จุดคอนแทรคชันสำหรับการไหลเคลือบเส้นลวดแบบทิวบ์ทูลลิ่ง

นายสายธาร เทนอิสสระ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิทยาการคณนา ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-53-1677-6

THE CONTRACTION POINT FOR TUBE-TOOLING WIRE-COATING FLOW

Mr. Saitharn Thenissara

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Computational Science
Department of Mathematics
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2004

ISBN 974-53-1677-6

หัวข้อวิทยานิพนธ์ : จุดคอนแทรคชันสำหรับการไหลเคลือบเส้นลวดแบบทิวบ์ทูลลิ่ง

โดย : นายสายธาร เทนอิสสระ

สาขาวิชา : วิทยาการคณนา

อาจารย์ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิมลรัตน์ งามอร่ามวรางกูร

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

. . . . คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. เปี่ยมศักดิ์ เมนะเศวต)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

. . . . ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. จักษ์ อัศวานันท์)

. . . . อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิมลรัตน์ งามอร่ามวรางกูร)

. . . . กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พรชัย สาตรวาหา)

. . . . กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อนุสรณ์ ชนวีระยุทธ)

สายธาร เทนอิสสระ : จุดคอนแทรคชันสำหรับการไหลเคลือบเส้นลวดแบบทิวบ์ทูลลิ่ง. (THE CONTRACTION POINT FOR TUBE-TOOLING WIRE-COATING FLOW) อ. ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิมลรัตน์ งามอร่ามวรางกูร, 107 หน้า. ISBN 974-53-1677-6.

ในปัจจุบันนี้การวิจัยทางการไหลของของไหลนอนนิวโตเนียน ได้แพร่หลายเป็นอย่างมาก ซึ่งบางชนิดของของไหลนอนนิวโตเนียนมีส่วนเกี่ยวข้องกับการผลิตเชิงอุตสาหกรรมที่มีการใช้พอลิเมอร์ เช่น การเคลือบเส้นลวด การทำเส้นใยนำแสง เป็นต้น การไหลเคลือบเส้นลวดมี 2 ลักษณะคือ แบบเพรซเซอร์ทูลลิ่ง ซึ่งเป็นแบบที่พอลิเมอร์หลอมเหลวไหลมาสัมผัสเส้นลวดภายในดาย และแบบทิวบ์ทูลลิ่งเป็นแบบที่พอลิเมอร์หลอมเหลวไหลมาสัมผัสเส้นลวดภายนอกดาย สำหรับจุดแรกสุดที่พอลิเมอร์หลอมเหลวไหลมาสัมผัสกับเส้นลวดจะเรียกว่า จุดคอนแทรคชัน ในงานวิจัยชิ้นนี้จะจำลองปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวดแบบทิวบ์ทูลลิ่ง ด้วยสมการเนเวียร์-สโตกส์ และสมการองค์ประกอบในระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ เพื่อทำนายจุดคอนแทรคชันหลังจากพอลิเมอร์หลอมเหลวไหลออกจากดาย เพื่อหาผลเฉลยของปัญหาที่จำลองขึ้นโดยใช้หลักการเชิงตัวเลขที่เรียกว่า ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะเซมิ-อิมพิซิทเทย์เลอร์กาเลอร์คินเพรชเซอร์คอร์เรคชัน โดยคำนึงถึงปัจจัยต่างๆที่มีผลต่อจุดคอนแทรคชัน เช่น ความดัน ความเร็ว ความตึงผิว ความหนืดของพอลิเมอร์หลอมเหลวและความเร็วของเส้นลวดภายใต้ข้อสมมติฐานที่ว่า ของไหลไม่มีการบีบอัดตัว การไหลเป็นแบบราบเรียบ และระบบไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ

ภาควิชา	คณิตศาสตร์	ลายมือชื่อนิสิต ....
สาขาวิชา	วิทยาการคณนา	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....
ปีการศึกษา 2547		

4472445023 : MAJOR COMPUTATIONAL SCIENCE

KEY WORD : FINITE ELEMENT / WIRE-COATING / TUBE-TOOLING / PTT

SAITHARN THENISSARA : THE CONTRACTION POINT FOR TUBE-TOOLING WIRE-COATING FLOW. THESIS ADVISOR : ASST. PROF. VIMOLRAT NGAMARAMVARANGGUL, Ph.D. 107 pp. ISBN 974-53-1677-6.

Recently the flows behaviour of non-Newtonian fluids are a popular research area for the polymer processing industry, for example of wire-coating, fiber optics etc. Wire-coating processes modelling consist of 2 particular dies: pressure-tooling which the wire coating process begins coating within the die cast, and tube-tooling in which wire is coated by polymer melt outside the die. For the second die, the location where the polymer melt flows to contact wire at the beginning of coating is called the contraction point. In this thesis, the problem of annular tube-tooling extrusion was simulated by using Navier-Stokes and constitutive equations in two dimensional cylindrical coordinate system in order to predict the contraction point of the polymer melt beyond the die. The solutions of this problem are solved by a numerical method which is called semi-implicit Taylor-Galerkin pressure-correction finite element scheme. The factors influencial to the contraction point are pressure, velocity, viscosity, surface tension of polymer melt, and wire speed. These are considered under the following assumptions: incompressible, laminar and isothermal flow.

Department Mathematics	Student's signature ....
Field of study Computational Science	Advisor's signature ....
Academic year 2004	

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ งามอร่ามวรางกูร อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ สำหรับความกรุณาของท่านที่ได้ให้ทั้งความรู้ คำแนะนำ และคำปรึกษาต่างๆ ที่ทำให้งานวิจัยสำเร็จลุล่วงอีกทั้งท่านได้สละเวลาเพื่อแนะนำในการแก้ปัญหาต่างๆและตรวจสอบความถูกต้องของวิทยานิพนธ์จนเสร็จสมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.จักษ์ อัศวานันท์ ประธานกรรมการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พรชัย สาตรวาหา และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนุสรณ์ ชนวีระยุทธ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำและความรู้ในการทำวิจัย ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์และถูกต้อง

ขอกราบขอบพระคุณ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล อิสาน นครราชสีมา ในความสนับสนุนด้านการศึกษาแก่ผู้วิจัย และขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ บังอร วินิจนัยภาค ที่ได้ให้คำแนะนำต่างๆแก่ผู้วิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ชิดชนก เหลือสินทรัพย์ และศูนย์วิจัย Advanced Virtual and Intelligent Computing Center (AVIC) สำหรับความอนุเคราะห์ให้ใช้ศูนย์ AVIC ในการทำงานวิจัยและประมวลผลจนสำเร็วลุล่วง และขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ฤทธิ์ สมบัติสมภพ ที่ได้ชี้แนะและความรู้ในการทำงานวิจัยนี้

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไวท์ยางกูรและขอขอบคุณ คุณภณัฐ ก้วยเจริญพานิชก์ สำหรับความรู้และคำแนะนำในการใช้งาน LaTeX

ขอขอบคุณคุณนวลักษณ์ ทองจับ และคุณศิริกุล บัณฑิตเสาวภาคย์ สำหรับความช่วยเหลือและคำปรึกษาที่เป็นประโยชน์กับงานวิจัย ตลอดจนเพื่อนๆปริญญาโทวิทยาการคณาทุกคน ณ ที่นี้ด้วย

ท้ายสุดผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาและคุณกาญจนา เทนอิสสระ ที่ให้ทั้งคำปรึกษากำลังใจและความช่วยเหลือสนับสนุนในทุกๆด้านแก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ขอมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแด่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

สารบัญรูป

สารบัญตาราง

สัญกรณ์

τ	คือความเค้นเฉือน
$\dot{\gamma}$	คืออัตราเฉือน
$\dot{\varepsilon}$	คืออัตรายืดขยาย
μ	คือความหนืด
μ_N	คือความหนืดของของไหลนิวโตเนียน
μ_V	คือความหนืดของของไหลนอน-นิวโตเนียน
ρ	คือความหนาแน่นที่จุดศูนย์กลางมวล
u	คือความเร็วในแนวแกน X
v	คือความเร็วในแนวแกน Y
u_r	คือความเร็วในแนวแกน R
v_z	คือความเร็วในแนวแกน Z
$\frac{\partial}{\partial x}$	คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x
$\frac{\partial}{\partial y}$	คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y
$\frac{\partial}{\partial t}$	คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลา
x	คือระยะทางในแนวแกน X
y	คือระยะทางในแนวแกน Y
dx	คือค่าเชิงอนุพันธ์ของ x
dy	คือค่าเชิงอนุพันธ์ของ y
$\vec{U}$	คือ เวกเตอร์ของความเร็ว
∇	คือ ตัวดำเนินการเกรเดียนต์
F_x	คือแรงในทิศทางแกน X
m	คือมวล
a_x	คือความเร่งของมวลในทิศทางแกน X
P, p	คือความดัน
σ_x	คือความเค้นฉาก
τ_{xx}	คือความเค้นฉากในแนว XX
τ_{yx}	คือความเค้นเฉือนในแนว XY

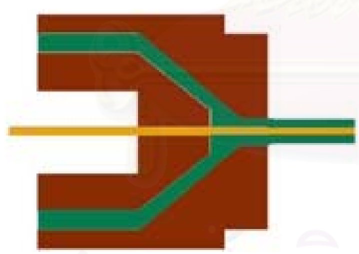
τ_{rr}	คือความเค้นเฉือนในแนว RR
τ_{rz}	คือความเค้นเฉือนในแนว RZ
τ_{zz}	คือความเค้นเฉือนในแนว ZZ
$\tau_{\theta\theta}$	คือความเค้นเฉือนในแนว $\theta\theta$
f_x	คือแรงวัตถุ (body force)
$A^\dagger$	คือเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ A
$\tilde{T}$	คือเทนเซอร์ความเค้นเอ็กซ์ตร้า
δ	คือเทนเซอร์หน่วย หรือโครเนคเคอร์เดลตา
λ	คือเวลาผ่อนคลาย
λ_2	คือเวลาหน่วง
$\dot{\tilde{\tau}}$	คืออัตราการเปลี่ยนแปลงความเค้นเทียบกับเวลา
$\dot{\gamma}$	คืออัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดเทียบกับเวลา
$\tilde{D}$	คือเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป
Re	คือตัวเลขเรย์โนลดส์
We	คือตัวเลขไวส์เซนเบอร์ก
μ_e	คือ ความหนืดแบบยืดขยาย
μ_{eb}	คือ ความหนืดแบบยืดขยายแกนสองทาง
μ_{ep}	คือ ความหนืดแบบยืดขยายเชิงระนาบ
Ω	คือเซตของโดเมน
Γ	คือเซตของค่าขอบ
N_i	คือฟังก์ชันรูปร่างใน 1 มิติ
ψ_i	คือฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นของชิ้นประย่อยรูปสามเหลี่ยม
ϕ_i	คือฟังก์ชันรูปร่างกำลังสองของชิ้นประย่อยรูปสามเหลี่ยม
ϕ_i^{petrov}	คือฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเพทรอฟ
$\tilde{J}$	คือจาโคเบียนเมทริกซ์
χ	คืออัตราการบวมตัว
t_r, t_z	เป็นแรงตั้งฉากที่ผิว
ρ_1, ρ_2	เป็นรัศมีความโค้งของผิวอิสระ
g	เป็นค่าคงที่เนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก
γ_{LV}	เป็นสัมประสิทธิ์แรงตึงผิวของพอลิเมอร์

บทที่ 1

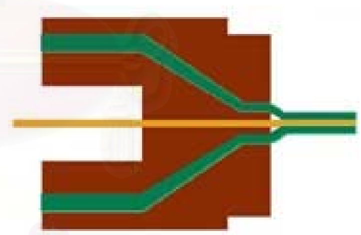
บทนำ (Introduction)

ในชีวิตประจำวันของมนุษย์และกระบวนการผลิตสิ่งต่างๆในโรงงานอุตสาหกรรมหรือโรงงานไฟฟ้าและโรงงานอื่นๆอีกมากมายล้วนอาศัยไฟฟ้ามาใช้ในการให้พลังงานเพื่อเกิดแสงสว่าง โดยมีสายไฟเป็นตัวกลางสำคัญในการทำให้เกิดไฟฟ้าไปยังที่ต่างๆตามต้องการ จึงเป็นการอำนวยความสะดวกให้กับมนุษย์เป็นอย่างมาก แต่ถ้าสายไฟเกิดชำรุดหรือฉีกขาดอาจทำให้เกิดอันตรายได้ง่าย อันจะเป็นผลเสียอย่างมหันต์ ดังนั้นการเคลือบลวดสายไฟที่ดีจึงเป็นสิ่งที่ผู้ผลิตและผู้บริโภคมีความต้องการ

การผลิตลวดสายไฟในกระบวนการอัดรีด (extrution) เป็นกระบวนการทำให้พอลิเมอร์หลอมเหลวจากความร้อนเคลื่อนที่ผ่านหัวดาย (die) แล้วบวมตัวออกมาเคลือบลวดสายไฟ ซึ่งหัวดายที่ใช้มีอยู่ 2 ลักษณะใหญ่ คือการเคลือบแบบเพรชเชอร์ทูลลิ่ง (pressure tooling) และแบบทิวบ์ทูลลิ่ง (tube tooling) ดังรูปที่ 1.1 (a) และ 1.1 (b) ตามลำดับ



(a)



(b)

รูปที่ 1.1: กระบวนการเคลือบลวดสายไฟ (a) pressure tooling และ (b) tube tooling

ความแตกต่างระหว่างการเคลือบลวดสายไฟของทั้งสองลักษณะดังรูปที่ 1.1 คือการเคลือบลวดสายไฟแบบเพรชเชอร์ทูลลิ่ง (pressure tooling) ของไหลจะเคลือบลวดสายไฟตั้งแต่ภายในดาย ซึ่งมักใช้เคลือบลวดสายไฟเปลือยหรือลวดสายไฟที่มีขนาดไม่ใหญ่มากนัก ส่วนการเคลือบลวดสายไฟแบบทิวบ์ทูลลิ่ง (tube tooling) ของไหลจะตกลงมาเคลือบลวดสายไฟที่กำลังเคลื่อนที่ภายนอกดาย โดยหน้าตัดของดายจะเป็นแบบวงแหวน (annular) เหมาะสำหรับการเคลือบลวดสายไฟที่มีขนาดใหญ่

หรือสำหรับเคลือบรวมสายไฟที่หุ้มแล้วหลายๆเส้นให้เป็นเส้นเดียวกัน แต่เนื่องจากข้อจำกัดในเรื่องของเวลาและค่าใช้จ่ายที่จะสูญเสียไปกับการทดลองเพื่อหาวิธีที่ดีที่สุดสำหรับการเคลือบลวดสายไฟ อีกทั้งดายที่ใช้ในเครื่องอัดรีด (extruder) มีขนาดเล็กซึ่งต้องมีการออกแบบให้เหมาะสม รวมทั้งวัสดุพอลิเมอร์ที่นำมาใช้ควรมีความคงทนและมีราคาไม่แพง นอกจากนี้การใช้วัตถุดิบชนิดเดียวกันเป็นเวลานานๆ สามารถทำให้วัตถุดิบนั้นหมดลงได้ จึงต้องหาพอลิเมอร์ชนิดอื่นที่ราคาถูกและหาได้ง่ายมาทดแทน ดังนั้นการทดลองทำจากของจริงจึงเป็นการสูญเสียงบประมาณจำนวนมาก เพื่อให้เกิดความประหยัดและลดเวลาในการทดลองจริง จึงหันมาใช้การทำแบบจำลองด้วยตัวแบบคณิตศาสตร์แล้วแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) จึงเป็นทางเลือกที่ดีสำหรับช่วยในการออกแบบกระบวนการผลิตลวดสายไฟ ทั้งในส่วนของความเร็วที่ใช้ในการขับเคลื่อนพอลิเมอร์หลอมเหลว ขนาดและรูปร่างของดาย และรูปแบบการไหลของพอลิเมอร์ เพื่อให้ได้ลวดสายไฟที่มีคุณภาพดีเกิดความเค้นตกค้าง (residual stress) น้อย และลวดสายไฟมีความราบเรียบสม่ำเสมอ จึงมีผู้สนใจศึกษากันอย่างมากมายตั้งแต่ปี 1967 โดย Fenner และ Williams [1] ได้จำลองแบบการไหลเคลือบลวดสายไฟด้วยตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ต่อมาในปี 1978 Caswell และ Tanner [2] ได้ทำการศึกษาลักษณะของดายที่ใช้เคลือบลวดสายไฟ โดยใช้ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ (finite element method, FEM) เพื่อทำนายสายกระแส (streamline) และลักษณะการเปลี่ยนแปลงของความเค้นภายในดายและต่อมา Mitsoulis [3] ได้ทำการศึกษาการไหลของพอลิเมอร์และการถ่ายเทความร้อนในกระบวนการเคลือบลวดสายไฟ ในปี 1986 และอีก 2 ปีต่อมา Mitsoulis et al. [4] ได้ศึกษาการเคลือบลวดสายไฟความเร็วสูงด้วยพอลิเมอร์ชนิดที่เรียกว่า โพลีเอททีลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (low-dencity polyethylene, LDPE) ด้วยระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะและทำการปรับผลเฉลยให้ราบเรียบด้วยเทคนิคสายกระแสอัพวิน/เพ็ทโทรฟ-กาเลอร์คิน (streamline-upwind/Petrov-Galerkin technique, SUPG) โดยอาศัยตัวแบบ power law fluids ภายใต้สมมุติฐานทั้งที่อุณหภูมิคงที่และไม่คงที่ ซึ่งทำการเปรียบเทียบผลกับการทดลอง

ในศตวรรษที่ 20 มีผู้สนใจศึกษาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพิ่มมากขึ้น เช่น ในปี 1996 Binding et al. [5] ได้ศึกษาตัวแบบจำลองของพอลิเมอร์หลอมเหลวในกระบวนการไหลเคลือบลวดสายไฟความเร็วสูงซึ่งได้พิจารณาความหนืดเฉือน (shear viscosity) และความหนืดขยาย (extensional viscosity) แบบคงตัว ต่อมา Gunter et al. [6] ได้พิจารณาการเคลือบลวดสายไฟ แบบเพรชเชอร์ทูลลิ่ง (pressure tooling) จากนั้นในปี 1998 Mutlu et al. [7] ได้ศึกษาในส่วนของการเคลือบลวดสายไฟ แบบทิวบ์ทูลลิ่ง (tube tooling) ซึ่งเป็นการไหลเคลือบลวดสายไฟของของไหลประเภทวิสโคอีลาสติก (viscoelastic flow) เมื่ออุณหภูมิไม่คงที่ (non-isothermal case) ด้วยวิธี coupled และ decouple นอกจากนี้มีผู้ศึกษาแบบจำลองโดยใช้สมการความเค้นเชิงอนุพันธ์ (differential stress model) แบบ multi-mode

หรือพิจารณาค่าเวลาผ่อนคลาย (relaxation time) λ_1 หลายๆค่าเช่น Baaijeans et al. [8], Azaiez et al. [9] และ Gupta et al. [10] ได้แสดงให้เห็นว่าวิธีการแบบ multi-mode สำหรับตัวแบบองค์ประกอบ (constitutive model) ให้ผลที่แม่นยำ สามารถแสดงพฤติกรรมและคุณสมบัติของวัสดุได้ดีกว่าแบบ single-mode หรือแบบที่พิจารณา λ_1 เพียงค่าเดียว

ปี 1998 เป็นต้นมา Matallah et al. [11] ได้ศึกษาโดยใช้ตัวแบบองค์ประกอบเพนเทียนเทนเนอร์ (Phan-Thien/Tanner constitutive models, PTT) ในส่วนของตัวแบบองค์ประกอบ โดยพิจารณาทั้งแบบ single-mode และ multi-mode สำหรับแบบ multi-mode ได้ศึกษาเปรียบเทียบกับพอลิเมอร์หลอมเหลว 2 ชนิดคือ LDPE และ โพลีเอททีลีนที่มีความหนาแน่นสูง (high-dencity polyethylene, HDPE) เพื่อทำนายพฤติกรรมการไหลเคลือบลวดสายไฟในเครื่องมือแบบทิวบ์ทูลลิ่ง (tube tooling) ภายใต้สมมุติฐานที่ว่าของไหลไม่มีการบีบอัดตัว (incompressible flow) อุณหภูมิไม่เปลี่ยนแปลง (isothermal flow) และไม่มีผลกระทบของการลื่นไหล (no slip) บริเวณผนังภายในดาย อีก 2 ปีถัดมา Ngamaramvaranggul และ Webster [12, 13, 14, 15] ได้ทำการศึกษาต่อโดยเพิ่มเงื่อนไขของการลื่นไหล (slip condition) บริเวณผนังภายในดาย เพื่อคำนวณหาพื้นผิวอิสระระนาบด้านบน ซึ่งพิจารณาการไหลเคลือบลวดสายไฟทั้งการไหลเคลือบแบบเพรชเชอร์ทูลลิ่งและแบบทิวบ์ทูลลิ่ง

ในงานวิจัยนี้จะศึกษากระบวนการเคลือบลวดสายไฟแบบทิวบ์ทูลลิ่ง สำหรับของไหลนอนนิวโตเนียน (non-Newtonian fluid) ซึ่งใช้สมการองค์ประกอบ (constitutive equation) ในตัวแบบ PT-T โดยจะคำนวณหาพื้นผิวอิสระทั้งระนาบด้านบนและด้านล่าง เพื่อนำมาวิเคราะห์หาจุดคอนแทรคชัน (contraction point) ซึ่งเป็นจุดแรกที่พอลิเมอร์หลอมเหลวไหลออกจากดายมาปะทะลวดสายไฟที่ต้องการเคลือบ เมื่อของไหลไหลไปในทิศทางเดียวกับลวดสายไฟ และทำการจำลองปัญหาด้วยตัวแบบทางคณิตศาสตร์ (mathematical modeling) ที่เรียกว่า สมการเนเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation) ในระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ ซึ่งพิจารณาในระบบไร้หน่วย (dimensionless system) แล้วแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เรียกว่า ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ (finite element method, FEM) ในหลักการเซมิอิมพลิซิทเทย์เลอร์กาเลอร์คินเพรชเชอร์คอร์เรคชัน (semi-implicit Taylor Galerkin pressure correction) โดยแบ่งบริเวณที่ต้องการศึกษาออกเป็นชิ้นประกอบ (element) ย่อยๆรูปสามเหลี่ยมชนิด 6 โนดและชนิด 3 โนด เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น (non-linear partial differential equation) สำหรับของไหลที่พิจารณาเป็นชนิดวิสโคอีลาสติกประเภท LDPE และ HDPE ภายใต้สมมุติฐานที่ว่าของไหลไม่บีบอัดตัว (incompressible flow) มีการไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) ไม่ขึ้นกับแรงโน้มถ่วงของโลก ระบบไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ (isothermal system) โดยการใช้โปรแกรมด้วยภาษาฟอร์แทนสำหรับหาผลเฉลยของปัญหา

1.1 วัตถุประสงค์ (Objective)

จำลองปัญหาเพื่อทำนายจุดคอนแทรคชันของการไหลเคลือบเส้นลวดแบบทิวบ์ทูลลิ่ง

1.2 วิธีการดำเนินงานและขอบเขต (Methodology and scope)

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานพลศาสตร์ของไหล, Polymer Rheology, Polymer Processing, จุดมุ่งหมายและขอบข่ายของโครงการวิจัย
2. ศึกษาระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ
3. พัฒนาระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะสำหรับการไหลเคลือบเส้นลวด
4. พัฒนาโปรแกรม ทดสอบ และตรวจแก้โปรแกรม
5. วิเคราะห์ผล
6. สรุปผลและเขียนวิทยานิพนธ์

1.3 ประโยชน์ที่ได้รับ (Benefit)

1. ได้โปรแกรมเพื่อทำนายจุดคอนแทรคชัน สำหรับการจำลองปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวดแบบทิวบ์ทูลลิ่งของพอลิเมอร์หลอมเหลว
2. เป็นแนวทางในการสร้างแบบจำลองเพื่อใช้ในอุตสาหกรรมที่เกี่ยวข้อง
3. เป็นแนวทางเพื่อพัฒนาระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะในงานอุตสาหกรรมการเคลือบลวดสายไฟ

บทที่ 2

กลศาสตร์ของไหล (Fluid Mechanics)

กลศาสตร์ของไหล (fluid mechanics) แบ่งออกเป็น 3 สาขาที่สำคัญคือ สถิตยศาสตร์ของไหล (fluid statics) หรือศาสตร์ของไหลในสภาวะหยุดนิ่ง ไคเนเมติกส์ของไหล (fluid kinematics) หรือศาสตร์ว่าด้วยการเคลื่อนไหวเมื่อพิจารณาความเร็ว (velocity) และสายกระแส (streamline) โดยไม่มีแรงหรือพลังงานมาเกี่ยวข้อง และพลศาสตร์ของไหล (fluid dynamics) คือศาสตร์ว่าด้วยการเคลื่อนไหวของของไหลโดยรวมความเร็ว, ความเร่ง (acceleration) และแรงกระทำต่างๆ อันเกิดจากการเคลื่อนที่ของของไหล ทั้งนี้พฤติกรรมการเคลื่อนที่ของของไหลและผลกระทบที่เกิดขึ้น จะขึ้นกับชนิดของของไหลที่นำมาพิจารณาว่าเป็นลักษณะอัดตัวได้ (compressible fluid) เช่น ก๊าซต่างๆ และอากาศ เป็นต้น หรือลักษณะที่ไม่อัดตัว (incompressible fluid) เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง ความเค้นเฉือน τ (shearing stress) กับอัตราเฉือน $\dot{\gamma}$ (shear rate) ตามสมการความหนืดของนิวตัน (Newtion's equation of viscosity)

$$\tau = \mu\dot{\gamma} \tag{2.1}$$

จัดรูปสมการ 2.1 ใหม่เป็น

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \tag{2.2}$$

เรียก μ ว่าเป็นสัมประสิทธิ์ของความหนืด (coefficient of viscosity) ทำให้จำแนกของไหลออกเป็น 2 ประเภทคือ

1. ของไหลนิวโตเนียน[1] (Newtonian fluid) คือ ของไหลที่มีความหนืดเป็นไปตามกฎของนิวตัน ซึ่งจะมีความหนืดเฉือน (shear viscosity) คงที่เมื่อมีการเปลี่ยนอัตราเฉือน (shear rate)

2. ของไหลนอนนิวโตเนียน (non-Newtonian fluid) คือ ของไหลที่มีความหนืดไม่เป็นไปตามกฎของนิวตัน

[1]ตัวอย่างเช่น น้ำ สารละลายเจือจาง และน้ำนม เป็นต้น

จากหนังสือของณรงค์ฤทธิ์ สมบัติสมภพ และ ชาคริต สิริสิงห [16], Morton-Jones [17] และ Tanner [18] สำหรับของไหลนอนนิวโตเนียนเมื่อพิจารณาความหนืดเฉือนเทียบกับเวลา จะแบ่งได้เป็น 2 ประเภทคือ

1. ประเภทของไหลที่มีความหนืดเฉือนขึ้นกับเวลา (time dependent fluid) เป็นกลุ่มของของไหลที่ ความหนืดเฉือนขึ้นอยู่กับเวลาเมื่อมีแรงกระทำต่อของไหลนั้น แบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ

    1.1 ทิกโอโทรปิค (Thixotropic) เป็นกลุ่มของของไหลที่มีความหนืดเฉือนลดลงจนเข้าสู่ค่าคงที่ค่าหนึ่งเมื่อเวลาผ่านไป จะทำให้แรงกระทำต่อของไหลนั้นเพิ่มขึ้น

    1.2 รีโอเปคทิก (Rheopectic) เป็นกลุ่มของของไหลที่มีความหนืดเฉือนเพิ่มขึ้นจนเข้าสู่ค่าคงที่ค่าหนึ่งเมื่อเวลาผ่านไปแรงกระทำต่อของไหลนั้นเพิ่มขึ้น พิจารณาความสัมพันธ์ได้ดังรูปที่ 2.1 (a) และ 2.1 (b) ตามลำดับ

2. ประเภทของไหลที่มีความหนืดเฉือนไม่ขึ้นกับเวลา (time independent fluids) เป็นกลุ่มของของไหลที่มีความหนืดเฉือนขึ้นอยู่กับอัตราเฉือน ดังรูปที่ 2.2 แบ่งออกเป็น 3 ชนิด

    2.1 ซูโดพลาสติก[2](pseudo-plastic) หรือ (shear-thinning fluid) เป็นกลุ่มของของไหลที่มีความหนืดเฉือนมีค่าลดลงเมืออัตราเฉือนมีค่าเพิ่มขึ้น

    2.2 ไดเลเทน[3](dilatant) หรือ (shear-thickening fluid) เป็นกลุ่มของของไหลที่มีความหนืดเฉือนสูงขึ้นเมื่อมีการเพิ่มค่าของอัตราเฉือน

    2.3 บิงเฮม[4] (Bingham fluid) เป็นกลุ่มของของไหลที่มีความค่าความเค้นเฉือนเกินค่าๆ หนึ่งแต่ยังคงมีอัตราการเปลี่ยนแปลงคงที่

ในการศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของของไหล โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ควรทำความเข้าใจในเรื่องต่อไปนี้

1. สมการควบคุม (governing equation)

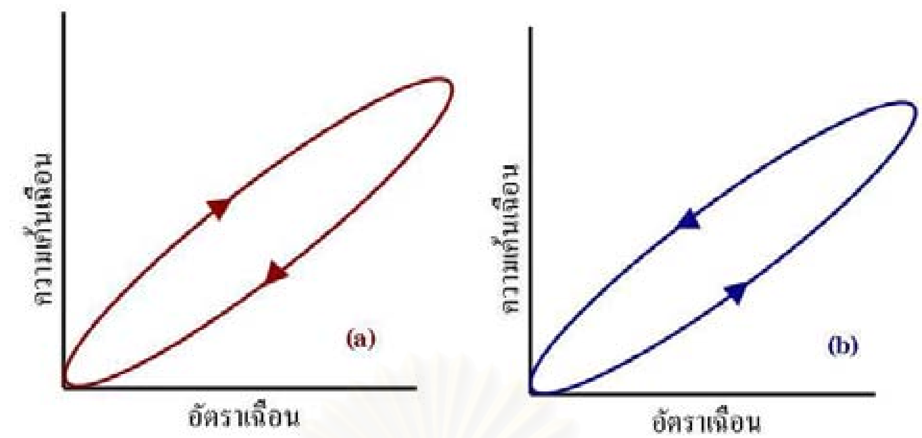
2. เงื่อนไขค่าเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบเขต (initial condition and boundary condition)

3. เรขาคณิตของโดเมน (geometry of domain)

[2]ตัวอย่างเช่น พอลิเมอร์หลอมเหลวส่วนใหญ่ เป็นต้น

[3]ตัวอย่างเช่น เจลพีวีซี และน้ำแป้ง เป็นต้น

[4]ตัวอย่างเช่น ไขมันสัตว์ น้ำมันพืช เลือด สารละลายพอลิเมอร์ และยาสีฟัน เป็นต้น



รูปที่ 2.1: ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนกับอัตราเฉือน สำหรับของไหลที่มีความหนืดขึ้นกับเวลา แบ่งเป็น (a) ทิกโซโทรปิค (b) รีโอเปคทิก

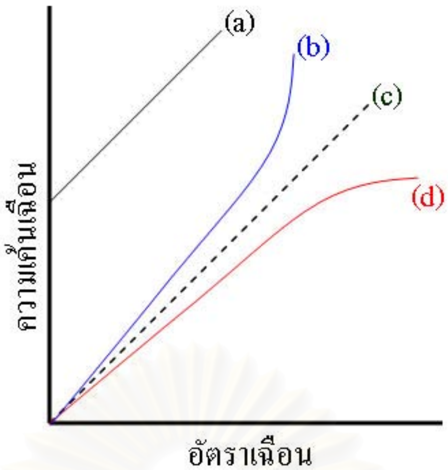
การกำหนดสมการควบคุมให้พิจารณาตามหลักการที่สำคัญดังนี้ หลักการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) หลักการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) และหลักการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) ดังรายละเอียดในหัวข้อถัดไป การจำลองปัญหาในรูปแบบสมการทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการเคลือบเส้นลวดสายไฟจะอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น ในวิทยานิพนธ์นี้จะไม่พิจารณาหลักการอนุรักษ์พลังงาน เนื่องจากการตั้งสมมุติฐานที่ให้ระบบไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ ในปัญหานี้เป็นการศึกษาของไหลนอนนิวโตเนียนจึงต้องเพิ่มสมการองค์ประกอบ (constitutive equation) เพื่อหาค่าความเค้น

2.1 กฎการอนุรักษ์ (Conservation law)

สมการที่ใช้ในการอธิบายพฤติกรรมการไหลของของไหล ส่วนใหญ่มาจากระบบทางกายภาพ (physical system) โดยทั่วไปพิจารณาเป็น 3 หลักใหญ่ๆ ได้แก่

1. หลักการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) หรือความต่อเนื่อง (continuity)
2. หลักการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) หรือกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law)
3. หลักการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) หรือกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ (first law of thermodynamics)

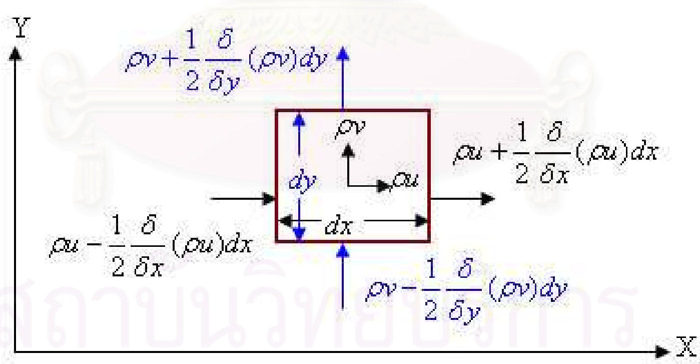
ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้เพียง 2 หลักการเท่านั้น จึงไม่กล่าวถึงหลักการที่ 3



รูปที่ 2.2: ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนกับอัตราเฉือน สำหรับของไหลที่มีความหนืดไม่ขึ้นกับเวลา แบ่งเป็น (a) บริงเฮม (b) ไดเลเทน (c) นิวโตเนียน (d) ซูโดพลาสติก

2.1.1 หลักการอนุรักษ์มวล (conservation of mass)

สำหรับการไหลของของไหลผ่านโดเมนให้คำนึงถึงหลักการอนุรักษ์มวลที่ว่า "อัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลที่ผ่านโดเมนเท่ากับอัตราที่มวลไหลเข้ามาหรือออกจากโดเมน" ดังความสัมพันธ์ตามรูปที่ 2.3 โดยอาศัยหลักการอนุรักษ์มวลสามารถสร้างสมการทางคณิตศาสตร์ ได้ดังนี้



รูปที่ 2.3: การไหลของของไหลผ่านโดเมนสำหรับหลักการอนุรักษ์มวล [19]

$$\left\{\rho u + \frac{1}{2}\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right\}dy + \left\{\rho v + \frac{1}{2}\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right\}dx - \left\{\rho u - \frac{1}{2}\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right\}dy - \left\{\rho v - \frac{1}{2}\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right\}dx = -\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdy \quad (2.3)$$

เมื่อ ρ คือความหนาแน่นที่จุดศูนย์กลางมวล

u คือความเร็วในแนวแกน X

v คือความเร็วในแนวแกน Y

$\frac{\partial}{\partial x}$ คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x

$\frac{\partial}{\partial y}$ คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y

$\frac{\partial}{\partial t}$ คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลา

x คือระยะทางในแนวแกน X

y คือระยะทางในแนวแกน Y

dx คือค่าเชิงอนุพันธ์ของ x

dy คือค่าเชิงอนุพันธ์ของ y

จัดรูปสมการ 2.3 ใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \tag{2.4}$$

และเรียกสมการ 2.4 ว่า สมการความต่อเนื่อง (continuity equation) โดยที่

$\vec{U}$ คือ เวกเตอร์ของความเร็ว

∇ คือ ตัวดำเนินการเกรเดียนต์ (gradient operator)

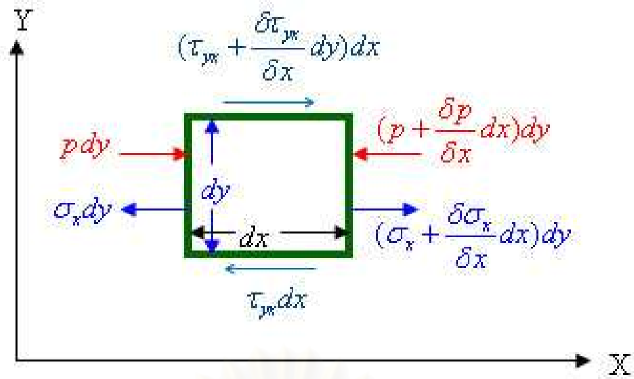
ปัญหาที่ศึกษาคือปัญหาของของไหลที่เป็นแบบไม่อัดตัว ดังนั้นความหนาแน่นจึงเป็นค่าคงตัว เมื่อพิจารณาในแต่ละตำแหน่งต่างๆของเส้นทางการไหล (flow path) ของของไหลจะมีการไหลคงตัว (steady flow) นั่นคือของไหลมีความเร็วในการไหลคงตัวตลอดระยะเวลาและความยาวของการไหล จึงทำให้นิพจน์แรกทางซ้ายของสมการ 2.4 มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการความต่อเนื่อง 2.4 จึงกลายเป็น

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \tag{2.5}$$

2.1.2 หลักการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum)

กฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law) กล่าวว่า "แรงลัพธ์เท่ากับมวลคูณด้วยความเร่ง" ในกฎข้อนี้ทำให้ทราบความสัมพันธ์ของแรงกับมวลและความเร่ง เมื่อพิจารณามวลที่ขนาดความกว้างเป็น dx และ dy ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล ดังรูปที่ 2.4

พิจารณารูปที่ 2.4 ในทิศทางแนวแกน X โดยใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้



รูปที่ 2.4: การไหลของของไหลผ่านโดเมนสำหรับหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม [20]

$$\sum F_x = ma_x \tag{2.6}$$

โดยที่

F_x คือแรงในทิศทางแกน X

m คือมวลของโดเมนของของไหลที่กำลังพิจารณา

a_x คือความเร่งของมวลในทิศทางแกน X

แรงรวมในทิศทางแกน X ประกอบด้วยแรงที่ผิว (surface forces) เช่น ความดัน p, ความเค้นฉาก (normal stress) σ_x, ความเค้นเฉือน (shear stress) τ_{yx} และแรงวัตถุ (body force) f_x เป็นต้น ดังนั้นแรงรวมที่อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์คือ

$$F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right] dxdy + \rho f_x dxdy \tag{2.7}$$

มวลของโดเมนของของไหลที่กำลังพิจารณาคือ

$$m = \rho dxdy \tag{2.8}$$

เนื่องจากความเร่งคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วของอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่เทียบกับเวลา จึงได้ว่า

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \tag{2.9}$$

เมื่อตัวดำเนินการ

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \tag{2.10}$$

ดังนั้นอนุพันธ์รวมของ $\vec{U}$ มีค่าเป็น

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + \vec{U}\cdot\nabla U \tag{2.11}$$

จากสมการ 2.6 เมื่อพิจารณาในทิศทางแกน X และจัดรูปใหม่จะได้

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \tag{2.12a}$$

ในทำนองเดียวกัน จากกฎข้อที่สองของนิวตัน เมื่อพิจารณาในทิศทางแกน Y ทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \rho f_y \tag{2.12b}$$

เรียกสมการ 2.12a และ 2.12b ว่า สมการเนเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation) เพื่อเป็นเกียรติแก่ M. Navier และ G. Stokes ซึ่งเป็นชาวฝรั่งเศสและชาวอังกฤษ ผู้สร้างสมการนี้ขึ้นมา (ศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [21, 22])

เนื่องจาก

$$\frac{\partial\rho\vec{U}}{\partial t} = \rho\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + \vec{U}\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

ดังนั้น

$$\rho\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} = \frac{\partial\rho\vec{U}}{\partial t} - \vec{U}\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{2.13}$$

และเนื่องจาก

$$\nabla\cdot(\rho U\vec{U}) = U\nabla\cdot(\rho\vec{U}) + (\rho\vec{U})\cdot\nabla U$$

นั่นคือ

$$(\rho\vec{U})\cdot\nabla U = \nabla\cdot(\rho U\vec{U}) - U\nabla\cdot(\rho\vec{U}) \tag{2.14}$$

จากสมการ 2.11, 2.13, 2.14 และหลักการอนุรักษ์มวล จะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$\rho\frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + \rho\vec{U}\cdot\nabla U \tag{2.15}$$

และเมื่อพิจารณาสมการ 2.12a, 2.12b และ 2.15 จะได้สมการเนเวียร์-สโตกส์อยู่ในรูป

$$\rho\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} = \nabla\cdot\tilde{T} - \rho\vec{U}\cdot\nabla U - \nabla p + \rho\vec{f} \tag{2.16}$$

เมื่อ $\tilde{T}$ คือ เทนเซอร์ความเค้นเอ็กซ์ตร้า (extra stress tensor) ซึ่งหากพิจารณาของไหลนิวโตเนียน เทนเซอร์ความเค้นเอ็กซ์ตร้าคือ

$$\tilde{T} = 2\mu_N\tilde{D} \tag{2.17}$$

$$\tilde{D} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{U} + \nabla\vec{U}^{\dagger}) \tag{2.18}$$

เมื่อ $\tilde{D}$ คือ เทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (rate of deformation tensor), μ_N คือ ความหนืด และ $\nabla\vec{U}^{\dagger}$ คือเมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose of matrix) ของ $\nabla\vec{U}$

เนื่องจากระบบที่ศึกษาไม่ขึ้นกับแรงโน้มถ่วงของโลก จึงไม่พิจารณานิพจน์ของแรงวัตถุ สมการ 2.16 เขียนได้เป็น

$$\rho\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} = \nabla\cdot\tilde{T} - \rho\vec{U}\cdot\nabla U - \nabla p \tag{2.19}$$

สำหรับของไหลนอนนิวโตเนียน เทนเซอร์ความเค้นเอ็กซ์ตร้า $\tilde{T}$ จะอยู่ในรูป

$$\tilde{T} = \tilde{\tau} + 2\mu_N\tilde{D} \tag{2.20}$$

เมื่อ $\tilde{\tau}$ คือ ความเค้นของพอลิเมอร์ และ μ_N คือ ความหนืดของของไหลนิวโตเนียน(ตัวทำละลาย) [23]

2.2 สมการองค์ประกอบ (Constitutive equation)

การศึกษาพฤติกรรมการไหลของของไหล มีค่าที่ต้องนำมาพิจารณาอีกค่าหนึ่งคือ เทนเซอร์ความเค้นของโคชี (Cauchy stress tensor) ซึ่งอยู่ในนิพจน์ของความดัน p, เทนเซอร์หน่วย (unit tensor) δ และเทนเซอร์ความเค้นเอ็กซ์ตร้า T ดังสมการ

$$\tilde{\sigma} = -p\tilde{\delta} + \tilde{T} \tag{2.21}$$

โดยที่ เทนเซอร์หน่วย (unit tensor) $\tilde{\delta}$ หรือที่เรียกว่า โครเนคเคอร์เดลตา (Kronecker delta) นิยามไว้ว่า

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{2.22}$$

พิจารณาความสัมพันธ์ของสมการองค์ประกอบ จากเทนเซอร์ความเค้นเอ็กซ์ตร้า โดยแยกพิจารณาตามประเภทของของไหล ซึ่งในวิทยานิพนธ์เล่มนี้จะยกตัวแบบมาศึกษาดังหัวข้อต่อไปนี้

2.2.1 ตัวแบบแมกซ์เวลล์ (Maxwell model)

แมกซ์เวลล์ทำการศึกษาของไหลชนิดวิสโคอีลาสติก (viscoelastic fluid) และสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ [24, 25] ซึ่งได้มาจากกฎของฮุกส์ (Hooke's law) [26] โดยพิจารณาค่าคงที่สปริงของฮุกส์ (Hookean spring of constant) k ซึ่งเกี่ยวกับความหนืดของนิวตัน μ_N ดังรูปที่ 2.2 เส้นปะ (c) ได้ดังนี้

$$\tilde{\tau} + \lambda\dot{\tilde{\tau}} = \mu_N\dot{\gamma} \tag{2.23}$$

เมื่อ $\tilde{\tau}$ คือเทนเซอร์ความเค้น, $\lambda = \dfrac{\mu_N}{k}$ คือเวลาผ่อนคลาย (relaxation time), $\dot{\tilde{\tau}}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงความเค้น (stress rate) เทียบกับเวลา และ $\dot{\gamma}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียด (strain rate) เทียบกับเวลา แมกซ์เวลล์ได้สร้างตัวแบบใน 2 ลักษณะคือ

1. ตัวแบบแมกซ์เวลล์แบบพาบนไม่เชิงเส้น (non-linear upper convected Maxwell model) หรือตัวแบบแมกซ์เวลล์-บี (Maxwell-B model) มีความสัมพันธ์ดังสมการ

$$\tilde{T} + \lambda \overset{\triangledown}{\tilde{T}} = 2\mu_N \tilde{D} \tag{2.24a}$$

   โดยที่

$$\overset{\triangledown}{\tilde{T}} = \frac{D\tilde{T}}{Dt} - \tilde{T} \cdot \tilde{L} - (\tilde{T} \cdot \tilde{L})^\dagger \tag{2.24b}$$

   เมื่อ $\tilde{L} = \nabla \vec{U}$

2. ตัวแบบแมกซ์เวลล์แบบพาล่างไม่เชิงเส้น (non-linear lower convected Maxwell model) หรือตัวแบบแมกซ์เวลล์-เอ (Maxwell-A model) มีความสัมพันธ์ดังสมการ

$$\tilde{T} + \lambda \overset{\vartriangle}{\tilde{T}} = 2\mu_N \tilde{D} \tag{2.25a}$$

   โดยที่

$$\overset{\vartriangle}{\tilde{T}} = \frac{D\tilde{T}}{Dt} + \tilde{T} \cdot \tilde{L} + (\tilde{T} \cdot \tilde{L})^\dagger \tag{2.25b}$$

ตัวแบบแมกซ์เวลล์เหมาะกับของไหลที่มีความหนืดเกือบสอดคล้องกับกฎของนิวตัน จึงไม่สามารถอธิบายของไหลวิสโคอีลาสติกส่วนมากได้ ดังนั้นจึงมีการพัฒนาตัวแบบแมกซ์เวลล์ โดยอ็อลดรอยด์ ดังอธิบายในหัวข้อต่อไปนี้

2.2.2 ตัวแบบอ็อลดรอยด์-บี (Oldroyd-B model)

ในปี 1950 อ็อลดรอยด์ ได้พัฒนาตัวแบบอ็อลดรอยด์บีจากตัวแบบแมกเวลล์แบบพาบนไม่เชิงเส้น [27] โดยพิจารณาสารละลายพอลิเมอร์ชนิดวิสโคอีลาสติก ที่มีของไหลนิวโตเนียนเป็นตัวทำละลาย ซึ่งมีสมการเป็น

$$\tilde{T} + \lambda \overset{\triangledown}{\tilde{T}} = 2\mu \tilde{D} \tag{2.26}$$

ทำการกระจายเทอมและจัดรูปสมการ 2.26 ใหม่ จะได้สมการตัวแบบอ็อลดรอยด์สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\tilde{T} + \lambda_1 \overset{\triangledown}{\tilde{T}} = 2\mu(\tilde{D} + \lambda_2 \overset{\triangledown}{\tilde{D}}) \tag{2.27}$$

โดยที่ $\overset{\nabla}{\tilde{D}}$ คือ เทนเซอร์อัตราการผิดรูปพาบน, ความหนืดรวม คือ $\mu = \mu_V + \mu_N$ และเวลาหน่วง (retardation time) $\lambda_2 = \dfrac{\mu_N \lambda_1}{\mu}$

เมื่อปี 1980 Paddon และ Holstein [28] ใช้ตัวแบบอ็อลดรอยด์ โดยทำการวิยุต (discretization) สำหรับระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (finite difference method , FDM) ต่อมาอีก 2 ปี Crochet และ Keunings [29] ทำการวิยุต (discretization) สำหรับระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ ตามสมการ 2.27 ซึ่งอยู่ในรูป

$$\tilde{T} = \tilde{\tau} + 2\mu_N \tilde{D} \tag{2.28a}$$

โดยที่

$$\tilde{\tau} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\tilde{\tau}} = 2\mu_V \tilde{D} \tag{2.28b}$$

ในปี 2000 Ngamaramvaranggul และ Webster [14, 23] ได้ใช้ตัวแบบอ็อลดรอยด์บีกับปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวดในเครื่องมือทั้ง 2 ชนิดคือ เพรซเซอร์ทูลลิ่ง และทิวบ์ทูลลิ่ง

สำหรับการไหลเฉือนอย่างง่าย (simple shear flow) ความหนืดเฉือน (shear viscosity) μ_s และความเค้นปกติ (normal stress) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของอัตราเฉือน $\dot{\gamma}$ จะอยู่ในรูป

$$\mu_s(\dot{\gamma}) = \mu \tag{2.29}$$

และ

$$\psi_1(\dot{\gamma}) = 2\mu(\lambda_1 - \lambda_2)\dot{\gamma}^2 \tag{2.30}$$

และความหนืดขยาย (extensional viscosity) μ_e เป็นฟังก์ชันของอัตรายืดขยาย (extensional rate) $\dot{\varepsilon}$ อยู่ในรูป

$$\mu_e(\dot{\varepsilon}) = 2\mu \frac{1 - 2\lambda_2 \dot{\varepsilon}}{1 - 2\lambda_1 \dot{\varepsilon}} + \mu \frac{1 + \lambda_2 \dot{\varepsilon}}{1 + \lambda_1 \dot{\varepsilon}} \tag{2.31}$$

2.2.3 ตัวแบบเพนเทียนเทนเนอร์ (Phan-Thien/Tanner model)

ตัวแบบอ็อลดรอยด์บีสามารถอธิบายพฤติกรรมของของไหลบางประเภทได้และมีข้อจำกัดในการใช้ต่อมา Phan-Thien และ Tanner ได้ทำการพัฒนาตัวแบบชนิดอื่นเพื่อให้สามารถอธิบายพฤติกรรมของของไหลวิสโคอีลาสติกได้ดีขึ้น ตั้งแต่ปี 1977 [30, 31] มีผู้ให้ความสนใจศึกษาตัวแบบเพนเทียนเทนเนอร์อย่างกว้างขวาง ปี 1984 Keunings และ Crochet [32, 33] อธิบายการไหลหดตัวแบบ 4:1 ด้วยตัวแบบ PTT และในปี 1987 Bird et al. [34] ใช้ตัวแบบเพนเทียนเทนเนอร์ในการอธิบายพลศาสตร์ของไหลของพอลิเมอร์หลอมเหลวจากนั้นอีกหนึ่งปี Phan-Thien [35] ได้ผลกระทบของการลื่นไหลบริเวณผนังดาย

ของการบวมตัว ในปี 1992 Phan-Thien [36] ได้ใช้ตัวแบบ PTT ในปัญหากระบวนการขึ้นรูป (forming processes) จากนั้นได้มีผู้นำตัวแบบ PTT ไปใช้อย่างแพร่หลาย ซึ่งในปี 1996 Gunter et al. [6] ได้ใช้ตัวแบบ PTT ในการจำลองปัญหาการไหลของของไหลประเภทวิสโคอีลาสติก แล้วแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะและอีกสองปีต่อมา Mutlu et al. [7, 37] ใช้ตัวแบบ PTT single mode กับปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวด โดยอาศัยเทคนิคการหาผลเฉลยทั้งแบบคู่ควบ (coupled schemes) และไม่คู่ควบ (decoupled schemes) ในปีเดียวกัน Matallah et al. [11] ก็ได้ทำการศึกษาในลักษณะเดียวกันแต่ใช้เทคนิคการแยกหาค่าความเค้นก่อน จากนั้นอีกสองปี Matallah et al. [38, 39] ได้ใช้ตัวแบบ PTT ทั้งแบบ single mode และ multi mode กับปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวด และในปีเดียวกัน Ngamaramvaranggul และ Webster [15] ได้ใช้ตัวแบบ PTT กับปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวดสำหรับเครื่องมือแบบเพรซเซอร์ทูลลิ่ง

สำหรับเวลาผ่อนคลายหนึ่งค่า (single relaxation time) λ_1 รูปแบบเทนเซอร์ความเค้นเอ็กซ์ตร้าของตัวแบบ PTT เป็นดังนี้

$$\tilde{T} = \tilde{\tau} + 2\mu_N \tilde{D} \tag{2.32a}$$

$$f\tilde{\tau} + \lambda_1 \overset{\diamond}{\tilde{\tau}} = 2\mu_V \tilde{D} \tag{2.32b}$$

โดยที่

$$\overset{\diamond}{\tilde{\tau}} = \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \overset{\nabla}{\tilde{\tau}} + \frac{\xi}{2} \overset{\triangle}{\tilde{\tau}} \tag{2.33}$$

จากสมการ 2.25b จัดรูปสมการ 2.33 ใหม่ได้เป็น

$$\overset{\diamond}{\tilde{\tau}} = \overset{\nabla}{\tilde{\tau}} + \xi(\tilde{D} \cdot \tilde{\tau} + \tilde{\tau} \cdot \tilde{D}) \tag{2.34}$$

สำหรับฟังก์ชัน f มี 3 รูปแบบดังนี้

1. รูปแบบสมการเชิงเส้น (linear model)

$$f = 1 + \frac{\varepsilon \lambda_1}{\mu_V} trace(\tilde{\tau}) \tag{2.35a}$$

2. รูปแบบสมการกำลังสอง (quadratic model)

$$f = 1 + \frac{\varepsilon \lambda_1}{\mu_V} trace(\tilde{\tau}) + \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon \lambda_1}{\mu_V} trace(\tilde{\tau})\right]^2 \tag{2.35b}$$

3. รูปแบบสมการเลขชี้กำลัง (exponential model)

$$f = \exp\left[\frac{\varepsilon \lambda_1}{\mu_V} trace(\tilde{\tau})\right] \tag{2.35c}$$

เมื่อ $\quad trace(\tilde{\tau}) = \sum_i \tau_{ii}$

แทนค่าสมการ 2.24b ในสมการ 2.34 จะได้

$$\overset{\diamond}{\tilde{\tau}} = \frac{D\tilde{\tau}}{Dt} - \tilde{\tau} \cdot \tilde{L} - (\tilde{\tau} \cdot \tilde{L})^{\dagger} + \xi(\tilde{D} \cdot \tilde{\tau} + \tilde{\tau} \cdot \tilde{D}) \tag{2.36}$$

จากสมการ 2.10 และ $L = \nabla U$ จึงเขียนรูปสมการ 2.36 ใหม่ได้เป็น

$$\overset{\diamond}{\tilde{\tau}} = \frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla\tilde{\tau} - \tilde{\tau} \cdot \nabla\vec{U} - (\tilde{\tau} \cdot \nabla\vec{U})^{\dagger} + \xi(\tilde{D} \cdot \tilde{\tau} + \tilde{\tau} \cdot \tilde{D}) \tag{2.37}$$

แทนค่าสมการ 2.37 ในสมการ 2.32b [7] และเขียนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้เป็น

$$\lambda_1 \frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial t} = 2\mu_V \tilde{D} - f\tilde{\tau} - \lambda_1 \left\{ \vec{U} \cdot \nabla\tilde{\tau} - \tilde{\tau} \cdot \nabla\vec{U} - (\tilde{\tau} \cdot \nabla\vec{U})^{\dagger} + \xi[(\tilde{D} \cdot \tilde{\tau}) + (\tilde{D} \cdot \tilde{\tau})^{\dagger}] \right\} \tag{2.38}$$

สำหรับงานวิจัยนี้ จะศึกษาการไหลของของไหลนอนนิวโตเนียน โดยอาศัยตัวแบบเพนเทียนเทนเนอร์ฟังก์ชั่นเลขชี้กำลัง จึงได้ระบบสมการควบคุมและสมการองค์ประกอบ ซึ่งดูจากสมการ 2.5, 2.19, 2.20 และ 2.38 สรุปได้ดังนี้

$$\rho \frac{\partial\vec{U}}{\partial t} = \nabla \cdot \tilde{T} - \rho\vec{U} \cdot \nabla U - \nabla p$$

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0$$

$$\tilde{T} = \tilde{\tau} + 2\mu_N \tilde{D}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial t} = 2\mu_V \tilde{D} - f\tilde{\tau} - \lambda_1 \left\{ \vec{U} \cdot \nabla\tilde{\tau} - \tilde{\tau} \cdot \nabla\vec{U} - (\tilde{\tau} \cdot \nabla\vec{U})^{\dagger} + \xi[(\tilde{D} \cdot \tilde{\tau}) + (\tilde{D} \cdot \tilde{\tau})^{\dagger}] \right\}$$

เมื่อ f คือ

$$f = \exp\left[\frac{\varepsilon\lambda_1}{\mu_V} trace(\tilde{\tau})\right]$$

ความหนืดเฉือน (μ_s) และความหนืดขยาย (μ_e) ของตัวแบบ PTT เป็นฟังก์ชันของ $\dot{\gamma}$ และ $\dot{\epsilon}$ ตามลำดับ [15] ซึ่งอยู่ในรูป

$$\mu_s(\dot{\gamma}) = \mu_N + \frac{\mu_V f}{f^2 + \xi(2-\xi)\lambda_1^2\dot{\gamma}^2} \tag{2.39}$$

และ

$$\mu_e(\dot{\epsilon}) = 3\mu_N + \frac{2\mu_V}{f - 2(1-\xi)\lambda_1\dot{\epsilon}} + \frac{\mu_V}{f + (1-\xi)\lambda_1\dot{\epsilon}} \tag{2.40}$$

ต่อไปจะทำการแปลงระบบสมการที่ได้ให้อยู่ในระบบไร้หน่วย เพื่อให้เปรียบเทียบผลได้ง่าย โดยพิจารณาจากหัวข้อต่อไปนี้

2.3 ระบบไร้หน่วย (Non-dimensional system)

สำหรับระบบสมการควบคุมและสมการองค์ประกอบโดยทั่วไปมักจะพิจารณาในระบบไร้หน่วย โดยกำหนดอัตราส่วนของค่าที่มีหน่วยเทียบกับตัวประกอบลักษณะเฉพาะ (characteristic factor) ของแต่ละตัวให้เป็นตัวแปรไร้หน่วย (non-dimensional variable) คือ $r^*, z^*, \vec{U}^*, p^*, T^*, t^*, \mu^*, \frac{D}{Dt^*}, \lambda^*$ ซึ่งมีการกำหนดดังนี้

- เวกเตอร์ระยะกระจัดในทิศทางของแกน R คือ $r^* = \dfrac{r}{L}$
- เวกเตอร์ระยะกระจัดในทิศทางของแกน Z คือ $z^* = \dfrac{z}{L}$
- เวกเตอร์ความเร็ว คือ $\vec{U}^* = \dfrac{\vec{U}}{V}$
- ความดัน คือ $p^* = \dfrac{L}{\mu V}p$
- เทนเซอร์ความเค้น คือ $\tilde{T}^* = \dfrac{L}{\mu V}\tilde{T}$ หรือ $\tilde{\tau}^* = \dfrac{L}{\mu_0 V}\tilde{\tau}$
- เวลา คือ $t^* = \dfrac{V}{L}t$
- ตัวดำเนินการเกรเดียนต์ คือ $\nabla^* = L\nabla$
- ตัวดำเนินการ คือ $\dfrac{D}{Dt^*} = \dfrac{L}{V}\dfrac{D}{Dt}$
- ค่าเวลาผ่อนคลาย คือ $\lambda^* = \dfrac{V}{L}\lambda$
- ค่าความหนืด คือ $\mu_i^* = \dfrac{1}{\mu}\mu_i, i = N, V$
- ค่าอัตราการเฉือน คือ $\dot{\gamma}^* = \dfrac{L}{V}\dot{\gamma}$

โดยที่

L คือ ความยาวลักษณะเฉพาะ (characteristic length) หน่วยเป็น m

V คือ ความเร็วลักษณะเฉพาะ (characteristic velocity) หน่วยเป็น m/s

μ คือ ความหนืดอ้างอิง (reference viscosity) หน่วยเป็น Pa.s หรือ N/m2 และมีค่าเท่ากับผลรวมของความหนืดของตัวทำละลายกับความหนืดของพอลิเมอร์ ($\mu = \mu_N + \mu_V$)

เปลี่ยนระบบสมการควบคุมและสมการองค์ประกอบให้อยู่ในระบบไร้หน่วย โดยการแทนค่าตัวไร้หน่วยลงในสมการ 2.5, 2.19, 2.20 และ 2.38 ซึ่งได้สรุปให้ก่อนหน้านี้แล้วจัดรูปสมการเหล่านี้ใหม่ โดยละเครื่องหมาย $*$ จะได้ระบบสมการในระบบไร้หน่วย ดังนี้

$$Re\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \nabla \cdot \tilde{T} - Re\vec{U} \cdot \nabla U - \nabla p \tag{2.41}$$

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \tag{2.42}$$

$$\tilde{T} = \tilde{\tau} + 2\mu_N \tilde{D} \tag{2.43}$$

$$We\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial t} = 2\mu_V \tilde{D} - f\tilde{\tau} - We\left\{\vec{U} \cdot \nabla\tilde{\tau} - \tilde{\tau} \cdot \nabla\vec{U} - (\tilde{\tau} \cdot \nabla\vec{U})^{\dagger} + \xi[(\tilde{D} \cdot \tilde{\tau}) + (\tilde{D} \cdot \tilde{\tau})^{\dagger}]\right\} \tag{2.44}$$

เมื่อ Re คือ ตัวเลขเรย์โนลดส์ (Reynolds number) และ We คือ ตัวเลขไวส์เบอร์ก (Weissenberg number) ซึ่งมีค่าเป็น

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} \text{ และ } We = \frac{\lambda_1 V}{L}$$

ตัวเลขทั้งสองมีความสำคัญต่อพฤติกรรมต่างๆของของไหล ตัวเลขเรย์โนลดส์ซึ่งแปรผกผันกับความหนืดของพอลิเมอร์ ตัวเลขไวส์เซนเบอร์กหรือตัวเลขเดบอราห์ (Deborah number) ซึ่งแปรผันกับเวลาผ่อนคลาย (Relaxation time) ทั้งสองค่ามีความสำคัญกับพฤติกรรมการไหลของของไหลและขึ้นอยู่กับชนิดของของไหล หากพิจารณาค่าตัวเลขเรย์โนลดส์ (Re) จะได้ลักษณะการไหลของของไหลดังนี้ [40]

1. Re มีค่าน้อยๆ ของไหลมีการไหลแบบคืบคลาน (creeping flow)
2. Re มีค่าน้อยกว่า 2000 ของไหลจะมีการไหลแบบราบเรียบ
3. Re มีค่ามากกว่า 2000 ของไหลจะมีการไหลแบบอลวน (turbulent flow)

พบว่าค่าตัวเลขไวส์เซนเบอร์กจะบอกถึงความหยืดยุ่นของของไหล ซึ่งค่าต่างๆเหล่านี้จะมีผลต่อการคำนวณ ส่วนค่าตัวเลขไวส์เซนเบอร์กจะเป็นตัวบ่งบอกคุณภาพแสดงความยืดหยุ่นของของไหล เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างอัตราความหนืดต่ออัตราความเค้นเฉือนของของไหลนอนนิวโตเนียนเป็นแบบไม่เชิงเส้น (non-linear) ดังนั้นจึงพยายามสร้างตัวแบบของสมการองค์ประกอบ ซึ่งเป็นสมการในส่วนของความเค้นเพื่อให้เหมาะสมกับของของไหลประเภทวิสโคอีลาสติกแต่ละชนิด

2.4 ความรู้ทางรีโอโลยี (Knowledge of rheology)

ปัญหาการไหลของของไหลนอนนิวโตเนียนสำหรับการไหลแบบเฉือน (shear flow) และการไหลแบบยืดขยาย (extensional flow) มีสิ่งสำคัญที่มาพิจารณาคือพฤติกรรมของความหนืด ซึ่งเป็นค่าลักษณะเฉพาะของของไหล โดยทั่วไปเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันวัสดุ (material function) หรือเรียกอีกอย่างว่าความหนืดเชิงฟังก์ชัน (functional viscosity) ใช้บ่งบอกลักษณะของของไหลนอนนิวโตเนียน โดยพิจารณาลักษณะการไหลดังนี้

2.4.1 การไหลแบบเฉือนอย่างง่าย (simple shear flow)

การไหลแบบเฉือนอย่างง่ายเป็นการไหลในรูปแบบที่เกิดจากแรงเฉือน เนื่องจากผนังหรือพื้นผิวสัมผัสของการไหลเกิดการเคลื่อนที่จึงเกิดความแตกต่างของความดัน [41] ดังนั้นลักษณะการไหลจึงมีความสำคัญ พิจารณาปัญหาในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (cartesian coordinate system) 3 มิติ ส่วนประกอบของความเร็วสำหรับการไหลแบบเฉือนอย่างง่ายสามารถเขียนได้ในรูป

$$u_x = \dot{\gamma} y \tag{2.45a}$$

$$v_y = v_z = 0 \tag{2.45b}$$

ซึ่ง

$$\dot{\gamma} = \frac{du_x}{dy} \tag{2.46}$$

และได้ผลต่างของความเค้นแนวฉากปฐมภูมิ (primary normal stress) N_1 และความเค้นแนวฉากทุติยภูมิ (secondary normal stress) N_2 ในรูปของความเค้นแนวฉากเป็น

$$N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy} = \dot{\gamma}^2 \psi_1 \left(\dot{\gamma}\right) \tag{2.47a}$$

$$N_2 = \tau_{yy} - \tau_{zz} = \dot{\gamma}^2 \psi_2 \left(\dot{\gamma}\right) \tag{2.47b}$$

เมื่อ

τ_{xx} เป็นความเค้นแนวฉากในทิศทางแกน X

τ_{yy} เป็นความเค้นแนวฉากในทิศทางแกน Y

τ_{zz} เป็นความเค้นแนวฉากในทิศทางแกน Z

ψ_1 เป็นสัมประสิทธิ์ของความเค้นแนวฉากปฐมภูมิ

ψ_2 เป็นสัมประสิทธิ์ของความเค้นแนวฉากทุติยภูมิ

ซึ่งทั้ง ψ_1 และ ψ_2 ต่างเป็นฟังก์ชันวัสดุ (material functions) ของค่าอัตราการเฉือน [42, 43] และผลต่างของความเค้นแนวฉากปฐมภูมิเป็นตัวบอกปริมาณความยืดหยุ่น (elasticity) [16] ของของไหลได้

2.4.2 การไหลแบบยืด (elongational flow)

การไหลแบบยืด เป็นรูปแบบการไหลที่เกิดจากแรงยืดซึ่งรู้จักกันทั่วไปคือการไหลขยายแกนเดียว (uniaxial extensional flow) ซึ่งการไหลรูปแบบนี้ได้รับแรงจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอาจไม่ได้มาจากผนังหรือพื้นผิวสัมผัสและบางครั้งอาจเรียกว่า การไหลของผิวอิสระ (free surface flow) พฤติกรรมการยืดออกของของไหลมีผลต่อลักษณะการไหลของของไหล สำหรับการไหลแบบยืดจำแนกได้เป็น 3 ชนิดตามลักษณะการเปลี่ยนแปลงของความหนืด [16] ดังนี้

1. การไหลชนิดเทร้าโตเนียน (Troutonian flow) คือการไหลที่ค่าความหนืดแบบยืดดึง (elongational viscosity) ไม่เปลี่ยนเมื่อเทียบกับอัตราการยืดดึง (elongational rate)

2. การไหลชนิดความแข็งแบบแรงตึง (tension stiffening flow) คือการไหลที่ค่าความหนืดแบบยืดดึงมีค่าเพิ่มขึ้นสูงอย่างมีขอบเขตเมื่ออัตราการยืดดึงเพิ่มขึ้น

3. การไหลชนิดความบางแบบแรงตึง (tension thinning flow) คือการไหลที่ค่าความหนืดแบบยืดดึงมีค่าลดลงอย่างมีขอบเขตเมื่ออัตราการยืดดึงเพิ่มขึ้น

การไหลที่มีลักษณะการไหลแบบยืดมี 3 ลักษณะดังนี้

การไหลแบบยืดขยายแกนเดียว (uniaxial extensional flow) เป็นการไหลที่เกิดขึ้นเพียงทิศทางเดียว พิจารณาอัตรายืดขยายในรูปความเร็วดังนี้

$$\dot{\varepsilon} = \frac{u_x}{x} = -2\frac{v_y}{y} = -2\frac{v_z}{z} \tag{2.48}$$

เมื่อจัดใหม่จะได้ความเร็วอยู่ในรูปของอัตรายืดขยายเป็น

$$u_x = \dot{\varepsilon}x, v_y = -\frac{\dot{\varepsilon}}{2}y, v_z = -\frac{\dot{\varepsilon}}{2}z \tag{2.49}$$

ได้ผลต่างความเค้นเป็น

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = \tau_{yy} - \tau_{zz} = \dot{\varepsilon}\mu_e\left(\dot{\varepsilon}\right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{2.50}$$

เมื่อ μ_e คือ ความหนืดแบบยืดขยาย (extensional viscosity)

การไหลแบบยืดขยายแกนสองทาง (biaxial extensional flow) เป็นการไหลที่เกิดจากการยืดในสองทิศทางที่ตั้งฉากกัน ซึ่งอัตรายืดขยาย (elongation rate) จะอยู่ในรูป

$$\dot{\varepsilon} = \frac{u_x}{x} = \frac{v_y}{y} = -\frac{v_z}{2z} \tag{2.51}$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$u_x = \dot{\varepsilon}x, v_y = \dot{\varepsilon}y, v_z = -2\dot{\varepsilon}z \tag{2.52}$$

ได้ผลต่างความเค้นเป็น

$$\begin{aligned} \tau_{zz} - \tau_{xx} = \tau_{zz} - \tau_{yy} &= \dot{\varepsilon}\mu_{eb}\left(\dot{\varepsilon}\right) \\ \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0 \end{aligned} \tag{2.53}$$

เมื่อ μ_{eb} คือ ความหนืดแบบยืดขยายแกนสองทาง (biaxial extensional viscosity) ความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดแบบแกนเดียว (uniaxial viscosity) และความหนืดแบบแกนสองทาง (biaxial viscosity) ได้ถูกแสดงโดย Walter [44] ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\mu_{eb}\left(\dot{\varepsilon}\right) = \mu_e\left(-2\dot{\varepsilon}\right) \tag{2.54}$$

การไหลแบบยืดขยายเชิงระนาบ (planar extensional flow) เป็นการไหลที่มีการยืดทั้งระนาบในทิศทางเดียว สำหรับอัตราการยืดขยายมีความสัมพันธ์กับความเร็ว ดังนี้

$$\dot{\varepsilon} = \frac{u_x}{x} = -\frac{v_z}{z}, v_y = 0 \tag{2.55}$$

จึงได้ว่า

$$u_x = \dot{\varepsilon}x, v_y = 0, v_z = -\dot{\varepsilon}z \tag{2.56}$$

ได้ผลต่างความเค้นเป็น

$$\tau_{xx} - \tau_{zz} = \dot{\varepsilon}\mu_{ep}\left(\dot{\varepsilon}\right) \tag{2.57}$$

เมื่อ μ_{ep} คือ ความหนืดแบบยืดขยายเชิงระนาบ (planar extensional viscosity)

2.4.3 อัตราเฉือนและอัตราการยืดขยาย (shear rate and elongation rate)

เมื่อพิจารณาพฤติกรรมของของไหลไอโซโทรปิคเอกพันธุ์แบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic homogeneous isotropic fluid) ภายใต้ระบบที่อุณหภูมิคงตัว (isothermal system) โดย Rivlin และ Eriksen [45] จากนั้น Reiner [46] อธิบายรูปแบบทั่วไปของเทนเซอร์ความเค้นเอ็กซ์ตร้าที่เป็นฟังก์ชันของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูปภายใต้สภาวะไม่อัดตัวดังนี้

$$\tilde{T} = 2\mu\left(\dot{\gamma}, \dot{\varepsilon}\right) \tag{2.58}$$

สำหรับการไหลเฉือนอย่างง่าย อัตราเฉือน $\dot{\gamma}$ คือ

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{II_d} \tag{2.59}$$

และการไหลแบบยืด อัตรายืดขยาย $\dot{\varepsilon}$ คือ

$$\dot{\varepsilon} = 3\frac{III_d}{II_d} \tag{2.60}$$

โดยที่ II_d และ III_d คือความไม่แปรเปลี่ยนอันดับที่สองและอันดับที่สาม (the second and third invariants) ของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (the rate of strain tensor) $\tilde{D}$ ตามลำดับ
ซึ่งในระบบพิกัดฉากหรือระบบคาร์ทีเซียน (cartesian coordinate system) ความไม่แปรเปลี่ยนอันดับที่สองและสาม คือ

$$\begin{aligned} II_d &= \frac{1}{2}\mathrm{trace}\left(\tilde{D}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2\right\} \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$III_d = \det\tilde{D} = -II_d \tag{2.62}$$

ในระบบพิกัดทรงกระบอก (axisymmetric coordinate system หรือ cylindrical coordinate system) II_d และ III_d จะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} II_d &= \frac{1}{2}\mathrm{trace}\left(\tilde{D}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{u_r}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2\right\} \end{aligned} \tag{2.63}$$

$$III_d = \det\tilde{D} = \frac{u_r}{r}\left\{\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2\right\} \tag{2.64}$$

บทที่ 3

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method)

การศึกษาและพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเช่น ระเบียบวิธีชิ้นประกอบขอบ ระเบียบวิธีปริมาตรอันตะ ระเบียบวิธีผลต่างอันตะและระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์มีอย่างกว้างขว้างโดยอาศัยความรู้ในการสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์แทนลักษณะปัญหาต่างๆ ส่วนมากเขียนอยู่ในรูปสมการเชิงปริพันธ์ (integral equation) หรือสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) และพบว่าตัวแบบคณิตศาสตร์ของหลายปัญหามักอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น (non-linear model) จึงเป็นการยากในการหาผลเฉลยของปัญหาที่อยู่ในรูปผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytical solution) หรืออาจหาไม่ได้เลย ดังนั้นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจึงได้นำมาใช้เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลข (numerical solution) สำหรับปัญหาการไหล ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นจะอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น(non-linear partial differential equation) ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า เช่น ความดัน ความเร็ว ความเค้น เป็นต้น โดยอาศัยความรู้ทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่อไปนี้ ในการหาผลเฉลยของปัญหา

3.1 ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite difference method)

ในการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ เป็นวิธีการแรกๆที่นำมาใช้ในการหาผลเฉลยปัญหาต่างๆ เช่น ปัญหาการนำความร้อนของวัสดุ ปัญหารการไหล เป็นต้น โดยระเบียบวิธีผลต่างอันตะ จะทำการแบ่งโดเมนที่ศึกษาออกเป็นโดเมนย่อยๆในลักษณะของชิ้นประกอบย่อยๆ ที่เรียกว่ากริดสม่ำเสมอ (uniform grid) ซึ่งประกอบไปด้วยโนดต่างๆที่มีการบอกพิกัด ดังรูปที่ 3.1

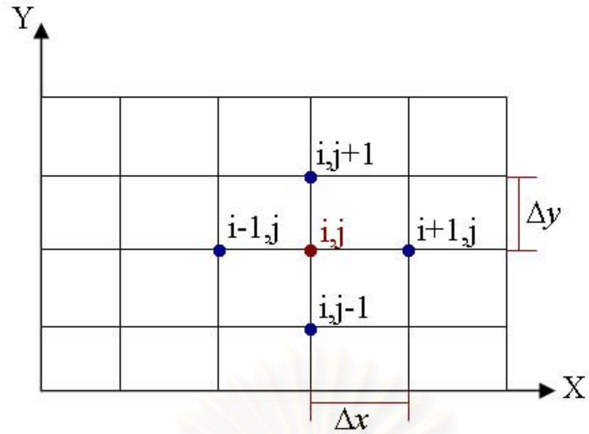
พิจารณาโนด $(i+1,j)$ โดยการกระจายอนุกรมของเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) จะได้

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + h\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{i,j} + \frac{h^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{i,j} + O(h^3) \tag{3.1}$$

และพิจารณาโนด $(i-1,j)$ โดยการกระจายอนุกรมของเทย์เลอร์จะได้

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{i,j} + \frac{h^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{i,j} + O(h^3) \tag{3.2}$$

เมื่อ $u_{i,j}$ คือความเร็ว ณ โนด n ที่มีพิกัดเป็น (i,j) มีการพิจารณาใน 3 ลักษณะดังนี้



รูปที่ 3.1: การแบ่งโดเมนย่อยสำหรับระเบียบวิธีผลต่างอันตะ

1. **สูตรผลต่างข้างหน้า (the forward difference formula)**

   จากสมการ 3.1 จัดรูปสมการใหม่จะได้ อนุพันธ์อันดับที่1 (first-order derivative) ซึ่งมีความแม่นยำอันดับที่1 (first order accuracy) เป็น

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h) \tag{3.3a}$$

   เมื่อพิจารณาความเร็วของโนดที่ $(i+2,j)$ ในทำนองเดียวกันกับสมการ 3.1 นำไปบวกสมการ 3.1ซึ่งคูณด้วยสอง จัดรูปใหม่จะได้อนุพันธ์อันดับที่2 (second-order derivative) ที่ความแม่นยำอันดับที่1 เป็น

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{h^2} + O(h) \tag{3.3b}$$

2. **สูตรผลต่างย้อนหลัง (the backward difference formula)**

   จากสมการ 3.2 จัดรูปสมการใหม่จะได้ อนุพันธ์อันดับที่1 ซึ่งมีความแม่นยำอันดับที่1 เป็น

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h) \tag{3.4a}$$

   ในทำนองเดียวกันกับสูตรผลต่างข้างหน้าสำหรับอนุพันธ์อันดับที่2 ที่มีความแม่นยำอันดับที่1 จะอยู่ในรูป

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} + O(h) \tag{3.4b}$$

3. **สูตรผลต่างตรงกลาง (the central difference formula)**

   เมื่อพิจารณาสมการ 3.1 ลบด้วยสมการ 3.2 จัดรูปสมการใหม่จะได้อนุพันธ์อันดับที่ 1 ที่มีความแม่นยำอันดับที่ 2 เป็น

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2) \tag{3.5a}$$

   เมื่อพิจารณาเอาสมการ 3.1 บวกกับสมการ 3.2 จัดรูปสมการใหม่จะได้อนุพันธ์อันดับที่ 2 ที่มีความแม่นยำอันดับที่ 2 เป็น

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2) \tag{3.5b}$$

สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [47, 48]

3.2 ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ (Finite element method)

ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้แก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น จากนั้นให้แก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ประมาณปี 1950 ได้มีผู้ใช้ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะในการวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้าง และในปี 1965 Zienkiewicz และ Cheung [49] ได้นำระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหล จากนั้นได้มีผู้ศึกษาอย่างแพร่หลายถึงปัจจุบันนี้เนื่องจาก สามารถหาผลเฉลยที่มีความแม่นยำสูง

สำหรับขั้นตอนในการประมาณค่าผลเฉลยของระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ มีดังนี้

1. การสร้างชิ้นประกอบย่อย (mesh generation)

2. แทนค่าตัวแปรเริ่มต้นด้วยผลเฉลยลอง (trial solution) [50, 51] เพื่อใช้ประมาณค่าผลเฉลย

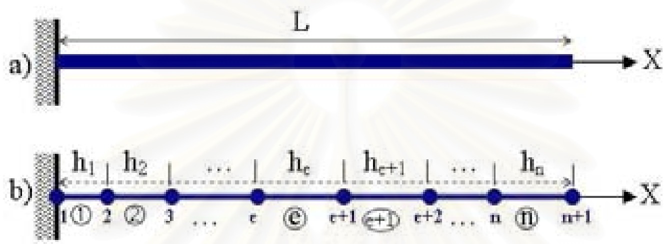
3. ใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual method) เพื่อลดค่านอร์มความผิดพลาดที่ได้จากการประมาณค่า

4. หาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขกับปัญหาที่แปลงให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น

ในวิทยานิพนธ์นี้จะกล่าวเฉพาะระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะใน 1 มิติ และ 2 มิติเท่านั้น สำหรับปัญหาใน 1 มิติ เช่น การแพร่ความร้อนของเส้นลวด การรับน้ำหนักของคาน เป็นต้น แต่ในบางปัญหาอธิบายใน 1 มิติได้ยากและผลเฉลยไม่ดีจึงใช้เป็นปัญหาใน 2 มิติ เช่น การแพร่ความร้อนของแผ่นโลหะบาง การไหลในท่อ การถ่ายเทของอากาศ เป็นต้น

3.2.1 ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะสำหรับ 1 มิติ (finite element method for one dimension)

เริ่มจากการพิจารณาโดเมนของปัญหาที่อยู่ในรูป $\Omega = (0, L)$ ดังรูปที่ 3.2(a) จากนั้นแบ่งโดเมนให้เป็นเส้นชิ้นประกอบ (line element) โดยแต่ละเส้นชิ้นประกอบจะมีโนดเป็นตัวแบ่ง หากพิจารณาโดเมนทั้งหมดจะเรียกโนดเหล่านั้นว่าโนดวงกว้าง (global nodes) หรือโนดในโดเมน ซึ่งแสดงดังรูปที่ 3.2(b) แต่หากพิจารณาในแต่เส้นชิ้นประกอบจะเรียกแต่ละโนดว่าเป็น โนดเฉพาะที่ (local node) [52]



รูปที่ 3.2: การแบ่งโดเมนย่อยสำหรับระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะใน 1 มิติ (a) ลักษณะโดเมนใน 1 มิติ (b) ชิ้นประกอบย่อยใน 1 มิติ

ศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง [50, 52, 53, 54, 55] เมื่อทำการแบ่งเส้นชิ้นประกอบเรียบร้อยแล้วจะสร้างความเชื่อมต่อชิ้นประกอบ (element connectivity) เพื่อให้ง่ายต่อการอ้างถึงและสะดวกต่อการคำนวณ หากพิจารณาในแบบเชิงเส้น (linear form) แต่ละเส้นชิ้นประกอบจะมีโนดเฉพาะที่ 2 โนด แต่ถ้าพิจารณาแบบกำลังสอง (quadratic form) ในแต่ละชิ้นประกอบจะมีโนดเฉพาะที่ 3 โนด และถ้าเป็นแบบกำลังสาม (cubic form) ก็จะเพิ่มโนดเฉพาะที่อีกหนึ่งจุด ซึ่งสามารถเพิ่มโนดไปได้เรื่อยๆหากต้องการความละเอียดสูง

สมการรูปร่างเชิงเส้น สำหรับ 1 มิติ (linear shape function for one dimension)

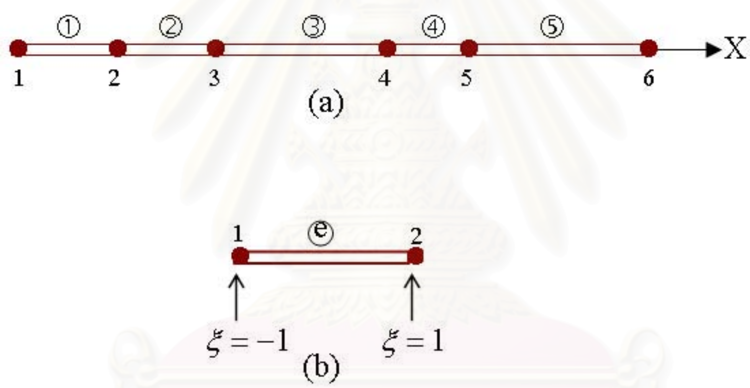
กำหนดความเชื่อมต่อชิ้นประกอบของแต่ละเส้นชิ้นประกอบ ด้วยการกำหนดชื่อโนดเฉพาะที่สองโนดให้เป็นโนดวงกว้าง ซึ่งแสดงดังตารางที่ 3.1 เมื่อพิจารณาในแต่เส้นชิ้นประกอบจะกำหนดหมายเลขเฉพาะที่ให้กับโนดเฉพาะที่ดังรูป 3.3(a) โดยให้ x_1 และ x_2 เป็นพิกัดของโนดเฉพาะที่ 1 และ 2 ตามลำดับ แล้วแปลงพิกัดที่อยู่ในรูปของ x ให้เป็นพิกัดธรรมชาติ (natural coordinate system) ที่อยู่ในรูปของ ξ โดยความสัมพันธ์ที่ว่า

$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1}(x - x_1) - 1 \tag{3.6}$$

เลขเส้นชิ้นประกอบ	โนดเฉพาะที่ 1	โนดเฉพาะที่ 2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6

ตารางที่ 3.1: แสดงความเชื่อมต่อชิ้นประกอบแบบเชิงเส้นใน 1 มิติ

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวจะเห็นว่าที่โนดเฉพาะที่ 1 ค่าของ $\xi = -1$ และที่โนดเฉพาะที่ 2 ค่าของ $\xi = 1$ ดังรูปที่ 3.3(b) ดังนั้นเมื่อทราบความยาวของเส้นชิ้นประกอบ ให้แปลงความยาวของเส้นชิ้นประกอบนั้นอยู่ในช่วง -1 ถึง 1 เพื่อกำหนดเป็นฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ต่อไป



รูปที่ 3.3: การกำหนดพิกัดให้โนดเฉพาะที่ใน 1 มิติ (a) ลักษณะโนดวงกว้างสำหรับชิ้นประกอบย่อยใน 1 มิติ (b) โนดเฉพาะของแต่ชิ้นประกอบย่อย

สำหรับฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้น (linear shape function) จะอยู่ในรูป

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$$
$$N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \tag{3.7}$$

เมื่อพิจารณาในระบบธรรมชาติ กราฟของฟังก์ชันรูปร่าง N_1 และ N_2 ได้แสดงไว้ดังในรูปที่ 3.4(a) และ 3.4(b) ตามลำดับและจะพบว่า $N_1 = 1$ ที่ $\xi = -1$ แต่ $N_1 = 0$ ที่ $\xi = 1$ ทำให้ N_1 เป็นกราฟ

เส้นตรงที่เชื่อมจุดทั้งสอง และกราฟของ N_2 จะพิจารณาในทำนองเดียวกัน ทำได้ความสัมพันธ์ที่ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} N_i(\xi) = 1 \tag{3.8}$$

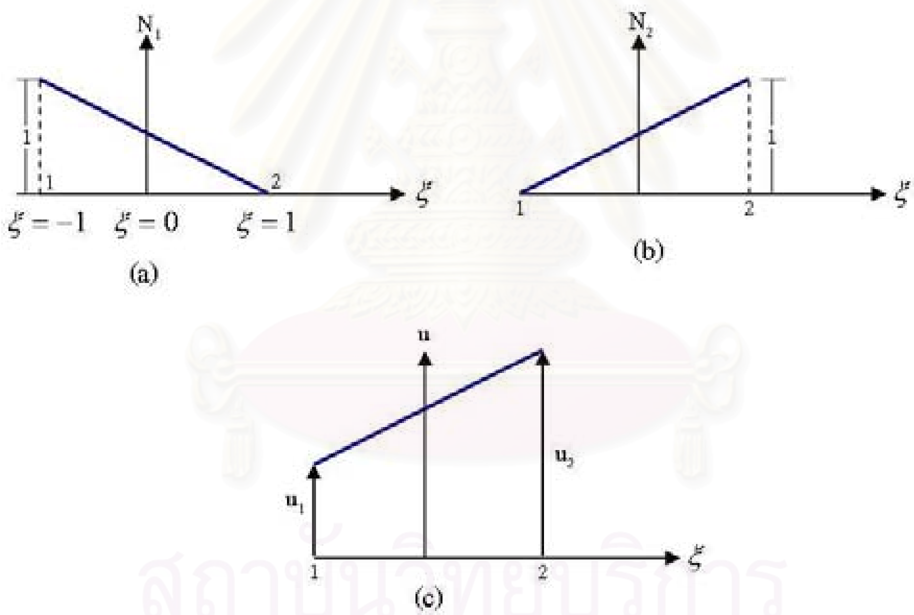
เมื่อ n เป็นจำนวนโนดเฉพาะที่ในแต่ละเส้นชิ้นประกอบ
ในการประมาณค่าตัวแปรที่ต้องการ จะได้ว่า

$$u = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 \tag{3.9a}$$

เมื่อ u_1 และ u_2 เป็นค่าประจำโนดเฉพาะที่ 1 และ 2 ตามลำดับ
หรือเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$u = NU \tag{3.9b}$$

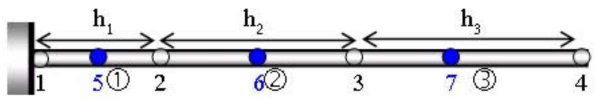
เมื่อ $N = [N_1(\xi), N_2(\xi)]$ และ $U^\dagger = [u_1, u_2]$ โดยพิจารณากราฟของค่า u ได้จากรูปที่ 3.4(c)



รูปที่ 3.4: ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นใน 1 มิติ (a) กราฟความสัมพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่าง N_1 (b) กราฟความสัมพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่าง N_2 (c) กราฟความสัมพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่าง u

สมการรูปร่างกำลังสอง สำหรับ 1 มิติ (quadratic shape function for one dimension)

ทำการแบ่งโดเมนออกเป็นเส้นชิ้นประกอบย่อย โดยให้แต่ละเส้นชิ้นประกอบมีโนดเฉพาะที่ 3 โนด ดังรูปที่ 3.5

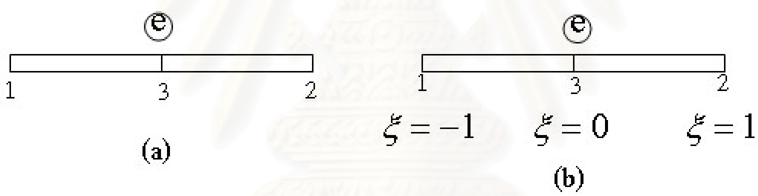


รูปที่ 3.5: เส้นชิ้นประกอบสำหรับฟังก์ชันรูปร่างแบบกำลังสอง

แปลงพิกัดของโดเมนให้อยู่ในระบบพิกัดธรรมชาติ ξ โดยกำหนด

$$\xi = \frac{2(x - x_3)}{x_2 - x_1} \tag{3.10}$$

โดยที่ x_3 เป็นโนดกึ่งกลางระหว่าง x_1 และ x_2 ซึ่งจะเห็นว่า $\xi = -1, 1$ และ 0 ที่โนดเฉพาะที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ ดังรูปที่ 3.6(a) และ 3.6(b)



รูปที่ 3.6: ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบกำลังสองใน 1 มิติ (a) โนดเฉพาะในชิ้นประกอบย่อย (b) พิกัดมาตรฐานของชิ้นประกอบย่อย

แต่ถ้า x_3 ไม่ใช่โนดกึ่งกลางระหว่าง x_1 และ x_2 ให้แปลง x_3 ให้อยู่ในระบบพิกัดมาตรฐานโดยอาศัยสมการ 3.6 [56] จากทั้ง 2 กรณีจะได้ฟังก์ชันรูปร่างแบบกำลังสอง อยู่ในรูป

$$\begin{aligned}
N_1(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_2)}{(\xi_1 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_2)} = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \\
N_2(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \\
N_3(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = (1 - \xi)(1 + \xi)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

เมื่อ ξ_1 เป็นพิกัดของโนด x_1 ในระบบพิกัดมาตรฐาน

ξ_2 เป็นพิกัดของโนด x_2 ในระบบพิกัดมาตรฐาน

ξ_3 เป็นพิกัดของโนด x_3 ในระบบพิกัดมาตรฐาน

ในทำนองเดียวกันกับฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้น หากพิจารณาที่โนดเฉพาะที่ i

$$N_j(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } j \neq i \\ 1 & \text{เมื่อ } j = i \end{cases} \tag{3.12}$$

ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันรูปร่างคือสมการ 3.8 ที่ว่า $\sum_{i=1}^{n} N_i(\xi) = 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนโนดเฉพาะที่ในแต่ละเส้นชิ้นประกอบและฟังก์ชันที่ใช้ประมาณค่าจะอยู่ในรูป

$$u = \sum_{i=1}^{3} u_i N_i(\xi) \tag{3.13}$$

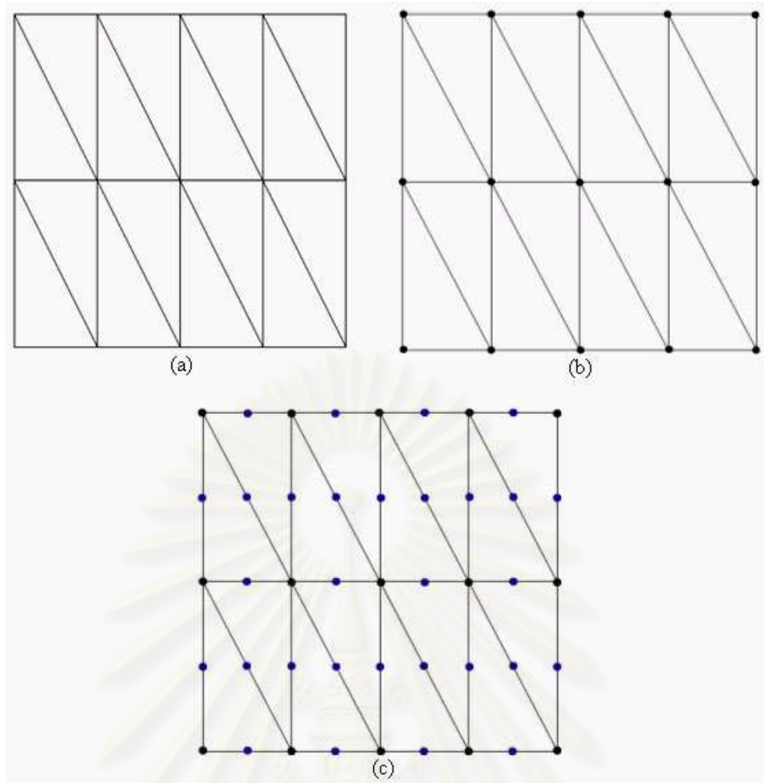
3.2.2 ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะสำหรับ 2 มิติ (finite element method for two dimensions)

สำหรับในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ปัญหาที่พิจารณาจะเป็นปัญหาใน 2 มิติ ดังนั้นเพื่อให้เกิดความเข้าใจจะอธิบายแยกย่อยในแต่ละหัวข้อต่อไปนี้

1. การสร้างชิ้นประกอบย่อย
2. ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง
3. ฟังก์ชันรูปร่าง
4. การวิยุต
5. ระเบียบวิธีเทเลอร์-กาเลอร์คิน

3.2.3 การสร้างชิ้นประกอบย่อย (mesh generation)

โดยทั่วไปการแบ่งโดเมนปัญหาใน 2 มิติจะแบ่งโดเมนออกเป็นชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยม แล้วแต่จะเลือกใช้สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้จะแบ่งโดเมนออกเป็นชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยม ดังรูปที่ 3.7(a) ซึ่งมีอยู่หลายลักษณะเช่น ชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยมแบบเชิงเส้นคือชิ้นประกอบย่อยที่ประกอบด้วยโนดยอด (vertex node) เพียง 3 โนดเท่านั้น ดังรูปที่ 3.7(b), ชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยมแบบกำลังสองคือชิ้นประกอบย่อยที่ประกอบด้วยโนดยอดและโนดกึ่งกลาง (midside node) รวมทั้งหมด 6 โนดดังแสดงในรูปที่ 3.7(c)



รูปที่ 3.7: การแบ่งโดเมนย่อยสำหรับระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะใน 2 มิติ (a) ชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยม (b) ชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยมชนิด 3 โนด (c) ชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยมชนิด 6 โนด

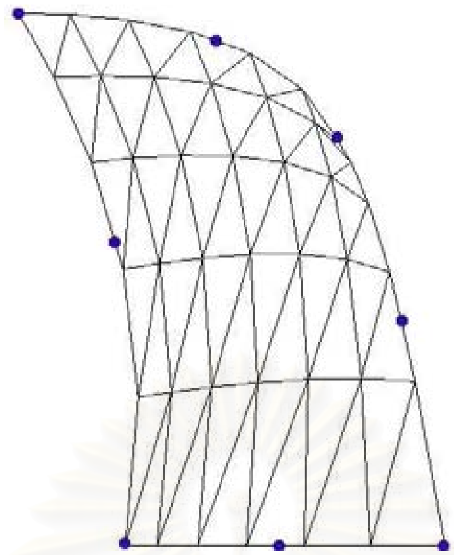
ในที่นี้จะใช้โปรแกรมสร้างชิ้นประกอบย่อยที่มีชื่อว่า GenGrid.cpp เพื่อหาพิกัดของโนดวงกว้างโดยอาศัยหลักการของฟังก์ชันรูปร่างที่อยู่ในรูป

$$x = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi, \eta) x_i \tag{3.14a}$$

และ

$$y = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi, \eta) y_i \tag{3.14b}$$

เมื่อ x_i และ y_i เป็นค่าของพิกัด x และ y ของโนดที่ขอบดังแสดงในรูปที่ 3.8, n เป็นจำนวนโนดที่ขอบ และ N_i เป็นฟังก์ชันรูปร่าง



รูปที่ 3.8: การกำหนดจุดเพื่อสร้างชิ้นประกอบย่อย

3.2.4 ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual method)

เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับประมาณค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) หรือ สมการเชิงปริพันธ์ (integral equation) ที่อยู่ในรูป

$$\mathscr{F}(u) = P, \mathrm{x} \in \Omega \tag{3.15}$$

โดยมีเงื่อนไขขอบ (boundary condition) เป็น

$$\mathscr{T}(u_0) = g, \mathrm{x} \in \Gamma \tag{3.16}$$

เมื่อ u_0 เป็นผลเฉลยแท้จริง (excact solution)
กำหนด $\vec{u}$ เป็นผลเฉลยประมาณค่า (approximate solution) อยู่ในรูป

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} u_k \phi_k(x) \tag{3.17}$$

เมื่อ u_k เป็นพารามิเตอร์ที่ทราบค่าประจำโนดที่ k

ϕ_k เป็นฟังก์ชันทดลอง (trial function)[1]

แทนสมการ 3.17 ในสมการ 3.15 ทำให้พบว่าค่าทางซ้ายไม่เท่ากับค่าทางขวา เนื่องจากค่า $\vec{u}$ เป็นค่าประมาณจึงมีเศษตกค้าง (residual) ε ดังนี้

$$\varepsilon = \mathscr{F}(\vec{u}) - P \tag{3.18}$$

[1]บางครั้งอาจเรียกว่า ฟังก์ชันฐานหลัก (basis function) หรือ ฟังก์ชันรูปร่าง (shape function)

และ

$$\varepsilon \neq 0$$

ε จะมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อแทนค่าผลเฉลยแท้จริงในสมการ 3.15
สำหรับระเบียบวิธีเศษตกค้างมีหลายระเบียบวิธี เช่น

1. ระเบียบวิธีการจัด (the collocation method)

2. ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด (the least-square method)

3. ระเบียบวิธีกาเลอร์คิน (Galerkin's method)

สามารถศึกษาเพิ่มเติมจาก [20, 23, 50, 52, 53, 54, 57]

ระเบียบวิธีการจัด (the collocation method) [54]

นิยามโดย

$$\int_{x_i-c}^{x_i+c} \Delta(x_i) d\Omega = 1 \tag{3.19}$$

เมื่อ c มีค่าน้อยๆ ($c \to 0$)

จากสมการ 3.18 กำหนดให้

$$\int_{\Omega} \Delta(x_i) \left(\mathscr{F}(\vec{u}) - P\right) d\Omega = 0 \tag{3.20}$$

ระเบียบวิธีกำลังน้อยที่สุด (the least-square method) จากสมการ 3.18 จะกำหนดได้

$$\int_{\Omega} \left(\mathscr{F}(\vec{u}) - P\right)^2 d\Omega = 0 \tag{3.21}$$

ระเบียบวิธีกาเลอร์คินถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual Galerkin method) จากสมการ 3.15 และ 3.17 โดยหลักการของระเบียบวิธีกาเลอร์คินถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง จะกำหนดให้

$$\int_{\Omega} \mathcal{W}(\mathscr{F}(\vec{u}) - P) d\Omega = 0 \tag{3.22}$$

เมื่อ $\mathcal{W} = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi_i(x)$ โดยที่ w_i เป็นค่าสัมประสิทธิ์ประจำโนด และ n เป็นจำนวนโนดแต่ละชิ้นประกอบย่อย

3.2.5 ฟังก์ชันรูปร่าง (shape function)

สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้ จะพิจารณาการแบ่งโดเมนออกเป็นชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยม ซึ่งจะพิจารณาใน 2 ลักษณะคือ

1. ชิ้นประกอบย่อยแบบเชิงเส้น (linear element) ซึ่งแต่ละชิ้นประกอบจะประกอบด้วยโนดยอด 3 โนด ดังรูปที่ 3.9(a)

2. ชิ้นประกอบย่อยแบบกำลังสอง (quadratic element) เป็นชิ้นประกอบที่ประกอบด้วยโนดยอดและโนดกึ่งกลางจำนวน 6 โนด ดังรูปที่ 3.9(b)

รูปที่ 3.9: ชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยมใน 2 มิติ

ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้น (linear shape function) โดยทั่วไปการกำหนดฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง (interpolation function) สำหรับชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยมมักจะแปลงระบบพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinate system) (r, z) ให้อยู่ในระบบพิกัดมาตรฐาน (ξ, η) ดังรูปที่ 3.10 สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดคาร์ทีเซียนและพิกัดลาดเอียงจะกำหนดดังนี้

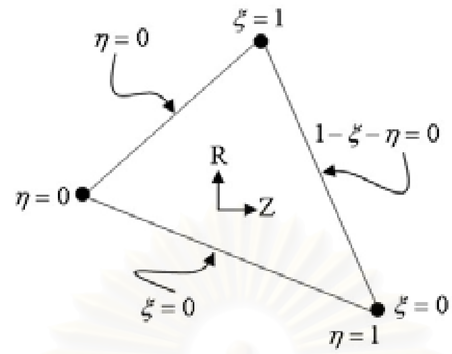
$$r = r_3 + (r_1 - r_3)\xi + (r_2 - r_3)\eta \tag{3.23a}$$

$$z = z_3 + (z_1 - z_3)\xi + (z_2 - z_3)\eta \tag{3.23b}$$

จัดรูปสมการ 3.23a และ 3.23b ใหม่จะได้

$$r = \xi r_1 + \eta r_2 + (1 - \xi - \eta) r_3 \tag{3.24a}$$

$$z = \xi z_1 + \eta z_2 + (1 - \xi - \eta) z_3 \tag{3.24b}$$



รูปที่ 3.10: พิกัดลาดเอียงสำหรับชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยมชนิด 3 โนด

กำหนดให้ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้น คือ

$$\begin{aligned}
\psi_1(\xi,\eta) &= \xi \\
\psi_2(\xi,\eta) &= \eta \\
\psi_3(\xi,\eta) &= 1 - \xi - \eta
\end{aligned} \tag{3.25}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\sum_{i=1}^{3} \psi_i = 1$
พิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นเทียบกับ ξ และ η จะได้

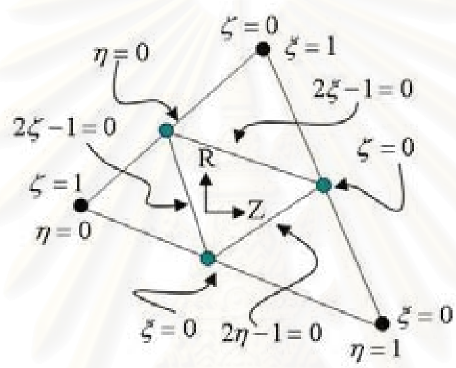
$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} &= 1 & \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} &= 0 \\
\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} &= 0 & \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} &= 1 \\
\frac{\partial \psi_3}{\partial \xi} &= -1 & \frac{\partial \psi_3}{\partial \eta} &= -1
\end{aligned} \tag{3.26}$$

ฟังก์ชันรูปร่างแบบกำลังสอง (quadratic shape function) ในบางปัญหาไม่สามารถที่จะประมาณค่าได้โดยฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้น จึงได้พัฒนาฟังก์ชันรูปร่างกำลังสองขึ้น โดยแปลงระบบพิกัดทรงกระบอก (r, z) ให้อยู่ในระบบพิกัดลาดเอียง (ξ, η) ดังรูปที่ 3.11 โดยมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned}
r &= r_1\phi_1(\xi,\eta) + r_2\phi_2(\xi,\eta) + r_3\phi_3(\xi,\eta) + r_4\phi_4(\xi,\eta) + r_5\phi_5(\xi,\eta) + r_6\phi_6(\xi,\eta) \\
z &= z_1\phi_1(\xi,\eta) + z_2\phi_2(\xi,\eta) + z_3\phi_3(\xi,\eta) + z_4\phi_4(\xi,\eta) + z_5\phi_5(\xi,\eta) + z_6\phi_6(\xi,\eta)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

เมื่อฟังก์ชันรูปร่างแบบกำลังสองอยู่ในรูป

$$
\begin{aligned}
\phi_1(\xi,\eta) &= (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta)\\
\phi_2(\xi,\eta) &= \xi(2\xi-1)\\
\phi_3(\xi,\eta) &= \eta(2\eta-1)\\
\phi_4(\xi,\eta) &= 4\xi(1-\xi-\eta)\\
\phi_5(\xi,\eta) &= 4\xi\eta\\
\phi_6(\xi,\eta) &= 4\eta(1-\xi-\eta)
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$



รูปที่ 3.11: พิกัดลาดเอียงสำหรับชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยมชนิด 6 โนด

สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นในการประมาณค่าความดัน แต่ความเร็วและความเค้นจะใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบกำลังสองในการประมาณค่า

พิจารณาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันรูปร่างแบบกำลังสองเทียบกับ ξ และ η จะได้

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi} &= -3+4\xi+4\eta & \frac{\partial\phi_1}{\partial\eta} &= -3+4\xi+4\eta\\
\frac{\partial\phi_2}{\partial\xi} &= -1+4\xi & \frac{\partial\phi_2}{\partial\eta} &= 0\\
\frac{\partial\phi_3}{\partial\xi} &= 0 & \frac{\partial\phi_3}{\partial\eta} &= -1+4\eta\\
\frac{\partial\phi_4}{\partial\xi} &= 4(1-2\xi-\eta) & \frac{\partial\phi_4}{\partial\eta} &= -4\xi\\
\frac{\partial\phi_5}{\partial\xi} &= 4\eta & \frac{\partial\phi_5}{\partial\eta} &= 4\xi\\
\frac{\partial\phi_6}{\partial\xi} &= -4\eta & \frac{\partial\phi_6}{\partial\eta} &= 4(1-\xi-2\eta)
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

กำหนดให้ N_i เป็นฟังก์ชันรูปร่าง ที่ขึ้นกับ $r(\xi,\eta)$, $z(\xi,\eta)$ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}\end{aligned} \tag{3.30}$$

ระบบสมการ 3.30 สามารถเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

กำหนด เมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix) J คือ

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

จึงได้

$$J = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนโนดในชิ้นประกอบย่อย และ N_i เป็นฟังก์ชันรูปร่างประจำโนดที่ i

จึงได้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

เนื่องจาก

$$J^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

แทนค่า J^{-1} ในสมการ 3.33 จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

3.2.6 ระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน (Taylor-Galerkin method)

ระเบียบวิธีเทย์เลอร์กาเลอร์คินอาศัยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) ในเวลาและหลักการชิ้นประกอบอันตะกาเลอร์คินในการกระจายระยะ (space) พิจารณานิพจน์ของความดัน ความเร็ว และความเค้นที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันรูปร่าง

จะได้ว่า $p = \sum_{i=1}^{3} p_i\psi_i$, $u = \sum_{i=1}^{6} u_i\phi_i$ และ $\tau = \sum_{i=1}^{6} \tau_i\phi_i$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial r} &= \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\partial \psi_i}{\partial r} & \frac{\partial p}{\partial z} &= \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \\
\frac{\partial u}{\partial r} &= \sum_{i=1}^{6} u_i \frac{\partial \phi_i}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial z} &= \sum_{i=1}^{6} u_i \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \\
\frac{\partial \tau}{\partial r} &= \sum_{i=1}^{6} \tau_i \frac{\partial \phi_i}{\partial r} & \frac{\partial \tau}{\partial z} &= \sum_{i=1}^{6} \tau_i \frac{\partial \phi_i}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

จากสมการ 3.34 และสมการ 3.35 จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial r} &= \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{1}{\det J}(J_{22}\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} - J_{12}\frac{\partial \psi_i}{\partial \eta}) \\
\frac{\partial p}{\partial z} &= \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{1}{\det J}(-J_{21}\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} + J_{11}\frac{\partial \psi_i}{\partial \eta}) \\
\frac{\partial u}{\partial r} &= \sum_{i=1}^{6} u_i \frac{1}{\det J}(J_{22}\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} - J_{12}\frac{\partial \phi_i}{\partial \eta}) \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \sum_{i=1}^{6} u_i \frac{1}{\det J}(-J_{21}\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} + J_{11}\frac{\partial \phi_i}{\partial \eta}) \\
\frac{\partial \tau}{\partial r} &= \sum_{i=1}^{6} \tau_i \frac{1}{\det J}(J_{22}\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} - J_{12}\frac{\partial \phi_i}{\partial \eta}) \\
\frac{\partial \tau}{\partial z} &= \sum_{i=1}^{6} \tau_i \frac{1}{\det J}(-J_{21}\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} + J_{11}\frac{\partial \phi_i}{\partial \eta})
\end{aligned} \tag{3.36}$$

เนื่องจาก $d\Omega = rdrdz$ เมื่อย้ายพิกัดจะได้ว่า $d\Omega = r(\det J)d\xi d\eta = r(\det J)d\tilde{\Omega}$

ดังนั้น

$$\int_{\Omega} f(r,z)d\Omega = \int_{\tilde{\Omega}} f(\xi,\eta)r(\det J)d\tilde{\Omega} \tag{3.37}$$

สำหรับระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน ที่แก้ระบบสมการตามหัวข้อที่ 2.3 จะอธิบายอย่างละเอียดในหัวข้อ 3.3.1 และหัวข้อ 3.3.2 อีกครั้งและศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 37, 38, 39, 58, 59, 60]

3.3 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการเคลือบเส้นลวด (Numerical method for wire coating flow)

ปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวดของพอลิเมอร์หลอมเหลว เป็นปัญหาที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น จึงเป็นการยากต่อการหาผลเฉลยแม่นตรงดังนั้นระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขชิ้นประกอบอันตะจึงนำมาใช้ในการทำนายผลเฉลยของปัญหานี้ โดยพิจารณาในระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติและแยกพิจารณาดังนี้

3.3.1 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขกับสมการควบคุม

ใช้ระเบียบวิธี FEM โดยนำหลักการเซมิอิมพลิซิท เทย์เลอร์กาเลอร์คินเพรชเชอร์คอร์เรคชันมาแก้ระบบสมการ 2.41 และ 2.42 ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน

กระจายเทอมความเร็วโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \Delta t \frac{\partial \vec{U}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{U}^n}{\partial t^2} + \dots \qquad (3.38)$$

จากหลักการเวลาครึ่งขั้น (half time step)

$$\vec{U}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\vec{U}^{n+1} + \vec{U}^n\right) \qquad (3.39)$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า

$$\vec{U}^{n+1} = 2\vec{U}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{U}^n \qquad (3.40)$$

แทนค่า $\vec{U}^{n+1}$ ในสมการ 3.38 และพิจารณาการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์เพียงอันดับที่ 1 จะได้

$$\frac{\partial \vec{U}^n}{\partial t} = \frac{2}{\Delta t}\left(\vec{U}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{U}^n\right) \qquad (3.41)$$

ใช้หลักการเซมิอิมพลิซิท (semi-implicit) เพื่อปรับนิพจน์การแพร่ (diffusion term) เป็น

$$\nabla \cdot \tilde{T} = \frac{1}{2}\left(\nabla \cdot \tilde{T}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla \cdot \tilde{T}^n\right) \qquad (3.42)$$

แทนค่าสมการ 3.41 และ 3.42 ในสมการ 2.41 จะได้

$$\frac{2Re}{\Delta t}\left(\vec{U}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{U}^n\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \cdot \tilde{T}^{n+\frac{1}{2}} - \nabla \cdot \tilde{T}^n\right) + \left[\nabla \cdot \tilde{T} - Re\vec{U} \cdot \nabla U - \nabla p\right]^n \qquad (3.43)$$

พิจารณาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลา t ของการกระจายเทย์เลอร์ในสมการ 3.38 เป็น

$$\frac{\partial \vec{U}^{n+1}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{U}^{n}}{\partial t} + \Delta t \frac{\partial^2 \vec{U}^{n}}{\partial t^2} + \cdots \tag{3.44}$$

โดยหลักการเวลาครึ่งขั้น

$$\frac{\partial \vec{U}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{U}^{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{U}^{n}}{\partial t}\right) \tag{3.45}$$

นำสมการ 3.44 ซึ่งประมาณค่าในอันดับ $O(\Delta t)$ และสมการ 3.41 แทนค่าในสมการ 3.45 จะได้

$$\frac{\partial \vec{U}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}\left(\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^{n}\right) \tag{3.46}$$

จากสมการ 2.41 พิจารณานิพจน์ความเร็วในครึ่งขั้นเวลา ได้เป็น

$$\frac{Re}{\Delta t}\left(\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^{n}\right) = \left[\nabla \cdot \tilde{T} - Re\vec{U} \cdot \nabla U\right]^{n+\frac{1}{2}} - \nabla p^{n+1} \tag{3.47}$$

จากหลักการแครงนิโคลสัน (Crank-Nicolson)สำหรับประมาณค่าความดัน จะได้

$$p^{n+1} = (1-\theta)p^{n} + \theta p^{n+1} \tag{3.48}$$

เมื่อ $0 \leq \theta \leq 1$

แทนค่าสมการ 3.48 ในสมการ 3.47 พร้อมทั้งจัดนิพจน์ความเร็วด้านซ้ายของสมการใหม่ ได้ว่า

$$\frac{Re}{\Delta t}\left(\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^{*}\right) + \frac{Re}{\Delta t}\left(\vec{U}^{*} - \vec{U}^{n}\right) = \left[\nabla \cdot \tilde{T} - Re\vec{U} \cdot \nabla U\right]^{n+\frac{1}{2}} - \nabla p^{n} - \theta \nabla q^{n+1} \tag{3.49}$$

เมื่อ $q^{n+1} = p^{n+1} - p^{n}$

จากสมการ 3.49 ใช้ระเบียบวิธีการแบ่งแยก (split method) เพื่อหาผลเฉลยได้เป็น

$$\frac{Re}{\Delta t}\left(\vec{U}^{*} - \vec{U}^{n}\right) = \left[\nabla \cdot \tilde{T} - Re\vec{U} \cdot \nabla U\right]^{n+\frac{1}{2}} - \nabla p^{n} \tag{3.50}$$

และ

$$\frac{Re}{\Delta t}\left(\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^{*}\right) = -\theta \nabla q^{n+1} \tag{3.51}$$

เมื่อพิจารณาพจน์การแพร่ในสมการ 3.50 ในลักษณะเดียวกับสมการ 3.42

$$\frac{Re}{\Delta t}\left(\vec{U}^{*} - \vec{U}^{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \cdot \tilde{T}^{*} - \nabla \cdot \tilde{T}^{n}\right) + \nabla \cdot \tilde{T}^{n} - \left[Re\vec{U} \cdot \nabla U\right]^{n+\frac{1}{2}} - \nabla p^{n} \tag{3.52}$$

พิจารณาไดเวอร์เจนต์ (divergence) ของสมการ 3.51 และจากสมการ 2.42 จะได้

$$\theta \nabla^2 q^{n+1} = \frac{Re}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{U}^{*} \tag{3.53}$$

3.3.2 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขกับตัวแบบองค์ประกอบ

จากระบบสมการตัวแบบแพนเทียนเทนเนอร์ (PTT model) ที่ได้แปลงให้อยู่ในระบบไร้หน่วย ในหัวข้อ 2.3 (หน้า 17) ได้สมการ 2.44 ในทำนองเดียวกันกับหัวข้อที่ 3.3.1 เมื่อกระจายความเค้นด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ร่วมกับหลักการเวลาครึ่งขั้น ณ ครึ่งขั้นเวลา $n + \frac{1}{2}$ จะได้ สมการ 2.44 อยู่ในรูป

$$\frac{2We}{\Delta t}\left(\tilde{\tau}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{\tau}^{n}\right) = \left[2\mu_V \tilde{D} - f\tilde{\tau}\right]^{n} - We\left\{\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau} - \tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U} - (\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U})^{\dagger} + \xi[(\tilde{D}\cdot\tilde{\tau}) + (\tilde{D}\cdot\tilde{\tau})^{\dagger}]\right\}^{n} \quad (3.54)$$

และเมื่อพิจารณา ณ เวลา $n + 1$ จะได้ว่า

$$\frac{We}{\Delta t}\left(\tilde{\tau}^{n+1} - \tilde{\tau}^{n}\right) = \left[2\mu_V \tilde{D} - f\tilde{\tau}\right]^{n+\frac{1}{2}} - We\left\{\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau} - \tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U} - (\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U})^{\dagger} + \xi[(\tilde{D}\cdot\tilde{\tau}) + (\tilde{D}\cdot\tilde{\tau})^{\dagger}]\right\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.55)$$

3.3.3 ระเบียบวิธีกาเลอร์คิน (Galerkin method)

จากหัวข้อ 3.3.1 และ 3.3.2 สรุปลำดับขั้นในการคำนวณได้ดังจะกล่าวต่อไป เมื่อแทนนิพจน์ของความเค้น $\tilde{T} = \tilde{\tau} + 2\mu_N \tilde{D}$ ลงในสมการต่างๆพร้อมทั้งจัดรูปใหม่จะได้ขั้นตอนตามลำดับขั้นต่อไปนี้ และเรียกกระบวนการนี้ว่า เซมิอิมพลิซิทเพรชเชอร์คอร์เรคชัน (semi-implicit pressure correction)

ลำดับขั้นที่ 1a คำนวณเพื่อทำนายหาความเร็วและความเค้น

$$\frac{2Re}{\Delta t}\left(\vec{U}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{U}^{n}\right) = \left[\nabla\cdot\left(\tilde{\tau} + 2\mu_N\tilde{D}\right) - Re\vec{U}\cdot\nabla U - \nabla p\right]^{n} + \mu_N\nabla\cdot\left(\tilde{D}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{D}^{n}\right) \quad (3.56a)$$

$$\frac{2We}{\Delta t}\left(\tilde{\tau}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{\tau}^{n}\right) = \left[2\mu_V \tilde{D} - f\tilde{\tau}\right]^{n} - We\left\{\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau} - \tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U} - (\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U})^{\dagger} + \xi[(\tilde{D}\cdot\tau) + (\tilde{D}\cdot\tilde{\tau})^{\dagger}]\right\}^{n} \quad (3.56b)$$

ลำดับขั้นที่ 1b คำนวณเพื่อทำนายหาความเร็วและความเค้น

$$\frac{Re}{\Delta t}\left(\vec{U}^{*} - \vec{U}^{n}\right) = \left[\nabla\cdot\tilde{\tau} - Re\vec{U}\cdot\nabla U\right]^{n+\frac{1}{2}} + \left[\nabla\cdot(2\mu_N\tilde{D}) - \nabla p\right]^{n} + \nabla\cdot\left(\tilde{D}^{*} - \tilde{D}^{n}\right) \quad (3.57a)$$

$$\frac{We}{\Delta t}\left(\tilde{\tau}^{n+1} - \tilde{\tau}^{n}\right) = \left[2\mu_V \tilde{D} - f\tilde{\tau}\right]^{n+\frac{1}{2}} - We\left\{\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau} - \tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U} - (\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U})^{\dagger} + \xi[(\tilde{D}\cdot\tilde{\tau}) + (\tilde{D}\cdot\tilde{\tau})^{\dagger}]\right\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.57b)$$

ลำดับขั้นที่ 2 คำนวณเพื่อหาความดัน

$$\theta \nabla^2 q^{n+1} = \frac{Re}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{U}^* \tag{3.58}$$

ลำดับขั้นที่ 3 คำนวณเพื่อปรับความเร็วให้ถูกต้อง

$$\frac{Re}{\Delta t}\left(\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^*\right) = -\theta \nabla q^{n+1} \tag{3.59}$$

เมื่อ $q^{n+1} = p^{n+1} - p^n$

ในวิทยานิพนธ์นี้จะพิจารณาปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวดในสองมิติ พิจารณาเฉพาะในทิศทาง (r,z)

นิพจน์ต่างในสมการควบคุม

พิจารณาส่วนประกอบแนวรัศมี (r-component) ในแต่ละนิพจน์จะได้

$$(\nabla \cdot \tilde{\tau})_r = \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} \tag{3.60a}$$

$$\left(\vec{U} \cdot \nabla U\right)_r = u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \tag{3.60b}$$

$$\left(\nabla \cdot \tilde{D}\right)_r = \frac{1}{2}\left\{2\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial u_r}{\partial r} - 2\frac{u_r}{r}\right) + \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial r}\right)\right\} \tag{3.60c}$$

พิจารณาส่วนประกอบตามความยาว z (z-component) ในแต่ละนิพจน์จะได้

$$(\nabla \cdot \tilde{\tau})_z = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \tag{3.61a}$$

$$\left(\vec{U} \cdot \nabla U\right)_z = u_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{3.61b}$$

$$\left(\nabla \cdot \tilde{D}\right)_z = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right\} \tag{3.61c}$$

นิพจน์ต่างในสมการตัวแบบองค์ประกอบ

พิจารณาส่วนประกอบในทิศ rr (rr-component) ในแต่ละนิพจน์จะได้

$$\left(\vec{U} \cdot \nabla \tilde{\tau}\right)_{rr} = u_r \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + v_z \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial z} \tag{3.62a}$$

$$\left(\tilde{\tau} \cdot \nabla \vec{U}\right)_{rr} = \tau_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \tau_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} \tag{3.62b}$$

$$\left(\nabla \vec{U}^\dagger \cdot \tilde{\tau}\right)_{rr} = \tau_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \tau_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} \tag{3.62c}$$

$$\left(\tilde{D} \cdot \tilde{\tau} + (\tilde{D} \cdot \tilde{\tau})^\dagger\right)_{rr} = 2\tau_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{3.62d}$$

พิจารณาส่วนประกอบในทิศ rz (rz-component) ในแต่ละนิพจน์จะได้

$$\left(\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau}\right)_{rz} = u_r\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + v_z\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} \tag{3.63a}$$

$$\left(\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U}\right)_{rz} = \tau_{rr}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \tau_{rz}\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{3.63b}$$

$$\left(\nabla\vec{U}^{\dagger}\cdot\tilde{\tau}\right)_{rz} = \tau_{rz}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \tau_{zz}\frac{\partial u_r}{\partial z} \tag{3.63c}$$

$$\left(\tilde{D}\cdot\tilde{\tau} + (\tilde{D}\cdot\tilde{\tau})^{\dagger}\right)_{rz} = \tau_{rz}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \tag{3.63d}$$

พิจารณาส่วนประกอบในทิศ zz (zz-component) ในแต่ละนิพจน์จะได้

$$\left(\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau}\right)_{zz} = u_r\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial r} + v_z\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} \tag{3.64a}$$

$$\left(\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U}\right)_{zz} = \tau_{rz}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \tau_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{3.64b}$$

$$\left(\nabla\vec{U}^{\dagger}\cdot\tilde{\tau}\right)_{zz} = \tau_{rz}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \tau_{zz}\frac{\partial u_r}{\partial z} \tag{3.64c}$$

$$\left(\tilde{D}\cdot\tilde{\tau} + (\tilde{D}\cdot\tilde{\tau})^{\dagger}\right)_{zz} = 2\tau_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{3.64d}$$

พิจารณาส่วนประกอบในทิศ $\theta\theta$ ($\theta\theta$-component) ในแต่ละนิพจน์จะได้

$$\left(\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau}\right)_{\theta\theta} = u_r\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial r} + v_z\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial z} \tag{3.65a}$$

$$\left(\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U}\right)_{\theta\theta} = \tau_{\theta\theta}\frac{u_r}{r} \tag{3.65b}$$

$$\left(\nabla\vec{U}^{\dagger}\cdot\tilde{\tau}\right)_{\theta\theta} = \tau_{\theta\theta}\frac{u_r}{r} \tag{3.65c}$$

$$\left(\tilde{D}\cdot\tilde{\tau} + (\tilde{D}\cdot\tilde{\tau})^{\dagger}\right)_{\theta\theta} = 2\tau_{\theta\theta}\frac{u_r}{r} \tag{3.65d}$$

ใช้ระเบียบวิธีกาเลอร์คินกับทุกลำดับขั้น โดยสำหรับความเร็วและความเค้นจะใช้ฟังก์ชันรูปร่างกำลังสองซึ่งชิ้นประกอบย่อยเป็นรูปสามเหลี่ยมชนิด 6 โนด ส่วนความดันจะใช้ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นซึ่งชิ้นประกอบย่อยเป็นรูปสามเหลี่ยมชนิด 3 โนด

พิจารณา ลำดับขั้นที่ 1 ใช้สูตรกาเลอร์คินอย่างอ่อนในส่วน r-component จากสมการ 3.56a จะได้

$$\frac{2Re}{\Delta t}\int_{\Omega}\phi\hat{U}_r d\Omega = \left[\int_{\Omega}\phi\left((\nabla\cdot\tilde{\tau})_r + 2\mu_N(\nabla\cdot\tilde{D})_r - Re(\vec{U}\cdot\nabla U)_r - (\nabla p)_r\right)d\Omega\right]^n + \mu_N\int_{\Omega}\phi\left((\nabla\cdot\tilde{D})_r^{n+\frac{1}{2}} - (\nabla\cdot\tilde{D})_r^n\right)d\Omega \tag{3.66}$$

เมื่อ $\hat{U}_r = (\vec{U}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{U}^n)_r$ และ $d\Omega = rdrdz$

พิจารณา $\int\limits_\Omega \phi(\nabla\cdot\tilde{\tau})_r d\Omega$ จากสมการ 3.60a จะได้

$$\int\limits_\Omega \phi(\nabla\cdot\tilde{\tau})_r d\Omega = \int\limits_\Omega \phi\left(\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}\right) d\Omega \tag{3.67}$$

จากทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ (divergence theorem) จะได้

$$\int\limits_\Omega \phi\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r} d\Omega = -\int\limits_\Omega \tau_{rr}\frac{\partial\phi}{\partial r} d\Omega + \int\limits_\Gamma \phi\tau_{rr}\cdot n_r d\Gamma \tag{3.68}$$

$$\int\limits_\Omega \phi\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} d\Omega = -\int\limits_\Omega \tau_{rz}\frac{\partial\phi}{\partial z} d\Omega + \int\limits_\Gamma \phi\tau_{rz}\cdot n_r d\Gamma \tag{3.69}$$

แทนสมการ3.68 และ 3.69 ลงในสมการ 3.67 ได้

$$\int\limits_\Omega \phi(\nabla\cdot\tilde{\tau})_r d\Omega = -\int\limits_\Omega \tau_{rr}\frac{\partial\phi}{\partial r} d\Omega + \int\limits_\Omega \frac{1}{r}(\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta})\phi d\Omega - \int\limits_\Omega \tau_{rz}\frac{\partial\phi}{\partial z} d\Omega + \textbf{boundary terms} \tag{3.70}$$

แทนค่า $\phi = \sum\limits_{i=1}^{6} \phi_i\varphi_i$, $\tau_k = \sum\limits_{i=1}^{6} \phi_i\tau_{k_i}$ เมื่อ $k = rr, rz, zz, \theta\theta$ จะได้

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \phi(\nabla\cdot\tilde{\tau})_r d\Omega = -\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j \int\limits_\Omega \phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial r} - \frac{1}{r}\phi_i\phi_j d\Omega\tau_{rr_i} - \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j \int\limits_\Omega \frac{1}{r}\phi_i\phi_j d\Omega\tau_{\theta\theta_i} \\ -\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j \int\limits_\Omega \phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial z} d\Omega\tau_{rz_i} + \textbf{boundary terms}\end{aligned} \tag{3.71}$$

พิจารณา $\int\limits_\Omega \phi\left(\nabla\cdot\tilde{D}\right)_r d\Omega$ และจากสมการ 3.60c จะได้

$$\int\limits_\Omega \phi\left(\nabla\cdot\tilde{D}\right)_r d\Omega = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \phi\left\{2\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial u_r}{\partial r} - 2\frac{u_r}{r}\right) + \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z\partial r}\right)\right\} d\Omega \tag{3.72}$$

โดยทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ (divergence theorem) จะได้

$$\int\limits_\Omega \phi\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} d\Omega = -\int\limits_\Omega \frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial r} d\Omega - \int\limits_\Omega \frac{1}{r}\phi\frac{\partial u_r}{\partial r} d\Omega + \int\limits_\Gamma \phi\frac{\partial u_r}{\partial r}\cdot n_r d\Gamma \tag{3.73a}$$

$$\int\limits_\Omega \phi\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} d\Omega = -\int\limits_\Omega \frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z} d\Omega + \int\limits_\Gamma \phi\frac{\partial u_r}{\partial z}\cdot n_r d\Gamma \tag{3.73b}$$

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial r} d\Omega = -\int_{\Omega} \frac{\partial v_z}{\partial r}\frac{\partial \phi}{\partial z} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial v_z}{\partial r} \cdot n_r d\Gamma \tag{3.73c}$$

แทนค่าสมการ 3.73a - 3.73c ในสมการ 3.72 จะได้

$$\int_{\Omega} \phi \left(\nabla \cdot \tilde{D}\right)_r d\Omega = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} 2\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\phi u_r + \frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial z} d\Omega - \frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{\partial v_z}{\partial r}\frac{\partial \phi}{\partial z} d\Omega + \textbf{boundary terms} \tag{3.74}$$

แทนค่า $\phi = \sum\limits_{i=1}^{6} \phi_i \varphi_i$, $u_t = \sum\limits_{i=1}^{6} \phi_i u_{t_i}$ เมื่อ $t = r, z$ ในสมการ 3.74 จะได้

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \phi \left(\nabla \cdot \tilde{D}\right)_r d\Omega = &-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} \varphi_j \int_{\Omega} 2\frac{\partial \phi_i}{\partial r}\frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\phi_i\phi_j + \frac{\partial \phi_i}{\partial z}\frac{\partial \phi_j}{\partial z} d\Omega u_{r_i} \\ &- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} \varphi_j \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial r}\frac{\partial \phi_j}{\partial z} d\Omega u_{z_i} + \textbf{boundary terms}\end{aligned} \tag{3.75}$$

พิจารณา $\int\limits_{\Omega} \phi(\vec{U} \cdot \nabla U)_r d\Omega$ จากสมการ 3.60b จะได้

$$\int_{\Omega} \phi(\vec{U} \cdot \nabla U)_r d\Omega = \int_{\Omega} \phi \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) d\Omega \tag{3.76}$$

แทนค่า $\phi = \sum\limits_{i=1}^{6} \phi_i \varphi_i$, $u_t = \sum\limits_{i=1}^{6} \phi_i u_{t_i}$ เมื่อ $t = r, z$ ในสมการ 3.76 จะได้

$$\int_{\Omega} \phi(\vec{U} \cdot \nabla U)_r d\Omega = \sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} \varphi_j \left(\int_{\Omega} \phi_i\phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial r} d\Omega u_{r_i} + \int_{\Omega} \phi_i\phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial z} d\Omega u_{z_i} \right) u_{r_k} \tag{3.77}$$

พิจารณา $\int\limits_{\Omega} \phi(\nabla p)_r d\Omega$ โดยแทนค่า $\phi = \sum\limits_{i=1}^{6} \phi_i \varphi_i$ และ $p = \sum\limits_{i=1}^{3} \psi_i p_i$ จะได้

$$\int_{\Omega} \phi(\nabla p)_r d\Omega = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3} \varphi_i \int_{\Omega} \phi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} d\Omega p_j \tag{3.78}$$

พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือของสมการ 3.66 โดยแทนค่า $\phi = \sum\limits_{i=1}^{6} \phi_i \varphi_i$ และ $\hat{u}_r = \sum\limits_{i=1}^{6} \psi_i \hat{u}_{r_i}$ จะได้

$$\int_{\Omega} \phi \hat{U}_r d\Omega = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} \varphi_i \int_{\Omega} \phi_i\phi_j d\Omega \hat{u}_{r_j} \tag{3.79}$$

ดังนั้นจึงได้สมการ 3.66 เป็น

$$\frac{2Re}{\Delta t}\varphi M\hat{U}_r = \left[-\varphi(D_r - D)\tau_{rr} - \varphi D\tau_{\theta\theta} - \varphi D_z\tau_{rz}\right]^n$$
$$- \left[\mu_N\varphi\left(S_{11}U_r + S_{12}V_z\right) - Re\varphi\left(N_rU_r + N_zV_z\right)U_r - \varphi L_r p\right]^n$$
$$- \frac{\mu_N}{2}\varphi\left(S_{11}\hat{U}_r + S_{12}\hat{V}_z\right) + \textbf{boundary terms} \tag{3.80}$$

พิจารณา ลำดับขั้นที่ 1 ในส่วนประกอบตามความยาว z จากสมการ 3.56a โดยสูตรกาเลอร์คินอย่างอ่อนจะได้

$$\frac{2Re}{\Delta t}\int\limits_{\Omega}\phi\hat{V}_z d\Omega = \left[\int\limits_{\Omega}\phi\left((\nabla\cdot\tilde{\tau})_z + 2\mu_N(\nabla\cdot\tilde{D})_z - Re(\vec{U}\cdot\nabla U)_z - (\nabla p)_z\right)d\Omega\right]^n$$
$$+ \mu_N\int\limits_{\Omega}\phi\left((\nabla\cdot\tilde{D})_z^{n+\frac{1}{2}} - (\nabla\cdot\tilde{D})_z^n\right)d\Omega \tag{3.81}$$

จากสมการ 3.61a จะได้

$$\int\limits_{\Omega}\phi(\nabla\cdot\tilde{\tau})_z d\Omega = -\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j\int\limits_{\Omega}\phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial r} - \frac{1}{r}\phi_i\phi_j d\Omega\tau_{rz_i} - \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j\int\limits_{\Omega}\phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial z}d\Omega\tau_{zz_i}$$
$$+ \textbf{boundary terms} \tag{3.82}$$

จากสมการ 3.61b จะได้

$$\int\limits_{\Omega}\phi\left(\nabla\cdot\tilde{D}\right)_z d\Omega = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\phi_i}{\partial r}\frac{\partial\phi_j}{\partial r} + 2\frac{\partial\phi_i}{\partial z}\frac{\partial\phi_j}{\partial z}d\Omega u_{z_i}$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\phi_i}{\partial r}\frac{\partial\phi_j}{\partial z}d\Omega u_{r_i} + \textbf{boundary terms} \tag{3.83}$$

จากสมการ 3.61c จะได้

$$\int\limits_{\Omega}\phi(\vec{U}\cdot\nabla U)_z d\Omega = \sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j\left(\int\limits_{\Omega}\phi_i\phi_j\frac{\partial\phi_k}{\partial r}d\Omega u_{r_i} + \int\limits_{\Omega}\phi_i\phi_j\frac{\partial\phi_k}{\partial r}d\Omega u_{z_i}\right)u_{z_k} \tag{3.84}$$

และ

$$\int\limits_{\Omega}\phi(\nabla p)_z d\Omega = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3}\varphi_i\int\limits_{\Omega}\phi_i\frac{\partial\psi_j}{\partial z}d\Omega p_j \tag{3.85}$$

ดังนั้นจึงได้สมการ 3.82 เป็น

$$\begin{aligned}\frac{2Re}{\Delta t}\varphi M\hat{V}_z = & [-\varphi(D_r - D)\tau_{rz} - \varphi D_z\tau_{zz}]^n \\ & - [\mu_N\varphi\left(S_{12}U_r + S_{22}V_z\right) - Re\varphi\left(N_rU_r + N_zV_z\right)V_z - \varphi L_zp]^n \\ & - \frac{\mu_N}{2}\varphi\left(S_{12}\hat{U}_r + S_{22}\hat{V}_z\right) + \textbf{boundary terms}\end{aligned} \tag{3.86}$$

พิจารณานิพจน์ต่างๆในสมการองค์ประกอบ

พิจารณานิพจน์ที่ส่วนประกอบ rr (rr-component)

จากสมการ 3.56b โดยสูตรกาเลอร์คินอย่างอ่อนจะได้

$$\begin{aligned}\frac{2We}{\Delta t}\int_\Omega \phi\hat{\tau}_{rr}d\Omega = & \int_\Omega \phi\left[2\mu_V\tilde{D} - f\tilde{\tau}\right]^n_{rr}d\Omega \\ & - We\int_\Omega \phi\left\{\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau} - \tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U} - (\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U})^\dagger + \xi[(\tilde{D}\cdot\tilde{\tau}) + (\tilde{D}\cdot\tilde{\tau})^\dagger]\right\}^n_{rr}d\Omega\end{aligned} \tag{3.87}$$

เมื่อ$\hat{\tau}_{rr} = (\tilde{\tau}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{\tau}^n)_{rr}$

จะเห็นว่า

$$\int_\Omega \phi D_{rr}d\Omega = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j\int_\Omega \phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial r}d\Omega u_{r_i} \tag{3.88}$$

และ

$$\int_\Omega \phi\tau_{rr}d\Omega = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j\int_\Omega \phi_i\phi_j d\Omega\tau_{rr_i} \tag{3.89}$$

พิจารณา $\int_\Omega \phi\left(\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau}\right)_{rr}d\Omega$ จากสมการ 3.62a

$$\int_\Omega \phi\left(\vec{U}\cdot\nabla\tilde{\tau}\right)_{rr}d\Omega = \sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j\left(\int_\Omega \phi_i\phi_j\frac{\partial\phi_k}{\partial r}d\Omega u_{r_i} + \int_\Omega \phi_i\phi_j\frac{\partial\phi_k}{\partial z}d\Omega u_{z_i}\right)\tau_{rr_k} \tag{3.90}$$

จากสมการ 3.62b และ จากสมการ 3.62c จะได้

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \phi\left(\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U} + (\tilde{\tau}\cdot\nabla\vec{U})^\dagger\right)_{rr}d\Omega \\ &\qquad = 2\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j\left(\int_\Omega \phi_i\phi_j\frac{\partial\phi_k}{\partial r}d\Omega\tau_{rr_i} + \int_\Omega \phi_i\phi_j\frac{\partial\phi_k}{\partial z}d\Omega\tau_{rz_i}\right)u_{r_k}\end{aligned} \tag{3.91}$$

และจากสมการ 3.62d จะได้

$$\int_\Omega \phi\left((\tilde{D}\cdot\tilde{\tau}) + (\tilde{D}\cdot\tilde{\tau})^\dagger\right)_{rr}d\Omega = 2\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j\int_\Omega \phi_i\phi_j\frac{\partial\phi_k}{\partial r}d\Omega u_{r_i}\tau_{rr_k} \tag{3.92}$$

ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการ 3.87 ได้เป็น

$$\frac{2We}{\Delta t}\varphi M\hat{T}_{rr} = \{2\mu_V\varphi D_rU_r - \varphi(fM - We[(1+2\xi)N_rU_r + N_zV_z])T_{rr} + We\varphi[N_rT_{rr} + N_zT_{rz}]U_r\}^n \quad (3.93)$$

พิจารณาส่วนประกอบในทิศ rz (rz-component)

จากสมการ 3.63a - 3.63d เมื่อใช้สูตรกาเลอร์คินอย่างอ่อนและแทนค่าฟังก์ชันรูปในสมการ 3.56b จะได้

$$\frac{2We}{\Delta t}\varphi M\hat{T}_{rz} = \varphi\{\mu_V(D_rV_z+D_zU_r)-(fM+We[N_rU_r+N_zV_z+\xi(N_rV_z+N_zU_r)])T_{rz} + We[(N_rT_{rr} + N_zT_{rz})V_z + (N_rT_{rz} + N_zT_{zz})U_r]\}^n \quad (3.94)$$

พิจารณาส่วนประกอบในทิศ zz (zz-component)

จากสมการ 3.64a - 3.64d เมื่อใช้สูตรกาเลอร์คินอย่างอ่อนและแทนค่าฟังก์ชันรูปร่างในสมการ 3.56b จะได้

$$\frac{2We}{\Delta t}\varphi M\hat{T}_{zz} = \varphi\{2\mu_V D_zV_z - (fM + We[N_rU_r + N_zV_z])T_{zz} + We[(N_rT_{rz} + (1-2\xi)N_zT_{zz})V_z + (N_rT_{rz} + N_zT_{zz})U_r]\}^n \quad (3.95)$$

พิจารณาส่วนประกอบในทิศ $\theta\theta$ ($\theta\theta$-component)

จากสมการ 3.65a - 3.65d เมื่อใช้สูตรกาเลอร์คินอย่างอ่อนและแทนค่าฟังก์ชันรูปในสมการ 3.56b จะได้

$$\frac{2We}{\Delta t}\varphi M\hat{T}_{\theta\theta} = \varphi\{2\mu_V DV_z - (fM + We[N_rU_r + N_zV_z - (2-2\xi)FU_r])T_{\theta\theta} + We[(N_rT_{rz} + (1-2\xi)N_zT_{zz})V_z + (N_rT_{rz} + N_zT_{zz})U_r]\}^n \quad (3.96)$$

เมื่อ $F = \int_\Omega \frac{1}{r}\phi_i\phi_j\phi_k d\Omega$

เนื่องจาก $\nabla^2 q = \dfrac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial q}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 q}{\partial z^2}$

และ $\nabla\cdot\vec{U} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$ เมื่อใช้ระเบียบวิธีเทย์เลอร์กาเลอร์คินกับทุกลำดับขั้นตอนจากสมการ 3.56a -3.59 แล้วจัดให้ระบบสมการให้อยู่ให้รูปเมทริกซ์จะได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1a

สมการใน r-component

$$\left(\frac{2Re}{\Delta t}M + \frac{\mu_N}{2}S_{11}\right)\hat{U}_r + \frac{\mu_N}{2}S_{12}\hat{V}_z = -\left[(D_r - D)\tau_{rr} + D\tau_{\theta\theta} + D_z\tau_{rz}\right]^n$$
$$- \left[\mu_N\left(S_{11}U_r + S_{12}V_z\right) - Re\left(N_rU_r + N_zV_z\right)U_r - L_rp\right]^n \tag{3.97a}$$

สมการใน z-component

$$\left(\frac{2Re}{\Delta t}M + \frac{\mu_N}{2}S_{22}\right)\hat{V}_z + \frac{\mu_N}{2}S_{12}\hat{U}_r = -\left[(D_r - D)\tau_{rz} + D_z\tau_{zz}\right]^n$$
$$- \left[\mu_N\left(S_{12}U_r + S_{22}V_z\right) - Re\left(N_rU_r + N_zV_z\right)V_z - L_zp\right]^n \tag{3.97b}$$

สมการใน rr-component

$$\frac{2We}{\Delta t}M\hat{T}_{rr} = \{2\mu_V D_rU_r - (fM - We[(1+2\xi)N_rU_r + N_zV_z])T_{rr}$$
$$+ We[N_rT_{rr} + N_zT_{rz}]U_r\}^n \tag{3.97c}$$

สมการใน rz-component

$$\frac{2We}{\Delta t}M\hat{T}_{rz} = \{\mu_V(D_rV_z + D_zU_r) - (fM + We[N_rU_r + N_zV_z + \xi(N_rV_z + N_zU_r)])T_{rz}$$
$$+ We[(N_rT_{rr} + N_zT_{rz})V_z + (N_rT_{rz} + N_zT_{zz})U_r]\}^n \tag{3.97d}$$

สมการใน zz-component

$$\frac{2We}{\Delta t}M\hat{T}_{zz} = \{2\mu_V D_zV_z - (fM + We[N_rU_r + N_zV_z])T_{zz}$$
$$+ We[(N_rT_{rz} + (1-2\xi)N_zT_{zz})V_z + (N_rT_{rz} + N_zT_{zz})U_r]\}^n \tag{3.97e}$$

สมการใน $\theta\theta$-component

$$\frac{2We}{\Delta t}M\hat{T}_{\theta\theta} = \{2\mu_V DV_z - (fM + We[N_rU_r + N_zV_z - (2-2\xi)FU_r])T_{\theta\theta}$$
$$+ We[(N_rT_{rz} + (1-2\xi)N_zT_{zz})V_z + (N_rT_{rz} + N_zT_{zz})U_r]\}^n \tag{3.97f}$$

ขั้นตอนที่ 1b

สมการใน r-component

$$\left(\frac{Re}{\Delta t}M + \frac{\mu_N}{2}S_{11}\right)\hat{U}_r + \frac{\mu_N}{2}S_{12}\hat{V}_z = -[(D_r - D)\tau_{rr} + D\tau_{\theta\theta} + D_z\tau_{rz} - Re\left(N_rU_r + N_zV_z\right)U_r]^{n+\frac{1}{2}} - [\mu_N\left(S_{11}U_r + S_{12}V_z\right) - L_rp]^n \tag{3.98a}$$

สมการใน z-component

$$\left(\frac{Re}{\Delta t}M + \frac{\mu_N}{2}S_{22}\right)\hat{V}_z + \frac{\mu_N}{2}S_{12}\hat{U}_r = -[(D_r - D)\tau_{rz} + D_z\tau_{zz} - Re\left(N_rU_r + N_zV_z\right)V_z]^{n+\frac{1}{2}} - [\mu_N\left(S_{12}U_r + S_{22}V_z\right) - L_zp]^n \tag{3.98b}$$

สมการใน rr-component

$$\frac{We}{\Delta t}M\hat{T}_{rr} = \{2\mu_V D_rU_r - (fM - We[(1+2\xi)N_rU_r + N_zV_z])T_{rr} + We[N_rT_{rr} + N_zT_{rz}]U_r\}^{n+\frac{1}{2}} \tag{3.98c}$$

สมการใน rz-component

$$\frac{We}{\Delta t}M\hat{T}_{rz} = \{\mu_V(D_rV_z + D_zU_r) - (fM + We[N_rU_r + N_zV_z + \xi(N_rV_z + N_zU_r)])T_{rz} + We[(N_rT_{rr} + N_zT_{rz})V_z + (N_rT_{rz} + N_zT_{zz})U_r]\}^{n+\frac{1}{2}} \tag{3.98d}$$

สมการใน zz-component

$$\frac{We}{\Delta t}M\hat{T}_{zz} = \{2\mu_V D_zV_z - (fM + We[N_rU_r + N_zV_z])T_{zz} + We[(N_rT_{rz} + (1-2\xi)N_zT_{zz})V_z + (N_rT_{rz} + N_zT_{zz})U_r]\}^{n+\frac{1}{2}} \tag{3.98e}$$

สมการใน $\theta\theta$-component

$$\frac{We}{\Delta t}M\hat{T}_{\theta\theta} = \{2\mu_V DV_z - (fM + We[N_rU_r + N_zV_z - (2-2\xi)FU_r])T_{\theta\theta} + We[(N_rT_{rz} + (1-2\xi)N_zT_{zz})V_z + (N_rT_{rz} + N_zT_{zz})U_r]\}^{n+\frac{1}{2}} \tag{3.98f}$$

ขั้นตอนที่ 2

$$\theta K Q^{n+1} = -\frac{Re}{\Delta t}(L_r U_r + L_z V_z)^* \tag{3.99}$$

ขั้นตอนที่ 3

สมการใน r-component

$$\frac{Re}{\Delta t} M \hat{U}_r = L_r Q^{n+1} \tag{3.100a}$$

สมการใน z-component

$$\frac{Re}{\Delta t} M \hat{V}_z = L_z Q^{n+1} \tag{3.100b}$$

เมื่อ

$$M_{ij} = \int_\Omega \phi_i \phi_j d\Omega$$
$$(S_{11})_{ij} = \int_\Omega 2\frac{\partial \phi_i}{\partial r}\frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\phi_i\phi_j + \frac{\partial \phi_i}{\partial z}\frac{\partial \phi_j}{\partial z} d\Omega$$
$$(S_{12})_{ij} = \int_\Omega \frac{\partial \phi_i}{\partial r}\frac{\partial \phi_j}{\partial z} d\Omega$$
$$(S_{22})_{ij} = \int_\Omega \frac{\partial \phi_i}{\partial r}\frac{\partial \phi_j}{\partial r} + 2\frac{\partial \phi_i}{\partial z}\frac{\partial \phi_j}{\partial z} d\Omega$$
$$(N_r)_{ij}^k = \int_\Omega \phi_i \phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial r} d\Omega$$
$$(N_z)_{ij}^k = \int_\Omega \phi_i \phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial z} d\Omega$$
$$(D_r)_{ij} = \int_\Omega \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial r} d\Omega$$
$$(D_z)_{ij} = \int_\Omega \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial z} d\Omega$$
$$D_{ij} = \int_\Omega \frac{1}{r}\phi_i \phi_j d\Omega$$
$$(L_r)_{ij} = \int_\Omega \phi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} d\Omega$$
$$(L_z)_{ij} = \int_\Omega \phi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial z} d\Omega$$
$$K_{ij} = \int_\Omega \frac{\partial \phi_i}{\partial r}\frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z}\frac{\partial \phi_j}{\partial z} d\Omega$$

3.4 การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical integration)

การหาค่านิพจน์ที่อยู่ในรูปปริพันธ์ ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเชิงปริพันธ์เพื่อหาค่าปริพันธ์นั้นๆ ซึ่งจะใช้บางวิธีการดังต่อไปนี้

3.4.1 หลักการประมาณค่าพื้นที่เกาส์เซียน สำหรับ 1 มิติ (Gaussian quadrature approach for one dimension)

หากพิจารณาปัญหาเชิงปริพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi \tag{3.101}$$

สามารถที่จะประมาณค่าปริพันธ์ดังกล่าวด้วยวิธีการประมาณค่าพื้นที่เกาส์เซียนโดย

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i) \tag{3.102}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนโนดของเกาส์

w_i เป็นน้ำหนักประจำโนดที่ i

ξ_i เป็นจุดของเกาส์ (Gauss point)

ซึ่งค่าจุดของเกาส์และน้ำหนัก สามารถพิจารณาได้จากตาราง 3.2 (ศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [52, 53, 55])

3.4.2 หลักการประมาณค่าพื้นที่เกาส์เซียน สำหรับ 2 มิติ (Gaussian quadrature approach for two dimension)

สำหรับชิ้นประกอบย่อยรูปสี่เหลี่ยมจะเป็นการประมาณค่าปริพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{3.103}$$

จำนวนโนด (n)	ตำแหน่ง (ξ_i)	น้ำหนัก (w_i)
1	0.0	2.0
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	± 0.7745966692	0.5555555555
	0.0	0.8888888889
4	± 0.8611363116	0.3478548451
	± 0.3399810436	0.6521451549
5	± 0.9061798459	0.2369268851
	± 0.5384693101	0.4786286705
	0.0	0.5688888889
6	± 0.9324695142	0.1713244924
	± 0.6612093865	0.3607625730
	± 0.2386191861	0.4679139346

ตารางที่ 3.2: จุดของเกาส์และน้ำหนัก สำหรับการประมาณพื้นที่ของเกาส์ ใน 1 มิติ

สามารถกระจายสมการ 3.103 เพื่อประมาณค่า โดย Gaussian quadrature ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
I &\approx \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i, \eta) \right] d\eta \\
&\approx \sum_{j=1}^{n} w_j \left[\sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i, \eta_j) \right]
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$I \approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} w_j w_i f(\xi_i, \eta_j) \tag{3.104}$$

สำหรับชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยม ในการประมาณค่าปริพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$I = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-\eta} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{3.105}$$

ซึ่งจะประมาณค่าปริพันธ์ในสมการ 3.105 ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\
&\approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i,\eta_i)
\end{aligned}
\tag{3.106}
$$

ดังค่าจุดของเกาส์และน้ำหนักที่แสดงในตาราง 3.3 [52]

จำนวนโนด (n)	ตำแหน่ง			น้ำหนัก (w_i)
	ξ_i	η_i	ζ_i	
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{27}{48}$
4	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{25}{48}$
	$\frac{11}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{25}{48}$
	$\frac{2}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{25}{48}$

ตารางที่ 3.3: จุดของเกาส์และน้ำหนัก สำหรับชิ้นประกอบรูปสามเหลี่ยม

เมื่อ $\zeta = 1 - \xi - \eta$

3.4.3 การประมาณค่าโดยวิธีการอื่น

สำหรับ 1 มิติ

$$
\int_{\Omega} \xi^i \eta^j \, d\Gamma \approx \frac{i!j!}{(i+j+1)!}L \tag{3.107}
$$

เมื่อ L เป็นความยาวของเส้นชิ้นประกอบ และ i,j คือเลขชี้กำลังของ ξ และ η ตามลำดับ โดยที่ i,j คือเลขจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

สำหรับ 2 มิติ

$$
\int_{\Omega} \xi^i \eta^j \zeta^k \, d\Omega \approx \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!}2A \tag{3.108}
$$

เมื่อ A เป็นพื้นที่ของชิ้นประกอบ และ i, j, k คือเลขชี้กำลังของ ξ และ η ตามลำดับ โดยที่ i, j, k คือเลขจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

3.5 นอร์มความผิดพลาด (Error norm)

ในการพิจารณาการลู่เข้าสู่ผลเฉลย โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจะขึ้นอยู่กับค่านอร์มความผิดพลาดที่ได้จากการคำนวณซึ่งเป็นตัวกำหนดความเชื่อมั่นในผลเฉลยที่ได้ว่ามีความแม่นยำมากน้อยเพียงใดจึงขึ้นกับปัญหาที่ทำและความต้องการของผู้ใช้ ในวิทยานิพนธ์นี้ สำหรับค่านอร์มความผิดพลาดจะพิจารณาในหลักการของ $l_\infty norm$ ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\|E(x)\|_\infty = \frac{\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty}{\left\|x^{(k)}\right\|_\infty} \tag{3.109}$$

เมื่อค่านอร์มความผิดพลาดที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าค่านอร์มความผิดพลาดที่กำหนด (tolerance, TOL)

$$\|E(x)\|_\infty \leq TOL$$

จะกล่าวว่าค่าที่คำนวณได้เป็นผลเฉลยที่ได้จากการประมาณค่านั่นได้เป็น $x^{(k)}$ ในวิทยานิพนธ์นี้ได้กำหนดค่าความคาดเคลื่อนของนิพจน์ต่างๆ เป็นดังนี้สำหรับความเร็ว ความดัน และความเค้น ใช้ความคาดเคลื่อนเป็น 10^{-5} ส่วนการคำนวณเพื่อหาพิกัดของพื้นผิวอิสระใช้ค่านอร์มความผิดพลาดเป็น 5×10^{-4} ซึ่งเพียงพอสำหรับปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้

3.6 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับระบบสมการเชิงเส้น (Numerical method for linear equation system)

จากบทนำที่กล่าวมาเมื่อใช้ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะกับปัญหาต่างๆ พบว่าท้ายสุดจะได้ระบบสมการเชิงเส้นที่อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์

$$\tilde{A}\vec{x} = \vec{b} \tag{3.110}$$

เมื่อ $\tilde{A}$ เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (coefficient matrix)

$\vec{x}$ เป็นเวกเตอร์ตัวแปร (variable vector)

$\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ค่าคงตัว (constant vector)

โดยที่

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{\dagger} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

และ

$$\vec{b}^{\dagger} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

ซึ่ง $\vec{x}^{\dagger}$ เป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเวกเตอร์ $\vec{x}$ และ $\vec{b}^{\dagger}$ เป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเวกเตอร์ $\vec{b}$ ในการแก้ระบบสมการ 3.110 ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสามารถทำได้ทั้ง ระเบียบวิธีโดยตรง (direct method) และ ระเบียบวิธีโดยอ้อม (indirect method) สำหรับระบบวิธีโดยตรง ได้แก่ การกำจัดของเกาส์ (Guass elimination) ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู (LU decomposition method) และระเบียบวิธีโชเลซกี (choleski's method) เป็นต้น วิธีการนี้มักใช้กับปัญหาที่มีขนาดเล็กและมีตัวแปรไม่ทราบค่าไม่มาก แต่หากเป็นปัญหาที่มีขนาดใหญ่มักใช้ระเบียบวิธีการโดยอ้อมช่วยในการหาผลเฉลยซึ่งระเบียบวิธีโดยอ้อมคือการคำนวณวนซ้ำจนกระทั่งได้ผลเฉลย เริ่มจากการกำหนดค่าเริ่มต้น $\{x_i\}^0$ แล้วคำนวณหาค่า $\{x_i\}^1$ ที่สอดคล้องกับระบบสมการ 3.110 โดยทำการคำนวณ $\{x_i\}^k$ ซ้ำไปเรื่อยๆจนกระทั่งค่านอร์มความผิดพลาด ($|\{x_i\}^{k+1} - \{x_i\}^k|$)มีค่าน้อยกว่าค่าที่กำหนดไว้ จะถือว่าค่าที่คำนวณได้ลู่เข้าสู่ผลเฉลย ดังนั้นจะกล่าวว่า $\{x_i\}^{k+1}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ 3.110 สำหรับระเบียบวิธีโดยตรงและโดยอ้อมจะกล่าวถึงบางวิธีมีดังนี้

3.6.1 ระเบียบวิธีโชเลซกี (Choleski's method)

ในวิทยานิพนธ์นี้มีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นซึ่งเขียนอยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ดังสมการ 3.110 ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหลายวิธี วิธีหนึ่งที่นิยมใช้คือระเบียบวิธีโชเลซกี และพบว่าการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการนี้ เมทริกซ์ $\tilde{A}$ ต้องเป็นเมทริกซ์สมมาตรโดยแยก เมทริกซ์ $\tilde{A}$ เป็นสองเมทริกซ์ย่อยคูณกันดังนี้ $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^{\dagger}$

เมื่อ

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{12} & l_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{1(n-1)} & l_{2(n-1)} & l_{3(n-1)} & l_{4(n-1)} & \cdots & l_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ l_{1n} & l_{2n} & l_{3n} & l_{4n} & \cdots & l_{(n-1)n} & l_{nn} \end{bmatrix}$$

และ $\tilde{L}^{\dagger}$ เป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ $\tilde{L}$
แทนค่า $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^{\dagger}$ ในระบบสมการ 3.110 จะได้สมการใหม่ในรูป

$$\tilde{L}\vec{y} = \vec{b} \tag{3.111}$$

โดยที่

$$\tilde{L}^{\dagger}\vec{x} = \vec{y} \tag{3.112}$$

ในการแก้ระบบสมการ 3.110 สามารถที่จะแก้ระบบสมการ 3.111 ก่อน ด้วยการแทนค่าไปข้างหน้า (forward substitution) เพื่อหาค่า $\vec{y}$ และหลังจากนั้นจึงแก้ระบบสมการ 3.112 ด้วยการแทนค่าย้อนกลับ (backward substitution) เพื่อหาผลลัพธ์ $\vec{x}$ ซึ่งเป็นผลเฉลยที่ต้องการ ลำดับขั้นตอนในการหาค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆในเมทริกซ์ $\tilde{L}$ สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ที่ว่า $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^{\dagger}$ ได้ดังนี้
สมาชิกในแถวแรกของเมทริกซ์ $\tilde{L}$ คือ

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \tag{3.113}$$

สำหรับสมาชิกในแถวที่ k โดยที่ $k = 2, 3, \cdots, n$

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{ii}} \tag{3.114}$$

และ

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2} \tag{3.115}$$

จากระบบสมการ 3.111 โดยการแทนค่าไปข้างหน้าจะได้เวกเตอร์ $\vec{y}$ เป็น

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$y_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j}{l_{ii}} \tag{3.116}$$

เมื่อ $i = 2, 3, \cdots, n$

แทนค่าเวกเตอร์ $\vec{y}$ ที่ได้ในระบบสมการ 3.112 โดยการแทนค่าย้อนหลังจะได้ค่าของเวกเตอร์ $\vec{x}$ เป็น

$$x_n = \frac{y_n}{l_{nn}}$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j}{l_{ii}} \tag{3.117}$$

เมื่อ $i = n-1, n-2, \cdots, 1$

3.6.2 ระเบียบวิธีการทำซ้ำจาโคบี (Jacobi iterative method)

กำหนดให้ $\tilde{A} = \tilde{D} - \tilde{L} - \tilde{U}$

เมื่อ $\tilde{D}$ คือเมทริกซ์ทะแยงของเมทริกซ์ $\tilde{A}$ $\left(\tilde{D} = [a_{ij}], i = j\right)$ (diagonal matrix part of $\tilde{A}$)

$-\tilde{L}$ คือเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างของเมทริกซ์ $\tilde{A}$ $\left(-\tilde{L} = [a_{ij}], i < j\right)$ (lower-triangular matrix part of $\tilde{A}$)

$-\tilde{U}$ คือเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนของเมทริกซ์ $\tilde{A}$ $\left(-\tilde{U} = [a_{ij}], i > j\right)$ (upper-triangular matrix part of $\tilde{A}$)

สมการ 3.110 จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปใหม่เป็น

$$\tilde{D}\vec{x} = (\tilde{U} + \tilde{L})\vec{x} + \vec{b} \tag{3.118}$$

พิจารณาให้ $a_{ii} \neq 0$ ดังนั้น $\tilde{D}^{-1} = \left[\frac{1}{a_{ii}}\right]$ จากสมการ 3.118 จะได้

$$\vec{x} = \tilde{D}^{-1}(\tilde{U} + \tilde{L})\vec{x} + \tilde{D}^{-1}\vec{b} \tag{3.119}$$

โดยวิธีการกระทำซ้ำจาโคบี จะได้

$$\vec{x}^{(k)} = \tilde{D}^{-1}(\tilde{U} + \tilde{L})\vec{x}^{(k-1)} + \tilde{D}^{-1}\vec{b}, \text{ เมื่อ } k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.120}$$

นั่นคือ

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(a_{ij} x_j^{(k-1)}\right) + b_i}{a_{ii}} \tag{3.121}$$

3.6.3 ระเบียบวิธีการทำซ้ำเกาส์ไซเดล (Gauss-Seidel iterative method)

สำหรับระเบียบวิธีการนี้ได้พัฒนาปรับปรุงจากระเบียบวิธีการทำซ้ำจาโคบี โดยจัดสมการ 3.110 ให้อยู่ในรูป

$$\left(\tilde{D}-\tilde{L}\right)\vec{x}^{(k)}=\tilde{U}\vec{x}^{(k-1)}+\vec{b} \tag{3.122}$$

ดังนั้น

$$\vec{x}^{(k)}=\left(\tilde{D}-\tilde{L}\right)^{-1}\tilde{U}\vec{x}^{(k-1)}+\left(\tilde{D}-\tilde{L}\right)^{-1}\vec{b} \tag{3.123}$$

นั่นคือ

$$x_i^{(k)}=\frac{-\sum\limits_{j=1}^{i-1}\left(a_{ij}x_j^{(k)}\right)-\sum\limits_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)+b_i}{a_{ii}} \tag{3.124}$$

3.6.4 ระเบียบวิธีการทำซ้ำเอสโออาร์ (successive over-relaxation iterative method, SOR)

ระเบียบวิธีนี้ปรับปรุงจาก 2 ระเบียบวิธีข้างต้น เป็นหนึ่งวิธีในระเบียบวิธีที่เรียกว่า ระเบียบวิธีการผ่อนคลาย (relaxation method) โดยเพิ่มนิพจน์ถ่วงน้ำหนัก (ω) เพื่อเป็นการเร่งการลู่เข้าสู่ผลเฉลย โดยการจัดสมการ 3.110 ให้อยู่ในรูป

$$\left(\tilde{D}-\omega\tilde{L}\right)\vec{x}^{(k)}=[(1-\omega)\tilde{D}+\omega\tilde{U}]\vec{x}^{(k-1)}+\omega\vec{b} \tag{3.125}$$

ระเบียบวิธีภายใต้การผ่อนคลาย (under-relaxation method) จะใช้สำหรับบางระบบสมการที่ผลเฉลยไม่ลู่เข้าโดยระเบียบวิธีการทำซ้ำเกาส์ไซเดล จะเลือกตัวถ่วงน้ำหนัก ω ในช่วง $(0,1)$

ระเบียบวิธีเหนือการผ่อนคลาย (over-relaxation method) จะใช้สำหรับเร่งการลู่เข้าสู่ผลเฉลยหากใช้ระเบียบวิธีการทำซ้ำเกาส์ไซเดลแล้วลู่เข้า โดยเลือกตัวถ่วงน้ำหนัก $\omega>1$
ซึ่งหากมี $\left(\tilde{D}-\omega\tilde{L}\right)^{-1}$ จากสมการ 3.125 จะได้

$$\vec{x}^{(k)}=\left(\tilde{D}-\omega\tilde{L}\right)^{-1}[(1-\omega)\tilde{D}+\omega\tilde{U}]\vec{x}^{(k-1)}+\omega\left(\tilde{D}-\omega\tilde{L}\right)^{-1}\vec{b} \tag{3.126}$$

นั่นคือ

$$a_{ii}x_i^{(k)}+\omega\sum_{j=1}^{i-1}\left(a_{ij}x_j^{(k)}\right)=(1-\omega)a_{ii}x_i^{(k-1)}-\omega\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)+\omega b \tag{3.127}$$

ดังนั้น

$$x_i^{(k)}=(1-\omega)x_i^{(k-1)}+\frac{\omega}{a_{ii}}\left[b-\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)-\sum_{j=1}^{i-1}\left(a_{ij}x_j^{(k)}\right)\right] \tag{3.128}$$

3.7 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับระบบสมการไม่เชิงเส้น (Numerical method for non-linear equation system)

พิจารณาระบบสมการไม่เชิงเส้นที่ประกอบด้วยสมการ n สมการ ซึ่งมีตัวแปรอิสระทั้งหมด n ตัว ดังนี้

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \\
f_3(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.129}
$$

สามารถหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้นจากสมการ 3.129 โดยระเบียบวิธิเชิงตัวเลขได้หลายวิธี ในวิทยานิพนธ์นี้จะพิจารณาบางวิธีดังนี้

3.7.1 ระเบียบวิธีการทำซ้ำนิวตัน-ราฟสัน (Newton - Rhapson iterative method)

สำหรับระเบียบวิธีการวนซ้ำนี้จะกำหนดลำดับเพื่อประมาณค่าผลเฉลยของระบบสมการ 3.129 ดังนี้

$$\Delta x_i = -\frac{f\left(x_i^{(k-1)}\right)}{f'\left(x_i^{(k-1)}\right)} \tag{3.130}$$

เมื่อ $\Delta x_i = x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}$
นั่นคือ

$$f'\left(x_i^{(k-1)}\right)\Delta x_i = -f\left(x_i^{(k-1)}\right) \tag{3.131}$$

พิจารณาทั้งระบบสมการและจัดให้อยู่ในรูปเมทริกซ์จะได้

$$\tilde{J}\vec{\Delta x} = f(\vec{x}^{(k-1)}) \tag{3.132}$$

เมื่อ $\tilde{J}$ เป็นจาโคเบียนเมทริกซ์

$\vec{\Delta x}$ เป็นเวกเตอร์ของผลต่าง

$\vec{f}(x^{(k-1)})$ เป็นเวกเตอร์ค่าฟังก์ชัน ณ เวลา $k-1$

โดยที่จาโคเบียนเมทริกซ์

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

หาค่าผลต่างจากระบบสมการ 3.132 จากนั้นปรับให้ได้คำตอบ ณ เวลา k ได้ดังนี้

$$\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k-1)} + \vec{\Delta x} \tag{3.133}$$

3.7.2 ระเบียบวิธีปรับปรุงการทำซ้ำนิวตัน-ราฟสัน (modify Newton - Rhapson iterative method)

เป็นการปรับปรุงระเบียบวิธีการทำซ้ำนิวตัน-ราฟสัน โดยนำค่าผลเฉลย ณ เวลา k จากระบบสมการ 3.129 ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$x_1^{(k)} = x_1^{(k-1)} - \frac{f_1\left(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}\right)}{\frac{\partial}{\partial x_1} f_1\left(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}\right)} \tag{3.134a}$$

แทนค่า $x_1^{(k)}$ เพื่อหาค่า $x_2^{(k)}$ ดังนี้

$$x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} - \frac{f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}\right)}{\frac{\partial}{\partial x_1} f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}\right)} \tag{3.134b}$$

จากนั้นแทนค่า $x_1^{(k)}$ และ$x_2^{(k)}$ เพื่อหาค่า $x_3^{(k)}$

$$x_3^{(k)} = x_3^{(k-1)} - \frac{f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k-1)}\right)}{\frac{\partial}{\partial x_1} f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k-1)}\right)} \tag{3.134c}$$

จนกระทั่งถึง

$$x_n^{(k)} = x_n^{(k-1)} - \frac{f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k-1)}\right)}{\frac{\partial}{\partial x_1} f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k-1)}\right)} \tag{3.134d}$$

3.8 หลักการเพ็นนัลทิ (Penalty approach)

สำหรับระบบสมการ $\tilde{A}\vec{x} = \vec{b}$ ที่มีเงื่อนไขค่าขอบนั้นมักเกิดปัญหาที่ว่าค่าขอบที่คำนวณได้ไม่ตรงกับเงื่อนไขค่าขอบเพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว จึงใช้หลักการเพ็นนัลทิเพื่อให้ค่าขอบที่ได้จากการคำนวณมีค่าเท่ากับค่าเงื่อนไขค่าขอบหรือมีค่าใกล้เคียงมากที่สุด โดยหลักการเพ็นนัลทิ เริ่มต้นให้หาค่าสัมบูรณ์ที่มีค่าสูงสุดในเมทริกซ์ $\tilde{A}$ $(|a_{ij}|)$ จากนั้นคูณด้วยค่าคงตัวที่มีค่ามากๆโดยอาจมีค่ามากกว่า 10^{10} กำหนดให้เป็น

$$\gamma = |a_{ij}| \times 10^{10} \tag{3.135}$$

แล้วปรับค่าเมทริกซ์ $\tilde{A}$ ในตำแหน่งเงื่อนไขค่าขอบ a_{kk} โดย

$$a_{kk} = a_{kk} + \gamma$$

เมื่อ k เป็นตำแหน่งเงื่อนไขค่าขอบของปัญหา

3.9 หลักการสายกระแสอัพวิน/เพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Streamline-upwind/Petrov-Galerkin scheme, SUPG)

สำหรับปัญหาการไหลที่มีค่า Re สูงๆ มักเกิดปัญหาที่ว่าผลเฉลยที่ได้จะมีความไม่ราบเรียบ โดยผลเฉลยมีลักษณะเป็นฟันปลา ดังนั้นเพื่อเป็นการแก้ปัญหาดังกล่าวอาจทำได้โดยการสร้างชิ้นประกอบย่อยให้มีขนาดเล็กลงแต่มักเกิดปัญหาเกี่ยวกับหน่วยความจำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณ เพื่อเป็นการแก้ปัญหาดังกล่าวสามารถใช้หลักการ SUPG ซึ่งปรับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักกาเลอร์คินมาตรฐาน เพื่อปรับค่าผลเฉลยที่ได้ให้มีความราบเรียบยิ่งขึ้น ศึกษาเพิ่มเติมจาก [23, 61, 62, 63] โดยทำการปรับปรุงฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักให้อยู่ในรูป

$$\phi_i^{SUPG} = \phi_i + \phi_i^{petrov} \tag{3.136}$$

เมื่อ ϕ_i เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักกาเลอร์คินมาตรฐาน (standard Galerkin weighting function)

ϕ_i^{petrov} เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเพทรอฟ (Petrov weigting function) ซึ่ง $\phi_i^{petrov} = \dfrac{\alpha^k \hat{u}_j \phi_{i,j}}{||u||}$

โดยที่ α^k เป็นสเกลาร์พารามิเตอร์มีค่าอยู่ในช่วง $(0, 1)$

3.10 เกรเดียนต์ริคัฟเวอรี (Gradient recovery)

เป็นเทคนิควิธีที่ใช้ร่วมกับระเบียบวิธี SUPG ศึกษาได้จากงานวิจัยของ Mattallah et al. [59] ในการใช้ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ จะมีการใช้โดเมนร่วมกันทำให้ผลเฉลยที่ได้ขาดความต่อเนื่องจากชิ้นประกอบหนึ่งไปยังอีกชิ้นประกอบหนึ่ง ดังนั้นจึงใช้เทคนิควิธีเกรเดียนต์ริคัฟเวอรีเพื่อปรับค่าผลเฉลยในแต่ละโนดในโดเมนให้มีความถูกต้องและแม่นยำขึ้นเพื่อให้ผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่ถูกต้องโดยทำการปรับค่าเกรเดียนต์ความเร็ว สำหรับเทคนิควิธีเกรเดียนต์ริคัฟเวอรีจะมี 3 ลักษณะคือ

1. ระเบียบวิธีตรงเฉพาะที่ (local direct method)
2. ระเบียบวิธีกาเลอร์คินวงกว้าง (gobal Galerkin method)
3. ระเบียบวิธีกาเลอร์คินเฉพาะที่ (local Galerkin method)

สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้ใช้ระเบียบวิธีตรงเฉพาะที่ซึ่งจะมีการสร้างเมทริกซ์ขนาดไม่ใหญ่ ทำให้ไม่สิ้นเปลืองหน่วยความจำในการคำนวณ ส่วนการคำนวณหาความเร็ว จะพิจารณาจากชิ้นประกอบรูปสามเหลี่ยมชนิด 6 โนด โดยใช้หลักการของกาเลอร์คินจึงให้ $u(x(\xi,\eta),t) = \sum_{i=1}^{6} \phi_i(\xi,\eta)u_i(t)$
ดังนั้นเกรเดียนต์ความเร็วจึงอยู่ในรูป

$$G_k^e(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x_k}(x,t) \tag{3.137}$$

เมื่อ $k = 1, 2$ และ e เป็นชิ้นประกอบย่อยที่พิจารณา
จากสมการ 3.137 เมื่อแทนค่า u จะได้เกรเดียนต์ความเร็วในแต่ละชิ้นประกอบย่อยในรูป

$$G_k^e\left(x\left(\xi_j,\eta_j\right),t\right) = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \phi_i(\xi_j,\eta_j)}{\partial x_k} u_i(t) \tag{3.138}$$

เมื่อ ϕ_i เป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบกำลังสอง ณ โนดที่ i และ $j = 1, 2, 3, \ldots, 6$
เมื่อหาเกรเดียนต์ความเร็วในแต่ละชิ้นประกอบย่อยแล้วจะนำมาหาค่าเฉลี่ยเกรเดียนต์ความเร็วของทุกชิ้นประกอบย่อยที่มีการใช้โนดร่วมกัน

3.11 ตำแหน่งผิวอิสระ (Free surface location)

ปรากฏการการบวมตัวเกิดจากการที่ของไหลไหลออกนอกดาย แล้วทำให้รัศมีภายนอกดายมีค่าสูงกว่ารัศมีภายในดาย ค่าที่นำมาพิจารณาคืออัตราการบวมตัว (swelling ratio) $\chi = \frac{R_j}{R}$ เมื่อ R_j เป็นรัศมี

ของของไหลที่ออกนอกดาย และ R เป็นรัศมีของปลายดาย ในการคำนวณหาตำแหน่งพื้นผิวอิสระจึงเป็นการหาค่าขอบของการบวมตัว ซึ่งสามารถพิจารณาหาตำแหน่งพื้นผิวอิสระได้ใน 3 ลักษณะคือ

3.11.1 ระเบียบวิธีการทำนายสายกระแส (streamline prediction method)

การทำนายพื้นผิวอิสระที่เกิดจากการบวมตัวของของไหลที่ไหลออกจากดาย ศึกษาได้จากงานของ Crochet et al. [32] และเป็นไปตามค่าเงื่อนไขขอบที่ว่า

$$u_r n_r + v_z n_z = 0 \tag{3.139a}$$

$$t_r n_r + t_z n_z = S\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \tag{3.139b}$$

$$t_r n_z - t_z n_r = 0 \tag{3.139c}$$

เมื่อ u_r, v_z เป็นความเร็วในทิศทางรัศมี และความเร็วในทิศทางแนวแกน z ตามลำดับ

n_r, n_z เป็นส่วนประกอบของแนวฉาก (unit normal component) ที่ตำแหน่งพื้นผิวอิสระ

t_r, t_z เป็นแรงแนวฉากที่ผิว (surface force normal)

ρ_1, ρ_2 เป็นรัศมีความโค้ง (principal radii of curvature to surface) ของผิวอิสระ

S เป็นสัมประสิทธิ์แรงตึงผิว (surface tension coefficient)

เมื่อพิจารณาสมการเงื่อนไขขอบ 3.139a จะได้ระยะห่างพื้นผิวจากแกนสมมาตรเป็น

$$r(z) = R + \int_{z=0}^{\infty} \frac{u_r(z)}{v_z(z)} dz \tag{3.140}$$

เมื่อ R เป็นรัศมีของปลายดาย

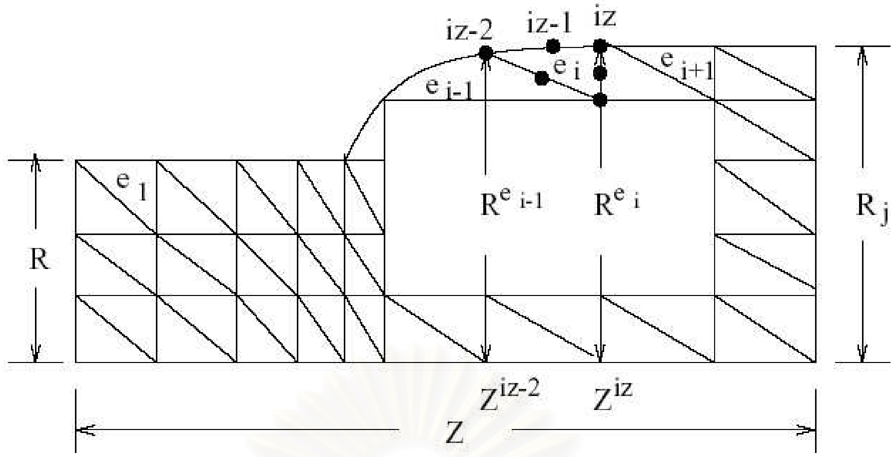
เมื่อพิจารณาโดเมนในระเบียบวิธีการชิ้นประกอบอันตะจากการคำนวณ ตามสมการ 3.140 แสดงเป็นภาพประกอบได้ดังรูปที่ 3.12 จะได้ตำแหน่งพื้นผิวอิสระในแต่ละโนดเป็น

$$R^{e_i}(z) = R^{e_{i-1}} + \int_{z=0}^{\infty} \frac{u_r^{e_i}(z)}{v_z^{e_i}(z)} dz \tag{3.141}$$

3.11.2 ระเบียบวิธีการทำนายขึ้นกับเวลา (time dependent prediction method)

กำหนดให้ความสูงของพื้นผิวอิสระที่ตำแหน่ง z ณ เวลา t อยู่ในรูป $h = h(z,t)$ โดยมีอัตราการเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u_r - v_z\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right) \tag{3.142}$$



รูปที่ 3.12: รูปทรงเรขาคณิตของการบวมตัว (Die swell geometry)

โดยระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน เริ่มด้วยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ สามารถจัดรูปสมการ 3.142 ได้เป็น

$$\frac{\hat{h}}{\Delta t} = u_r - v_z\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right) \tag{3.143}$$

เมื่อ $\hat{h} = h^{k+1} - h^k$

ใช้หลักการฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักกาเลอร์คิน ในสมการ 3.143 จะได้

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{\Omega} \Psi \hat{h} d\Omega = \int_{\Omega} \Psi\left(u_r - v_z\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right) d\Omega \tag{3.144}$$

พิจารณาปัญหาพื้นผิวอิสระเป็นปัญหาใน 1 มิติ เมื่อพิจารณาแต่ละชิ้นประกอบย่อยและแทนฟังก์ชันรูปร่างแบบกำลังสอง 3.11 ลงในสมการ 3.144 และจัดให้อยู่ในรูปเมทริกซ์จะได้

$$\frac{1}{\Delta t} M\hat{h} = M\vec{u}_r - N\vec{v}_z \tag{3.145}$$

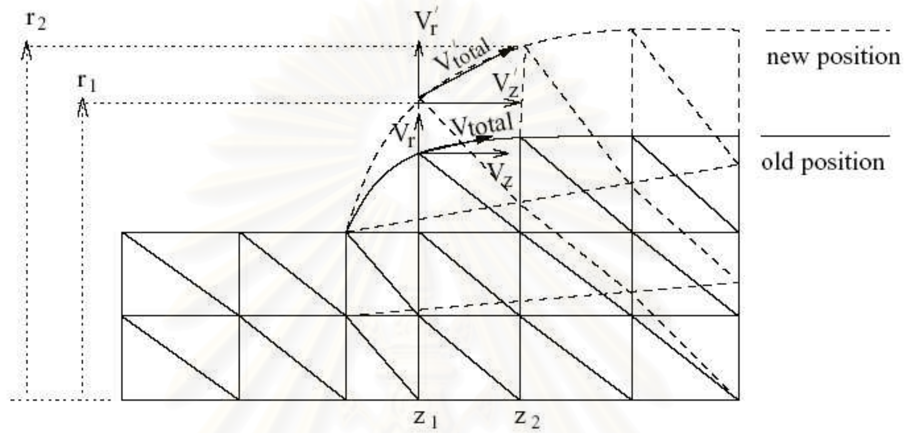
เมื่อ $M_{ij} = \int_{\Omega_e} \psi_i \psi_j d\Omega_e$

$N_{ij} = N^*_{ij}\vec{h}$

โดยที่ $N^{*k}_{ij} = \int_{\Omega_e} \psi_i \psi_j \frac{\partial \psi_k}{\partial z} d\Omega_e$

3.12 การแสดงเวกเตอร์ภาพฉายของผิวผลเฉลย (Surface solution reprojection)

เมื่อคำนวณและปรับพื้นผิวอิสระเรียบร้อยแล้ว จะทำให้พิกัดของแต่ละโนดในโดเมนมีการเปลี่ยนแปลงไปจึงทำให้ค่าความเร็วที่คำนวณไว้แต่เดิมเป็นของพิกัดเดิม เพื่อเป็นการปรับค่าความเร็วให้ถูกต้องในตำแหน่งที่เปลี่ยนไป ให้ใช้หลักการเวกเตอร์ภาพฉายที่ผิวอิสระ



รูปที่ 3.13: การปรับปรุงค่าความเร็วสำหรับพื้นผิวอิสระ

พิจารณาจากรูป 3.13 จะได้ความสัมพันธ์ของความเร็วรวมเป็น

$$v_{total} = \sqrt{u_r^2 + v_z^2} \tag{3.146}$$

และค่ามุม θ ซึ่งเป็นมุมระหว่างแนวรัศมีและแนวแกน Z มีความสัมพันธ์เป็น

$$\theta = \arctan\left(\frac{r_2 - r_1}{z_2 - z_1}\right) \tag{3.147}$$

ดังนั้นจะได้ความเร็วบนผิวอิสระที่ปรับปรุงแล้วเป็น

$$v'_r = v_{total} \sin(\theta) \tag{3.148a}$$

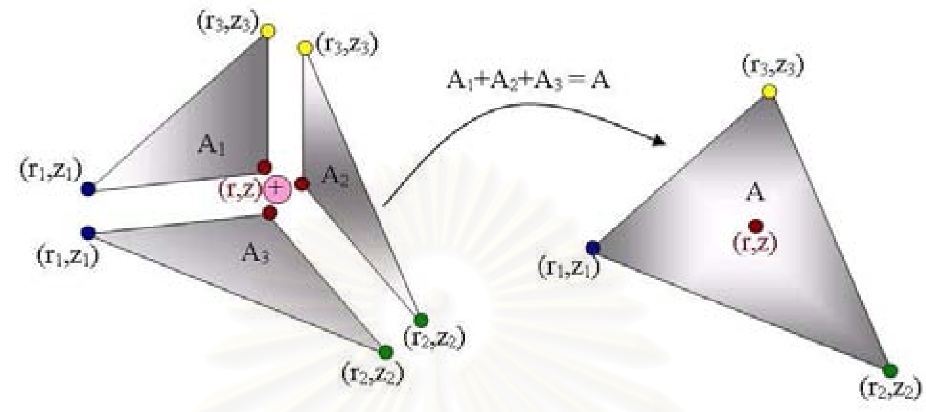
$$v'_z = v_{total} \cos(\theta) \tag{3.148b}$$

3.13 การประมาณภายในช่วง (Interpolation)

สำหรับการประมาณค่าต่างๆที่ต้องการในตำแหน่งที่มิใช่ตำแหน่งของโนดบนโดเมนให้ใช้ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ เพื่อประมาณค่าในช่วง สำหรับ ความเร็ว ความดัน หรือความเค้น โดยมีขั้นตอนวิธีดังนี้

1. **ตรวจสอบจุดในชิ้นประกอบย่อย (check a point in element)**

   ในการตรวจสอบว่าจุดที่ต้องการทราบค่าอยู่ในชิ้นประกอบย่อยใดในโดเมน ให้พิจารณาจากผลรวมของพื้นที่ย่อยในชิ้นประกอบตามรูปที่ 3.14 มีค่าเท่ากับพื้นที่ของชิ้นประกอบนั้น



รูปที่ 3.14: การแบ่งพื้นที่ย่อยของชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยม

สมมุติให้ $p(r,z)$ เป็นจุดในชิ้นประกอบย่อย e_i ให้ A เป็นพื้นที่ของชิ้นประกอบย่อย e_i ดังนั้น $A = \frac{1}{2}\left|(r_1-r_3)(z_2-z_3)-(z_1-z_3)(r_2-r_3)\right|$ จากรูปจะได้ว่า

$$A = \sum_{i=1}^{3} A_i \tag{3.149}$$

2. **การแปลงสู่พิกัดมาตรฐาน** (ξ,η)

   เมื่อทราบพิกัด $p(r,z)$ อยู่ในชิ้นประกอบย่อยใดแล้ว จะแปลงพิกัด $p(r,z)$ ให้เป็นจุดในพิกัดมาตรฐาน $p'(\xi,\eta)$ ให้ทำการแปลงโดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างในสองมิติแบบเชิงเส้นจะได้

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^{3} \psi_i(\xi,\eta) r_i \\ z &= \sum_{i=1}^{3} \psi_i(\xi,\eta) z_i \end{aligned} \tag{3.150}$$

   เมื่อ ψ_i คือฟังก์ชันรูปร่างสำหรับชิ้นประกอบเชิงเส้นรูปสามเหลี่ยม

   เนื่องจาก (r,z) เป็นค่าที่ทราบแต่ต้องการแปลงให้อยู่ในรูป (ξ,η) จากสมการ 3.150 จึงสร้าง

ระบบสมการใหม่ได้เป็น

$$f_1(\xi,\eta) = r - \sum_{i=1}^{3} \psi_i(\xi,\eta) r_i = 0$$
$$f_2(\xi,\eta) = z - \sum_{i=1}^{3} \psi_i(\xi,\eta) z_i = 0 \tag{3.151}$$

จากระบบสมการ 3.151 สามารถหาค่า (ξ,η) โดยอาศัยหลักการการทำซ้ำนิวตัน-ราฟสัน หรือ หลักการปรับปรุงการทำซ้ำนิวตัน-ราฟสัน ศึกษาได้จากหัวข้อ 3.7.1 และ หัวข้อ 3.7.2

3. **การประมาณค่า**

เมื่อทราบค่า (ξ,η) จากขั้นตอนที่ 2 แล้วสามารถประมาณค่าตัวแปรที่ต้องการทราบดังนี้

$$u_r = \sum_{i=1}^{6} \phi_i(\xi,\eta) v_{r_i}$$
$$v_z = \sum_{i=1}^{6} \phi_i(\xi,\eta) v_{z_i}$$
$$\tau = \sum_{i=1}^{6} \phi_i(\xi,\eta) \tau_i$$
$$p = \sum_{i=1}^{3} \phi_i(\xi,\eta) p_i \tag{3.152}$$

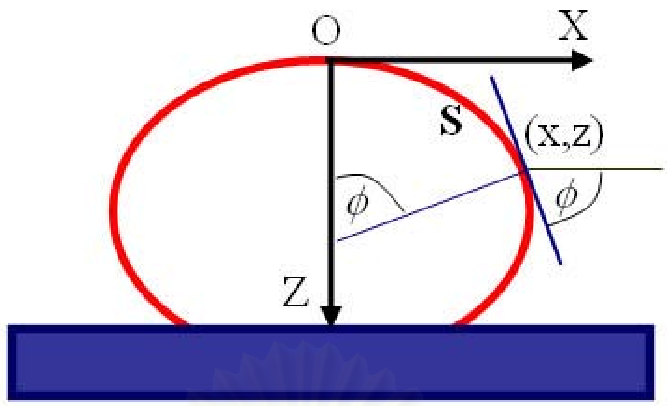
เมื่อ ϕ_i คือ ฟังก์ชันรูปร่างของชิ้นประกอบกำลังสองรูปสามเหลี่ยม

3.14 แรงตึงผิว (Surface tension)

สำหรับพอลิเมอร์ชนิด HDPE และ LDPE แรงดึงผิวเป็นอีกหนึ่งปัจจัยที่มีผลต่อผิวอิสระของพอลิเมอร์ ซึ่งสามารถศึกษาเพิ่มเติมที่ [64] ในปี 1998 Anastasiadis et al. [65] ได้ศึกษาผลกระทบของแรงดึงผิวระหว่างพอลิเมอร์ชนิด HDPE รวมทั้ง LDPE และผิวสัมผัสหลายๆชนิดที่มีต่อผิวอิสระของหยดพอลิเมอร์ พิจารณาความสัมพันธ์ผิวอิสระของพอลิเมอร์กับผิวสัมผัสตามรูปที่ 3.15

รูปร่างของผิวอิสระจะมีความสัมพันธ์ตามระบบสมการนี้

$$\frac{d\phi}{dS} = \frac{2}{B} + Z - \frac{\sin\phi}{X}$$
$$\frac{dX}{dS} = \cos\phi$$
$$\frac{dZ}{dS} = \sin\phi$$
$$X(0) = Z(0) = \phi(0) = 0 \tag{3.153}$$



รูปที่ 3.15: แผนภาพผิวอิสระของพอลิเมอร์กับผิวสัมผัส

เมื่อ $B = a\sqrt{\dfrac{g\delta\rho}{\gamma_{LV}}}$

ϕ เป็นมุมระหว่างแนวตั้งฉากกับแนวของพิกัด (x, z)

S เป็นความยาวส่วนโค้งของผิวอิสระ

a เป็นรัศมีของหยดพอลิเมอร์

g เป็นค่าคงที่เนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก (gravitational constant)

ρ เป็นความหนาแน่นของพอลิเมอร์ (polymer density)

γ_{LV} เป็นสัมประสิทธิ์แรงตึงผิวของพอลิเมอร์

Anastasiadis et al. [65] คำนวณหาค่าผิวอิสระ โดยการเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ B เป็นดังนี้ -2.429, -1.5539, -0.989, -0.779, -0.680, -0.649, -0.570 และ -0.440 แต่พบว่าค่าของพารามิเตอร์ B ที่เหมาะสมกับการคำนวณหาผิวอิสระของพอลิเมอร์ชนิด HDPE เป็น -0.680 ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จึงใช้ค่าพารามิเตอร์ B เป็นค่าดังกล่าวในการคำนวณหาค่าผิวอิสระ

บทที่ 4

การประยุกต์ระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะกับการไหลเคลือบลวด

(Application of FEM for Wire Coating Flow)

4.1 ปัญหาและขอบเขต (Problem specification)

ในบทนี้จะศึกษาการใช้ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขในการจำลองปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวดของพอลิเมอร์หลอมเหลวซึ่งเป็นของไหลที่มีความหยืดหยุ่นสูง ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ใช้พอลิเมอร์ชนิด HDPE เป็นตัวศึกษาเปรียบเทียบสำหรับดายประเภททิวบ์ทูลลิ่ง ตามรูปที่ 1.1(b) พบว่ารูปเรขาคณิตของหัวดายแบบทิวบ์ทูลลิ่งมีลักษณะที่สมมาตร ดังนั้นเพื่อเป็นการสะดวกจึงพิจารณาโดเมนของดายเพียงครึ่งบนดังรูปที่ 4.1

รูปที่ 4.1: โดเมนของหัวดายแบบทิวบ์ทูลลิ่งที่พิจารณา

กระบวนการไหลเคลือบเส้นลวดแบบทิวบ์ทูลลิ่ง พิจารณาการไหลอยู่ 2 แบบคือการไหลแบบเฉือน (shear flow) เป็นรูปแบบการไหลที่เกิดขึ้นภายในดายรูปวงแหวน (annular die) และการไหลแบบยืดขยาย (extension flow) เป็นรูปแบบการไหลที่เกิดขึ้นเมื่อพอลิเมอร์ไหลพ้นจากดาย ในการฉีดพอลิเมอร์หลอมเหลวเข้าไปในเครื่องมือจะอาศัยความดันเป็นตัวขับเคลื่อนให้พอลิเมอร์เคลื่อนที่ ซึ่งพิจารณาในระบบพิกัดทรงกระบอก (RZ coordinate system) รูปแบบการไหลในแนวแกน Z ตรงทางเข้าดายมีลักษณะเป็นการไหลแบบวงแหวน (annular flow) ภายใต้เงื่อนไขที่ให้ความเร็วของ

พอลิเมอร์ที่ผนังดายตามแนวแกน Z มีค่าเท่ากับศูนย์หรือพอลิเมอร์ไม่มีการลื่นไหลที่ขอบดาย ซึ่งเรียกว่า no slip condition และการไหลในระบบที่กำลังพิจารณาเป็นการไหลแบบราบเรียบ (larminar flow) ดังนั้นความเร็วตามแนวแกน R ที่ขอบผนังดายทุกด้านมีค่าเท่ากับศูนย์ นอกจากนี้ยังมีเงื่อนไขความเร็วของพอลิเมอร์ที่ไหลมาประทะเส้นลวดแล้วพอลิเมอร์ที่ผิวสัมผัสเส้นลวดต้องมีความเร็วในแนวแกน Z เท่ากับความเร็วของเส้นลวด ในปัญหาที่ศึกษานี้เป็นปัญหาถูกแปลงให้อยู่ในระบบไร้หน่วย โดยให้ความเร็วลักษณะเฉพาะคือความเร็วของเส้นลวด ดังนั้นความเร็วของพอลิเมอร์ที่ไหลมาปะทะเส้นลวดจึงมีค่าเท่ากับ 1 หน่วย พิจารณาค่าความเค้นที่ขอบทางเข้าดายสำหรับความเค้นในแนว RZ และ ZZ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับรัศมี R ส่วนความเค้นในแนว RR และ $\theta\theta$ มีค่าเท่ากับศูนย์ และค่าเงื่อนไขขอบที่สำคัญอีกอย่างคือความดันในขอบด้านผิวอิสระบนและผิวอิสระล่างเมื่อพอลิเมอร์ไหลออกจากดาย มีค่าเท่ากับศูนย์ ส่วนขอบด้านทางออกของพอลิเมอร์หลอมเหลว ของไหลได้พัฒนารูปแบบการไหลจนกระทั่งความเร็วในแนวแกน Z เป็นการไหลแบบพลั๊ก (plug flow) และมีค่าเท่ากับ 1 หน่วย และมีความเค้นในแนว RR และ ZZ รวมทั้งความดันที่ขอบด้านนี้มีค่าเท่ากับศูนย์ เรขาคณิตของโดเมนในปัญหานี้เมื่อพิจารณาในพิกัด (r,z) ณ โนดต่างๆจะมีพิกัดเป็นดังนี้

A'	(1, -3) ,	A	(0.5, -3)
B'	(1, -1.95),	B	(0.5, -1.95)
$B^{*'}$	(0.7, -1.43),	B^*	(0.5, -1.43)
$C^{*'}$	(0.37, -0.85),	C^*	(0.17, -0.85)
C'	(0.25, -0.65),	C	(0.17, -0.65)
D'	(0.25 , 0),	D	(0.17, 0)
E'	(0.21, 1),	E	(0.09, 1)
F'	(0.21, 2) ,	F	(0.09, 2)

แสดงดังรูปที่ 4.2

สรุปค่าเงื่อนไขขอบของปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวดที่ศึกษา ได้ดังนี้

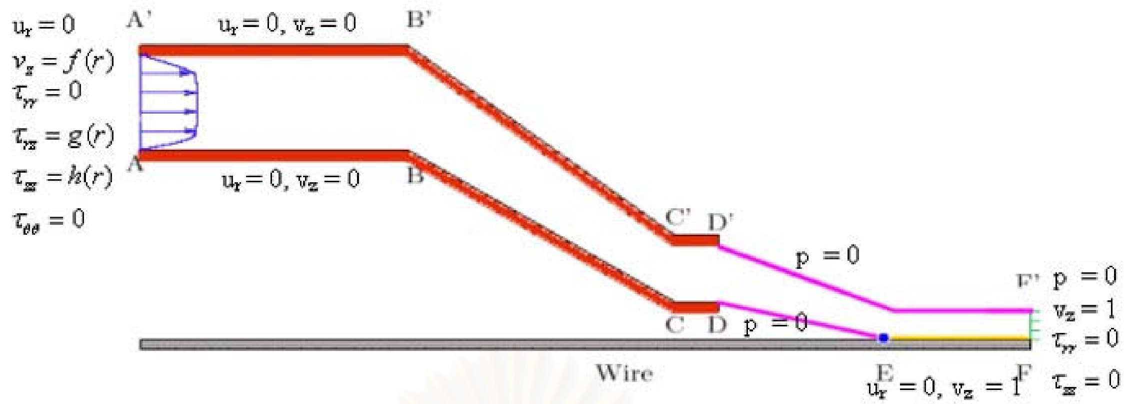
ขอบทางเข้าของพอลิเมอร์ $A'A$

$$u_r = 0,\ v_z = f(r),\ \tau_{rr} = 0,\ \tau_{rz} = g(r),\ \tau_{zz} = h(r),\ \tau_{\theta\theta} = 0 \tag{4.1a}$$

เมื่อ

$$f(r) = \frac{Pb^2}{4\mu L}\left\{1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2 + \frac{1}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 + \frac{4\mu L V_{wire}}{Pb^2}\right]\ln\left(\frac{r}{b}\right)\right\} \tag{4.1b}$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} = \frac{\mu_1}{We}\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{f}{We}\tau_{rz} \tag{4.1c}$$



รูปที่ 4.2: ค่าเงื่อนไขขอบในเครื่องมือแบบทิวบ์ทูลลิ่ง

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = 2\tau_{rz}\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{f}{We}\tau_{zz} \tag{4.1d}$$

ขอบผนังดายด้านบน $A'D'$ และขอบผนังดายด้านล่าง AD

$$u_r = 0,\ v_z = 0 \tag{4.1e}$$

ขอบอิสระด้านบน $D'F'$ และขอบอิสระด้านล่าง DE

$$p = 0 \tag{4.1f}$$

ขอบที่พอลิเมอร์ประทะเส้นลวด EF

$$u_r = 0,\ v_z = 1 \tag{4.1g}$$

ขอบทางออกของพอลิเมอร์ $F'F$

$$p = 0,\ u_r = 0,\ ,v_z = 1,\ \tau_{rr} = 0,\ \tau_{zz} = 0 \tag{4.1h}$$

ในวิทยานิพนธ์นี้แบ่งโดเมนของทิวบ์ทูลลลิ่งออกเป็นชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยมสองลักษณะดังตาราง ที่ 4.1 และรูปที่ 4.3

สำหรับการการคำนวณหาความเร็วและความเค้นจะใช้โนดทั้งหมดในการคำนวณ แต่สำหรับความดันจะใช้เพียงโนดจุดยอดเท่านั้น ในส่วนของการคำนวณเพื่อหาผิวอิสระเมื่อพอลิเมอร์หลอมเหลวไหลมาจากดายจะใช้เพียงโนดที่ขอบด้านผิวอิสระบนและผิวอิสระล่าง

ชนิดชิ้นประกอบ	จำนวนชิ้นประกอบ	จำนวนโนด	ดีกรีความอิสระ (degrees of freedom, DOF)
รูปสามเหลี่ยม	4714	9755	61051

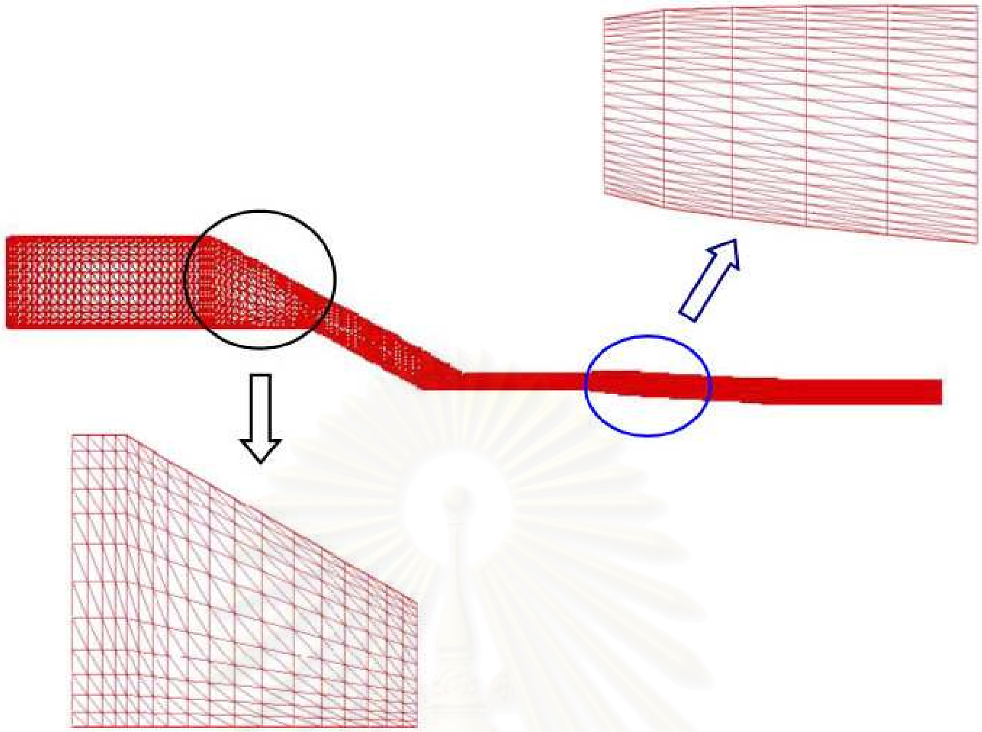
ตารางที่ 4.1: ชิ้นประกอบย่อยรูปสามเหลี่ยมของดายแบบทิวป์ทูลลิ่ง

4.2 ขั้นตอนวิธี (Algorithm)

4.2.1 ขั้นตอนวิธีสำหรับการสร้างชิ้นประกอบย่อย (algorithm for mesh generation)

ในการสร้างชิ้นประกอบย่อยจะอาศัยฟังก์ชันรูปร่างสำหรับ 2 มิติที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 3 ซึ่งใช้ฟังก์ชันรูปร่างสำหรับชิ้นประกอบรูปสี่เหลี่ยมชนิด 8 โนด [50, 51, 52, 53, 54, 55, 57] ในการประมาณค่าหาพิกัดต่างๆ ในโดเมน โดยสามารถแบ่งโดเมนออกเป็นโดเมนย่อยๆได้ ดังนั้นในการระบุโนดที่เป็นตัวอ้างอิงทั้ง 8 โนดจึงมีความสำคัญ เพื่อให้รูปร่างของโดเมนที่ถูกต้องดังรูปที่ 3.8 โดยมีขั้นตอนในการสร้างชิ้นประกอบย่อยดังต่อไปนี้

1. นำเข้าข้อมูลที่ใช้ในการสร้างชิ้นประกอบย่อย ซึ่งมีรายละเอียดดังรูปที่ 4.4
2. เทียบอัตราส่วนเพื่อหาพิกัดของโนดจุดยอดในระบบพิกัดมาตรฐานที่อยู่ในรูปของ (ξ, η)
3. แปลงโนดจุดยอดจากระบบพิกัดมาตรฐานให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติโดยใช้หลักการของฟังก์ชันรูปร่างของรูปสี่เหลี่ยมชนิด 8 โนด
4. หาพิกัดของโนดกึ่งกลาง (midside node) ซึ่งได้จากการหาค่าเฉลี่ยระหว่างโนดจุดยอด
5. สร้างความเชื่อมต่อระหว่างโนดในแต่ละชิ้นประกอบย่อย
6. กำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นให้ทุกโนดบนโดเมน
7. ค้นหาโนดที่ขอบต่างๆ พร้อมกำหนดค่าขอบ
8. บันทึกผลในไฟล์ข้อมูล
9. จบการทำงาน



รูปที่ 4.3: ชิ้นประกอบย่อยในโดเมนของหัวดายแบบทิวบ์ทูลลิ่ง

4.2.2 ขั้นตอนวิธีสำหรับระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ (algorithm for FEM)

สรุปได้เป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. วิเคราะห์ปัญหากับสมการควบคุมและสมการองค์ประกอบ
2. ใช้ระเบียบวิธีเทเลย์-กาเลอร์คินกับสมการควบคุมและสมการองค์ประกอบ
3. แก้ระบบสมการในขั้นตอนที่ 1a เพื่อหาค่า $(u_r, v_z, \tau_{rr}, \tau_{rz}, \tau_{zz}, \tau_{\theta\theta})^{n+\frac{1}{2}}$ ซึ่งเป็นค่าความเร็วและความเค้นในเวลาที่ $n + \frac{1}{2}$ ตามลำดับ
4. แก้ระบบสมการในขั้นตอนที่ 1b เพื่อหาค่า $(u_r, v_z)^*$ เป็นความเร็ว ณ เวลา * และ $(\tau_{rr}, \tau_{rz}, \tau_{zz}, \tau_{\theta\theta})^{n+1}$ เป็นความเค้นในเวลาที่ $n + 1$
5. แก้ระบบสมการในขั้นตอนที่ 2 เพื่อคำนวณหาค่าความดัน ณ เวลา $n + 1$, p^{n+1}
6. แก้ระบบสมการในขั้นตอนที่ 3 เพื่อคำนวณหาความเร็ว $(u_r, v_z)^{n+1}$ ณ เวลา $n + 1$
7. คำนวณหาผิวอิสระ

รูปที่ 4.4: ตัวอย่างไฟล์ข้อมูลสำหรับการสร้างชิ้นประกอบย่อย

8. คำนวณหาค่าความคาดเคลื่อน หากยังไม่ได้ค่าที่ต้องการกลับไปทำขั้นตอนที่ 3

9. แสดงผล

4.3 ผลที่ได้รับและวิเคราะห์ผล (Results and discussion)

จากการคำนวณหาค่าต่างๆที่มีผลต่อการไหลของพอลิเมอร์หลอมเหลวสำหรับปัญหาการไหลเคลือบลวดแบบทิวบ์ทูลลิ่ง เป็นการจำลองปัญหาสำหรับของไหลชนิดนอนนิวโตเนียนและใช้ตัวแบบเพนเทียน-เทนเนอร์ รูปแบบสมการเลขชี้กำลัง (exponential Phan-Thien/Tanner model, EPTT) โดยใช้ค่า $\epsilon = 0.02, \xi = 0.0, \mu_V = 0.99$ และ $\mu_N = 0.01$ เนื่องจากเป็นค่าที่แสดงให้เห็นถึงความแตกต่างของพฤติกรรมการยืดและการเฉือนของของไหล พิจารณาเหตุผลประกอบได้จาก [7, 15, 38] ในที่นี้จะทำการเปรียบเทียบค่าตัวเลข We จำนวน 4 ค่าคือ 50, 100, 150, 200 มีรายละเอียดดังตารางที่ 4.2

ผลเฉลย	$We = 50$	$We = 100$	$We = 150$	$We = 200$
u_{rmin}	-0.3980	-0.3725	-0.3601	-0.3562
u_{rmax}	0.5937	0.4627	0.4128	0.3896
v_{zmin}	0	0	0	0
v_{zmax}	1.7526	1.6570	1.6281	1.6188
$\dot{\gamma}_{min}$	0.006	0.002	0.001	0.000
$\dot{\gamma}_{max}$	579.515	413.894	362.888	313.361
$\dot{\epsilon}_{min}$	0	0	0	0
$\dot{\epsilon}_{max}$	3.9113	4.2901	4.4941	4.5779
Δp	21.0919	18.5176	17.6413	17.2002
τ_{rzmin}	-2.8630	-1.5420	-1.0786	-0.8421
τ_{rzmax}	7.7824	4.0724	2.8070	2.2948
τ_{zzmin}	-239.452	-102.541	-63.321	-46.060
τ_{zzmax}	13.6905	6.0634	5.1391	3.7095
χ_{max}	1.5518	1.5516	1.5513	1.5511

ตารางที่ 4.2: เปรียบเทียบค่าสูงสุดที่ได้จากการคำนวณ

สำหรับของไหลชนิด PTT ที่มีค่า We = 200 จากการคำนวณพบว่าพอลิเมอร์มีทิศทางการไหลดังรูปที่ 4.5 ความเร็วที่ไหลเข้ามาในดายแบบทิวบ์ทูลลิ่งมีลักษณะการไหลแบบวงแหวน และค่อยๆพัฒนารูปแบบการไหลไปเป็นการไหลแบบพาราโบลา (Poiseuille flow) ตรงบริเวณที่แคบที่สุดของดาย และเมื่อของไหลไหลออกจากดายพบว่ารูปแบบการไหลได้พัฒนาจนกระทั่งกลายเป็นการไหลแบบสม่ำเสมอ (plug flow) ที่ปลายสุดของโดเมนจะมีค่าเท่ากับความเร็วของเส้นลวด ดังรูปที่ 4.6(a) แต่สำหรับความเร็วในแนวรัศมีหรือความเร็วในแนว R จะมีค่าน้อยมากจนเกือบเป็นศูนย์ ยกเว้นบริเวณใกล้ทางออกจากดาย u_r จะมีค่าสูงกว่าตำแหน่งอื่น เนื่องจากของไหลเกิดการบวมตัวเมื่อไหลออกจากดาย ดังรูปที่ 4.6(b) พิจารณาความดันจะเห็นว่าบริเวณทางเข้าดายจะมีค่าความดันสูงสุด และมีค่าลดลงเรื่อยๆแบบสม่ำเสมอ จนกระทั่งเป็นศูนย์ เมื่อของไหลไหลออกจากดาย ดังรูปที่ 4.6(c) ที่มีลักษณะอย่างนี้เนื่องจากความดันเป็นส่วนผลักทำให้ของไหลเกิดการเคลื่อนที่ออกจากดาย แต่เนื่องจากของไหลมีแรงเสียดทานต้าน จึงทำให้ความดันค่อยๆลดลงจนมีค่าเป็นศูนย์ในที่สุด สำหรับค่าความเค้นจะแยกพิจารณาในแต่ละทิศทางดังนี้ ความเค้นเฉือนในแนว RZ จะมีค่าน้อยมาก (มีค่าเข้าใกล้ศูนย์) แต่จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อของไหลไหลชนผนังดายที่ทำให้ของไหลเริ่มเปลี่ยนทิศทางการไหลลงไปสู่ส่วนที่แคบที่สุดของดาย ดังรูปที่ 4.6(d) ความเค้นในแนว ZZ จะมีค่าน้อยมาก (มีค่าเข้าใกล้ศูนย์) แต่มีค่าสูงบริเวณขอบดายบริเวณที่แคบที่สุด ดังรูปที่ 4.6(e) สำหรับอัตราเฉือน $\dot{\gamma}$ เป็นค่าที่บ่งบอกถึงลักษณะการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของของไหล จะพบว่าบริเวณที่แคบที่สุดของดายและทางออกของดายเป็นตำแหน่งที่ของไหลมีการเปลี่ยนแปลงมากซึ่งเกิดจากการเปลี่ยนทิศทางการไหลและการบวมตัวจึงทำให้ $\dot{\gamma}$ มีค่าสูง ดังรูปที่ 4.6(f) ส่วนรูปที่ 4.6(g) เป็นการแสดงค่าของอัตราการยืดขยายของของไหล พบว่าบริเวณที่ของไหลมีการเปลี่ยนทิศทางในแนวยืดขยายออกจะทำให้ $\dot{\epsilon}$ มีค่าสูง

เนื่องจากปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวดที่กำลังศึกษาอยู่ภายใต้สมมติฐานที่ว่า ของไหลไหลแบบราบเรียบดังนั้น ค่าความเร็วในแนว R จึงมีค่าเกือบเป็นศูนย์ ($U_r \rightarrow 0$) พบว่า U_r มีค่าสูงสุดบริเวณทางออกของดายซึ่งเป็นค่าบวก นั่นหมายความว่าของไหลมีความเร็วในแนว R ที่เพิ่มขึ้นทำให้ของไหลบวมตัวขึ้นดังลักษณะของผิวอิสระบน และสังเกตพบว่าค่าน้อยที่สุดของ U_R มีเครื่องหมายติดลบที่บริเวณทางออกดายขอบล่าง นั่นหมายความว่า U_r เกิดการเคลื่อนตัวในทิศทางลงล่างของแนว R ที่ขอบล่าง ทำให้ของไหลบวมตัวที่บริเวณผิวอิสระล่างซึ่งเป็นทิศทางที่สวนทางกับ R ที่มีค่าเป็นบวกแสดงค่าในตารางที่ 4.2 นอกจากนี้ยังพบว่าค่า U_r จะมีค่าลดลงเมื่อ We มีค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจากลักษณะการบวมตัวของพอลิเมอร์เกิดการบวมตัวได้น้อยลงเมื่อค่า We เพิ่มขึ้น

ความเร็วในแนว Z มีค่าสูงสุดในบริเวณที่แคบที่สุดของดาย คือบริเวณที่ใกล้ๆทางออกดาย การที่ V_z มีค่าสูงในบริเวณทางออกดาย เนื่องจากบริเวณนี้แคบจึงทำให้ความเร็ว V_z มีค่ามาก ดังนั้นของไหลจึงมีการอัดตัวมากที่บริเวณนี้ก่อนเกิดการบวมตัวหลังออกจากดาย และพบว่าเมื่อค่าของ We เพิ่มขึ้น V_z จะมีค่าลดลง เนื่องมาจากการบวมตัวที่ลดลง จึงทำให้การอัดตัวของของไหลมีค่าน้อยลงตาม

พิจารณาค่าสูงสุดของอัตราเฉือน $\dot{\gamma}$ พบว่ามีค่าสูงสุดในตำแหน่งของดายที่มีการหักงอมากที่สุด จากรูปที่ 4.2 จะเป็นจุด C' พิจารณาสมการ 2.39 พบว่าเมื่อ We มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ความหนืดเฉือนมีค่าลดลง จึงส่งผลให้ค่าอัตราเฉือนลดลง ดังนั้นสรุปได้ว่าเมื่อ We มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ $\dot{\gamma}$ มีค่าลดลง

พิจารณาค่าอัตราการยืดขยาย $\dot{\epsilon}$ พบว่ามีค่าสูงสุดบริเวณทางออกของดายทั้งขอบบนและขอบล่าง รวมทั้งบริเวณที่เกิดการบวมตัวขึ้นสูงสุดและต่ำสุด $\dot{\epsilon}$ จะมีค่าสูงเช่นกัน เนื่องจากบริเวณดังกล่าวพอลิเมอร์มีการยืดขยายซึ่งเกิดจากการบวมตัวของพอลิเมอร์เมื่อไหลออกจากดาย แต่ค่าต่ำสุดของ $\dot{\epsilon}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากไม่มีการหดตัวของพอลิเมอร์ ในความหมายทางฟิสิกส์ค่า We เป็นค่าบอกถึงความเป็นอีลาสติกของพอลิเมอร์ ดังนั้นหาก We มีค่ามากก็แสดงว่าพอลิเมอร์นั่นมีความเป็นอีลาสติกสูง ส่งผลให้ค่าของ $\dot{\epsilon}$ มีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเมื่อ We เพิ่มขึ้น

สังเกตพบว่าเมื่อความเร็ว V_z มีค่ามากจะทำให้ความเค้นฉาก τ_{zz} มีค่ามาก เนื่องจากอนุภาคของพอลิเมอร์มีการเปลี่ยนแปลงในแนว ZZ มากในทำนองเดียวกันเมื่อค่าอัตราเฉือน $\dot{\gamma}$ มีค่ามากจะส่งผลทำให้พอลิเมอร์มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมากจึงทำให้ค่าของความเค้นเฉือน τ_{rz} มีค่าสูงตาม ด้วยเหตุผลทั้งสองประการจึงทำให้ τ_{zz} และ τ_{rz} ต่างมีแนวโน้มลดลงเมื่อค่า We เพิ่มขึ้น ส่วนความเค้นในแนว RR และ $\theta\theta$ ไม่นำมาพิจารณาในที่นี้ เนื่องจากทั้งสองค่านี้มีค่าน้อยมาก จนเกือบเป็นศูนย์ นั่นคือ $\tau_{rr} \to 0$ และ $\tau_{\theta\theta} \to 0$ เนื่องจากสมมติฐานที่ให้ของไหลไหลแบบราบเรียบและไม่ไหลหมุนวน ซึ่งผลจากการคำนวณที่ได้สอดคล้องการศึกษาของ Mutlu et al. [7], Ngamaramvaranggul และ Webster [15] รวมทั้ง Mattallah et al. [38]

ค่าพิกัด R แสดงถึงตำแหน่งของผิวอิสระ เกิดขึ้นเมื่อพอลิเมอร์ออกจากดายที่ตำแหน่ง $z = 0$ ดังรูปที่ 4.7 สำหรับผิวอิสระบนแสดงดังรูปที่ 4.8(a) และผิวอิสระล่างแสดงดังรูปที่ 4.8(b) พิจารณาค่า We ที่ต่างกัน พบว่าความแตกต่างกันของผิวอิสระบนน้อยมาก เนื่องจากอัตราการบวมตัว ($\chi = \frac{R_{DieExit}}{R_{swell}}$) ของของไหลมีค่าไม่แตกต่างกันนัก เมื่อ $R_{DieExit}$ คือรัศมีของปากทางออกดายนั่นคือระยะ $D'D$ และ R_{swell} คือรัศมีค่าสูงสุดของการบวมตัวของพอลิเมอร์ ซึ่งค่าได้แสดงไว้ในตารางที่ 4.2 จาก

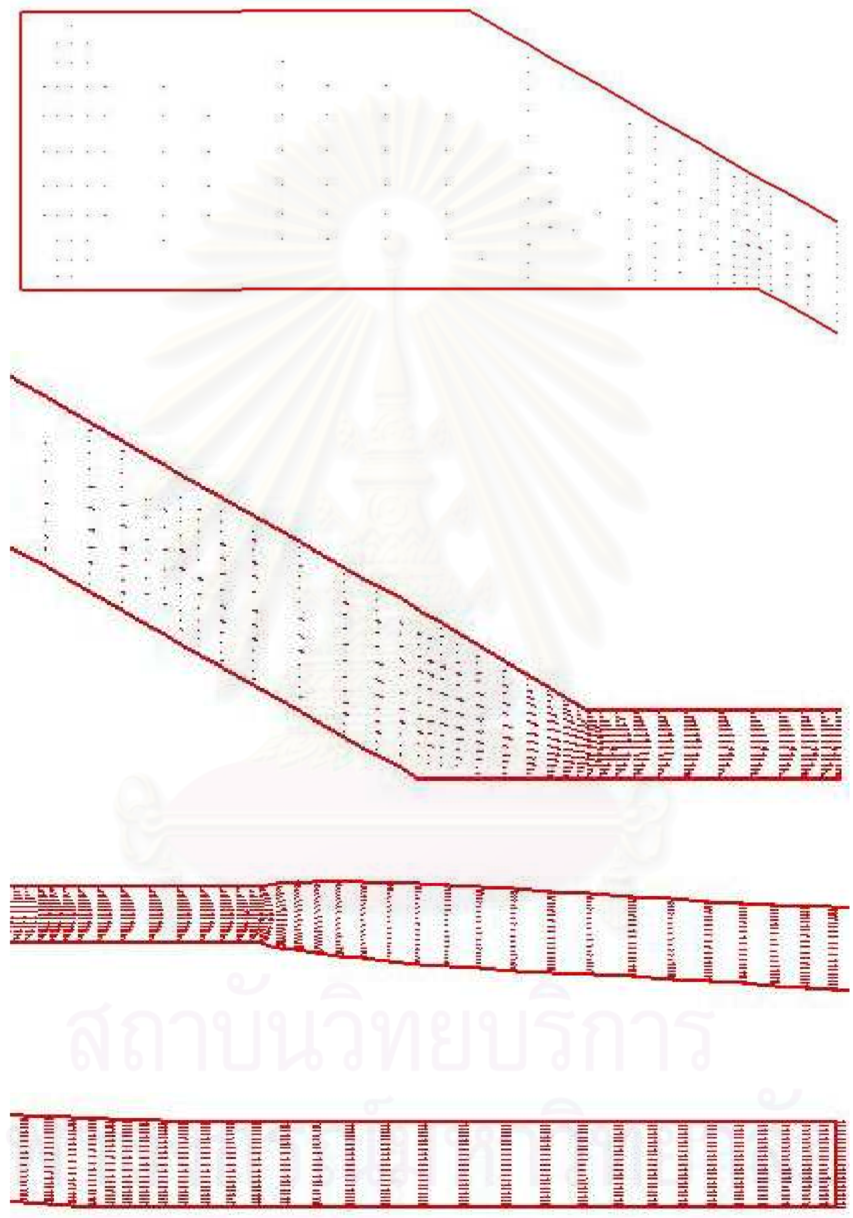
รูปที่ 4.8(a) พบว่าผิวอิสระบนมีค่าเพิ่มขึ้นในช่วงแรกที่ออกจากดายเนื่องจากการบวมตัวของพอลิเมอร์ จากนั้นจะค่อยลดระดับลงเรื่อยๆ จนกระทั่งผิวอิสระบนเริ่มคงที่ที่ $z = 1.08$ ซึ่งเป็นผลมาจากแรงตึงผิวของพอลิเมอร์ จึงส่งผลให้ผิวอิสระล่างของแต่ละค่า We จึงมีค่าใกล้เคียงกันมาก เมื่อพิจารณาผิวอิสระล่างของการบวมตัว สามารถวิเคราะห์หาจุดคอนแทรคชันซึ่งเป็นจุดแรกที่พอลิเมอร์ไหลออกมาสัมผัสกับเส้นลวดในกระบวนการเคลือบเส้นลวดแบบทิวบ์ทูลลิ่ง จากการคำนวณได้ค่าในลักษณะดังรูปที่ 4.7 และรูปที่ 4.8(b) พบว่าตำแหน่งที่พอลิเมอร์ไหลประทะเส้นลวดคือจุดที่ผิวอิสระล่างเริ่มคงที่ ณ $r = 0.09$ และตำแหน่ง $z = 0.98$ พิจารณาจากรูปที่ 4.2 จะกล่าวได้ว่าจุดคอนแทรคชันคือจุด E ในงานวิจัยนี้ E จะมีพิกัด (r, z) เป็น (0.09, 0.98) สังเกตจากอัตราการบวมตัวของพอลิเมอร์ที่ค่า We ต่างๆมีค่าใกล้เคียงกันมาก แสดงค่าดังตารางที่ 4.2 ซึ่งผลที่ได้เป็นในทิศทางเดียวกันกับงานวิจัยของ Mutlu et al. [7], Ngamaramvaranggul และ Webster [15] รวมทั้ง Mattallah et al. [38] ผลจากการคำนวณจะพบว่าลักษณะของทั้งผิวอิสระบนและผิวอิสระล่างในแต่ละค่า We แทบจะไม่มีความแตกต่างกัน จึงส่งผลทำให้ได้จุดคอนแทรคชันเกือบเป็นจุดเดียวกัน

ความเค้นเฉือน τ_{rz} บนขอบบนและล่างสำหรับ We ค่าต่างๆ แสดงดังรูปที่ 4.9(a) และ 4.9(b) พบการเปลี่ยนแปลงความเค้นเฉือนที่ขอบบนและขอบล่างมีค่าเพิ่มขึ้นบริเวณที่ของไหลมีการเปลี่ยนทิศทางการไหลหรือการเปลี่ยนรูปร่างของการไหล เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 4.2 บริเวณที่ $z = -0.65$ และ $z = 0$ เป็นช่วงที่ดายมีการหักงอและเป็นทางออกของดาย ซึ่งเป็นช่วงที่พอลิเมอร์มีการเปลี่ยนทิศทางและพอลิเมอร์เกิดการบวมตัวทำให้ τ_{rz} ในช่วงนี้มีค่าเพิ่มขึ้น

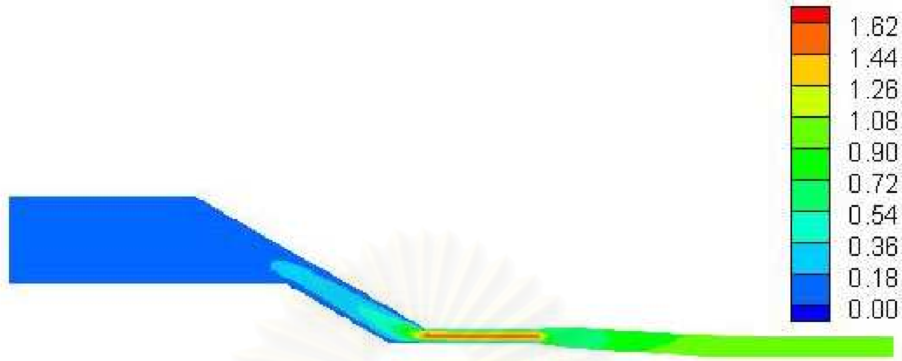
ความเค้นฉาก τ_{zz} บนขอบบนและล่าง พบว่ามีค่าค่อนข้างสูงบริเวณส่วนที่แคบที่สุดของดายคือช่วง $C'C$ ถึง $D'D$ ตามรูปที่ 4.2 ซึ่งบริเวณขอบบนและขอบล่างของดายบริเวณนี้ τ_{zz} มีค่าค่อนข้างสูง เนื่องจากอนุภาคของพอลิเมอร์ถูกบีบอัดให้ไหลผ่านช่องทางที่แคบลง ทำให้แรงกระทำในแนว ZZ มีค่ามาก และในตำแหน่งของทางออกดายเป็นบริเวณที่ τ_{zz} มีค่าสูงสุด เนื่องจากแรงกระทำในแนว ZZ เพิ่มขึ้นเนื่องจากการบวมตัวของพอลิเมอร์ ดังรูปที่ 4.10(a) และ 4.10(b) ซึ่งให้ผลในลักษณะทำนองเดียวกับความเค้นเฉือน

อัตราเฉือนเป็นค่าที่แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของของไหล พบว่าค่าของอัตราเฉือน $\dot{\gamma}$ บนขอบบนและขอบล่างแสดงดังรูปที่ 4.11(a) และ 4.11(b) มีค่ามากบริเวณที่ของไหลมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างหรือเปลี่ยนทิศทางการไหล จากรูปที่ 4.2 $\dot{\gamma}$ มีค่ามากช่วงที่ดายมีการหักงอ $C'C$ และบริเวณที่เป็นทางออกดาย $D'D$

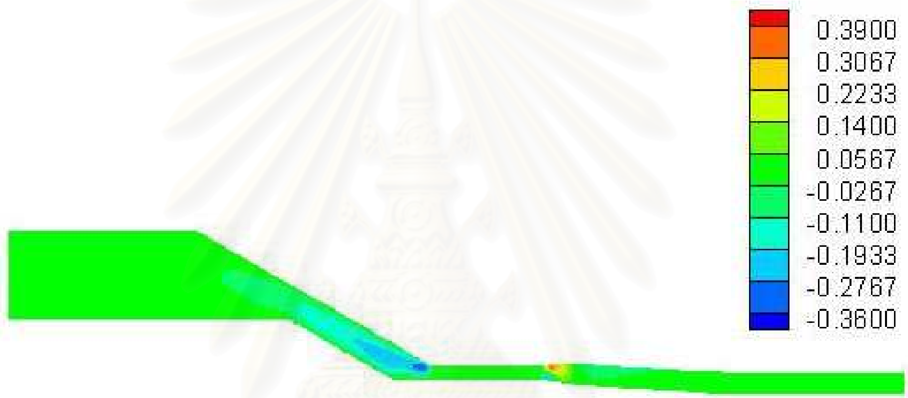
ส่วนอัตราการยืดขยาย $\dot{\epsilon}$ เป็นอีกค่าที่แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของของไหลในลักษณะการยืดหรือการขยาย พบว่าบริเวณที่ของไหลเกิดการบวมตัวในช่วง DE และ $D'F'$ $\dot{\epsilon}$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นแต่จะมีค่าสูงสุดบริเวณที่มีการบวมตัวมากที่สุดและบริเวณทางออกดาย ดังรูปที่ 4.12(a) และ 4.12(b)



รูปที่ 4.5: ทิศทางการไหลของพอลิเมอร์ในกระบวนการเคลือบแบบทิวบ์ทูลลิ่ง สำหรับ $We = 200$



(a)



(b)

(c)

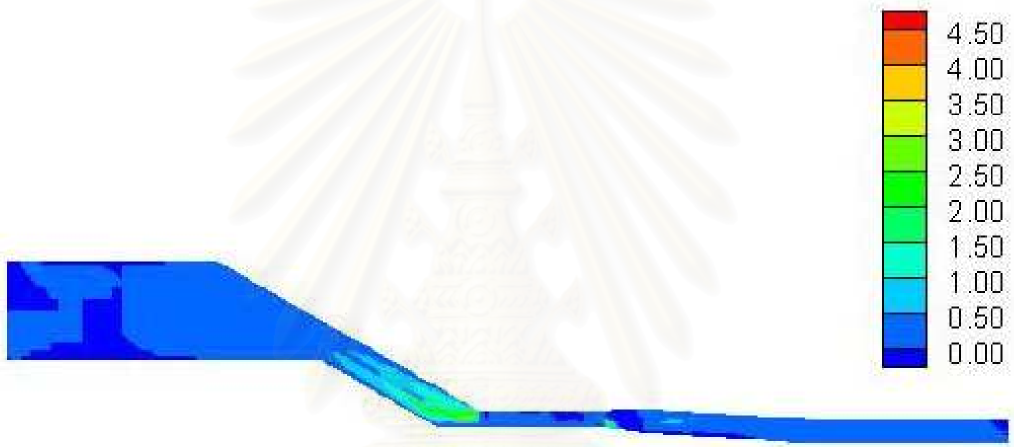
รูปที่ 4.6: เส้นโครงร่างสำหรับ $PTT(\dot{\epsilon} = 0.02, \xi = 0.0, \mu_N = 0.99)$ และ $We = 200$ (a) V_z (b) U_r (c) P (d) τ_{rz} (e) τ_{zz} (f) $\dot{\gamma}$ (g) $\dot{\epsilon}$

(d)

(e)

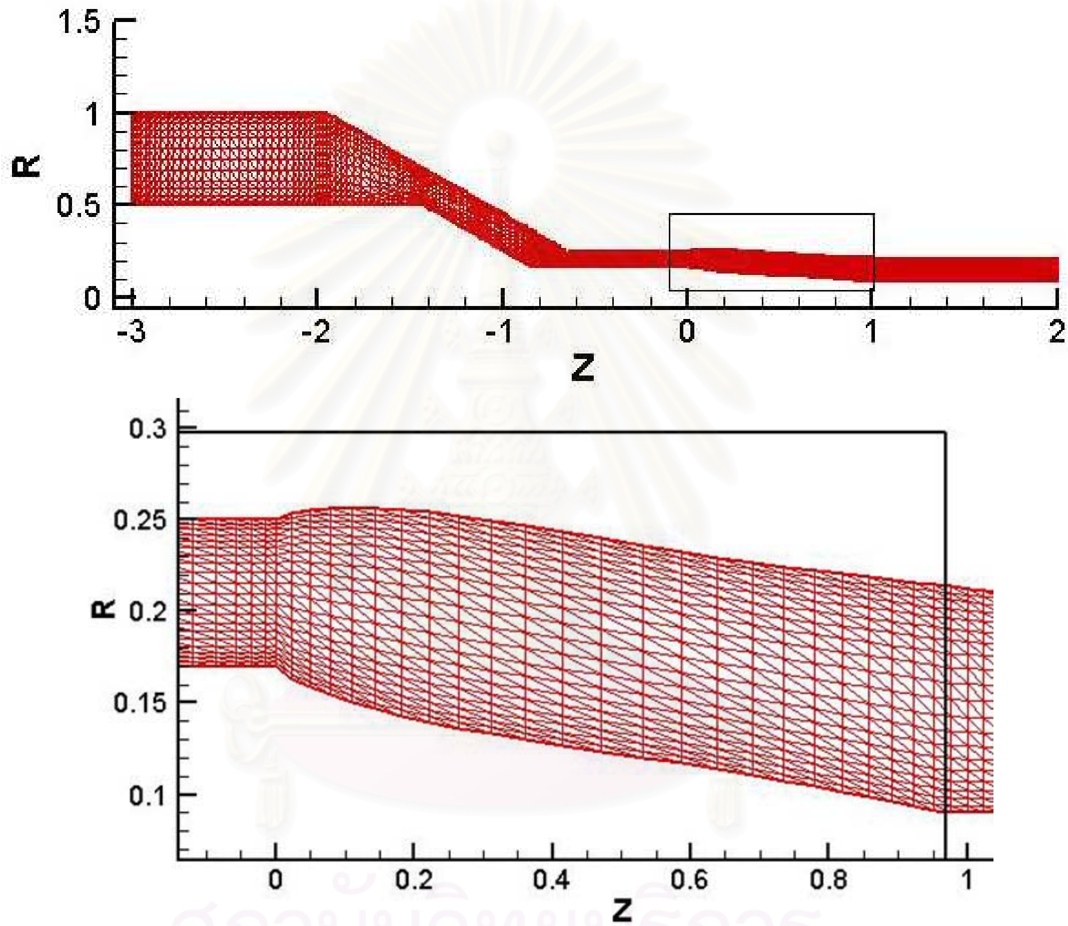
(f)

รูปที่4.6: เส้นโครงร่างสำหรับ $PTT(\dot{\epsilon} = 0.02, \xi = 0.0, \mu_N = 0.99)$ และ $We = 200$ (a) V_z (b) U_r (c) P (d) τ_{rz} (e) τ_{zz} (f) $\dot{\gamma}$ (g) $\dot{\epsilon}$

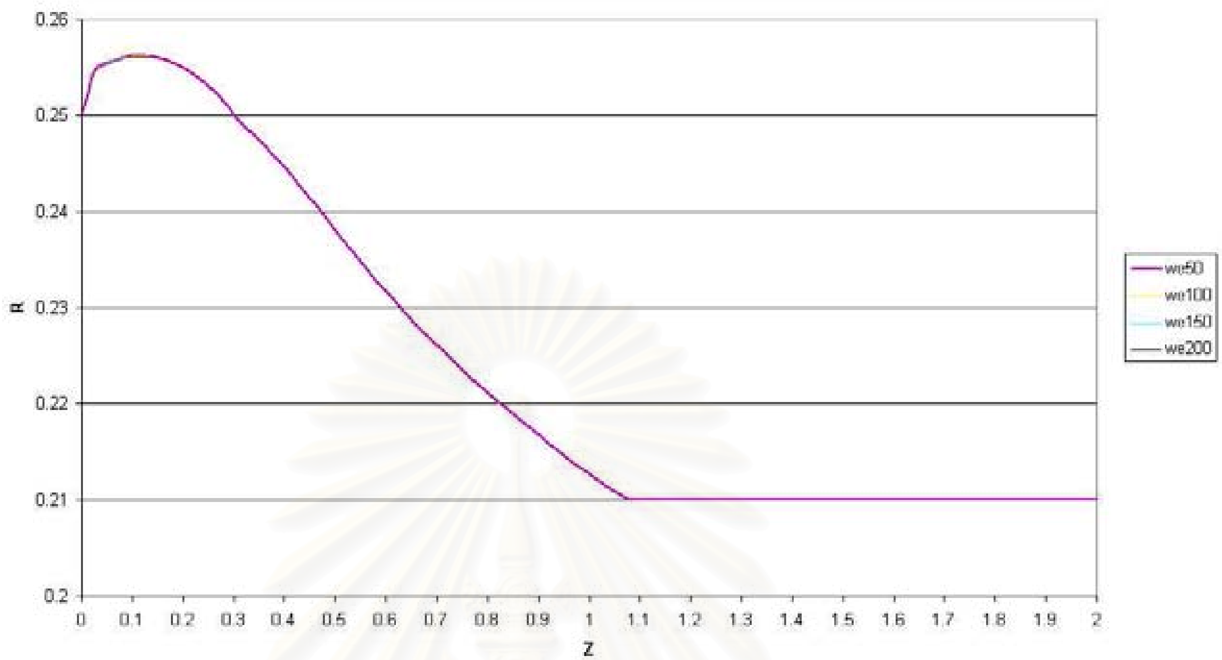


(g)

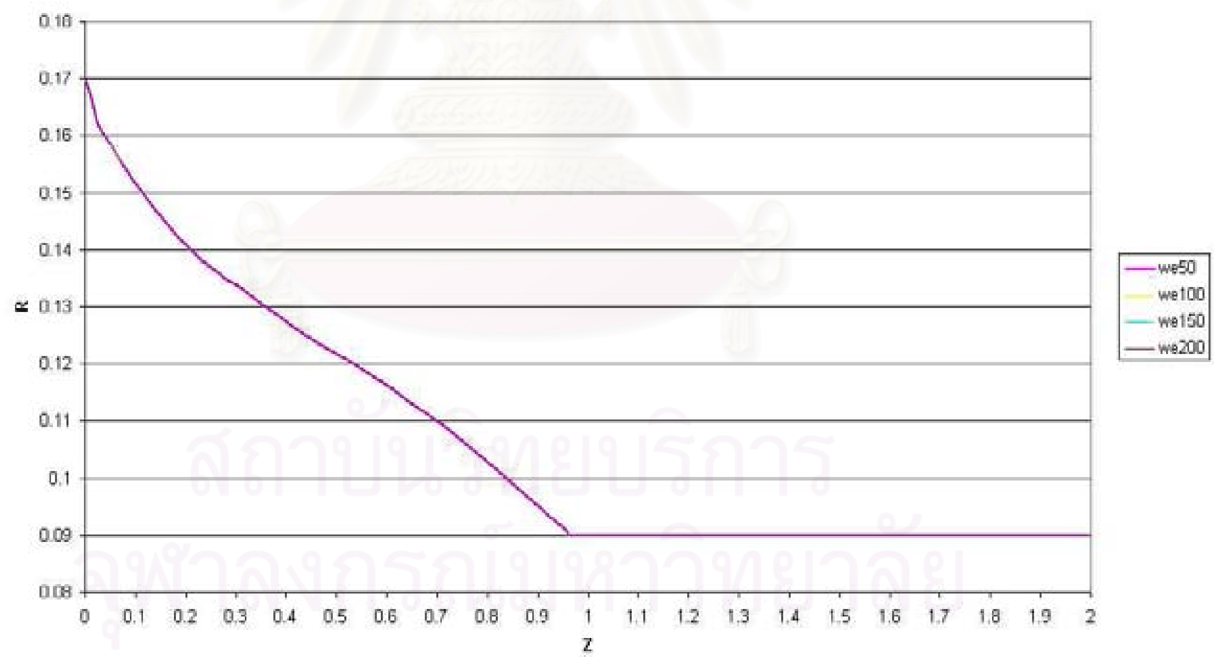
รูปที่4.6: เส้นโครงร่างสำหรับ $PTT(\dot{\epsilon} = 0.02, \xi = 0.0, \mu_N = 0.99)$ และ $We = 200$ (a) V_z (b) U_r (c) P (d) τ_{rz} (e) τ_{zz} (f) $\dot{\gamma}$ (g) $\dot{\epsilon}$



รูปที่ 4.7: ผิวอิสระจากการคำนวณการไหลเคลือบเส้นลวดแบบทิวบ์ทูลลิ่ง

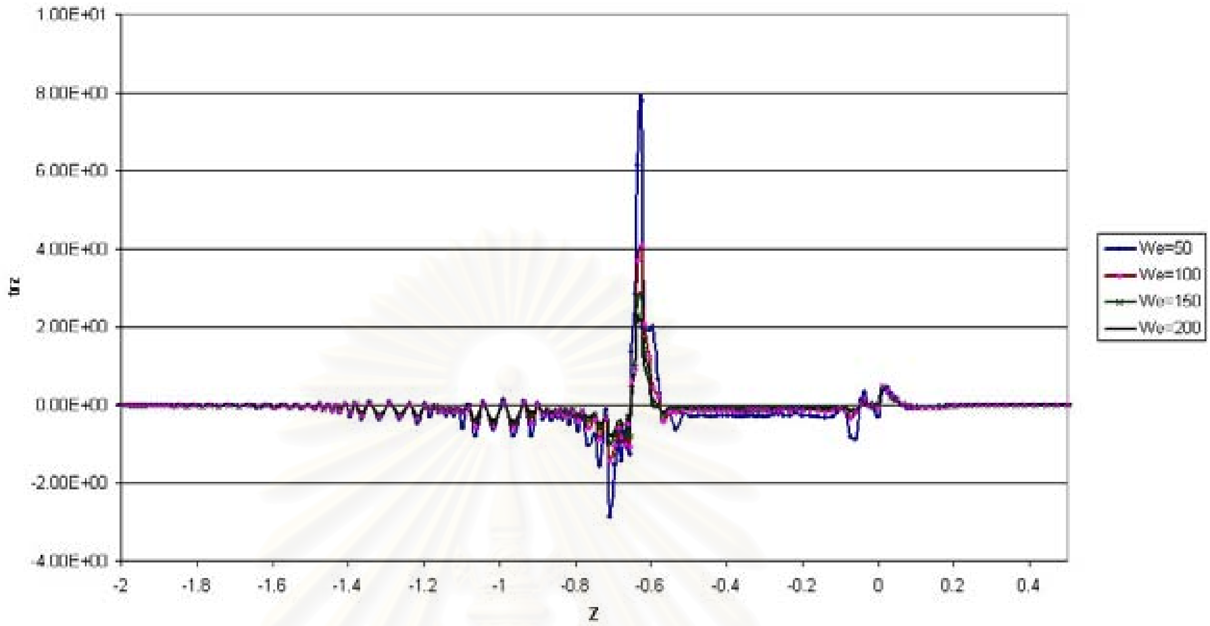


(a)

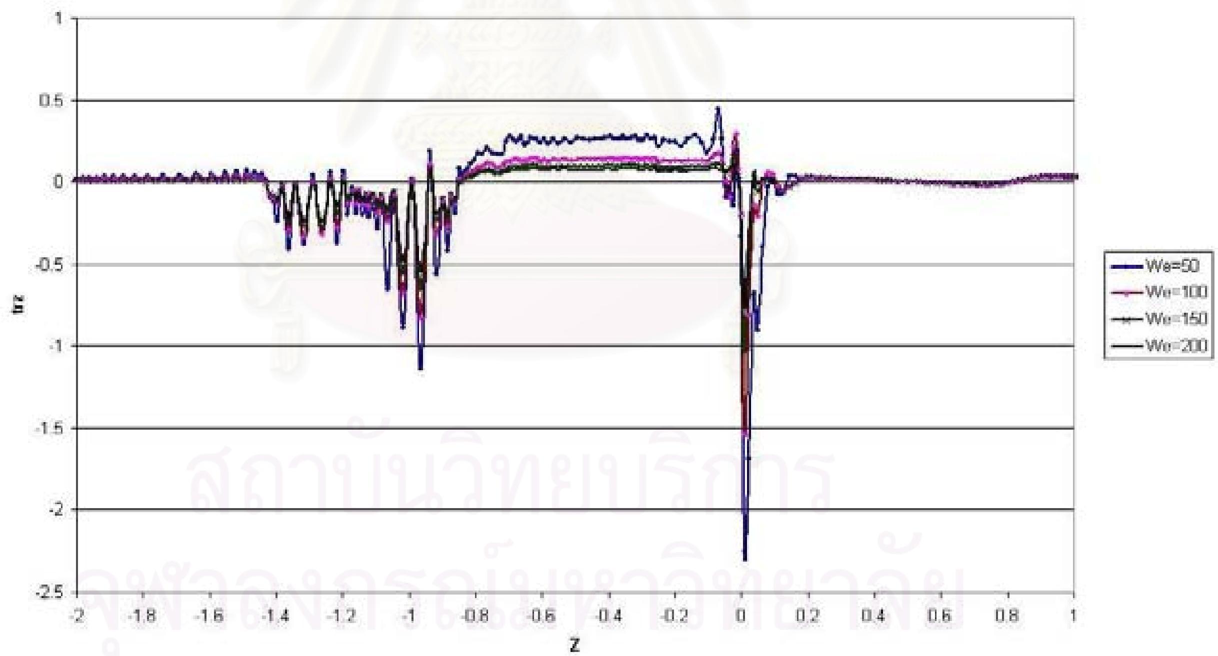


(b)

รูปที่ 4.8: ผิวอิสระสำหรับ We ที่ 50, 100, 150, 200 (a) ผิวอิสระบน (b) ผิวอิสระล่าง

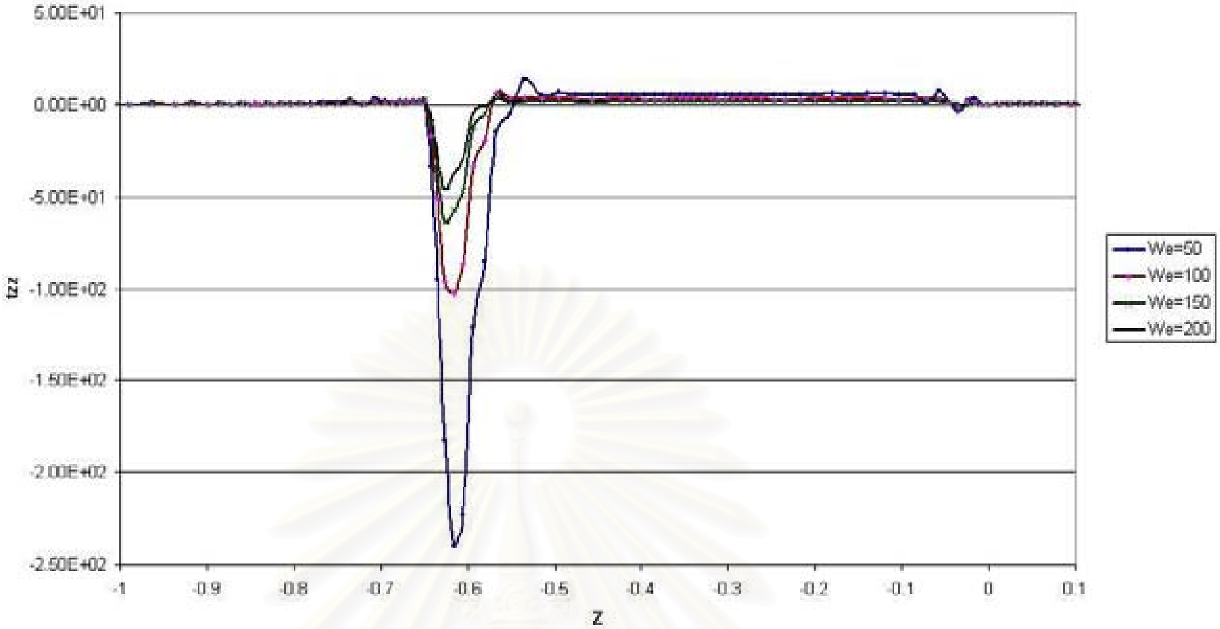


(a)

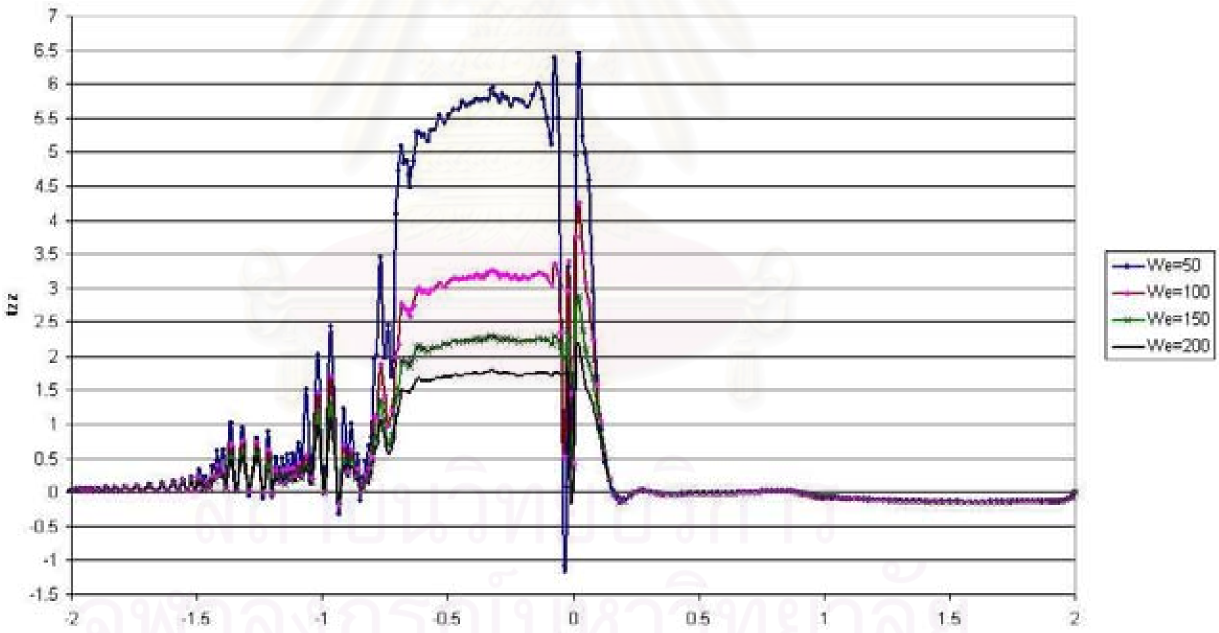


(b)

รูปที่ 4.9: τ_{rz} ที่ขอบสำหรับ We ที่ 50, 100, 150, 200 (a) τ_{rz} ที่ขอบบน (b) τ_{rz} ที่ขอบล่าง

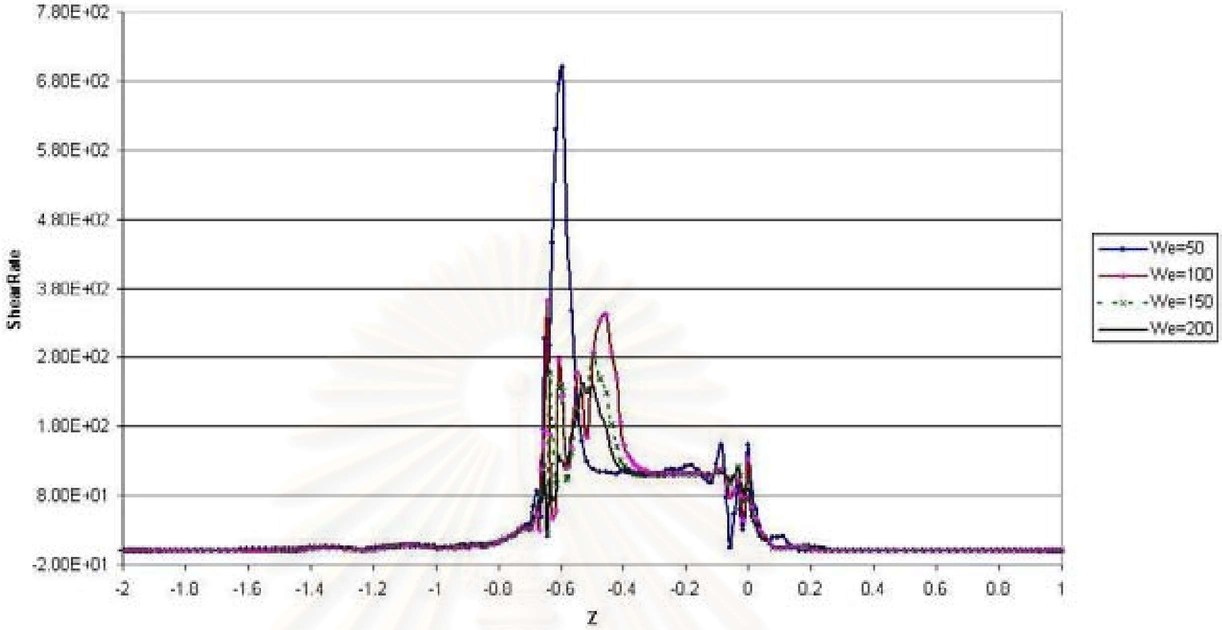


(a)

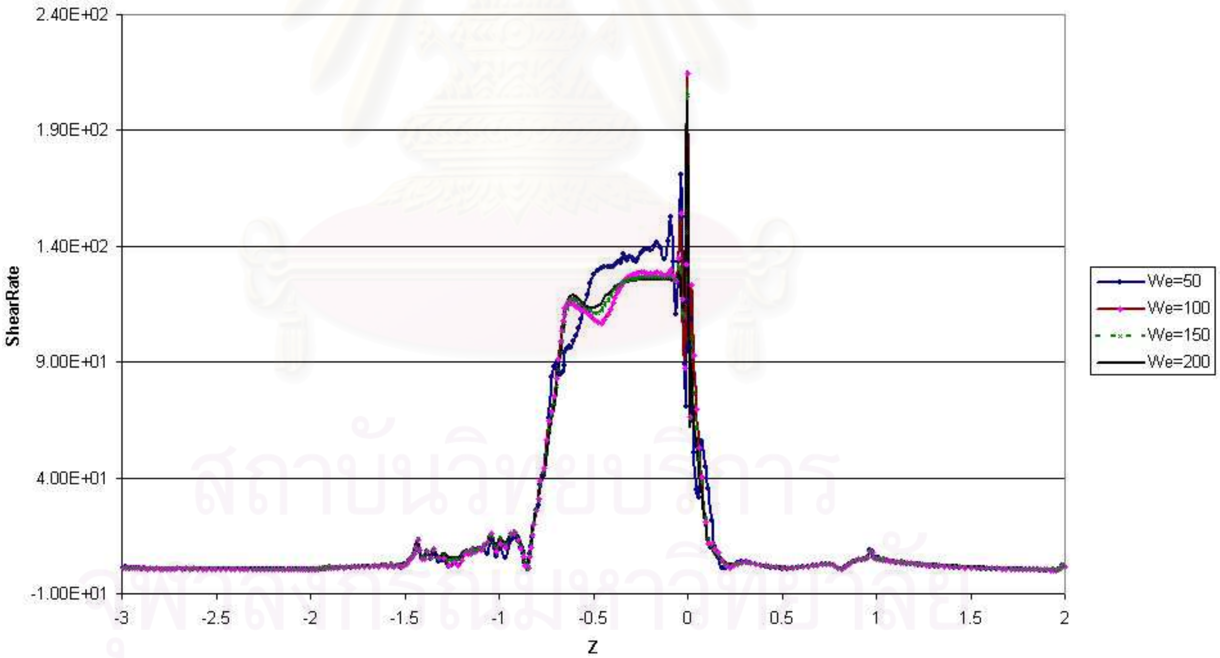


(b)

รูปที่ 4.10: τ_{zz} ที่ขอบบนและล่างสำหรับ We ที่ 50, 100, 150, 200 (a) τ_{zz} ที่ขอบบน (b) τ_{zz} ที่ขอบล่าง

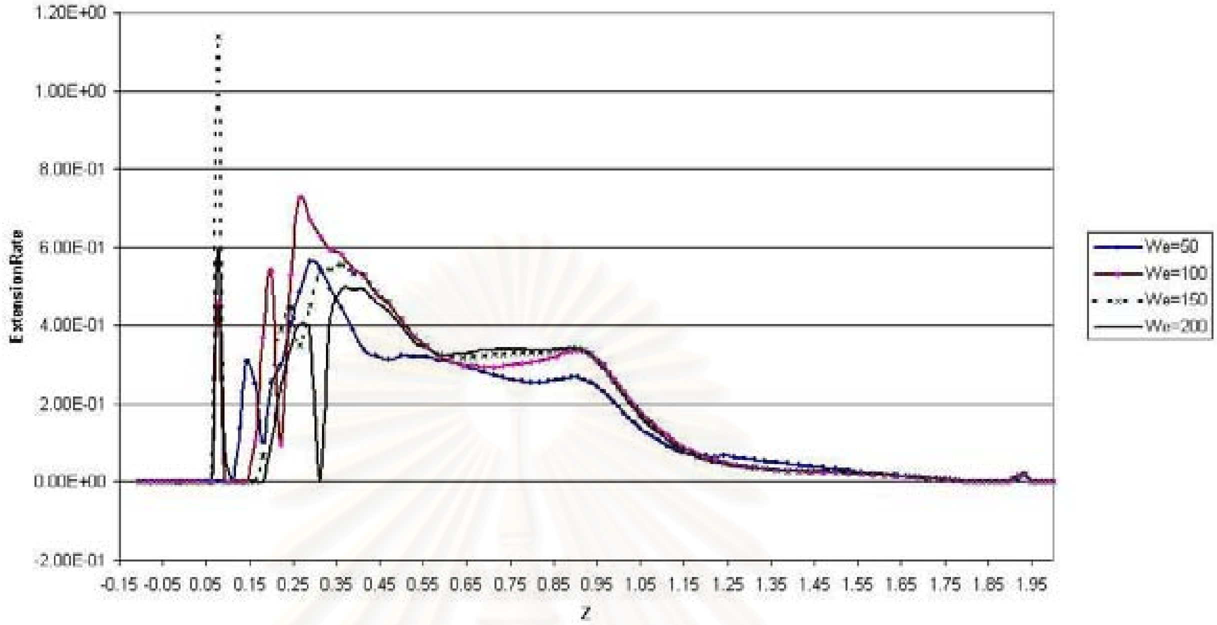


(a)

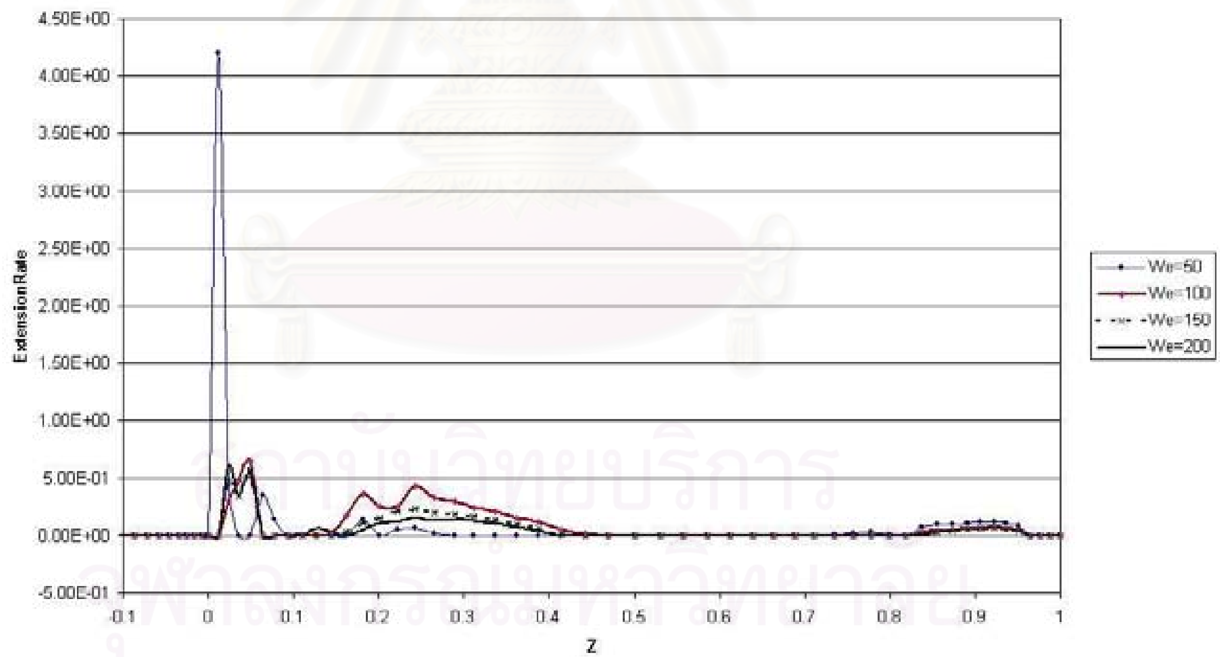


(b)

รูปที่ 4.11: $\dot{\gamma}$ ที่ขอบสำหรับ We ที่ 50, 100, 150, 200 (a) $\dot{\gamma}$ ที่ขอบบน (b) $\dot{\gamma}$ ที่ขอบล่าง



(a)



(b)

รูปที่ 4.12: $\dot{\epsilon}$ ที่ขอบบนและล่างสำหรับ We ที่ 50, 100, 150, 200 (a) $\dot{\epsilon}$ ที่ขอบบน (b) $\dot{\epsilon}$ ที่ขอบล่าง

บทที่ 5

สรุปผล (Conclusion)

5.1 สรุปผลการวิจัย (Conclusion)

การเปลี่ยนแปลงค่า We มีผลกระทบต่อความเร็ว ความดัน ความเค้น อัตราเฉือนและอัตราการยืดขยายของพอลิเมอร์ แต่มีผลกระทบน้อยมากต่อการบวมตัวของพอลิเมอร์ที่ไหลออกนอกดาย เพื่อเคลือบเส้นลวด ดังนั้นเมื่อต้องการเลือกใช้พอลิเมอร์ที่มีค่า We ที่แตกต่างกันออกไป จึงควรคำนึงถึงผลกระทบเหล่านี้ที่ยังคงทำให้การเคลือบมีการบวมตัวสม่ำเสมอ และมีคุณภาพที่ดี

การนำแรงตึงผิวมาพิจารณาประกอบการคำนวณ ผิวอิสระด้านบนและด้านล่าง ทำให้ผิวอิสระที่ได้สอดคล้องกับความเป็นจริงมากขึ้น รวมทั้งจุดคอนแทรคชันที่ใกล้เคียงผลการทดลอง

สำหรับจุดคอนแทรคชันที่คำนวณได้ในงานวิจัยนี้ใช้กับตัวแบบ EPTT ที่มีค่า $\epsilon = 0.02$, $\xi = 0.0$, $\mu_V = 0.99$ และ $\mu_N = 0.01$ อยู่ที่ประมาณ (0.09, 0.98) พบว่ามีค่าใกล้เคียงกับงานศึกษาของ Mutlu et al. [7], Ngamaramvaranggul และ Webster [15] รวมทั้ง Mattallah et al. [38] ซึ่งได้กำหนดค่าของตำแหน่งที่ผิวอิสระล่างประทะกับเส้นลวดตำแหน่งแรก หรือจุดคอนแทรกชันไว้ ณ (0.09, 1) โดยประมาณ ซึ่งเป็นผลที่ได้มาจากการทดลองจริงของกลุ่มผู้วิจัยดังกล่าว

5.2 ข้อจำกัดและเงื่อนไขของงานวิจัย (Limitation and condition)

ในการทำงานวิจัยนี้มีข้อจำกัดที่อยู่ภายใต้สมมติฐานหลายประการที่ทำให้ผลเฉลยที่ได้ไม่สมบูรณ์เท่าที่ควร กล่าวโดยสรุปเป็นข้อๆได้ดังนี้

1. **ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากค่าเงื่อนไขขอบ** ในงานวิจัยนี้ค่าเงื่อนไขขอบของความเร็วที่ผนังดายอยู่ภายใต้สมมติฐานที่ว่า ความเร็วไม่มีผลกระทบของการลื่นไหล ทำให้ความเร็วที่ขอบเกิดความคลาดเคลื่อน จากผลการทดลองอนุภาคของพอลิเมอร์ที่ผนังดายมีความเร็ว แต่มีค่าค่อนข้างน้อยหรือเกือบเป็นศูนย์ดังนั้นเพื่อให้สะดวกและง่ายต่อการคำนวณจึงกำหนดปัญหาอยู่ภายใต้สมมติฐานดังกล่าว

2. **ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากระบบไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ** ระบบไม่ขึ้นกับอุณหภูมิเป็นสมมติฐานที่ถูกกำหนดสำหรับปัญหานี้ ซึ่งหมายความว่าในทุกๆตำแหน่งบนโดเมนที่ศึกษาอุณหภูมิจะมีค่าเท่ากันนั่นก็คืออุณหภูมิไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา แต่ในความจริงแล้วอุณหภูมิในแต่ละตำแหน่งของโดเมนอาจมีค่าไม่เท่ากัน เนื่องจากการสูญเสียพลังงานในการถ่ายเทความร้อนระหว่างอนุภาคของพอลิเมอร์ในกระบวนการผลิต การที่อุณหภูมิแต่ละตำแหน่งไม่เท่ากันอาจส่งผลให้พารามิเตอร์บางค่ามีการเปลี่ยนแปลงไป

3. **ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องจากแรงตึงผิวของพอลิเมอร์** ในงานวิจัยนี้แรงตึงผิวคิดเป็นพารามิเตอร์ของค่าคงที่ชุดหนึ่งที่อ้างอิงจาก [65] ซึ่งนำมาพิจารณาเฉพาะบริเวณผิวอิสระเท่านั้น แต่ในความเป็นจริงแล้วแรงตึงผิวควรนำไปพิจารณากับทั้งระบบในกระบวนการผลิต

4. **ความคลาดเคลื่อนจากลักษณะการแบ่งชิ้นประกอบย่อย** ในงานวิจัยชิ้นนี้มีข้อจำกัดสำหรับรูปแบบการแบ่งโดเมนออกเป็นชิ้นประกอบย่อย เนื่องจากในการคำนวณหา ความเร็ว ความดัน ความเครียดและผิวอิสระ ควรใช้ชิ้นประกอบย่อยที่แบ่งโดยให้มีอัตราความโอนเอียงสูง (bias) ในบริเวณทางออกดาย แต่ในการอ้างอิงเพื่อนำพารามิเตอร์ของแรงตึงผิวมาใช้ชิ้นประกอบย่อยควรทำการแบ่งอย่างสม่ำเสมอ (uniform)

5. **ความคลาดเคลื่อนจากแรงโน้มถ่วงของโลก** สำหรับแรงโน้มถ่วงในปัญหาการไหลเคลือบเส้นลวด อาจมีผลกระทบค่อนข้างน้อย แต่น่าจะมีผลกระทบบ้างเมื่อพอลิเมอร์เคลื่อนออกจากดาย ซึ่งงานวิจัยนี้ได้พิจารณาแรงโน้มถ่วงที่อยู่ในรูปพารามิเตอร์ของแรงตึงผิวที่ได้กล่าวในข้อที่ 3

5.3 ข้อเสนอแนะและแนวทางการศึกษาต่อไป (Suggestion)

สำหรับข้อจำกัดและเงื่อนไขที่ได้กล่าวมาในหัวข้อที่ 5.1 ผู้วิจัยมีข้อเสนอดังนี้

1. กำจัดข้อจำกัดของเงื่อนไขขอบของความเร็วที่ผนังดาย โดยเพิ่มเงื่อนไขการลื่นไหล (slip condition) ที่ผนังดาย เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ ที่เรียกว่า การเสียรูปทรง (melt fracture) ของพอลิเมอร์หลอมเหลว

2. เพิ่มเงื่อนไขให้เป็นระบบที่ขึ้นกับอุณหภูมิ (non-isothermal system) เพื่อให้อุณหภูมิในโดเมนที่พิจารณามีความใกล้เคียงกับกระบวนการผลิตจริงมากขึ้น

3. เพิ่มเงื่อนไขแรงตึงผิวในระบบสมการของปัญหา พร้อมทั้งพิจารณาผลกระทบจากแรงโน้มถ่วงของโลก

4. สร้างชิ้นประกอบย่อยให้มีความละเอียดอย่างเพียงพอ โดยให้มีความโอนเอียงมากในบริเวณที่ต้องการความละเอียดสูง และในบางครั้งอาจต้องสร้างชิ้นประกอบย่อยแบบไม่มีรูปแบบ (non-uniform) เพื่อให้ค่าที่คำนวณได้มีการกระจายอย่างทั่วถึง

รายการอ้างอิง

[1] R.T.Fenner and J.G.Williams. Trans.J. Plastics Inst. (1967):701-706.

[2] B.Caswell and R.I.Tanner. Wirecoating die design using finite element methods. Polymer Technology. 18,5(1978):416-421.

[3] E.Mitsoulis. Fluid flow and heat transfer in wire coating: A review. Advances in Polymer Technology. 6,4(1986):467-487.

[4] E.Mitsoulis, R.Wagner and F.L.Heng. Numerical simulation of wire-coating low density polyethylene: Theory and experiments. Polymer Eng. Sci. 28,5(1988):291-311.

[5] D.M.Binding, A.R.Blythe, S.Gunter, A.A.Mosquera, P.Townsend and M.F.Webster. Modelling polymer melt flows in wirecoating processes related fields. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 64(1996):191-206.

[6] S.Gunter, P.Townsend and M.F.Webster. Simulation of some model viscoelastic extensional flows. Int. J. Num. Meth. Fluids. 23(1996):691-710.

[7] I.Mutlu, P.Townsend and M.F.Webster. Simulation of cable-coating viscoelastic flows with coupled and decoupled schemes. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 74(1998):1-23.

[8] F.P.T.Baaijens, S.H.A.Selen, H.P.W.Baaijens, G.W.N.Peters and H.E.H.Meijer, Viscoelastic flow past a confined cylinder of a LDPE melt. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 68(1997):173-203.

[9] J.Azaiez, R.Guénette and A.Ait-Kadi. Entry flow calculations using multi-mode models. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 66(1996):271-281.

[10] M.Gupta, C.A.Hieber and K.K.Wang. Viscoelastic modelling of entrance flow using multimode Leonov model. Int. J. Numer. Meth. Fluids. 24(1997):493-517.

[11] H.Matallah, P.Townsend and M.F.Webster. Recovery and stress-splitting schemes for viscoelastic flows. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 75(1998):139-166.

[12] A.Baloch, H.Matallah, V.Ngamaramvaranggul and M. F.Webster. Simulation of Pressure- and Tube-tooling Wire-Coating Flows through Distributed Computation. Int. J.Num. Meth. Heat Fluid Flow. 12(2002):458-493.

[13] V.Ngamaramvaranggul and M.F.Webster. Computation of Free Surface Flows with a Taylor-Galerkin/Pressure-Correction Algorithm. Int. J. Num. Meth. Fluids. 33(2000):993-1026.

[14] V.Ngamaramvaranggul and M.F.Webster. Simulation of Coating Flows with Slip Effects Int. J. Num. Meth. Fluids. 33(2000):961-992.

[15] V.Ngamaramvaranggul and M.F.Webster. Simulation of Pressure-tooling wire-coating flow with Phan-Thien/Tanner models Int. J. Num. Meth. Fluids 38(2002):677-710.

[16] ณรงค์ฤทธิ์ สมบัติสมภพ และ ชาคริต สิริสิงห. Basic Polymer Rheology and Applications. กรุงเทพ ฯ : มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี. 2544.

[17] D.H.Morton-Jones. Polymer Processing. London : Chapman & Hall. 1989.

[18] R.I.Tanner. Engineering Rheology. Oxford university press. 2000.

[19] R.H.Sabersky, A.J.Acosta and E.G.Hauptmann. Fluid flow a First cours in Fluid Mechanics. New York : Collier-Macmillan Cannada. 1971.

[20] P.Dechaumphai. Finite element method for computational fluid dynamics. Bankkok : Chulalongkorn University press. 2002.

[21] Z.U.A.Warsi. Fluid Dynamics Theoretical and Computational Approaches. Florida : CRC Press. 1999.

[22] F.M.White. Fluid Mechanics. Fourth Edition, New York : McGraw-Hill. 1999.

[23] V.Ngamaramvaranggul. Numerical Simulation of Non-Newtonian Free Surface Flows. Computer Science University of Wales Swansea. 2000.

[24] J.C.Maxwell. On the Dynamical Theory of Gases. Phil. Trans. Roy. Soc. A157(1967):49-88.

[25] J.C.Maxwell. A Treatise on Electricity and Magnetism. New York : Reinhold Pub. 1973.

[26] R.Hooke. A Description of Helioscopes and Some other Instruments. London. 1676.

[27] J.G.Oldroyd. On the Formulation of Rheological Equation of State. Proc. Roy. Soc. A200(1950):523-541.

[28] D.Paddon and H. Holstein. Technical Report. Bristol University. BUCSTR 80-01. 1980.

[29] M.J.Crochet and R. Keunings. Finite Element Analysis of Die-swell of a Maxwell Fluid Numerical Prediction. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 10(1982):339-356.

[30] N.Phan-Thien. A non-linear network viscoelastic model. J. Rheol. 22(1978):259 - 283.

[31] N.Phan-Thien and R.I. Tanner. A new constitutive equation derived from network theory. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2(1977):353-365.

[32] M.J.Crochet, A.R.Davies and K.Walters. Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow. Rheology Series 1. Elsevier Science Publishers. 1984.

[33] R.Keunings and M.J.Crochet. Numerical simulation of the flow of a viscoelastic fluid through an abrupt contraction. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 14(1984):279-299.

[34] R.B.Bird, R.C.Armstrong and O.Hassager. Dynamics of polymeric liquids. Fluid mechanics. New York. 1(1987).

[35] N.Phan-Thien. Influence of wall slip on extrudate swell a boundary element investigation. J. Now-Newtonian Fluid Mech. 26(1988):327-340.

[36] N.Phan-Thien. Boundary-element Analysis of Forming Processes. Numerical Modelling of Material Deformation Proccesses: Research. Development and Application. London. 1992.

[37] I.Mutlu, P.Townsend and M.F.Webster. Computation of viscoelastic cable coating flow. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 26(1998):697-712.

[38] H.Matallah, P.Townsend and M.F.Webster. Viscoelastic multi-mode simulations of wire-coating. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 90(2000):217-241.

[39] H.Matallah, P.Townsend and M.F.Webster. Viscoelastic computations of polymeric wire-coating flows. CSR13-2000. University of Wales Swansea. 2000.

[40] R.L.Daugherty, J.B.Franzini and E.J.Finnemore. Fluid Mechanics with Engineering Application. Singapore : McGraw-Hill. 1989

[41] C.D.Han. Rheology in Polymer Processing. New York : Academic press. 1976.

[42] R.B.Bird, W.E. Stewart and E.N. Lightfoot. Transport Phenomena. London : JohnWiley&Sons. 1960.

[43] R.B.Bird and R.C.Armstrong. Stress Tensor for Arbitrary Flows of Dilute Solutions of Rodlike Macromolecules. J. Chem. Phys. 58,7(1973): 2715-2723.

[44] K.Walter. Rheometry. London : Chapman & Hall. 1975.

[45] R.S. Rivlin and J.L. Eriksen. Stress Deformation Relations for Isotropic Material. J. Rat. Mech. Anal. 4 (1955): 323-425.

[46] M.Reiner. Deformation Strain and Flow. New York : Wiley. 1960.

[47] ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพ ฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2544.

[48] พรชัย สาตรวาหา. Numerical Analysis I. กรุงเทพ ฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2544.

[49] O.C.Zienkiewicz and Y.K.Cheung. Finite Element in the Solution of Field Problems. The Engineer. (1965):507-510.

[50] R.H.Gallagher, J.T.Oden, C.Taylor and O.C.Ziekiewiz. Finite elements in fluids - Volume1. London : John Wiley & Sons. 1975.

[51] R.H.Gallagher, J.T.Oden, C.Taylor and O.C.Ziekiewiz. Finite elements in fluids - Volume2. London : John Wiley & Sons. 1975.

[52] J.N.Reddy. An introduction to the finite element method. Singapore : McGraw-Hill. 1985.

[53] T.R.Chandsupatla and A.D.Belegundu. Introduction to finite elements in engineering. New Jersey : Prentice Hall. 1991.

[54] J.J.Connor and C.A.Brebbia. Finite element techniques for fluid flow. London : Butterworth & Co(Publishers). 1976.

[55] J.N.Reddy and D.K.Gartling. The finite element method in heat transfer and fluid dynamics. second edition. Florida : CRC Press. 2000.

[56] E.Hinton and D.R. J.Owen. An introduction to finite element computations. Swansea :Prineridge Press. 1980.

[57] ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2 . กรุงเทพ ฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2542.

[58] P.Grant, M.Haveraaen and M.F.Webster. Tensor Abstraction Programming of computational fluid dynamics. CSR3-98. University of Wales Swansea. 1998.

[59] H.Matallah, P.Townsend and M.F.Webster. Embedded recovery methods for viscoelastic flows. CSR7-2000. University of Wales Swansea. 2000.

[60] V.Ngamaramvaranggul and M.F.Webster. Viscoelastic Simulations of Stick-Slip and Die-Swell Flows. Int. J. Num. Meth. Fluids. 36(2001):539-595.

[61] A.N.Brooks and T.J.R.Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equation. Comp. Meth. App. Eng. 32(1982):199 - 259.

[62] E.O.A.Carew, P.Townsend and M.F.Webster. A Taylor-Petrov-Galerkin algorithm for viscoelastec flow. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 50(1993):253-287.

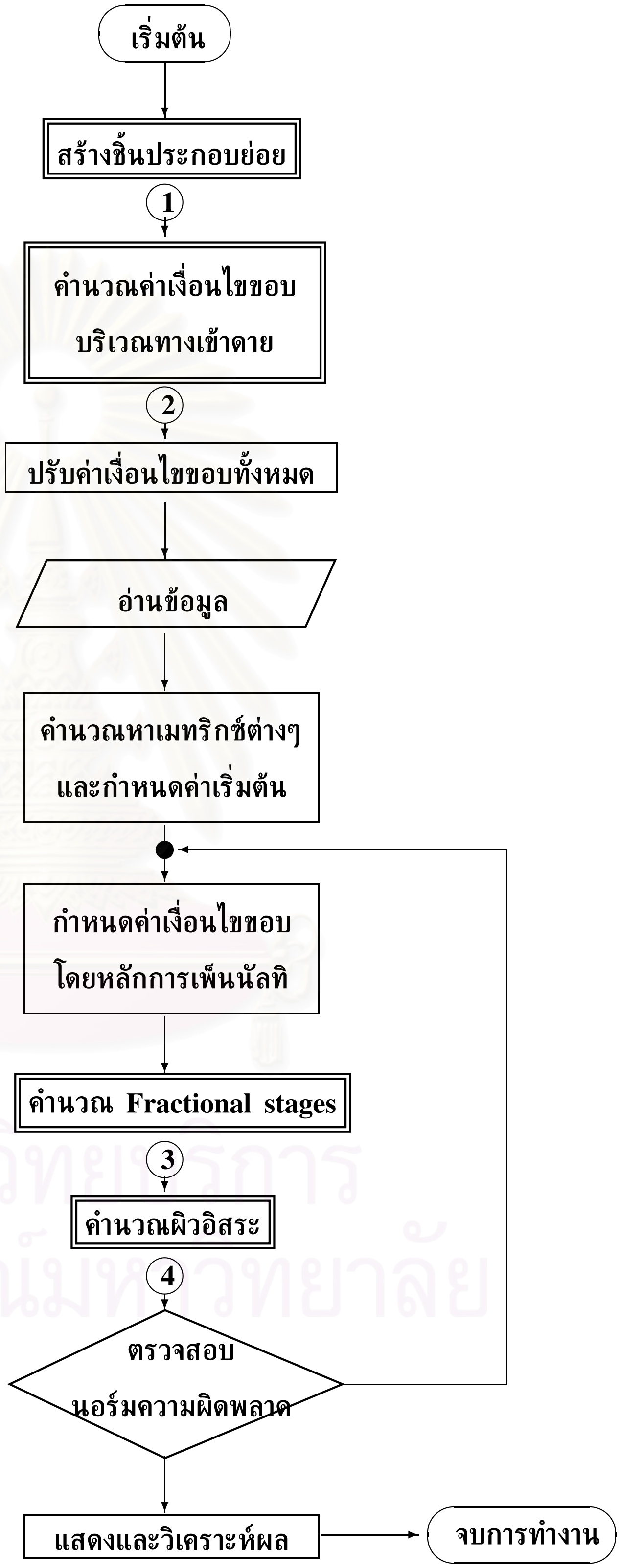
[63] B.V.Rathish Kummar, P.Srinivasa Rao and P.Sinha. Stream upwind Petrov-Galerkin finite element analysis of thermal effects on load carrying capacity in slider bearings. Numerical Heat Transfer. Part A. 38(2000):305 - 328.

[64] A.W.Neuman and J.K.Spelt. Applied surface thermodynamics. New York : Marcel Dekker, inc. 1996.

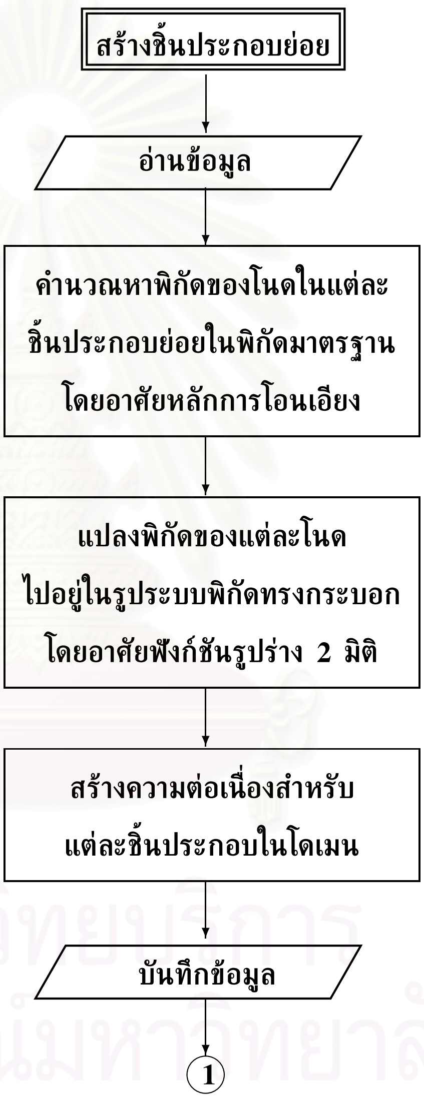
[65] Spiros H.Anastasiadis and Savvas G.Hatzikiriakkos. The work of adhesion of polymer/wall interfaces and its association with the onset of wall slip. J.Rheol. 42,4(1998):795 - 812.

ภาคผนวก

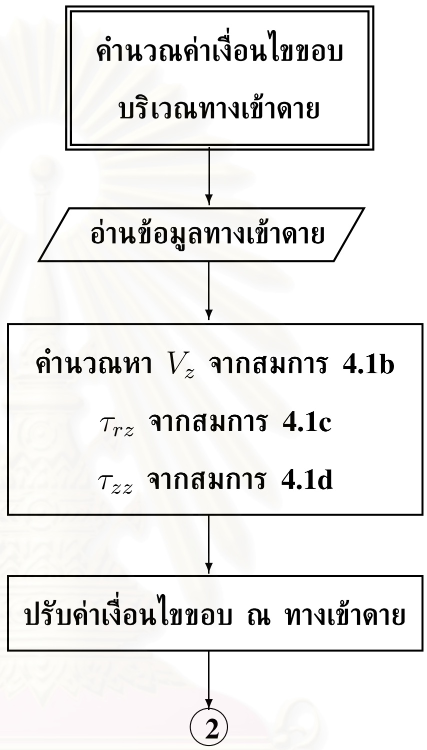
ผังงานโปรแกรม



ผังงานโปรแกรม (ต่อ)



ผังงานโปรแกรม (ต่อ)



ผังงานโปรแกรม (ต่อ)

คำนวณ Fractional stages

↓

คำนวณ ขั้นตอนที่ 1a
หาค่า $U^{n+\frac{1}{2}}$ และ $\tau^{n+\frac{1}{2}}$
โดยใช้ระเบียบวิธีเกาส์ไซเดลและเอสโออาร์

↓

คำนวณ ขั้นตอนที่ 1b
หาค่า U^{*} และ τ^{n+1}
โดยใช้ระเบียบวิธีเกาส์ไซเดลและเอสโออาร์

↓

คำนวณ ขั้นตอนที่ 2
หาค่า p^{n+1}
โดยใช้ระเบียบวิธีโชเลซกี

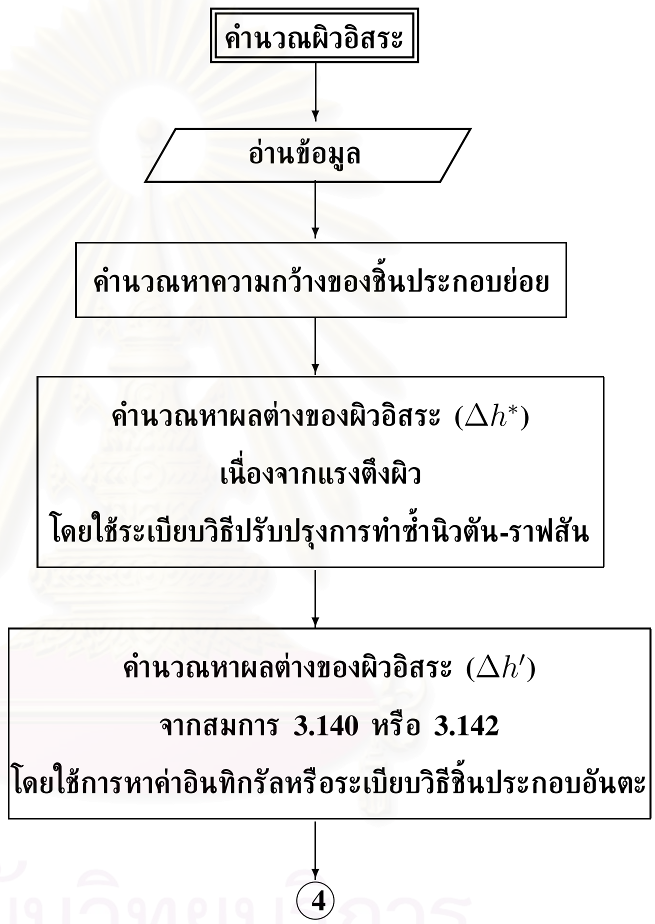
↓

คำนวณ ขั้นตอนที่ 3
หาค่า U^{n+1}
โดยใช้ระเบียบวิธีจาโคบี

↓

3

ผังงานโปรแกรม (ต่อ)



คำอธิบายผังงานโปรแกรม

1. เริ่มโปรแกรม
2. ฟังก์ชันการสร้างชิ้นประกอบย่อย
    (a) อ่านข้อมูลพิกัดอ้างอิงของโดเมน
    (b) คำนวณหาพิกัดของโนดในแต่ละชิ้นประกอบย่อยในพิกัดมาตรฐานโดยอาศัยหลักการโอนเอียง
    (c) แปลงพิกัดของแต่ละโนดจากระบบพิกัดมาตรฐานให้อยู่ในรูประบบพิกัดทรงกระบอกโดยอาศัยฟังก์ชันรูปร่าง 2 มิติ
    (d) สร้างความต่อเนื่องสำหรับแต่ละชิ้นประกอบย่อยในโดเมน
    (e) บันทึกข้อมูลลงในไฟล์
3. ฟังก์ชันคำนวณค่าเงื่อนไขขอบบริเวณทางเข้าดาย
    (a) อ่านข้อมูลบริเวณทางเข้าดาย
    (b) คำนวณหา V_z จากสมการ 4.1b, τ_{rz} จากสมการ 4.1c และ τ_{zz} จากสมการ 4.1d
    (c) ปรับปรุงค่าเงื่อนไขขอบ ณ บริเวณทางเข้าดาย
4. ปรับค่าเงื่อนไขของทั้งหมด
5. อ่านข้อมูลเพื่อคำนวณ
6. คำนวณหาเมทริกซ์ต่างๆและกำหนดค่าเริ่มต้น
7. กำหนดค่าเงื่อนไขขอบโดยหลักการเพ็นนัลทิ
8. ฟังก์ชันการคำนวณ Fractional stages
    (a) คำนวณ ขั้นตอนที่ 1a เพื่อหาค่า $U^{n+\frac{1}{2}}$ และ $\tau^{n+\frac{1}{2}}$ โดยใช้ระเบียบวิธีเกาส์ไซเดลและเอสโออาร์
    (b) คำนวณ ขั้นตอนที่ 1b เพื่อหาค่า U^* และ τ^{n+1} โดยใช้ระเบียบวิธีเกาส์ไซเดลและเอสโออาร์
    (c) คำนวณ ขั้นตอนที่ 2 เพื่อหาค่า p^{n+1} โดยใช้ระเบียบวิธีโชเลซกี

(d) คำนวณ ขั้นตอนที่ 3 เพื่อหาค่า U^{n+1} โดยใช้ระเบียบวิธีจาโคบี

9. ฟังก์การคำนวณผิวอิสระ

   (a) อ่านข้อมูลพิกัดของแต่ละโนดบนขอบที่เป็นผิวอิสระ

   (b) คำนวณหาความกว้างของชิ้นประกอบย่อย

   (c) คำนวณหาผลต่างของผิวอิสระ (Δh^*) เนื่องจากแรงตึงผิวโดยใช้ระเบียบวิธีปรับปรุงการทำซ้ำนิวตัน-ราฟสัน

   (d) คำนวณหาผลต่างของผิวอิสระ $(\Delta h')$ จากสมการ 3.140 หรือ 3.142 โดยใช้การหาค่าอินทิกรัลหรือระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ

10. ตรวจสอบค่านอร์มความผิดพลาด หากค่านอร์มความผิดพลาดไม่น้อยกว่าหรือเท่ากับค่าที่กำหนดไว้ให้กลับไปทำ 7

11. แสดงผลและวิเคราะห์ผล

12. จบการทำงาน

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายสายธาร เทนอิสสระ เกิดเมื่อวันที่ 28 เดือนธันวาคม พุทธศักราช 2517 สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น เมื่อพุทธศักราช 2540 ในปีพุทธศักราช 2541 ได้เข้ารับราชการในตำแหน่งอาจารย์ 1 ระดับ 3 ในสังกัดสถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตภาคตะวันออกเฉียงเหนือ นครราชสีมา กระทรวงศึกษาธิการ และในปีพุทธศักราช 2544 ได้รับอนุญาตให้ลาศึกษาต่อในหลักสูตร ปริญญามหาบัณฑิต สาขาวิทยาการคณนา ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สถานที่ติดต่อ
แผนกวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิชาศึกษาทั่วไป มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล อีสาน
ถนน สุรนารายณ์ ตำบล ในเมือง
อำเภอ เมือง
จังหวัด นครราชสีมา
email address : saitharn@nec.rit.ac.th