะมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}
 R_m(n, \zeta) &= \prod_{k=0}^{m-1} (\zeta - k/n) / (m/n - k/n) \\
 &= \left(\prod_{k=0}^{m-1} (n\zeta - k) \right) / m! \quad , m > 0 \\
 R_0(n, \zeta) &= 1 \quad (2.6.10)
 \end{aligned}$$

โดยที่ $m = 0, 1, \dots$ และ $n =$ อันดับของพหุนาม

ดังนั้น Shape function ที่สัมพันธ์กับศักร์ $U_{i,j,k}$ ของสนามไฟฟ้า ที่วางในระบบแกนพิกัดซิมเพลกซ์สองมิติจึงสามารถแทนได้ด้วยสมการที่ (2.6.11) คือ

$$\alpha_{i,j,k} = R_i(n, \zeta_1) \cdot R_j(n, \zeta_2) \cdot R_k(n, \zeta_3) \quad (2.6.11)$$

โดยที่ $i + j + k = n$

2.7 การตั้งสมการไฟไนต์อีเลเมนต์

จากหัวข้อที่ 2.5 และ 2.6 สมการที่ (2.5.1) สำหรับสนามไฟฟ้า สองมิติจะสามารถเขียนในระบบแกนพิกัดซิมเพลกซ์ในสองมิติได้เป็น

$$U(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \sum_{i,j,k} U_{i,j,k} \alpha_{i,j,k}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \quad (2.7.1)$$

ค่าของ $\alpha_{i,j,k}$ จะเป็นศูนย์ที่ทุกจุดในสนามไฟฟ้า ยกเว้นที่นิ้กัค i, j, k

เนื่องจากดรรชนีแบบพหุคูณ (Multiple index) ไม่สะดวกในการเขียนสมการ เราจะเขียนแทนด้วยดรรชนีเดี่ยว ในกรณีของสนามไฟฟ้าสองมิติ และใช้พหุนาม Lagrange interpolation อันดับที่ 1 ดังแสดงในรูปที่ 2.7 ค่า α จะมีเพียงสามค่า คือ α_{100} , α_{010} , และ α_{001} ซึ่งจะเขียนแทนค่าเหล่านี้ด้วย α_1 , α_2 , และ α_3 ตามลำดับ



รูปที่ 2.7 การกำหนดหมายเลขดรรชนีของ α ในสนามไฟฟ้าสองมิติ เมื่อใช้พหุนาม Lagrange interpolation อันดับที่ 1

แทนสมการที่ (2.7.1) โดยใช้ดรรชนีเดี่ยวลงในสมการที่ (2.3.1) จะได้ Functional $F(U)$ เป็น

$$\begin{aligned} F(U) &= \frac{1}{2} \iint U_i U_j / \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j d\Omega \\ &= \frac{1}{2} U^T S U \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

โดยที่สมาชิกของเมตริกซ์ S หาได้จาก

$$S_{mn} = \iint \nabla \alpha_m \cdot \nabla \alpha_n d\Omega \quad (2.7.3)$$

เนื่องจาก $F(U)$ เป็นฟังก์ชันสามัญของตัวแปรที่มีจำนวนจำกัด (array U) และ stationary ดังนั้น

$$\partial F / \partial U_m = 0 \quad (2.7.4)$$

เมื่อ $U_m =$ ศักย์ที่ต้องแปรอย่างอิสระ

แทนสมการที่ (2.7.2) ลงในสมการที่ (2.7.4) แล้วหาอนุพันธ์เทียบกับ U_m จะได้

$$SU = 0 \quad (2.7.5)$$

ผลลัพธ์ของสมการที่ (2.7.5) จะเป็นศักย์ที่จุดต่างๆในสนามไฟฟ้า

เมตริกซ์ S ในสมการที่ (2.7.5) มีชื่อเรียกว่า เมตริกซ์ Dirichlet และเป็นเมตริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นค่าคงที่ซึ่งขึ้นกับตำแหน่งของศักย์ในระบบแกนพิกัด ดังนั้นไฟไนต์อีเล็มเมนต์จึงเป็นวิธีที่นิยมใช้แก้ปัญหาสนามไฟฟ้าเพื่อหาศักย์ที่จุดต่างๆ เพราะใช้เพียงรูปร่างของสนามไฟฟ้า, พิกัดของศักย์, และเงื่อนไขขอบเขตเท่านั้นในการแก้ปัญหา

2.8 เมตริกซ์ Dirichlet

จากที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 2.3 ว่าสนามไฟฟ้าสามมิติส่วนใหญ่สามารถแทนได้ด้วยสนามไฟฟ้าสองมิติ หากสนามไฟฟ้านั้นมีสภาพสมมาตรตามระยะทาง หรือสภาพสมมาตรสมมาตรรอบแกนหมุน ดังนั้นเมตริกซ์ Dirichlet ในสมการที่ (2.7.2) จึงมีค่าต่างกัน สำหรับสภาพสมมาตรที่ต่างกัน

ก. เมตริกซ์ Dirichlet สำหรับสภาพสมมาตรตามระยะทาง
โดยทั่วไปสนามไฟฟ้าที่มีสภาพสมมาตรตามระยะทางจะอยู่ในระบบแกนพิกัด
เชิงสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนั้น $d\Omega$ ในสมการที่ (2.7.3) จะเท่ากับ

$$d\Omega = dx dy$$

สมการที่ (2.7.3) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} S_{mn} &= \int (\nabla\alpha_m \cdot \nabla\alpha_n) dx dy \\ &= \int ((\partial\alpha_m/\partial x) \cdot (\partial\alpha_n/\partial x) + (\partial\alpha_m/\partial y) \cdot (\partial\alpha_n/\partial y)) dx dy \quad (2.8.1) \end{aligned}$$

ด้วยการใช้กฎลูกโซ่

$$\partial\alpha_m/\partial x = \sum_{i=1}^3 (\partial\alpha_m/\partial \zeta_i) \cdot (\partial \zeta_i/\partial x) \quad (2.8.2)$$

และจากการหาอนุพันธ์เทียบกับ x ในสมการที่ (2.6.9)

$$\partial \zeta_i/\partial x = (y_{i+1} - y_{i-1}) / 2A \quad (2.8.3)$$

แทนค่าสมการที่ (2.8.2) และ (2.8.3) ลงในสมการที่ (2.8.1) จะได้

$$\begin{aligned} S_{mn} &= (1/4A^2) \cdot \sum_{i,j} (b_i b_j + c_i c_j) \cdot \\ &\int ((\partial\alpha_m/\partial \zeta_i) \cdot (\partial\alpha_n/\partial \zeta_j)) dx dy \quad (2.8.4) \end{aligned}$$

- เมื่อ
- $A =$ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม
 - $b_i = y_{i+1} - y_{i-1}$
 - $c_i = x_{i-1} - x_{i+1}$
 - $i =$ ดรรชนีที่เปลี่ยนแปลงแบบวัฏจักรรอบจุดยอดของสามเหลี่ยม

ข้ามเมชันสองชั้นในสมการที่ (2.8.4) สามารถลดลงเหลือชั้นเดียวได้
เนื่องจาก

$$b_i b_j + c_i c_j = -2A \cot \theta_k, \quad i = j \quad (2.8.5)$$

$$b_i^2 + c_i^2 = 2A (\cot \theta_j + \cot \theta_k) \quad (2.8.6)$$

เมื่อ θ_i เป็นมุมภายในที่จุดยอด i ของรูปสามเหลี่ยม และ i, j, k หมายถึงจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยม (ดูภาคผนวก ก)

สมการที่ (2.8.4) จึงกลายเป็น

$$\begin{aligned} S_{mn} &= \sum_{k=1}^3 \cot \theta_k \cdot \int \left[\left(\frac{\partial \alpha_m}{\partial \zeta_{k+1}} \right) - \left(\frac{\partial \alpha_m}{\partial \zeta_{k-1}} \right) \right] \cdot \\ &\quad \left[\left(\frac{\partial \alpha_n}{\partial \zeta_{k+1}} \right) - \left(\frac{\partial \alpha_n}{\partial \zeta_{k-1}} \right) \right] dx dy / 2A \\ &= \sum_{k=1}^3 \cot \theta_k \cdot Q^{(k)}_{mn} \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

เมตริกซ์ Q ในสมการที่ (2.8.7) จะได้มาจากการหาอนุพันธ์ $dx dy / 2A$ ในรูปของซิมเพลกซ์ แล้วอินทิเกรตแยกส่วน ซึ่งผลลัพธ์จะอยู่ในรูปของ (ดูภาคผนวก ข)

$$\int \zeta_1^i \zeta_2^j \zeta_3^k dx dy / 2A = \int_0^1 \int_0^{1-\zeta_1} \zeta_1^i \zeta_2^j (1-\zeta_1-\zeta_2)^k d\zeta_1 d\zeta_2$$

หรือ

$$\int \zeta_1^i \zeta_2^j \zeta_3^k dx dy = i! j! k! 2! / (i+j+k+2)! \quad (2.8.8)$$

ข. เมตริกซ์ Dirichlet สำหรับสภาพสมมาตรรอบแกนหมุน โดยทั่วไปสนามไฟฟ้าที่มีสภาพสมมาตรรอบแกนหมุนจะอยู่ในระบบแกนพิกัดทรงกระบอก ดังนั้น $d\Omega$ ในสมการที่ (2.3.1) จะเท่ากับ

$$d\Omega = 2\pi r dr dz \quad (2.8.9)$$

และเนื่องจาก r เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นในระบบแกนพิกัด ดังนั้นสำหรับสามเหลี่ยมรูปใดรูปหนึ่ง ค่า r จึงสามารถแทนได้ด้วยค่า r_j ของจุดยอดทั้งสาม [2,7] คือ

$$r = \sum_{j=1}^3 r_j \zeta_j \quad (2.8.10)$$

แทนสมการที่ (2.8.9) และ (2.8.10) ลงในสมการที่ (2.3.1) จะได้ Functional $F(U)$ เป็น

$$F(U) = 2\pi \sum_{j=1}^3 r_j // \zeta_j (\nabla U \cdot \nabla U) dr dz \quad (2.8.11)$$

การหาอนุพันธ์ของ U เกี่ยวกับ r และ z สามารถเปลี่ยนไปเป็นการหาเกี่ยวกับระบบแกนพิกัดซิมเพลกซ์ได้ด้วยการใช้กฎลูกโซ่และวิธีที่กล่าวมาแล้วในกรณีของสมมาตรตามระยะทาง ซึ่งจะมีผลลัพธ์เป็น

$$\frac{\partial U}{\partial r} = (1/2A) \sum_{j=1}^3 b_j \cdot (\partial U / \partial \zeta_j) \quad (2.8.12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = (1/2A) \sum_{j=1}^3 c_j \cdot (\partial U / \partial \zeta_j) \quad (2.8.13)$$

เมื่อ

$$b_i = z_{i+1} - z_{i-1}$$

$$c_i = r_{i-1} - r_{i+1}$$

แทนสมการที่ (2.8.12) และ (2.8.13) ลงในสมการที่ (2.8.11) จะได้

$$F(U) = 2\pi \sum_{i=1}^n r_i // \zeta_i \cdot (1/2A) \cdot \left[\sum_{j=1}^n \cot \theta_j (aU/a\zeta_{j-1} - aU/a\zeta_{j+1})^2 \right] d\text{rd}z \quad (2.8.14)$$

ดังนั้น

$$aF/aU_m = 0$$

$$= \sum_{m=1}^n 1/A \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \cot \theta_l Q^{(i,l)} r_i U_m$$

$$= SU \quad (2.8.15)$$

เมื่อ

$$S = 1/A \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \cot \theta_l Q^{(i,l)} r_i \quad (2.8.16)$$

และ

$$Q^{(i,l)}_{mx} = // \zeta_i (a\alpha_x/a\zeta_{i+1} - a\alpha_x/a\zeta_{i-1}) \cdot (a\alpha_m/a\zeta_{l+1} - a\alpha_m/a\zeta_{l-1}) d\text{rd}z \quad (2.8.17)$$

เมตริกซ์ Q ในสมการที่ (2.8.17) จะหาได้ด้วยวิธีที่คล้ายคลึงกันกับในกรณีของสภาพสมมาตรตามระยะทาง