## บทที่ 4

## การวิเคราะห์แบบแผ่นพื้นพับในสามมิติ

การวิเคราะห์บันไดยื่นอิสระแบบแผ่นพื้นตัน โดยวิธีแผ่นพื้นพับในสามมิติ เป็นวิธีวิเคราะห์โดยประมาณที่เสนอโดย Liebenberg[3] และ Siev[9] และเป็นที่ยอมรับกันว่าสามารถใช้ในการออกแบบ[4,5,10,12] อย่างไรก็ตามวิธีวิเคราะห์ที่ใช้อยู่สามารถใช้กับบันไดยื่นอิสระแบบแผ่นพื้นตันที่ภาพฉายของพื้นบันไดบนและพื้นบันไดล่างขนานกันบนระนาบของชานพักเท่านั้น ดังนั้นในบทนี้จะแสดงวิธีประยุกต์วิธีวิเคราะห์ดังกล่าวมาใช้กับ "บันได" ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอตามแนวดิ่งแบบสมมาตรและปฏิสมมาตร

### 4.1 สมมุติฐานในการวิเคราะห์

การวิเคราะห์ "บันได" โดยวิธีแผ่นพื้นพับในสามมิติ มีสมมุติฐานในการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้ คือ

1. วัสดุมีคุณสมบัติอีลาสติคเชิงเส้น ไอโซโทรปิค และมีเนื้อเดียวกันตลอดโครงสร้าง

2. การเคลื่อนที่ของโครงสร้างเมื่อรับแรงมีขนาดน้อยมาก เมื่อเทียบกับมิติรูปทรงของโครงสร้าง ฉะนั้นในการวิเคราะห์สามารถพิจารณาสภาวะสมดุลย์ของแรงต่าง ๆ จากรูปทรงของโครงสร้างขณะยังไม่รับแรง

3. การวิเคราะห์สามารถใช้หลักการรวมผล

4. บริเวณรอยต่อระหว่างพื้นบันไดกับชานพักหรือที่รองรับเป็นข้อต่อแบบข้อแข็ง และเป็นเนื้อเดียวกันตลอดความยาวรอยต่อ

5. ไม่มีการเลื่อนตัวหรือทรุดตัวของที่รองรับของโครงสร้าง และสติฟเนสในระนาบของที่รองรับมีค่ามากกว่าสติฟเนสของโมเมนต์บิด และโมเมนต์ดัดในทิศตั้งฉากกับระนาบของพื้นบันไดมาก

6. การกระจายของแรงกระทำที่หน้าตัดใด ๆ บนพื้นบันได มีขนาดคงที่ตลอดความกว้างของหน้าตัดนั้น ๆ แต่การกระจายของแรงตามแนวยาวของพื้นบันไดอาจเป็นรูปใด ๆ ก็ได้

7. การเคลื่อนที่ของรอยตัดระหว่างชานพักกับพื้นบันไดบนและล่าง มีขนาดน้อยกว่า

การเคลื่อนที่ของจุดอื่น ๆ และเป็นผลจากการเคลื่อนที่ของโครงสร้างหลัก

8. บันไดรับแรงภายนอกที่กระทำบนพื้นบันไดและชานพักในรูปของกำลังต้านทานต่อโมเมนต์ดัดของแผ่นพื้นที่พาดระหว่างที่รองรับจริงและรอยตัดระหว่างชานพักกับพื้นบันได

9. การกระจายของหน่วยแรงภายในจากโมเมนต์ดัดในทิศตั้งฉากกับระนาบของพื้นบันไดมีลักษณะเป็นเส้นตรง

10. การเคลื่อนที่ที่เกิดจากแรงเฉือนมีค่าน้อยและไม่มีผลต่อการคำนวณ

11. สติฟเนสของชานพักบันได ในระนาบของชานพักมีค่าเป็นอนันต์ ฉะนั้นมุมระหว่างรอยตัดของพื้นบันไดบนกับชานพักและรอยตัดของพื้นบันไดล่างกับชานพัก เป็นมุมฉากเสมอ

### 4.2 หลักการวิเคราะห์แบบแผ่นพื้นพับ

ในการวิเคราะห์ "บันได" โดยวิธีแผ่นพื้นพับจำต้องแยกกลไกการรับน้ำหนักบรรทุกของตัวบันไดเป็นสองกลไก โดยแสดงในรูปของ "โครงสร้างหลัก" และ "โครงสร้างรอง" และแรงภายในของบันไดที่คำนวณได้เป็นผลรวมของแรงภายในจากการวิเคราะห์โครงสร้างทั้งสอง

โครงสร้างรองเป็นกลไกการรับน้ำหนักของ "บันได" ซึ่งทำหน้าที่รับน้ำหนักบรรทุกภายนอกที่กระทำต่อตัวบันได โดยมีลักษณะเป็นแผ่นพื้นต่อเนื่องที่มีที่รองรับที่ปลายพื้นบันไดบนและพื้นบันไดล่างที่ต่อกับที่รองรับของตัวบันไดตามสภาพที่เป็นจริง เรียกที่รองรับนี้ว่า "ที่รองรับจริง" นอกจากนั้นบริเวณรอยตัดระหว่างพื้นบันไดและชานพักจะสมมุติให้มี "ที่รองรับจินตภาพ" ซึ่งเป็นที่รองรับแบบยึดหมุน (hinge) ที่กันไม่ให้รอยตัดระหว่างพื้นบันไดและชานพักเกิดการเคลื่อนที่ แต่ยอมให้เกิดการหมุนตัวรอบแกนของรอยตัดระหว่างพื้นบันไดและชานพักได้ ดังแสดงในรูปที่ 4.1

เนื่องจากการวิเคราะห์โครงสร้างรองให้ถูกต้องตามทฤษฎีอีลาสติคจำต้องอาศัยคณิตศาสตร์ชั้นสูง และต้องใช้ความพยายามและเวลามากเกินควรสำหรับการออกแบบบันไดซึ่งเป็นเพียงส่วนโครงสร้างรองในอาคารเท่านั้น จึงจำเป็นต้องดัดแปลงโครงสร้างรองให้มีลักษณะที่สามารถวิเคราะห์ได้โดยง่าย ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้การดัดแปลงในทำนองเดียวกันกับที่เสนอในงานวิจัยอื่น[3,9,10] กล่าวคือ จะแยกโครงสร้างรองออกเป็นสองส่วนแต่ละส่วนมีลักษณะเป็นแผ่นพื้นทางเดียวที่ประกอบขึ้นจากพื้นบันไดและชานพัก ดังแสดงในรูปที่ 4.2 ผลของน้ำหนักบรรทุกบนพื้นบันได $w_f$ แต่ละข้างต่อโครงสร้างรองสามารถหาค่าได้จากการวิเคราะห์โครงสร้างรองส่วน

ที่น้ำหนักบรรทุกนั้นกระทำ และผลของน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอเต็มพื้นที่ชานพัก $w_1$ ต่อโครงสร้างรอง สามารถหาค่าได้จากการวิเคราะห์โครงสร้างรองแต่ละส่วน เมื่อรับน้ำหนักบรรทุกบนชานพักเป็นครึ่งหนึ่งของที่กระทำจริง การวิเคราะห์ในทั้งสองกรณีสามารถกระทำได้โดยอาศัยหลักการวิเคราะห์โครงสร้างทั่วไปจึงไม่นำมากล่าวถึงในงานวิจัยนี้

เนื่องจากที่รองรับจินตภาพเป็นเพียงที่รองรับที่สมมุติขึ้นไม่มีอยู่จริง ดังนั้นจึงต้องนำแรงที่มีขนาดเท่าแรงปฏิกิริยาของที่รองรับจินตภาพแต่มีทิศตรงกันข้าม มากระทำต่อ "บันได" ที่บริเวณรอยตัดของพื้นบันไดและชานพัก เพื่อให้แรงทั้งสองหักล้างกันเป็นศูนย์ ซึ่งเป็นสภาพที่เป็นจริง ซึ่งในวิธีวิเคราะห์แบบแผ่นพื้นพับจะสมมุติให้แรงกระทำนี้ถูกต้านทานโดยโครงสร้างหลักเท่านั้น ผลของแรงปฏิกิริยาจากที่รองรับจินตภาพต่อโครงสร้างหลักจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อ ๆ ไป แต่ผลของการเคลื่อนที่ของรอยตัดระหว่างพื้นบันไดและชานพักในโครงสร้างหลัก ต่อโครงสร้างรองซึ่งสามารถแสดงในรูปของการทรุดตัวของที่รองรับจินตภาพในแผ่นพื้นทางเดียวและสามารถวิเคราะห์โดยอาศัยหลักการวิเคราะห์โครงสร้างทั่วไป

โครงสร้างหลักเป็นกลไกการรับน้ำหนักที่มีอยู่ในตัว "บันได" และมีหน้าที่รับแรงปฏิกิริยาจากที่รองรับจินตภาพของโครงสร้างรองอย่างมีเสถียรภาพ (stable) โดยมีลักษณะเป็นโครงสร้างที่ประกอบขึ้นจากพื้นบันไดบนพื้นบันไดล่างและชานพักที่ต่อกัน และต่อกับที่รองรับจริงของบันไดด้วยข้อต่อหมุน ตามที่แสดงในรูปที่ 4.3(ก) ซึ่งจะเห็นได้ว่าแรงภายในพื้นบันไดของโครงสร้างหลักเมื่อรับน้ำหนักบรรทุกกระทำที่รอยต่อระหว่างพื้นบันไดและชานพักมีเพียงแรงตามแนวแกน N แรงเฉือนในระนาบของแผ่นพื้น V โมเมนต์บิด T และโมเมนต์ดัด รอบแกนตั้งฉากระนาบพื้นบันได M ตามที่แสดงในรูปที่ 4.3(ข) เมื่อเปรียบเทียบกับแรงภายในโครงสร้างรองซึ่งรับน้ำหนักบรรทุกในรูปของกำลังต้านทานโมเมนต์ดัดของพื้นบันได และเนื่องจากโดยทั่วไปมิติความกว้างของพื้นบันไดจะมากกว่ามิติความหนามาก จึงเห็นได้ว่าสติฟเนสของโครงสร้างหลักเมื่อรับแรงกระทำที่รอยตัดระหว่างพื้นบันไดและชานพักมีมากกว่าสติฟเนสของโครงสร้างรอง เมื่อรับน้ำหนักบรรทุกเดียวกันมาก ฉะนั้นจึงสามารถคำนวณค่าการเคลื่อนที่และแรงภายใน "บันได" เมื่อรับแรงเนื่องจากแรงปฏิกิริยาของที่รองรับจินตภาพของโครงสร้างรองจากโครงสร้างหลักเพียงอย่างเดียว ดังกล่าวแล้วในสมมุติฐานข้อที่ 7

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่าการวิเคราะห์ "บันได" โดยวิธีแผ่นพื้นพับมีขั้นตอน

ดังต่อไปนี้ คือ

ก) วิเคราะห์โครงสร้างรอง เมื่อรับน้ำหนักบรรทุกภายนอก เพื่อหาแรงภายในและแรงปฏิกิริยาของที่รองรับจินตภาพ

ข) วิเคราะห์โครงสร้างหลัก เมื่อรับแรงที่มีขนาดเท่ากับแรงปฏิกิริยาจากที่รองรับจินตภาพแต่มีทิศตรงกันข้าม เพื่อหาแรงภายในและการเคลื่อนที่ของรอยตัดระหว่างพื้นบันไดและชานพัก

ค) การรวมผลที่ได้จากการวิเคราะห์โครงสร้างรอง และโครงสร้างหลัก เพื่อหาผลของน้ำหนักบรรทุกต่อ "บันได" เนื่องจากโครงสร้างหลักมีสติฟเนสสูงกว่าโครงสร้างรองมาก ดังนั้นผลของการเคลื่อนที่ของโครงสร้างหลักที่มีต่อโครงสร้างรองในรูปการทรุดตัวของที่รองรับจินตภาพจึงมีค่าน้อยไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงในการออกแบบ อย่างไรก็ตามขนาดการเคลื่อนที่ของโครงสร้างหลักที่มีผลต่อโครงสร้างรอง ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข. และการหาผลการทรุดตัวของโครงสร้างหลักต่อโครงสร้างรอง สามารถทำได้โดยการวิเคราะห์โครงสร้างรองเมื่อที่รองรับจินตภาพเกิดการทรุดตัวเท่ากับการเคลื่อนที่ของโครงสร้างหลักซึ่งจะได้ค่าแรงภายในและแรงปฏิกิริยาของที่รองรับจินตภาพเพื่อนำไปหาแรงภายในและการเคลื่อนที่ของโครงสร้างหลัก ค่าการเคลื่อนที่ที่คำนวณได้สามารถนำไปคำนวณซ้ำอีกจนกว่าจะได้ค่าละเอียดที่ต้องการ

### 4.3 <u>แกนโคออร์ดิเนตและภายใน</u>

การกำหนดรูปทรงเรขาคณิต ทิศทางบวกของแรงกระทำการเคลื่อนที่ และแรงภายในจะเทียบกับแกนอ้างอิง สองชุด ได้แก่

1. แกนโคออร์ดิเนตหลัก เป็นแกนอ้างอิงในระบบแกนตั้งฉากตามกฎมือขวา โดยแกน X และ Y วางตัว อยู่ในระนาบกึ่งกลางความหนาของชานพักบันได ตามที่แสดงในรูปที่ 4.4

แกนโคออร์ดิเนตหลักเป็นแกนอ้างอิงที่ใช้กำหนดรูปทรงเรขาคณิตของบันได ทิศของแรงกระทำภายนอก แรงปฏิกิริยาของที่รองรับจริงและที่รองรับจินตภาพ และการเคลื่อนที่โดยที่จะมีค่าเป็นบวก เมื่อมีทิศไปตามทิศทางบวกของแกนโคออร์ดิเนตนั้น

2. แกนโคออร์ดิเนตรอง เป็นแกนอ้างอิงในระบบแกนตั้งฉากกันตามกฎมือขวาของพื้นบันไดบนและพื้นบันไดล่าง โดยมีแกนโคออร์ดิเนตแกนหนึ่งวางตัวในแนวแกนของพื้นบันได และแกนโคออร์ดิเนตอีกสองแกนตั้งฉากกับแนวแกนของพื้นบันได โดยมีแกนหนึ่งขนานกับระนาบ X-Y ของแกนหลัก และแกนที่เหลือ ($\bar{Z}$) ตั้งฉากกับระนาบของพื้นบันไดนั้น ดังแสดงในรูปที่ 4.4

แกนโคออร์ดิเนตรอง เป็นแกนอ้างอิงที่ใช้กำหนดทิศของแรงภายใน และการเคลื่อนที่ของพื้นบันไดในโครงสร้างหลัก โดยที่จะมีค่าเป็นบวก เมื่อมีทิศไปตามทิศทางบวกของแกนโคออร์ดิเนตรองของพื้นบันไดนั้น แรงภายในและการเคลื่อนที่ในทิศทางบวกของพื้นบันไดบนและพื้นบันไดล่าง แสดงในรูปที่ 4.5 และ 4.6 ตามลำดับ

### 4.4 <u>โครงสร้างหลักภายใต้แรงกระทำจากที่รองรับจินตภาพ</u>

พิจารณาสภาวะสมดุลย์ของ "บันได" ส่วนชานพัก เมื่อมีแรงกระทำจากที่รองรับจินตภาพและแรงภายในพื้นบันไดบนและพื้นบันไดล่างในทิศทางบวก ตามที่แสดงในรูปที่ 4.7 โดยที่

$R_u$ = แรงในแนวดิ่งจากที่รองรับจินตภาพของพื้นบันไดบน

$R_\ell$ = แรงในแนวดิ่งจากที่รองรับจินตภาพของพื้นบันไดล่าง

$H_u$ = แรงในแนวราบจากที่รองรับจินตภาพของพื้นบันไดบน

$H_\ell$ = แรงในแนวราบจากที่รองรับจินตภาพของพื้นบันไดล่าง

$S\text{①}_u, M\text{①}_u$ = แรงภายในและโมเมนต์ในทิศแกนรอง ① ของพื้นบันไดบน

$S\text{①}, M\text{①}$ = แรงภายในและโมเมนต์ในทิศแกนรอง ① ของพื้นบันไดล่าง

จากการพิจารณาสภาวะสมดุลย์ของแรงที่จุด o จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายในและแรงภายนอกดังนี้ คือ

$\Sigma Fx = 0$ ;

$$S\bar{x}_u \cos\alpha + S\bar{x} = H_u \tag{4.1a}$$

$\Sigma Fy = 0$ ;

$$S\bar{y}_u + S\bar{y} \cos\alpha = H_\ell \tag{4.1b}$$

$\Sigma Fz = 0$ ;

$$S\bar{x}_u \sin\alpha - S\bar{y} \sin\alpha = R_u + R_\ell \tag{4.1c}$$

$\Sigma Mx_c = 0$ ;

$$S\bar{x}_u \left(\frac{b\sin\alpha}{2}\right) + M\bar{x}_u \cos\alpha - M\bar{z}_u \sin\alpha = R_u a \tag{4.1d}$$

$\Sigma My_c = 0$ ;

$$S\bar{y}\left(\frac{b\sin\alpha}{2}\right) + M\bar{y}\cos\alpha + M\bar{z}\sin\alpha = -R_{\ell}a \tag{4.1e}$$

$\Sigma M\bar{z}_c = 0$ ;

$$-S\bar{x}_u\left(\frac{b\cos\alpha}{2}\right) + M\bar{x}_u\sin\alpha + M\bar{z}_u\cos\alpha + S\bar{y}\left(\frac{b\cos\alpha}{2}\right) - M\bar{y}\sin\alpha + M\bar{z}\cos\alpha$$
$$= H_{\ell}a - H_u a \tag{4.1f}$$

การเคลื่อนที่ของจุดกึ่งกลางพื้นบันไดบนและพื้นบันไดล่าง เนื่องจากแรงภายในพื้นบันไดแต่ละข้างที่เป็นบวกสามารถแสดงในรูปของการโก่งตัวและการหมุนตัวของหน้าตัดของคานยื่น (cantiliver beam) เมื่อรับแรงที่ปลายซึ่งมีสูตรแสดงค่าแน่นอน[13] ดังนี้ คือ

$$\delta\bar{x}_{Au} = S\bar{x}_u\left(\frac{S}{EA}\right) \tag{4.2a}$$

$$\delta\bar{y}_{Au} = S\bar{y}_u\left(\frac{S^3}{3EI\bar{z}}\right) + M\bar{z}_u\left(\frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right) \tag{4.2b}$$

$$\theta\bar{x}_{Au} = M\bar{x}_u\left(\frac{S}{GJ}\right) \tag{4.2c}$$

$$\theta\bar{z}_{Au} = S\bar{y}_u\left(\frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right) + M\bar{z}_u\left(\frac{S}{EI\bar{z}}\right) \tag{4.2d}$$

และ

$$\delta\bar{x}_c = S\bar{x}\left(\frac{S^3}{3EI\bar{z}}\right) - M\bar{z}\left(\frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right) \tag{4.3a}$$

$$\delta\bar{y}_c = S\bar{y}\left(\frac{S}{EA}\right) \tag{4.3b}$$

$$\theta\bar{y}_c = M\bar{y}\left(\frac{S}{GJ}\right) \tag{4.3c}$$

$$\theta\bar{z}_c = -S\bar{x}\left(\frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right) + M\bar{z}\left(\frac{S}{EI\bar{z}}\right) \tag{4.3d}$$

โดยที่

$\delta①_{iu}$, $\theta①_{iu}$ = การเคลื่อนที่และการหมุนของหน้าตัดในทิศแกนรอง ① ของจุด i บนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดบนและชานพัก

$\delta①_{i}$, $\theta①_{i}$ = การเคลื่อนที่และการหมุนของหน้าตัดในทิศแกนรอง ① ของจุด i บนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดล่างและชานพัก

S = ความยาวของพื้นบันไดตามแนวแกนของพื้นบันได

A = พื้นที่หน้าตัดของพื้นบันได

$I\bar{z}$ = โมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดพื้นบันไดรอบแกนตั้งฉากระนาบของพื้นบันได

$J$ = ค่าคงที่การบิดของพื้นบันได

$E$ = โมดูลัสของการยืดหยุ่นของพื้นบันได

$G$ = โมดูลัสเฉือนของพื้นบันได

การเคลื่อนที่ของจุดใด ๆ บนรอยต่อระหว่างพื้นบันไดบนและชานพักในทิศแกนรองของพื้นบันไดบนสามารถหาได้จากการเคลื่อนที่และการหมุนของหน้าตัดที่จุด A ได้ดังนี้ คือ

$$\delta\bar{x}_{Pu} = S\bar{x}_u\left(\frac{S}{EA}\right) - S\bar{y}_u\left(\frac{\bar{y}_u S^2}{2EI\bar{z}}\right) - M\bar{z}_u\left(\frac{\bar{y}_u S}{EI\bar{z}}\right) \qquad (4.4a)$$

$$\delta\bar{y}_{Pu} = S\bar{y}_u\left(\frac{S^3}{3EI\bar{z}}\right) + M\bar{z}_u\left(\frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right) \qquad (4.4b)$$

$$\delta\bar{z}_{Pu} = M\bar{x}_u\left(\frac{\bar{y}_u S}{GJ}\right) \qquad (4.4c)$$

โดยที่

$\bar{y}_u$ = โคออร์ดิเนตของจุด P ในระบบแกนรองของพื้นบันไดบนซึ่งสามารถจะเปลี่ยนเป็นการเคลื่อนที่ในทิศของแกนหลักได้ดังนี้

$$\delta x_{Pu} = \delta\bar{x}_{Pu}\cos\alpha - \delta\bar{x}_{Pu}\sin\alpha$$

$$= S\bar{x}_u\left(\frac{S\cos\alpha}{EA}\right) - \bar{y}_u\left[S\bar{y}_u\left(\frac{S^2\cos\alpha}{2EI\bar{z}}\right) + M\bar{x}_u\left(\frac{S\sin\alpha}{GJ}\right) + M\bar{z}_u\left(\frac{S\cos\alpha}{EI\bar{z}}\right)\right. \qquad (4.5a)$$

$$\delta y_{Pu} = \delta\bar{y}_{Pu}$$

$$= S\bar{y}_u\left(\frac{S^3}{3EI\bar{z}}\right) + M\bar{z}_u\left(\frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right) \qquad (4.5b)$$

$$\delta z_{Pu} = \delta\bar{x}_{Pu}\sin\alpha + \delta\bar{z}_{Pu}\cos\alpha$$

$$= S\bar{x}_u\left(\frac{S\ \sin\alpha}{EA}\right) - \bar{y}_u\left[S\bar{y}_u\left(\frac{S^2\sin\alpha}{2EI\bar{z}}\right) - M\bar{x}_u\left(\frac{S\ \cos\alpha}{GJ}\right) + M\bar{z}_u\left(\frac{S\ \sin\alpha}{EI\bar{z}}\right)\right]$$

(4.5 c)

การเคลื่อนที่ของจุดใด ๆ บนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดล่างและชานพักในทิศแกนรองของพื้นบันไดล่างสามารถหาได้จากการเคลื่อนที่และการหมุนของหน้าตัดที่จุด C ได้ดังนี้ คือ

$$\delta\bar{x}_P = S\bar{x}\left(\frac{S^3}{3EI\bar{z}}\right) - M\bar{z}\left(\frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right) \quad (4.6a)$$

$$\delta\bar{y}_P = -S\bar{x}\left(\frac{\bar{x}\ S^2}{2EI\bar{z}}\right) + S\bar{y}\left(\frac{S}{EA}\right) + M\bar{z}\left(\frac{\bar{x}\ S}{EI\bar{z}}\right) \quad (4.6b)$$

$$\delta\bar{z}_P = -M\bar{y}\left(\frac{\bar{x}\ S}{GJ}\right) \quad (4.6c)$$

โดยที่

$\bar{x}$ = โคออร์ดิเนตของจุด P ในระบบแกนรองของพื้นบันไดล่างซึ่งสามารถจะเปลี่ยนเป็นการเคลื่อนที่ในทิศของแกนหลักได้ดังนี้ คือ

$$\delta x_P = \delta\bar{x}_P$$

$$= S\bar{x}\left(\frac{S^3}{3EI\bar{z}}\right) - M\bar{z}\left(\frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right) \quad (4.7a)$$

$$\delta y_P = \delta\bar{y}_P\cos\alpha + \delta\bar{z}_P\sin\alpha$$

$$= S\bar{y}\left(\frac{S\ \cos\alpha}{EA}\right) - \bar{x}\left[S\bar{x}\left(\frac{S^2\ \cos\alpha}{2EI\bar{z}}\right) + M\bar{y}\left(\frac{S\ \sin\alpha}{GJ}\right) - M\bar{z}\left(\frac{S\ \cos\alpha}{EI\bar{z}}\right)\right]$$

(4.7b)

$$\delta z_P = -\delta\bar{y}_P\sin\alpha + \delta\bar{z}_P\cos\alpha$$

$$= -S\bar{y}\left(\frac{S\ \sin\alpha}{EA}\right) + \bar{x}\left[S\bar{x}\left(\frac{S^2\sin\alpha}{2EI\bar{z}}\right) - M\bar{y}\left(\frac{S\ \cos\alpha}{GJ}\right) - M\bar{z}\left(\frac{S\ \sin\alpha}{EI\bar{z}}\right)\right]$$

(4.7c)

### 4.4.1 โครงสร้างหลักภายใต้แรงกระทำจากที่รองรับจินตภาพแบบปฏิสมมาตร

พิจารณาสภาวะสมดุลย์ของบันไดส่วนชานพัก เมื่อมีแรงกระทำจากที่รองรับจินตภาพแบบปฏิสมมาตร และกำหนดให้แรงกระทำที่รอยตัดระหว่างพื้นบันไดบนและชานพัก และแรงภายในพื้นบันไดบนมีทิศเป็นบวก ขณะที่แรงกระทำที่รอยตัดระหว่างพื้นบันไดล่างและชานพักและแรงภายในพื้นบันไดล่างของจุดคู่สมมาตรมีขนาดและทิศตามกฎของสมมาตร ตามที่แสดงในรูปที่ 4.8 ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำและแรงภายในของพื้นบันไดทั้งสอง ดังนี้ คือ

$$R_u = R_\ell = R \qquad (4.8a)$$

$$H_u = -H_\ell = H \qquad (4.8b)$$

$$S\bar{x}_u = -S\bar{y} = N \qquad (4.8c)$$

$$S\bar{y}_u = -S\bar{x} = V \qquad (4.8d)$$

$$M\bar{x}_u = -M\bar{y} = T \qquad (4.8e)$$

$$M\bar{z}_u = M\bar{z} = M \qquad (4.8f)$$

แทนค่าสมการ (4.8) ในสมการ (4.1) เพื่อหาค่าแรงภายในจากการพิจารณาสภาวะสมดุลย์ที่จุด C ดังนี้ คือ

$$N\cos\alpha - V = H \qquad (4.9a)$$

$$V - N\cos\alpha = -H \qquad (4.9b)$$

$$N.\sin\alpha + N\sin\alpha = 2R \qquad (4.9c)$$

$$\frac{Nb\sin\alpha}{2} + T\cos\alpha - M\sin\alpha = Ra \qquad (4.9d)$$

$$-\frac{Nb\sin\alpha}{2} - T\cos\alpha + M\sin\alpha = -Ra \qquad (4.9e)$$

$$-\frac{Nb\cos\alpha}{2} + T\sin\alpha + M\cos\alpha - \frac{Nb\cos\alpha}{2} + T\sin\alpha + M\cos\alpha = -2Ha \qquad (4.9f)$$

เนื่องจากสมการ (4.9a) และ (4.9b) กับสมการ (4.9d) และ (4.9e) มีรูปสมการเดียวกัน ฉะนั้นสมการจากการพิจารณาสภาวะสมดุลย์ที่จุด C จึงมีสมการที่มีอิสระเชิงเส้น (linearly independent) เพียงสี่สมการซึ่งสามารถใช้หาค่าแรงภายในโครงสร้างหลักได้ดังนี้ คือ

$$N = \frac{R}{\sin\alpha} \tag{4.10a}$$

$$V = R\cot\alpha - H \tag{4.10b}$$

$$M = \frac{Rb}{2\sin\alpha} - Ra\sin\alpha - Ha\cos\alpha \tag{4.10c}$$

$$T = Ra\cos\alpha - Ha\sin\alpha \tag{4.10d}$$

แรงภายในพื้นบันไดแต่ละข้างสามารถหาค่าได้โดยการแทนค่าสมการ (4.10) ในสมการ (4.8) และพิจารณาสภาวะสมดุลย์ของแรงในพื้นบันไดนั้น ๆ

การเคลื่อนที่ของจุดบนรอยต่อระหว่างพื้นบันไดบนและชานพักจากการแทนสมการ (4.8) ใน สมการ (4.5) มีดังนี้ คือ

$$\delta x_{Pu} = N\left(\frac{S\cos\alpha}{EA}\right) - \bar{y}_u\left[V\left(\frac{S^2\cos\alpha}{2EI\bar{z}}\right) + T\left(\frac{S\sin\alpha}{GJ}\right) + M\left(\frac{S\cos\alpha}{EI\bar{z}}\right)\right]$$

$$= \Delta_1 - \bar{y}_u\,\Delta_2 \tag{4.11a}$$

$$\delta y_{Pu} = V\left(\frac{S^3}{3EI\bar{z}}\right) + M\left(\frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right)$$

$$= \Delta 3 \tag{4.11b}$$

$$\delta z_{Pu} = N\left(\frac{S\sin\alpha}{EA}\right) - \bar{y}_u\left[V\left(\frac{S^2\sin\alpha}{2EI\bar{z}}\right) - T\left(\frac{S\cos\alpha}{GJ}\right) + M\left(\frac{S\sin\alpha}{EI\bar{z}}\right)\right]$$

$$= \Delta_4 - \bar{y}_u\,\Delta_5 \tag{4.11c}$$

โดยที่

$$\Delta_1 = N\left(\frac{S\cos\alpha}{EA}\right) \tag{4.12a}$$

$$\Delta_2 = V\left(\frac{S^2\cos\alpha}{2EI\bar{z}}\right) + T\left(\frac{S\sin\alpha}{GJ}\right) + M\left(\frac{S\cos\alpha}{EI\bar{z}}\right) \tag{4.12b}$$

$$\Delta_3 = V\left(\frac{S^3}{3EI\bar{z}}\right) + M\left(\frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right) \tag{4.12c}$$

$$\Delta_4 = N\left(\frac{S\sin\alpha}{EA}\right) \tag{4.12d}$$

$$\Delta_5 = V\left(\frac{S^2\sin\alpha}{2EI\bar{z}}\right) - T\left(\frac{S\cos\alpha}{GJ}\right) + M\left(\frac{S\sin\alpha}{EI\bar{z}}\right) \tag{4.12e}$$

การเคลื่อนที่ของจุด O เทียบกับพื้นบันไดบนสามารถหาจากการแทนค่า $\bar{y}_u$ ของจุด O ที่มีค่าเป็น $-\frac{b}{2}$ ลงในสมการ (4.11) ได้ดังนี้ คือ

$$\delta x_{ou} = \Delta_1 + \frac{b}{2}\Delta_2 \tag{4.13a}$$

$$\delta y_{ou} = \Delta_3 \tag{4.13b}$$

$$\delta z_{ou} = \Delta_4 + \frac{b}{2}\Delta_5 \tag{4.13c}$$

การเคลื่อนที่ของจุดบนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดล่างและชานพักจากการแทนค่าสมการ (4.8) ในสมการ (4.7) มีดังนี้ คือ

$$\delta x_P = -V\left(\frac{S^3}{3EI\bar{z}}\right) - M\left(\frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right)$$

$$= -\Delta_3 \tag{4.14a}$$

$$\delta y_P = -N\left(\frac{S\cos\alpha}{EA}\right) - \bar{x}\left[-V\left(\frac{S^2\cos\alpha}{2EI\bar{z}}\right) - T\left(\frac{S\sin\alpha}{GJ}\right) - M\left(\frac{S\cos\alpha}{EI\bar{z}}\right)\right]$$

$$= -\Delta_1 + \bar{x}\,\Delta_2 \tag{4.14b}$$

$$\delta z_P = N\left(\frac{S\sin\alpha}{EA}\right) + \bar{x}\left[-V\left(\frac{S^2\sin\alpha}{2EI\bar{z}}\right) + T\left(\frac{S\cos\alpha}{GJ}\right) - M\left(\frac{S\sin\alpha}{EI\bar{z}}\right)\right]$$

$$= \Delta_4 - \bar{x}\,\Delta_5 \tag{4.14c}$$

การเคลื่อนที่ของจุด O เทียบกับพื้นบันไดล่างสามารถหาจากการแทนค่า $\bar{x}$ ของจุด O ซึ่งมีค่าเป็น $-\frac{b}{2}$ ลงในสมการ (4.14)ได้ดังนี้ คือ

$$\delta x_o = -\Delta_3 \tag{4.15a}$$

$$\delta y_o = -\Delta_1 - \frac{b\Delta_2}{2} \tag{4.15b}$$

$$\delta z_o = \Delta_4 + \frac{b\,\Delta_5}{2} \tag{4.15c}$$

เนื่องจากการเคลื่อนที่ของจุด O เทียบกับพื้นบันไดบนจากสมการ (4.13) และเทียบกับพื้นบันไดล่างจากสมการ (4.15) มีค่าไม่เท่ากัน แสดงให้เห็นว่าพื้นบันไดบนและพื้นบันไดล่างในโครงสร้างหลัก มีการแยกจากกันดังแสดงในรูปที่ 4.9 แต่เนื่องจากโครงสร้างมีความต่อเนื่องที่จุด O ดังนั้นจึงต้องมีการปรับแก้การเคลื่อนที่ เพื่อให้จุด O เทียบกับพื้นบันไดทั้งสองต่อกัน แต่ต้องไม่ทำให้แรงภายในโครงสร้างหลักเพิ่มขึ้น ซึ่งสามารถกระทำได้โดยใช้การปรับแก้ในลักษณะเดียวกันกับที่ใช้ในโครงข้อหมุน กล่าวคือให้รอยตัดระหว่างพื้นบันไดและชานพักเคลื่อนที่ไปในทิศตั้งฉากกับระนาบของพื้นบันไดแต่ละข้างจนกระทั่งจุด O บนพื้นบันไดทั้งสองบรรจบกัน

ทิศหรือเวคเตอร์การเคลื่อนที่ปรับแก้ของพื้นบันไดแต่ละข้าง คือ เวคเตอร์นอร์มัล (normal vector) หรือทวีคูณของเวคเตอร์นอร์มัลในระบบแกนหลักของพื้นบันไดแต่ละข้าง ดังแสดงในรูปที่ 4.10 ซึ่งมีค่าดังนี้ คือ

$$\{N_1\}^T = < \tan\alpha \quad o \quad -1 > \tag{4.16a}$$

$$\{N_2\}^T = < o \quad \tan\alpha \quad 1 > \tag{4.16b}$$

โดยที่

$\{N_1\}$ = เวคเตอร์นอร์มัลของพื้นบันไดบนในระบบแกนหลัก

$\{N_2\}$ = เวคเตอร์นอร์มัลของพื้นบันไดล่างในระบบแกนหลัก

สมมุติให้เวคเตอร์ปรับแก้การเคลื่อนที่ของพื้นบันไดบนมีขนาดเป็น $m_1$ เท่าของเวคเตอร์ $\{N_1\}$ และสามารถเขียนในรูป $m_1\{N_1\}$ และตำแหน่งของจุด O เทียบกับพื้นบันไดบนคือผลรวมของเวคเตอร์แทนตำแหน่ง (position vector) ของจุด O ก่อนการเคลื่อนที่ เวคเตอร์การเคลื่อนที่ของจุด O เทียบกับบันไดบนและเวคเตอร์ปรับแก้ ดังนี้ คือ

$$\{O'_u\} = \{O\} + \{\delta_{ou}\} + m_1\{N_1\}$$

$$\begin{Bmatrix} O'x_u \\ O'y_u \\ O'z_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 + \frac{b\Delta_2}{2} + m_1 \tan\alpha \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 + \frac{b\Delta_5}{2} - m_1 \end{Bmatrix} \tag{4.17}$$

โดยที่

$\left\{ O'_u \right\}$ = เวคเตอร์แทนตำแหน่งของจุด O เทียบกับพื้นบันไดบนในระบบแกนหลักจากการปรับแก้การเคลื่อนที่

$\left\{ O \right\}$ = เวคเตอร์แทนตำแหน่งของจุด O ในระบบแกนหลักก่อนการเคลื่อนที่ และ $\left\{ O \right\}^T = < 0 \quad 0 \quad 0 >$

$\left\{ \delta_{ou} \right\}$ = เวคเตอร์การเคลื่อนที่ในระบบแกนหลักของจุด O เทียบกับพื้นบันไดบนก่อนการปรับแก้จากสมการ (4.13)

$m_1\left\{ N_1 \right\}$ = เวคเตอร์ปรับแก้ที่มีทิศขนานกับเวคเตอร์ $\left\{ N_1 \right\}$ และมีขนาดเป็น $m_1$ เท่า

ในทำนองเดียวกัน สมมุติให้เวคเตอร์ปรับแก้การเคลื่อนที่ของพื้นบันไดล่างเป็น $m_2\left\{ N_2 \right\}$ ดังนั้น ตำแหน่งของจุด O เทียบกับพื้นบันไดล่างหลังการปรับแก้ คือ

$$\left\{ O'_2 \right\} = \left\{ O \right\} + \left\{ \delta_o \right\} + m_2 \left\{ N_2 \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} O'x_\ell \\ O'y_\ell \\ O'z_\ell \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\Delta_3 \\ -\Delta_1 - \dfrac{b\Delta}{2}2 + m_2 \tan \alpha \\ \Delta_4 + \dfrac{b\ \Delta}{2}5 + m_2 \end{array} \right\} \qquad (4.18)$$

โดยที่

$\left\{ O'_\ell \right\}$ = เวคเตอร์การเคลื่อนที่ของจุด O ในระบบแกนหลัก เทียบกับพื้นบันไดล่างหลังการปรับแก้

เนื่องจากการเคลื่อนที่ตามแนวแกนสมมาตรในกรณีที่ "บันได" รับน้ำหนักบรรทุกแบบปฏิสมมาตรมีค่าเป็นศูนย์ ฉะนั้นการเคลื่อนที่ของจุด o บนแกนสามาตรจึงต้องอยู่ในระนาบที่ตั้งฉากกับแกนสมมาตร ดังแสดงในรูปที่ (4.11) ซึ่งมีสมการของระนาบดังนี้ คือ

$$x + y = 0 \qquad (4.19)$$

แทนค่าโคออร์ดิเนต x และ y ของจุด o เทียบกับพื้นบันไดบนจากสมการ (4.17) ในสมการ (4.19)

$$\Delta_1 + \frac{b}{2}\Delta_2 + m_1 \tan\alpha + \Delta_3 = 0$$

$$m_1 = -\frac{1}{\tan\alpha}(\Delta_1 + \frac{b}{2}\Delta_2 + \Delta_3)$$

$$= -m \qquad (4.20)$$

โดยที่ m

$$m = \frac{1}{\tan\alpha}(\Delta_1 + \frac{b}{2}\Delta_2 + \Delta_3) \qquad (4.21)$$

แทนค่าสมการ (4.20) ในสมการ (4.17)

$$\begin{Bmatrix} O\acute{x}_u \\ O\acute{y}_u \\ O\acute{z}_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Delta_3 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 + \frac{b}{2}\Delta_5 + m \end{Bmatrix} \qquad (4.22)$$

ในทำนองเดียวกันแทนค่าโคออร์ดิเนต x และ y ของจุด o เทียบกับพื้นบันไดล่างจากสมการ (4.18) ในสมการ (4.19)

$$-\Delta_3 - \Delta_1 - \frac{b}{2}\Delta_2 + m_2 \tan\alpha = 0$$

$$m_2 = \frac{1}{\tan\alpha}(\Delta_1 + \frac{b}{2}\Delta_2 + \Delta_3) = m \qquad (4.23)$$

แทนค่าในสมการ (4.18)

$$\begin{Bmatrix} O\acute{x}_\ell \\ O\acute{y}_\ell \\ O\acute{z}_\ell \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Delta_3 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 + \frac{b}{2}\Delta_5 + m \end{Bmatrix} \qquad (4.24)$$

จากสมการ (4.22) และ (4.24) จะเห็นได้ว่าจุด o เมื่อเทียบกับพื้นบันไดทั้งสองสามารถปรับแก้มาอยู่ในตำแหน่งเดียวกัน เพื่อให้เกิดความต่อเนื่อง (continuity) ในโครงสร้างและการเคลื่อนที่ของจุดใด ๆ บนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดแต่ละข้างกับชานพัก เป็นผลรวมของการเคลื่อนที่ เนื่องจากแรงภายในในสมการ (4.11) (4.13) และการปรับแก้ตามแนวเวคเตอร์

นอร์มัล $m_1\{N_1\}$ และ $m_2\{N_2\}$ ดังนี้ คือ

พื้นบันไดบน

$$\begin{Bmatrix} \delta x'_{Pu} \\ \delta y'_{Pu} \\ \delta z'_{Pu} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 - \bar{y}_u\Delta_2 - m \tan\alpha \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 - \bar{y}_u\Delta_5 + m \end{Bmatrix} \qquad (4.25)$$

พื้นบันไดล่าง

$$\begin{Bmatrix} \delta x'_{P} \\ \delta y'_{P} \\ \delta z'_{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Delta_3 \\ -\Delta_1 + \bar{x}\Delta_2 + m \tan\alpha \\ \Delta_4 - \bar{x}\Delta_5 + m \end{Bmatrix} \qquad (4.26)$$

โดยที่

$\delta \textcircled{1}'_{P}$ = การเคลื่อนที่สุทธิของจุด P บนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดล่างและชานพัก ในทิศ ①

$\delta \textcircled{1}'_{Pu}$ = การเคลื่อนที่สุทธิของจุด P บนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดบนและชานพัก ในทิศ ①

และตำแหน่งของจุดใด ๆ บนรอยตัดหลังการปรับแก้สามารถหาได้จากโคออร์ดิเนตในระบบแกนหลักของจุดนั้นก่อนการเคลื่อนที่ และการเคลื่อนที่ของจุดนั้น ๆ จากสมการ (4.25) หรือ (4.26) ดังนี้ คือ

ตำแหน่งของจุด Pu ($Px_u$ $Py_u$ $Pz_u$) บนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดบนและชานพัก หลังการปรับแก้การเคลื่อนที่ คือ

$$\begin{Bmatrix} Px'_u \\ Py'_u \\ Pz'_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Px_u + \Delta_1 - \bar{y}_u\Delta_2 - m \tan\alpha \\ Py_u + \Delta_3 \\ Pz_u + \Delta_4 - \bar{y}_u\Delta_5 + m \end{Bmatrix} \qquad (4.27)$$

และตำแหน่งของจุด P (Px Py Pz) บนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดล่างและชานพักหลังการปรับแก้การเคลื่อนที่ คือ

$$\begin{Bmatrix} P\acute{x} \\ P\acute{y} \\ P\acute{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Px - \Delta_3 \\ Py - \Delta_1 + \bar{x}\,\Delta_2 + m \tan\alpha \\ Pz + \Delta_4 - \bar{x}\,\Delta_5 + m \end{Bmatrix} \tag{4.28}$$

โดยที่

$P\acute{①}_u$ = ค่าโคออร์ดิเนตตามแกน ① ในระบบแกนหลักของจุด P บน รอยตัดระหว่างพื้นบันไดบนและชานพักหลังการปรับแก้

$P\acute{①}$ = ค่าโคออร์ดิเนตตามแกน ① ในระบบแกนหลักของจุด P บนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดล่างและชานพักหลังการปรับแก้

### 4.4.2 โครงสร้างหลักภายใต้แรงกระทำจากที่รองรับจินตภาพแบบสมมาตร

พิจารณาสภาวะสมดุลย์ของ "บันได" ส่วนชานพัก เมื่อมีแรงกระทำจากที่รองรับจินตภาพแบบปฏิสมมาตร และกำหนดให้แรงกระทำที่รอยตัดระหว่างพื้นบันไดบนและชานพัก และแรงภายในพื้นบันไดบนมีทิศเป็นบวก ขณะที่แรงกระทำที่รอยตัดระหว่างพื้นบันไดล่างและชานพัก และแรงภายในพื้นบันไดล่างของจุดคู่สมมาตรมีขนาดและทิศทางตามกฎของสมมาตร ตามที่แสดงในรูปที่ 4.12 ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำและแรงภายในของพื้นบันไดทั้งสองได้ดังนี้ คือ

$$R_u = -R_\ell = R \tag{4.30a}$$

$$H_u = H_\ell = H \tag{4.30b}$$

$$S\bar{x}_u = S\bar{y} = N \tag{4.30c}$$

$$S\bar{y}_u = S\bar{x} = V \tag{4.30d}$$

$$M\bar{x}_u = M\bar{y} = T \tag{4.30e}$$

$$M\bar{z}_u = -M\bar{z} = M \tag{4.30f}$$

พิจารณาสภาวะสมดุลย์ที่จุด C โดยแทนค่าจากสมการ (4.30) ในสมการ (4.1) ดังนี้ คือ

$$N \cos \alpha + V = H \tag{4.31a}$$

$$V + N \cos \alpha = H \tag{4.31b}$$

$$N \sin \alpha - N \sin \alpha = -R + R \tag{4.31c}$$

$$N\left(\frac{b \sin\alpha}{2}\right) + T \cos\alpha - M \sin\alpha = Ra \tag{4.31d}$$

$$N\left(\frac{b \sin\alpha}{2}\right) + T \cos\alpha - M \sin\alpha = Ra \tag{4.31e}$$

$$-N\left(\frac{b \cos\alpha}{2}\right) + T \sin\alpha + M \cos\alpha + N\left(\frac{b \cos\alpha}{2}\right) - T \sin\alpha - M \cos\alpha = Ha - Ha \tag{4.31f}$$

พิจารณาสมการ (4.31) จะเห็นได้ว่ามีสมการที่มีอิสระเชิงเส้น และสามารถใช้หาค่าแรงภายในเพียงสองสมการ ดังนี้ คือ

$$N \cos\alpha + V = H \tag{4.32a}$$

$$N\left(\frac{b \sin\alpha}{2}\right) + T \cos\alpha - M \sin\alpha = Ra \tag{4.32b}$$

ฉะนั้น จึงต้องหาสมการเงื่อนไขเพื่อหาค่าแรงภายในเพิ่มอีกสองสมการโดยการพิจารณาการเคลื่อนที่ของรอยตัดระหว่างพื้นบันไดและชานพัก

เนื่องจากการเคลื่อนที่ของแนวแกนสมมาตร เมื่อ "บันได" รับน้ำหนักบรรทุกแบบสมมาตรมีเฉพาะการเคลื่อนที่และการหมุนรอบแกนสมมาตรเท่านั้น การเคลื่อนที่อื่นต้องเป็นศูนย์ตามกฎของสมมาตร ฉะนั้นแกนสมมาตรจะต้องวางตัวอยู่ในแนวเดิมก่อนจะรับน้ำหนักบรรทุก และจุดต่าง ๆ บนแกนสมมาตรจะมีการเคลื่อนที่ในทิศของแกนสมมาตรตามที่แสดงในรูปที่ 4.13 ซึ่งแสดงทิศการเคลื่อนที่ได้โดยเวคเตอร์ F ดังนี้ คือ

$$\{F\}^T = < 1 \quad 1 \quad 0 > \tag{4.33}$$

จากสมมุติฐานข้อ 11 ซึ่งกำหนดให้ชานพักมีสติฟเนสในระนาบของชานพักเป็นอนันต์ ทำให้ภาพฉายของรอยตัดระหว่างพื้นบันไดแต่ละข้างกับชานพักก่อนและหลังการเคลื่อนที่มีมุมขนาดเท่ากัน และเนื่องจากแกนสมมาตรยังคงวางตัวอยู่ในแนวเดิมก่อนและหลังการเคลื่อนที่ทำให้ภาพฉายของรอยตัดต้องวางตัวขนานกับแนวเดิมก่อนรับน้ำหนักบรรทุกด้วย นั่นคือทุกจุดบนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดบนและชานพัก ต้องมีการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ของระบบแกนหลักเท่ากัน และทุกจุดบนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดล่างและชานพักต้องมีการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ของระบบแกนหลักเท่ากัน ซึ่งสามารถใช้สร้างสมการเงื่อนไขที่มีอิสระเชิงเส้นได้อีกหนึ่งสมการ โดยอาจเลือกจากรอยตัดระหว่างพื้นบันไดข้างใดข้างหนึ่งกับชานพักก็ได้ ดังนี้

ก) รอยต่อระหว่างพื้นบันไดบนและชานพัก

$$\delta x_{Bu} - \delta x_{Ou} = 0 \quad (4.34a)$$

แทนค่าสมการ (4.30) ลงในสมการ (4.5a) โดยกำหนดให้ $\bar{y}_u$ เท่ากับ $\frac{b}{2}$ และ $\frac{-b}{2}$ เพื่อหาค่า $\delta x_{Bu}$ และ $\delta x_{Ou}$ ตามลำดับ และแทนค่าในสมการ (4.34a) จะได้สมการเงื่อนไขดังนี้ คือ

$$V(\frac{S^2 \cos\alpha}{2EI\bar{z}}) + T(\frac{S \sin\alpha}{GJ}) + M(\frac{S \cos\alpha}{EI\bar{z}}) = 0 \quad (4.34)$$

ข) รอยต่อระหว่างพื้นบันไดล่างและชานพัก

$$\delta y_{D} - \delta y_{O} = 0 \quad (4.35a)$$

แทนค่าสมการ (4.30) ในสมการ (4.7b) โดยกำหนดให้ $\bar{x}$ มีค่าเป็น $\frac{b}{2}$ และ $\frac{-b}{2}$ เพื่อหาค่า $\delta y_D$ และ $\delta y_O$ ตามลำดับ และแทนค่าในสมการ (4.35a) จะได้สมการเงื่อนไขดังนี้ คือ

$$V(\frac{S^2 \cos\alpha}{2EI\bar{z}}) + T(\frac{S \sin\alpha}{GJ}) + M(\frac{S \cos\alpha}{EI\bar{z}}) = 0 \quad (4.35)$$

เนื่องจากจุด O เป็นจุดที่อยู่ในแนวแกนสมมาตร ฉะนั้นตำแหน่งของจุด O เมื่อ "บันได" รับน้ำหนักบรรทุกแบบสมมาตรจึงต้องอยู่บนแนวแกนสมมาตรหรืออยู่ในตำแหน่งซึ่ง เมื่อปรับแก้ให้ เคลื่อนตามแนว เวคเตอร์นอร์มัลของพื้นบันไดแต่ละข้างแล้วจะกลับมาอยู่บนแกนสมมาตรได้ โดยไม่ทำให้แรงภายในโครงสร้างหลักเปลี่ยนไป นั่นคือ ตำแหน่งของจุด O เทียบกับพื้นบันไดแต่ละข้างจะต้องอยู่ในระนาบที่ผ่านแกนสมมาตรและกระจายโดย เวคเตอร์นอร์มัลของพื้นบันไดนั้นกับ เวคเตอร์ F ซึ่งอยู่ในแนวแกนสมมาตร ซึ่งจะทำให้ได้สมการ เงื่อนไขที่มีอิสระเชิงเส้นอีกสมการหนึ่ง โดยอาจ เลือกพื้นบันไดบนหรือพื้นบันไดล่างในการสร้างสมการได้ดังนี้ คือ

ก) พื้นบันไดบน

ระนาบซึ่งผ่านแนวแกนสมมาตร และกระจายโดย เวคเตอร์นอร์มัล $\{N_1\}$ จากสมการ (4.16a) และเวคเตอร์ $\{F\}$ จากสมการ (4.33) สามารถแสดงด้วย เวคเตอร์นอร์มัลของระนาบ $\{N_3\}$ ซึ่งเกิดจากผลคูณแบบเวคเตอร์ (vector product) ของ เวคเตอร์ $\{N_1\}$ และ $\{F\}$ ดังนี้ คือ

$$\{N_3\} = \{F\} \times \{N_1\}$$

$$\therefore \{N_3\}^T = \langle -1 \quad 1 \quad -\tan\alpha \rangle \tag{4.36}$$

สมการของระนาบสามารถหาได้จาก ผลคูณสเกลาร์ (scalar product) ของเวคเตอร์ $\{N_3\}$ กับเวคเตอร์ $\{P\}$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์ตำแหน่งของจุด P ใด ๆ บนระนาบที่พิจารณาทั้งเป็นเวคเตอร์ซึ่งอยู่ในระนาบที่พิจารณา เนื่องจากเป็นเวคเตอร์ที่เชื่อมระหว่างจุดกำเนิด O ซึ่งอยู่บนแกนสมมาตร และจุด P ซึ่งอยู่บนระนาบ ดังนี้ คือ

$$\{N_3\} \cdot \{P\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -\tan\alpha \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = 0$$

สมการของระนาบคือ

$$-x+y-z\tan\alpha = 0$$

หรือ

$$x-y+z\tan\alpha = 0 \tag{4.37}$$

เนื่องจากเวคเตอร์แสดงตำแหน่งของจุด o หลังการเคลื่อนที่คือ ผลรวมของเวคเตอร์แทนตำแหน่งของจุด o ก่อนการเคลื่อนที่ ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ กับเวคเตอร์การเคลื่อนที่ของจุด o ดังนั้นค่า x y และ z ในสมการ (4.37) คือ การเคลื่อนที่ในทิศ x y และ z ของจุด O ซึ่งสามารถหาได้จากการแทนค่าสมการ (4.30) ในสมการ (4.5) และได้ผลดังนี้ คือ

$$\begin{Bmatrix} \delta x_{ou} \\ \delta y_{ou} \\ \delta z_{ou} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N\left(\frac{S\cos\alpha}{EA}\right) + V\left(\frac{b\,S^2\cos\alpha}{4EI\bar{z}}\right) + T\left(\frac{b\,S\sin\alpha}{2GJ}\right) + M\left(\frac{b\,S\cos\alpha}{2EI\bar{z}}\right) \\ V\left(\frac{S^3}{3EI\bar{z}}\right) + M\left(\frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right) \\ N\left(\frac{S\sin\alpha}{EA}\right) + V\left(\frac{bS^2\sin\alpha}{4EI\bar{z}}\right) - T\left(\frac{b\,S\cos\alpha}{2GJ}\right) + M\left(\frac{b\,S\sin\alpha}{2EI\bar{z}}\right) \end{Bmatrix} \tag{4.38}$$

แทนค่าสมการ (4.38) ในสมการ (4.37) และจัดเทอมใหม่

$$N\left(\frac{S}{EA\cos\alpha}\right) + V\left(\frac{bS^2}{4EI\bar{z}\cos\alpha} - \frac{S^3}{3EI\bar{z}}\right) + M\left(\frac{bS}{2EI\bar{z}\cos\alpha} - \frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right) = 0 \tag{4.39}$$

ข) พื้นบันไดล่าง

ในทำนองเดียวกันกับพื้นบันไดบน

$$\{N_4\} = \{F\} \times \{N_2\}$$

$$\therefore \{N_4\}^T = < 1 \quad -1 \quad \tan\alpha > \qquad (4.40)$$

โดยที่

$\{N_4\}$ = เวคเตอร์นอร์มัลของระนาบที่จุด o เทียบกับพื้นบันไดล่างวางตัวอยู่

สมการของระนาบจากผลคูณสเกลาร์ของเวคเตอร์นอร์มัล $N_4$ และเวคเตอร์ตำแหน่งของจุด P ใด ๆ บนระนาบ คือ

$$\{N_4\} \cdot \{P\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ \tan\alpha \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = 0$$

สมการของระนาบคือ

$$x - y + z\tan\alpha = 0 \qquad (4.41)$$

แทนค่าสมการ (4.30) ในสมการ ( 4.7 ) และนำผลมาแทนในสมการ (4.41) จะได้สมการเงื่อนไขดังนี้ คือ

$$N\left(\frac{S}{EA\cos\alpha}\right) + V\left(\frac{b\,S^2}{4EI\bar{z}\cos\alpha} - \frac{S^3}{3EI\bar{z}}\right) + M\left(\frac{b\,S}{2EI\bar{z}\cos\alpha} - \frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right) = 0 \qquad (4.42)$$

จากสมการสมดุลย์ (4.32) และสมการเงื่อนไขจากผลการพิจารณาการเคลื่อนที่ (4.34) และ (4.39) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายในสี่สมการ สำหรับหาค่าแรงภายในตรงรอยต่อระหว่างพื้นบันไดและชานพัก ซึ่งสามารถนำไปคำนวณหาแรงภายในที่หน้าตัดอื่น ซึ่งนำมารวบรวมใหม่ดังนี้ คือ

$$N\cos\alpha + V = H \qquad (4.42a)$$

$$N\left(\frac{b\sin\alpha}{2}\right) + T\cos\alpha - M\sin\alpha = Ra \qquad (4.42b)$$

$$V\left(\frac{S^2\cos\alpha}{2EI\bar{z}}\right) + T\left(\frac{S\sin\alpha}{GJ}\right) + M\left(\frac{S\cos\alpha}{EI\bar{z}}\right) = 0 \qquad (4.42c)$$

$$N\left(\frac{S}{EA\cos\alpha}\right) + V\left(\frac{b\,S^2}{4EI\bar{z}\cos\alpha} - \frac{S^3}{3EI\bar{z}}\right) + M\left(\frac{b\,S}{2EI\bar{z}\cos\alpha} - \frac{S^2}{2EI\bar{z}}\right) = 0 \qquad (4.42d)$$

การเคลื่อนที่ของจุดบนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดบนและชานพักจากการแทนค่าสมการ (4.30) ในสมการ (4.5) ได้ดังนี้ คือ

$$\delta x_{Pu} = N(\frac{S\ \cos\alpha}{EA}) - \bar{y}_u \left[ V(\frac{S^2\cos\alpha}{2EI\bar{z}}) + T(\frac{S\ \sin\alpha}{GJ}) + M(\frac{S\ \cos\alpha}{EI\bar{z}}) \right]$$

$$= \Delta_1 - \bar{y}_u\ \Delta_2 \qquad (4.43a)$$

$$\delta y_{Pu} = V(\frac{S^3}{3EI\bar{z}}) + M(\frac{S^2}{2EI\bar{z}})$$

$$= \Delta_3 \qquad (4.43b)$$

$$\delta z_{Pu} = N(\frac{S\ \sin\alpha}{EA}) - \bar{y}_u \left[ V(\frac{S^2\sin\alpha}{2EI\bar{z}}) - T(\frac{S\ \cos\alpha}{GJ}) + M(\frac{S\ \sin\alpha}{EI\bar{z}}) \right]$$

$$= \Delta_4 - \bar{y}_u\ \Delta_5 \qquad (4.43c)$$

และการเคลื่อนที่ของจุดบนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดล่างและชานพักจากการแทนค่าสมการ (4.30) ในสมการ (4.7) ได้ดังนี้ คือ

$$\delta x_P = V(\frac{S^3}{3EI\bar{z}}) + M(\frac{S^2}{2EI\bar{z}})$$

$$= \Delta_3 \qquad (4.44a)$$

$$\delta y_P = N(\frac{S\ \cos\alpha}{EA}) - \bar{x}\left[ V(\frac{S^2\cos\alpha}{2EI\bar{z}}) + T(\frac{S\ \sin\alpha}{GJ}) + M(\frac{S\ \cos\alpha}{EI\bar{z}}) \right]$$

$$= \Delta_1 - \bar{x}\ \Delta_2 \qquad (4.44b)$$

$$\delta z_P = -N(\frac{S\ \sin\alpha}{EA}) + \bar{x}\left[ V(\frac{S^2\sin\alpha}{2EI\bar{z}}) - T(\frac{S\ \cos\alpha}{GJ}) + M(\frac{S\ \sin\alpha}{EI\bar{z}}) \right]$$

$$= -\Delta_4 + \bar{x}\ \Delta_5 \qquad (4.44c)$$

โดยที่

$\Delta_1$ $\Delta_2$ $\Delta_3$ $\Delta_4$ และ $\Delta_5$ = ค่าสัมประสิทธิ์จากสมการ (4.12)

การเคลื่อนที่ของจุด o เทียบกับพื้นบันไดบน สามารถหาจากการแทนค่า $\bar{y}_u$ ของจุด o ที่มีค่าเป็น $\frac{-b}{2}$ ในสมการ (4.43) ได้ดังนี้ คือ

$$\delta x_{ou} = \Delta_1 + \frac{b\ \Delta_2}{2} \qquad (4.45a)$$

$$\delta y_{ou} = \Delta_3 \qquad (4.45b)$$

$$\delta z_{ou} = \Delta_4 + \frac{b\,\Delta_5}{2} \tag{4.45c}$$

การเคลื่อนที่ของจุด o เทียบกับพื้นบันไดล่างสามารถหาค่าได้จากการแทนค่า $\bar{x}$ ของจุด o ที่มีค่าเป็น $\frac{-b}{2}$ ในสมการ (4.44) ได้ดังนี้ คือ

$$\delta x_o = \Delta_3 \tag{4.46a}$$

$$\delta y_o = \Delta_1 + \frac{b\,\Delta_2}{2} \tag{4.46b}$$

$$\delta z_o = -\Delta_4 - \frac{b\,\Delta_5}{2} \tag{4.46c}$$

เนื่องจากการเคลื่อนที่ของจุด o เทียบกับพื้นบันไดแต่ละข้างมีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้นจึงต้องปรับแก้การเคลื่อนที่ที่คำนวณได้ในทำนองเดียวกับกรณีปฏิสมมาตร โดยกำหนดให้เวคเตอร์ปรับแก้ของพื้นบันไดบนเป็น $m_3$ เท่าของเวคเตอร์นอร์มัล $\{N_1\}$ และเวคเตอร์ปรับแก้ของพื้นบันไดล่างเป็น $m_4$ เท่าของเวคเตอร์นอร์มัล $\{N_2\}$ ดังนั้น ตำแหน่งของจุด o หลังการปรับแก้เทียบกับพื้นบันไดบน มีค่าดังนี้ คือ

$$\begin{Bmatrix} O\acute{x}_u \\ O\acute{y}_u \\ O\acute{z}_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 + \frac{b\,\Delta_2}{2} + m_3 \tan\alpha \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 + \frac{b\,\Delta_5}{2} - m_3 \end{Bmatrix} \tag{4.46}$$

ตำแหน่งของจุด o หลังการปรับแก้เทียบกับพื้นบันไดล่างมีค่า ดังนี้ คือ

$$\begin{Bmatrix} O\acute{x} \\ O\acute{y} \\ O\acute{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_1 + \frac{b\,\Delta_2}{2} + m_4 \tan\alpha \\ -\Delta_4 - \frac{b\,\Delta_5}{2} + m_4 \end{Bmatrix} \tag{4.47}$$

เนื่องจากจุด o เมื่อเทียบกับพื้นบันไดทั้งสองข้างต่างอยู่ในระนาบซึ่ง เมื่อปรับแก้โดยเวคเตอร์นอร์มัลของพื้นบันไดจะสามารถย้านแนวแกนสมมาตรได้ตามที่กำหนด เมื่อสร้างสมการเงื่อนไข (4.39) และ (4.42) และจากกฎของสมมาตรซึ่งบังคับให้การเคลื่อนที่ในแนวแกน z ของจุดใด ๆ บนแกนสมมาตรต้องเป็นศูนย์ ดังนั้น เวคเตอร์ปรับแก้ของพื้นบันไดแต่ละข้าง คือ เวคเตอร์ที่ขนานกับเวคเตอร์นอร์มัลและทำให้ค่าโคออร์ดิเนตz ของจุด o เป็นศูนย์ สำหรับพื้นบันได

บนสามารถหาจากการแทนค่าโคออร์ดิเนตz ในสมการ (4.46) ให้เท่ากับศูนย์ ดังนี้ คือ

$$\Delta_4 + \frac{b\ \Delta_5}{2} - m_3 = 0$$

$$\therefore \quad m_3 = \Delta_4 + \frac{b\ \Delta_5}{2} \tag{4.48}$$

สำหรับพื้นบันไดล่าง แทนค่าโคออร์ดิเนตz จากสมการ (4.47) ให้เท่ากับศูนย์ ดังนี้ คือ

$$-\Delta_4 - \frac{b\ \Delta_5}{2} + m_4 = 0$$

$$\therefore \quad m_4 = \Delta_4 + \frac{b\ \Delta_5}{2} = m_3 \tag{4.49}$$

การเคลื่อนที่ของจุด o เทียบกับพื้นบันไดทั้งสองสามารถหาได้จากการแทนค่า $m_3$ และ $m_4$ ในสมการ (4.46) และ (4.47) ดังนี้ คือ

ตำแหน่งของจุด o เทียบกับพื้นบันไดบน หลังการปรับแก้

$$\begin{Bmatrix} O\acute{x}_u \\ O\acute{y}_u \\ O\acute{z}_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 + \frac{b\ \Delta_2}{2} + \tan\alpha\ (\Delta_4 + \frac{b\ \Delta_5}{2}) \\ \Delta_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.50}$$

ตำแหน่งของจุด o เทียบกับพื้นบันไดล่างหลังการปรับแก้

$$\begin{Bmatrix} O\acute{x} \\ O\acute{y} \\ O\acute{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_1 + \frac{b\ \Delta_2}{2} + \tan\alpha\ (\Delta_4 + \frac{b\ \Delta_5}{2}) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.51}$$

เมื่อพิจารณาสมการ (4.50) และสมการ (4.51) จะเห็นว่าตำแหน่งของจุด o เทียบกับพื้นบันไดแต่ละข้างหลังการปรับแก้มีค่าเท่ากันได้ เมื่อ

$$\Delta_3 = \Delta_1 + \frac{b\ \Delta_2}{2} + \tan\alpha(\Delta_4 + \frac{b\ \Delta_5}{2}) \tag{4.52}$$

การเคลื่อนที่ของจุดใด ๆ บนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดแต่ละข้างกับชานพัก เป็นผลรวมของการเคลื่อนที่ เนื่องจากแรงภายใน จากสมการ (4.43) หรือ (4.44) และการปรับแก้ตามแนวเวคเตอร์นอร์มัล $m_3\{N_1\}$ หรือ $m_3\{N_2\}$ ดังนี้คือ

พื้นบันไดบน

$$\begin{Bmatrix} \delta x'_{Pu} \\ \delta y'_{Pu} \\ \delta z'_{Pu} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 - \bar{y}_u \Delta_2 + m_3 \tan\alpha \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 - \bar{y}_u \Delta_5 - m_3 \end{Bmatrix} \qquad (4.53)$$

พื้นบันไดล่าง

$$\begin{Bmatrix} \delta x'_{P} \\ \delta y'_{P} \\ \delta z'_{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_1 - \bar{x} \Delta_2 + m_3 \tan\alpha \\ - \Delta_4 + \bar{x} \Delta_5 + m_3 \end{Bmatrix} \qquad (4.54)$$

และตำแหน่งของจุดใด ๆ บนรอยตัดหลังการปรับแก้ สามารถหาได้จากโคออร์ดิเนตในระบบแกนหลักของจุดนั้นก่อนการเคลื่อนที่ และการเคลื่อนที่ของจุดนั้น ๆ จากสมการ (4.53) และ (4.54) ดังนี้คือ

ตำแหน่งของจุด $P_u$ ($Px_u$ $Py_u$ $Pz_u$) บนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดบนและชานพักหลังการปรับแก้การเคลื่อนที่ คือ

$$\begin{Bmatrix} P'x_u \\ P'y_u \\ P'z_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Px_u + \Delta_1 - \bar{y}_u \Delta_2 + m_3 \tan\alpha \\ Py_u + \Delta_3 \\ Pz_u + \Delta_4 - \bar{y}_u \Delta_5 - m_3 \end{Bmatrix} \qquad (4.55)$$

และตำแหน่งของจุด P (Px Py Pz) บนรอยตัดระหว่างพื้นบันไดล่างและชานพัก หลังการปรับแก้การเคลื่อนที่ คือ

$$\begin{Bmatrix} P'x \\ P'y \\ P'z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Px + \Delta_3 \\ Py + \Delta_1 - \bar{x} \Delta_2 + m_3 \tan\alpha \\ Pz - \Delta_4 + \bar{x} \Delta_5 + m_3 \end{Bmatrix} \qquad (4.56)$$