



บรรณานุกรม

ภาษาไทย

หนังสือ

กระทรวงศึกษาธิการ. หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลายพุทธศักราช 2524.

กรุงเทพมหานคร: ครูสภา, 2523.

กานดา พูนลาภทวี. การประเมินผลการศึกษา. พิมพ์ครั้งที่ 1, กรุงเทพมหานคร: 2528.

จำนง พรายแย้มแซ. เทคนิคการวัดและประเมินผลการเรียนรู้กับการสอนซ่อมเสริม.

กรุงเทพมหานคร, โรงพิมพ์วัฒนาพานิช, 2529.

ชวาล แพ้วตกุล. เทคนิคการวัดผล. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์วัฒนาพานิช, 2516.

ต่าย เชียงฉวี. "การนำผลการวัดไปใช้ประโยชน์ทางการศึกษา." เอกสารคำสอนกระ

บวณวิชา คว 720 ทฤษฎีการทดสอบและการวัดผลการศึกษา.

กรุงเทพมหานคร: ภาควิชาประเมินผลและวิจัยการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2526.

บุญเชิด วิทยุญเฑาะว์. การวัดและประเมินผลการศึกษา. กรุงเทพมหานคร:

ภาควิชาพื้นฐานการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ประสานมิตร, 2519.

ปราโมทย์ มากชู. "การวิจัยทางการศึกษาและการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษา"

เอกสารประกอบการประชุมทางวิชาการ ครั้งที่ 5 เล่ม 1.

กรุงเทพมหานคร: 2530.

พวงรัตน์ ทวีรัตน์. หลักการวัดและประเมินผล. กรุงเทพมหานคร:

สำนักทดสอบทางการศึกษาจิตวิทยา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ประสานมิตร, 2529.

พิตร ทองชั้น. หลักการวัดผล. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์โอเคียนลิตอร์, 2524.

ไพศาล หวังพานิช. การวัดผลการศึกษา. กรุงเทพมหานคร: ไทยวัฒนาพานิช, 2526.

ยุพิน นิธิจกุล. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์บพิธ

การพิมพ์, 2524.

เยาวดี วิบูลย์ศรี. หลักการวัดผลและการสร้างข้อสอบ. กรุงเทพมหานคร:

ภาควิชาวิจัยการศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2528.

วิชาการ, กรม. กระทรวงศึกษาธิการ. การประเมินผลการศึกษา.

กรุงเทพมหานคร: สำนักงานทดสอบทางการศึกษา (มปป.)

- วิชาการ, กรม. กระทรวงศึกษาธิการ. การประเมินผลการเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษา
สำนักงานทดสอบทางการศึกษา, 2530.
- วิเชียร เกตุสิงห์. การวัดผลการศึกษาและสถิติเบื้องต้น. พิมพ์ครั้งที่ 6,
กรุงเทพมหานคร, 2520.
- ลวัลดี ประทุมราช. แนวคิดเชิงทฤษฎีการวิจัยการวัดและประเมินผล.
กรุงเทพมหานคร: ภาควิชาวิจัยการศึกษา คณะครุศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2532.
- สุนันท์ ศลโกสุม. การประเมินผลทางการศึกษา. กรุงเทพมหานคร:
สำนักทดสอบทางการศึกษาจิตวิทยา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ประสานมิตร, 2529.
- ลؤلณา อุทัยรัตน์และสุชาวดี เอี่ยมอรพรรณ. การวิเคราะห์สมรรถภาพพื้นฐานทาง
คณิตศาสตร์ของนิสิตศึกษาศาสตร์/ครุศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: ครุศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2527.
- เสริมศักดิ์ วิชาลาภรณ์และเอนกกุล กริแสง. หลักเบื้องต้นของการวัดผลการศึกษา.
กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์อักษรสัมพันธ์, 2519.
- อนันต์ ศรีโลภา. การวัดผลและประเมินผลการศึกษา. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์
ไทยวัฒนาพานิช, 2524.
- _____. การวัดและการประเมินผลการศึกษา. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์
ไทยวัฒนาพานิช, 2525.

บทความ

- คว้น ขาวหนู. "การสอนกับการสอบ" ว.การศึกษาศาสตร์ มอ. 3,
7(ต.ค.29 -ม.ค.30):27-37.
- ชัยวัฒน์ คุประตกุล "คณิตศาสตร์สำคัญไฉน" สารคดี 2, 19(ก.ย.29):110.
- ไพศาล หวังพานิช. "หลักการวัดผล". พัฒนาวัดผล. 8(กรกฎาคม 2525): 82.
- สมจิต ชิวปรีชา "แนวความคิดเห็นในการสอนคณิตศาสตร์ ปัจจุบัน" ว.การศึกษา กทม.
10, 6(มี.ค 29):2-4.

เอกสารอื่น ๆ

- จินดา ลิมถาวรศิริพงศ์. "การสร้างลำดับขั้นเนื้อหาจากการวินิจฉัยการเรียนคณิตศาสตร์
เรื่อง "จำนวนเต็ม" ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง." วิทยานิพนธ์
ปริญญาโทบริหารศึกษาศาสตร์ ภาควิชามัธยมศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2524.

- ชัยศักดิ์ ชั่งใจ. "ผลการทดสอบย่อยด้วยแบบสอบถามเรียงและแบบสอบถามเลือกตอบที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความคงสภาพในการเรียนรู้ของกลุ่มนักเรียนที่มีระดับพัฒนาการทาลความคิดแตกต่างกัน" วิทยานิพนธ์ ปริญญามหาบัณฑิตภาควิชาวิจัยการศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2527.
- นภาพร อมรเลิศสินไทย. "การศึกษาผลการใช้แบบทดสอบแบบเลือกตอบและแบบอัตนัยตอบสั้น ๆ วัดระดับความรู้ขั้นต่าง ๆ ในวิชาสังคมศึกษา ชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 จังหวัดพระนครศรีอยุธยา" วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร, 2514.
- รัชณี ชาญจักร. "การศึกษาผลของการใช้แบบทดสอบแบบเลือกตอบ แบบเติมคำและแบบอัตนัย วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค. 411 ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายตามหลักสูตรของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี." วิทยานิพนธ์ศิลปศาสตรมหาบัณฑิต บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2522.
- รุจิร ภู่อารยะ. "การศึกษาผลการใช้แบบทดสอบแบบเลือกตอบและแบบอัตนัยตอบสั้น ๆ วัดระดับความรู้ขั้นต่าง ๆ ในวิชาภาษาไทยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 จังหวัดพระนครศรีอยุธยา" วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร, 2519.
- วรรณดี ขุนหาญนิยานนท์. "การสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "พหุนาม" สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 (ม.3) ในเขตท้องที่การศึกษา 4 กรุงเทพมหานคร." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร, 2524.
- ศศิธร เล็กสุขศรี. "ผลของการทดสอบย่อยด้วยข้อสอบอัตนัยและข้อสอบปรนัย ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ปริมาณในการเดาและความคงทนในการเรียนรู้ ในวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2525.
- สมศักดิ์ ฉันทานุกฤษ. "การวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนแผนการเรียนเกษตรกรรม เขตการศึกษา 6." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2528.
- อุไรวรรณ ทัศนบุตร. "การสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยความบกพร่องในการเรียนเรื่องเศษส่วน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในจังหวัดนครสวรรค์." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร, 2524.

ภาษาต่างประเทศBooks

- Bloom, Benjamin S. and others. Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning. New York: McGraw-Hill Book Company, 1971.
- Campbell, Alisen C. "Some Determinants of the Difficulty of Non-Verbal Classification Item" Educational and Psychological Measurement 21(Winter 1961) 899-913
- Chase, Clinton I. Measurement for Educational Evaluation. Philippines : Addison - Wesley Publishing Company, Inc., 1978.
- Cronbarch, Lee J. Essentials of Psychological Testing. 3rd New York: Harper and Row, Inc., 1970.
- Ebel, Tobert L. Measuring Educational Achievement. New Jersey: Prentice Hall, Engle Wood Cliffs, 1965.
- Good, Carter V. Dictionary of Educational. 3rd ed. New York: Mcgraw-Hill Book Co., 1973.
- Gronlund, Norman E. Measurement and Evaluation in Teaching. New York: Macmillan Company, 1976.
- Leedy, P.D., Practical Research Planning and Design. 3nd.ed. N.Y. : Macmillan Publishing. 1980.
- Lindquist, E.F., Educational Measurement Washington, D.C. : Council an Education, 1963.
- Marshall, John Clark. Essential of Testing. Phillipine: Addison Wesley Publishing Co., 1972.
- Mehrens, William A., and Lehmann, Irvin J. Measurement and Evaluation in Education and Psychology. 2d ed., New York: Holt Rinehart and Winston, Inc., 1978: 165.
- Smith, F.M. and Adam, S., Essential Measurement for the Classroom Teacher. 2nd. ed. N.Y; Harper & Row Publishers, 1972.
- Throndike, Robert L. Measurement and Evaluation in Psychology and Education. New York: John Wiley, 1977.
- Togerson, Theodore L., Measurement and Evaluation, The Dryden Press, New York, 1955.

Others

- Babugara, Allen K. "An Analysis of Students' Errors in Mathematics at The Pre-College Level." Dissertation Abstracts International. 46(January 1985): 1858-A.
- Bowman ,Deanna Gay. "A Basic Mathematics Diagnostic Instrument." Dissertation Abstracts International. 36(May 1976):7260-A
- Burton, Gerald L. "Essay Writing in College Mathematics and Its Effect on Achievement (Retention, Problem Solving)." Dissertation Abstracts International. 47(January 1987): 2492-A.
- Hardy, Henry L. "An Analysis of Scores on Standardized Mathematics Examinations of Selected Black High School and College Students (Pennsylvania)." Dissertation Abstracts International. 47(September 1986): 818-A.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. & Inbar, S. "An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics" Journal for Research in Mathematics Education, 1987: 3-14.
- Radatz H. Error analysis in mathematic education. Journal for Research in Mathematics Education, 1979:163-172.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก ก
รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ

ศูนย์วิจัยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ พิจารณาเกณฑ์การพิจารณาข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบ
คณิตศาสตร์แบบอัตนัย และแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัย

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ลาวัณย์ พลกล้า
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
2. รองศาสตราจารย์ สุเทพ จันทร์สมศักดิ์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน
3. อาจารย์ ดนัย ยิ่งคง
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

รายชื่ออาจารย์ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ (ค012) พิจารณาเกณฑ์การพิจารณา
ข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัย และแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัย

1. นางสาวชนันทิศา ทศนีย์พันธุ์ โรงเรียนบดินทร์เดชา (สิงห์ สิงหเสนี)
2. นางชิสา ศาสตร์ โรงเรียนดอนเมืองจาตรุงจินดา
3. นายบัณฑิต ฝอยทอง โรงเรียนสายน้ำผึ้ง
4. นายสาย์ณ์ สุวรรณเครือ โรงเรียนเทพศิลา
5. นางสาวสมปอง แนน้อยงาม โรงเรียนฤทธิยะวรรณาลัย



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก ข
หนังสือขอความร่วมมือในการวิจัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ที่ ศษ ๐๘๐๖/ ๐๑๒๓๙

กองการมัธยมศึกษา กรมสามัญศึกษา
กระทรวงศึกษาธิการ กทม. 10300

7 กุมภาพันธ์ 2532

เรื่อง ขอความร่วมมือในการทำวิจัย

เรียน

ทนายนางสาวทัศนพร คลังแก้ว นิติปรัชญานามบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กำลังดำเนินการวิจัยเรื่อง "การวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์
แบบอัตนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กรุงเทพมหานคร" ในกรณีนี้ นิติปรัชญามีความประสงค์จะขอความร่วมมือ
จากนักเรียนในการทำแบบทดสอบ เพื่อเป็นข้อมูลประกอบการทำวิจัย

กองการมัธยมศึกษาพิจารณาแล้ว เห็นว่าการทำวิจัยดังกล่าว จะเป็นประโยชน์ต่อครูคณิตศาสตร์
ในโรงเรียน สมควรให้การสนับสนุน

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์ และขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(นายธานี สมบูรณ์บุรณะ)

หัวหน้าฝ่ายบริหารโรงเรียน 1 รักษาการในตำแหน่ง
ผู้อำนวยการกองการมัธยมศึกษา ปฏิบัติราชการแทน
ผู้อำนวยการกองการมัธยมศึกษา

ฝ่ายมาตรฐานโรงเรียน

โทร. 2828466

ที่ ทม 0309/12404



บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพฯ 10500

๒๗ ธันวาคม 2531

เรื่อง ขอความร่วมมือในการวิจัย

เรียน อธิบดีกรมสามัญศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ

- สิ่งที่ส่งมาด้วย 1. โครงร่างวิทยานิพนธ์
2. แบบทดสอบ
3. รายชื่อโรงเรียน

เนื่องด้วย นางสาว ทศนาพร คลังแก้ว นิสิตชั้นปริญญาโทบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา กำลังดำเนินการวิจัย เพื่อเสนอ เป็นวิทยานิพนธ์ เรื่อง "การวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กรุงเทพมหานคร" โดยมี ศาสตราจารย์ ยุทธิน ทิทธิกุล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้ นิสิตจำเป็นต้องเก็บรวบรวมข้อมูลต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องโดยการนำแบบทดสอบคณิตศาสตร์มาทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนต่าง ๆ ในเขตกรุงเทพมหานคร ในสังกัดของกรมสามัญศึกษา

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านได้โปรดอนุญาตให้ นางสาว ทศนาพร คลังแก้ว ได้เก็บรวบรวมข้อมูลดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง

ขอแสดงความนับถือ

(ศาสตราจารย์ ดร.ถาวร วัชรานัย)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

แผนกมาตรฐานการศึกษา

โทร. 2150895-9



ภาคผนวก ค
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยที่ให้ผู้ทรงคุณวุฒิพิจารณา

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบอัตนัยวิชา ค012 คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

- คำชี้แจง 1. แบบทดสอบฉบับนี้ มี 12 ข้อ เรื่อง ภาคตัดกรวย
 2. ขอให้ท่านได้พิจารณาว่า ถ้านักเรียนทำข้อสอบแต่ละข้อจะมีข้อบกพร่อง
 ในแต่ละขั้นตอนตรงกับข้อบกพร่องที่กำหนดไว้หรือไม่
1. จงหาสมการวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $2x + 3y = 0$ และ
 สัมผัสเส้นตรง $4x - 3y = -10$ กับเส้นตรง $4x - 3y = 30$
 2. จงหาสมการพาราโบลา และโคออร์ดิเนตของจุดยอดของพาราโบลาซึ่งมี
 จุดเริ่มต้นเป็นจุดโฟกัส และมีเส้นตรง $y - x = 1$ เป็นไดเรกทริกซ์
 3. จงหาโคออร์ดิเนตของจุดศูนย์กลาง จุดยอด และสมการวงรีที่ผ่านจุดเริ่มต้น
 และมีจุด $(\pm 1, 1)$ เป็นจุดโฟกัส
 4. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-4, 1)$ จุดยอดจุดหนึ่ง
 อยู่ที่ $(2, 1)$ และความยาวของแกนสังยุค (Conjugate axis) เท่ากับ 8
 5. จงหาสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงรี
 $25x^2 + 9y^2 + 50x - 36y - 164 = 0$ และสัมผัสกับวงรีนั้น
 6. จงหาสมการและโคออร์ดิเนตของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนจุดยอด
 ของพาราโบลา $3x^2 - 18x - y + 30 = 0$ โดยแกนตามขวางทับแกน
 ของพาราโบลา และจุดยอดจุดหนึ่งเป็นจุดโฟกัสของพาราโบลา ความยาว
 ของแกนสังยุคเท่ากับรัศมีของวงกลม $4x^2 + 4y^2 - 16y + 15 = 0$
 7. จงหาสมการวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 1$ และผ่านจุด
 $(-2, 3), (-1, 2)$
 8. จงหาโคออร์ดิเนตของจุดยอด และ สมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดเริ่มต้นเป็นจุดโฟกัส
 และมีเส้นตรง $y - x = 1$ เป็นไดเรกทริกซ์

9. จงหาโคออร์ดิเนตของจุดศูนย์กลาง จุดยอด และสมการวงรีที่มีแกน x และแกน y เป็นแกนสมมาตร และผ่านจุด $(2, \sqrt{3})$ กับ $(0, 2)$
10. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดแกนตามขวางอยู่บนแกน y ความกว้างของไฮเพอร์โบลา ณ โฟกัสเท่ากับ 18 หน่วย และอัตราส่วนระหว่างระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงโฟกัสกับระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางถึงจุดยอดเท่ากับ $2\sqrt{3} : 1$
11. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสของวงรี $16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0$ และแกนโทของวงรี คือ ไดเรกทริกซ์ของพาราโบลา
12. จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับไฮเพอร์โบลาซึ่งมีสมการเป็น $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 41 = 0$ และผ่านจุดซึ่งแบ่งครึ่งเส้นตรงที่ลากจากจุด $(-1, 1)$ มายังจุดศูนย์กลางของวงกลม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบอัตนัยวิชา ค012 คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

- คำชี้แจง 1. แบบทดสอบฉบับนี้ มี 8 ข้อ เรื่อง ตรีโกณมิติ
 2. ขอให้ท่านได้พิจารณาว่า ถ้านักเรียนทำข้อสอบแต่ละข้อจะมีขั้นตอนใดที่จะทำให้นักเรียนเกิดความบกพร่อง

1. จงหาค่าของ

$$\frac{2\sin(-330^\circ) + \tan(-405^\circ)}{\sin\frac{2\pi}{3} (\tan\frac{7\pi}{6}) + \cos\frac{\pi}{6} (\cot-\frac{5\pi}{3})} \times \frac{\cot^2 225^\circ}{\tan^3 \frac{67\pi}{4}}$$

2. จงหาค่าของ

$$\frac{\cos^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{6} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \cos^2 \frac{7\pi}{6}}{3\sin \frac{25\pi}{6} - 3\tan \frac{13\pi}{4} + 2\cos \frac{19\pi}{3}}$$

3. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

3.1 $\cos x + 1 = \sin^2 x$ เมื่อ $0 < x < 2\pi$

3.2 $3\sec^2 x = 2\tan x + 4$ เมื่อ $0^\circ < x < 360^\circ$

4. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้ แล้วพิจารณารายละเอียดดังนี้ ช่วงใดที่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติมีค่าเพิ่มขึ้น และ ช่วงใดที่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติมีค่าลดลง

เมื่อ 4.1 $y = \sin(2\pi x + x)$

4.2 $y = \tan x$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$

5. จงหาค่าของ

$$\left[\frac{\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) \cos(180^\circ + \theta) \sin(90^\circ + \theta)}{\cot(270^\circ + \theta) \tan(360^\circ + \theta)} \right] \left[\frac{1 + \cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta + 1 + \cos \theta} \right]$$

6. จงหาค่าของ

$$\left[\sin(7\pi + A) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - A\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{2} + A\right) + \cos(9\pi - A) \right] \left[\frac{\tan A + \tan A}{(\sec A - 1)(\sec A + 1)} \right]$$

7. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

$$7.1 \quad \sin x \tan x = \cos x - \sec x \quad \text{เมื่อ } 0 < x < 2\pi$$

$$7.2 \quad \sec^2 x (1 + \cos x \tan x) = 2 \quad \text{เมื่อ } 0 < x < 360^\circ$$

8. จงเขียนกราฟของ $y = \sin(-x)$ และ $y = \cos(-x)$ เมื่อ $0 < x < 2\pi$

โดยใช้แกนร่วมกัน แต่เขียนให้กราฟมีสีต่างกัน แล้วพิจารณารายละเอียดดังนี้

$$8.1 \quad \text{ช่วงใดที่ } \sin(-x) > \cos(-x)$$

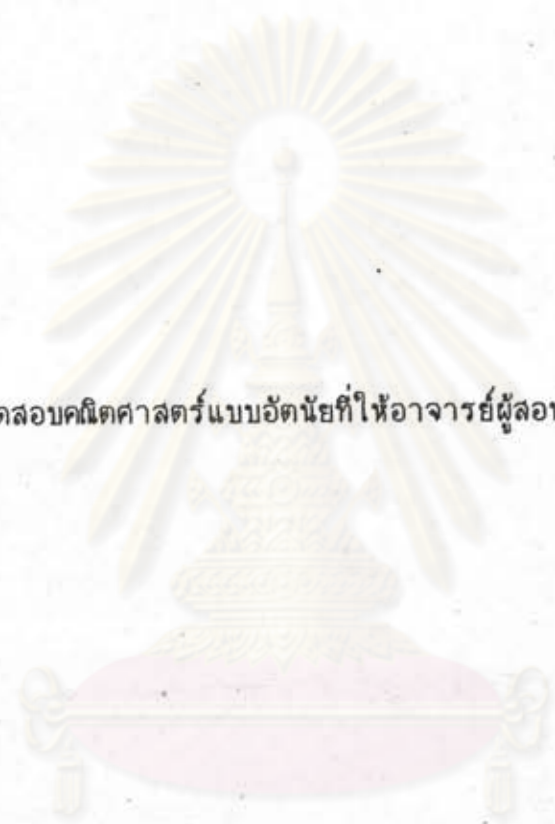
$$8.2 \quad \text{ช่วงใดที่ } \sin(-x) < \cos(-x)$$

$$8.3 \quad \text{ช่วงใดที่ } \sin(-x) + \cos(-x) > 0$$

$$8.4 \quad \text{ช่วงใดที่ } \sin(-x) + \cos(-x) < 0$$



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



แบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยที่ให้อาจารย์ผู้สอนพิจารณา

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบอัตนัยวิชา ค012 คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

- คำชี้แจง 1. แบบทดสอบฉบับนี้ มี 6 ข้อ เรื่อง ภาคตัดกรวย
 2. ขอให้ท่านได้พิจารณาว่า ถ้านักเรียนทำข้อสอบแต่ละข้อจะมีข้อบกพร่อง
 ในแต่ละขั้นตอนตรงกับข้อบกพร่องที่กำหนดไว้หรือไม่
1. จงหาสมการวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $2x + 3y = 0$ และ
 สัมผัสเส้นตรง $4x - 3y = -10$ กับเส้นตรง $4x - 3y = 30$
 2. จงหาโคออร์ดิเนตของจุดศูนย์กลาง จุดยอด และสมการวงรีที่ผ่านจุดเริ่มต้น
 และมีจุด $(\pm 1, 1)$ เป็นจุดโฟกัส
 3. จงหาสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงรี
 $25x^2 + 9y^2 + 50x - 36y - 164 = 0$ และสัมผัสกับวงรีนั้น
 4. จงหาสมการและโคออร์ดิเนตของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนจุดยอด
 ของพาราโบลา $3x^2 - 18x - y + 30 = 0$ โดยแกนตามขวางทับแกน
 ของพาราโบลา และจุดยอดจุดหนึ่งเป็นจุดโฟกัสของพาราโบลา ความยาว
 ของแกนลึงยุคเท่ากับรัศมีของวงกลม $4x^2 + 4y^2 - 16y + 15 = 0$
 5. จงหาสมการวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 1$ และผ่านจุด
 $(-2, \sqrt{3})$, $(-1, 2)$
 6. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสของวงรี
 $16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0$ และแกนโทของวงรี คือ
 ไตเรกตริกซ์ของพาราโบลา

แบบทดสอบอัตนัยวิชา ค012 คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

- คำชี้แจง 1. แบบทดสอบฉบับนี้ มี 6 ข้อ เรื่อง ตรีโกณมิติ
2. ขอให้ท่านได้พิจารณาว่า ถ้านักเรียนทำข้อสอบแต่ละข้อจะมีขั้นตอนใดที่จะทำให้นักเรียนเกิดความบกพร่อง

1. จงหาค่าของ

$$\frac{2\sin(-330^\circ) + \tan(-405^\circ)}{\sin\frac{2\pi}{3}(\tan\frac{7\pi}{6}) + \cos\frac{\pi}{6}(\cot-\frac{5\pi}{3})} \times \frac{\cot^2 225^\circ}{\tan^3 \frac{67\pi}{4}}$$

2. จงหาค่าของ

$$\frac{\cos^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{6} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \cos^2 \frac{7\pi}{6}}{3\sin \frac{25\pi}{6} - 3\tan \frac{13\pi}{4} + 2\cos \frac{19\pi}{3}}$$

3. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

3.1 $\cos x + 1 = \sin^2 x$ เมื่อ $0 < x < 2\pi$

3.2 $3\sec^2 x = 2\tan x + 4$ เมื่อ $0 < x < 360^\circ$

4. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้ แล้วพิจารณารายละเอียดดังนี้
ช่วงใดที่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติมีค่าเพิ่มขึ้น และ ช่วงใดที่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติมีค่าลดลง

เมื่อ 4.1 $y = \sin(2n\pi + x)$

4.2 $y = \tan x$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$

5. จงหาค่าของ

$$\left[\frac{\operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) \cos(180^\circ + \theta) \sin(90^\circ + \theta)}{\cot(270^\circ + \theta) \tan(360^\circ + \theta)} \right] \left[\frac{1 + \cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta + 1 + \cos \theta} \right]$$

6. จงเขียนกราฟของ $y = \sin(-x)$ และ $y = \cos(-x)$ เมื่อ $0 < x < 2\pi$

โดยใช้แกนร่วมกัน แต่เขียนให้กราฟมีสีต่างกัน แล้วพิจารณารายละเอียดดังนี้

6.1 ช่วงใดที่ $\sin(-x) > \cos(-x)$

6.2 ช่วงใดที่ $\sin(-x) < \cos(-x)$

6.3 ช่วงใดที่ $\sin(-x) + \cos(-x) > 0$

6.4 ช่วงใดที่ $\sin(-x) + \cos(-x) < 0$

แบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยที่ใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบอัตนัยวิชา ค012 คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบฉบับนี้ มี 4 ข้อ เรื่อง ภาคตัดกรวย

2. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำข้อสอบทุกข้อ

3. ถ้านักเรียนต้องการทดให้ทดในช่องว่างที่เว้นไว้ในกระดาษคำตอบ

1. จงหาสมการวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 1$ และผ่านจุด $(-2, 3)$, $(-1, 2)$
2. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสของวงรี $16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0$ และแกนโทของวงรี คือ ไตเรกตริกซ์ของพาราโบลา
3. จงหาโคออร์ดิเนตของจุดศูนย์กลาง จุดยอด และสมการวงรีที่ผ่านจุดเริ่มต้น และมีจุด $(\pm 1, 1)$ เป็นจุดโฟกัส
4. จงหาสมการและโคออร์ดิเนตของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนจุดยอดของพาราโบลา $3x^2 - 18x - y + 30 = 0$ โดยแกนตามขวางทับแกนของพาราโบลา และจุดยอดจุดหนึ่งเป็นจุดโฟกัสของพาราโบลา ความยาวของแกนลึงค์เท่ากับรัศมีของวงกลม $4x^2 + 4y^2 - 16y + 15 = 0$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบอัตนัยวิชา ค012 คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

- คำชี้แจง 1. แบบทดสอบฉบับนี้ มี 4 ข้อ เรื่อง ตรีโกณมิติ
 2. ขอให้ท่านได้พิจารณาว่า ถ้านักเรียนทำข้อสอบแต่ละข้อจะมีขั้นตอนใดที่จะทำให้นักเรียนเกิดความบกพร่อง

1. จงหาค่าของ

$$\frac{2\sin(-330) + \tan(-405)}{\sin\frac{2\pi}{3} (\tan\frac{7\pi}{6}) + \cos\frac{\pi}{6} (\cot-\frac{5\pi}{3})} \times \frac{\cot^2 225}{\tan^3 \frac{67\pi}{4}}$$

2. จงหาค่าของ

$$\frac{\cos^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{6} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \cos^2 \frac{7\pi}{6}}{3\sin \frac{25\pi}{6} - 3\tan \frac{13\pi}{4} + 2\cos \frac{19\pi}{3}}$$

3. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

3.1 $\cos x + 1 = \sin^2 x$ เมื่อ $0 \leq x < 2\pi$

3.2 $3\sec^2 x = 2\tan x + 4$ เมื่อ $0 < x < 360$

4. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้ แล้วพิจารณารายละเอียดดังนี้
 ช่วงใดที่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติมีค่าเพิ่มขึ้น และ ช่วงใดที่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติมีค่าลดลง

เมื่อ 4.1 $y = \sin(2\pi x + x)$

4.2 $y = \tan x$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 5 ค่าความยาก (P) ค่าอำนาจจำแนก (r) แบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบ
 อัดแน่นชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง "ภาคตัดกรวย" และเรื่อง "ตรีโกณมิติ"
 จากการทดลองใช้เครื่องมือครั้งที่ 2

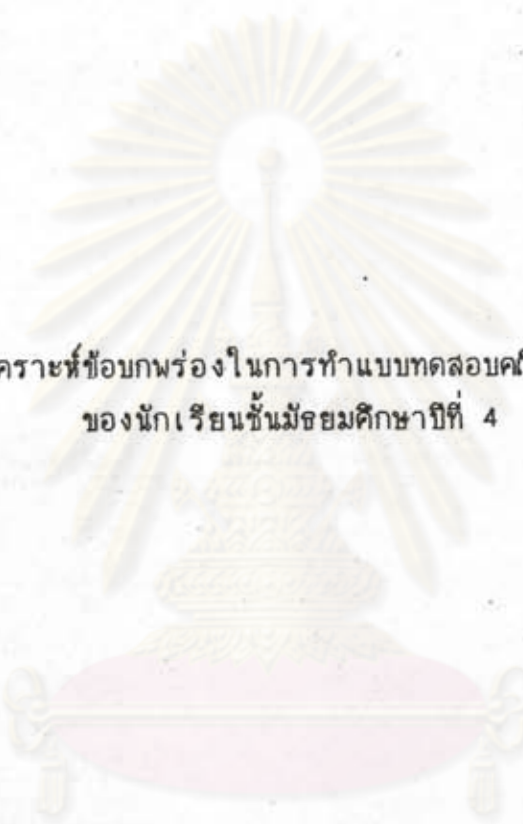
ข้อ	ภาคตัดกรวย		ตรีโกณมิติ	
	P	r	P	r
1	0.56	0.71	0.45	0.65
2	0.51	0.68	0.51	0.71
3	0.51	0.84	0.57	0.74
4	0.47	0.80	0.48	0.70

ค่าความเที่ยงของแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัดแน่น

เรื่อง "ภาคตัดกรวย" เป็น 0.92

เรื่อง "ตรีโกณมิติ" เป็น 0.96

ศูนย์วิจัยทรัพยากร
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



เกณฑ์การวิเคราะห์ข้อบ่งชี้ในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัย
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

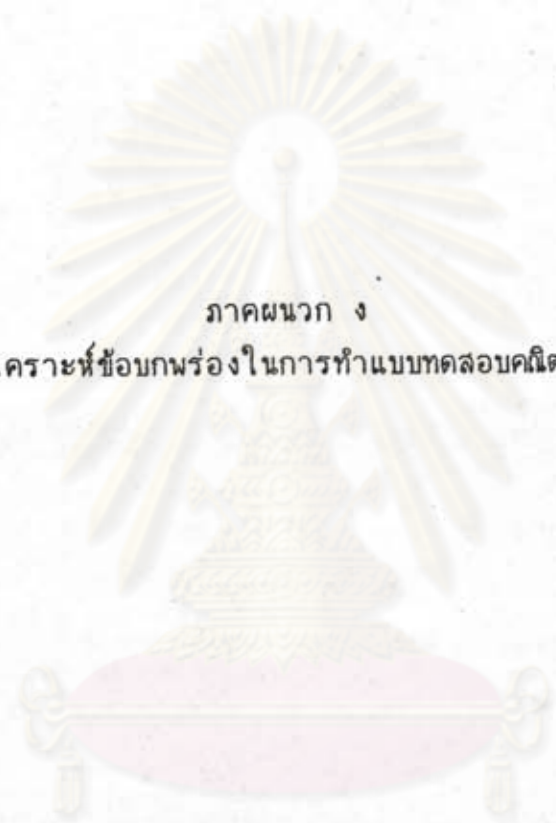
เกณฑ์การวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เกณฑ์ข้อบกพร่อง	ข้อ				รวม
	1	2	3	4	
1. การใช้ข้อมูลผิด (Misused data)					
1.1 นักเรียนไม่ได้ใช้ข้อมูลที่กำหนดให้ แต่ใช้ข้อมูลอื่นแทน					
1.2 ละเลยข้อมูลที่จำเป็นในขั้นตอนการ แก้ปัญหาและใช้ข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง มาทดแทน					
1.3 ทำผิดพลาดโดยหาคำตอบในสิ่งที่ไม่ ต้องการ					
1.4 นำข้อมูลที่กำหนดให้ไปใช้ในการแก้ ปัญหาที่ไม่เกี่ยวข้อง					
1.5 ละเลยข้อกำหนดที่จำเป็นก่อนใช้ข้อมูล					
2. ข้อผิดพลาดในการใช้ภาษา (Misinterpreted Language)					
2.1 ตีความจากประโยคภาษามาเป็น ประโยคคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง					
2.2 ไม่เข้าใจความหมายของสัญลักษณ์ที่ใช้					
2.3 เขียนกราฟไม่ถูกต้อง					
2.4 อ่านกราฟไม่ถูกต้อง					
3. บิดเบือนทฤษฎี กฎ สูตร และนิยาม (Distorted Theorem or Definition)					
3.1 ประยุกต์ใช้ทฤษฎีผิดจากเงื่อนไข					
3.2 ใช้กฎ สูตร สัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง					
3.3 ประยุกต์ใช้นิยามผิดจากเงื่อนไข					

เกณฑ์การวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เกณฑ์ข้อบกพร่อง	ข้อ				รวม
	1	2	3	4	
4. ไม่มีการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา (Unverified Solution)					
4.1 ขั้นตอนถูกต้อง แต่คำตอบผิดจากที่ โจทย์กำหนด					
4.2 ขั้นตอนถูกต้อง แต่คำตอบไม่เป็น ผลสำเร็จ					
4.3 ขั้นตอนถูกต้อง แต่บกพร่องในการ คิดคำนวณ					
4.4 ขั้นตอนผิดแต่คำตอบถูก					
5. บกพร่องในเทคนิคการทำ (Technical Error)					
5.1 บกพร่องในการคิดคำนวณ					
5.2 บกพร่องในการใช้ข้อมูล					
5.3 บกพร่องในหลักคณิตเบื้องต้น					

ศูนย์วิจัยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก ง

ตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1. จงหาสมการวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 1$ และผ่านจุด $(-2, -3), (-1, 2)$

กระดาษคำตอบของนักเรียน

จุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 1$

หรือ $x + y - 1 = 0$

ระยะทางระหว่างจุด $(-2, -3)$ ถึงจุดศูนย์กลางเส้นตรง $x + y - 1 = 0$ ได้เท่ากับ

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(-2) + 1(-3) - 1|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{|-6|}{\sqrt{2}} = -3\sqrt{2}$$

ระยะห่างระหว่างจุด $(-1, 2)$ ถึงจุดศูนย์กลาง $= \frac{|-1 + 2 - 1|}{\sqrt{2}} = 0$

∴ จุด $(-1, 2)$ จึงเป็นจุดศูนย์กลางซึ่งมีรัศมี $(-3\sqrt{2})^2 = 18$ หน่วย

จาก $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$


∴ สมการวงกลมได้ดังนี้, $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 18$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การวิเคราะห์ข้อบกพร่อง

เกณฑ์ข้อบกพร่อง	ข้อความ
<p>1. การใช้ข้อมูลผิด</p> <p>1.1 นักเรียนไม่ได้ใช้ข้อมูลที่กำหนดให้ แต่ใช้ข้อมูลอื่นแทน</p> <p>1.2 ละเลยข้อมูลที่จำเป็นในขั้นตอนการแก้ปัญหาและใช้ข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องมาทดแทน</p> <p>1.3 ทำผิดคำสั่งโดยหาคำตอบในสิ่งที่ไม่ต้องการ</p> <p>1.4 นำข้อมูลที่กำหนดให้ไปใช้ในการแก้ปัญหาที่ไม่เกี่ยวข้อง</p> <p>1.5 ละเลยข้อกำหนดที่จำเป็นก่อนใช้ข้อมูล</p>	<p>ไม่พบข้อบกพร่องนี้</p> <p>ใช้จุด $(-1, 2)$ เป็นจุดศูนย์กลางซึ่งมีรัศมี $3\sqrt{2}$ หน่วย</p> <p>หาระยะทางระหว่างจุด $(-2, -3)$ ถึงจุดศูนย์กลาง (เส้นตรง $x + y - 1 = 0$) ได้เท่ากับ</p> $\frac{ ax + by + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ 1(-2) + 1(-3) - 1 }{\sqrt{2}}$ $= \frac{ -6 }{\sqrt{2}}$ <p>หาระยะทางระหว่างจุด $(-1, 2)$ ถึงจุดศูนย์กลาง</p> $\frac{ 1(-1) + 1(2) - 1 }{\sqrt{2}}$ <p>ไม่ได้กำหนดให้ (h, k) เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม</p>
<p>2. ข้อผิดพลาดในการใช้ภาษา</p> <p>2.1 ตีความจากประโยคภาษามาเป็นประโยคสัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง</p> <p>2.2 ไม่เข้าใจความหมายของสัญลักษณ์ที่ใช้</p> <p>2.3 เขียนกราฟไม่ถูกต้อง</p> <p>2.4 อ่านกราฟไม่ถูกต้อง</p>	<p>ไม่พบข้อบกพร่องนี้</p> <p>ไม่พบข้อบกพร่อง</p> <p>ไม่พบข้อบกพร่อง</p> <p>ไม่พบข้อบกพร่อง</p>

เกณฑ์ข้อบกพร่อง	ข้อความ
<p>3. บิดเบือนทฤษฎี กฎ สูตร และนิยาม</p> <p>3.1 ประยุกต์ใช้ทฤษฎีผิดจากเงื่อนไข</p> <p>3.2 ใช้กฎ สูตร สัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง</p> <p>3.3 ประยุกต์ใช้นิยามผิดจากเงื่อนไข</p>	<p>ใช้ระยะตั้งฉากจากจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงถึงเส้นผ่านศูนย์กลางเป็นรัศมีของวงกลม ใช้จุดใด ๆ บนวงกลมเป็นจุดศูนย์กลางใช้</p> $r = \frac{ ax + by + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$ <p>เป็นสูตรหาความยาวรัศมีของวงกลม ให้เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากเส้นคงที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน</p>
<p>4. ไม่มีการตรวจสอบในระหว่างการแก้ไข</p> <p>4.1 ขั้นตอนถูกต้อง แต่คำตอบผิดจากที่โจทย์กำหนด</p> <p>4.2 ขั้นตอนถูกต้อง แต่คำตอบไม่เป็นผลสำเร็จ</p> <p>4.3 ขั้นตอนถูกต้อง แต่บกพร่องในการคิดคำนวณ</p> <p>4.4 ขั้นตอนผิดแต่คำตอบถูก</p>	<p>ไม่พบข้อบกพร่องนี้ เพราะขั้นตอนผิดในขั้นเริ่มต้น</p>
<p>5. บกพร่องในเทคนิคการทำ</p> <p>5.1 บกพร่องในการคิดคำนวณ</p> <p>5.2 บกพร่องในการใช้ข้อมูล</p> <p>5.3 บกพร่องในหลักพีชคณิตเบื้องต้น</p>	<p>ไม่พบข้อบกพร่องนี้</p> <p>ใช้ข้อมูลใด ๆ บนเส้นรอบวงเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ใช้ระยะตั้งฉากจากจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงไปยังเส้นผ่านศูนย์กลางเป็นรัศมีของวงกลม</p> $\frac{ -6 }{\sqrt{2}} = -3\sqrt{2}$



ภาคผนวก จ
เฉลยแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เรื่อง "ภาคตัดกรวย"

คำชี้แจง ข้อสอบฉบับนี้มีทั้งหมด 4 ข้อ ๆ ละ 10 คะแนน
การให้คะแนนให้ถือตามที่กำหนดไว้ในช่องทางขวามือ

1. จงหาสมการวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 1$ และผ่านจุด $(-2, -3), (-1, 2)$

วิธีทำ ให้ (h, k) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

$x+y=1$ เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม

(h, k) อยู่บนเส้นตรง $x + y = 1$

$$h + k = 1 \quad \dots (1)$$

จากนิยามของวงกลม, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

วงกลมผ่านจุด $(-2, -3), (-1, 2)$

$$(-2-h)^2 + (-3-k)^2 = r^2 \quad \dots (2)$$

$$(-1-h)^2 + (2-k)^2 = r^2 \quad \dots (3)$$

$$(2)=(3), \quad (-2-h)^2 + (-3-k)^2 = (-1-h)^2 + (2-k)^2$$

$$(2+h)^2 + (3+k)^2 = (1+h)^2 + (2-k)^2$$

$$4+4h+h^2+9+6k+k^2 = 1+2h+h^2+4-4h+k^2$$

$$2h+10k = -8$$

$$h+5k = -4 \quad \dots (4)$$

$$(1)-(4), \quad -4k = 5$$

$$k = -\frac{5}{4}$$

แทนค่า $k = -\frac{5}{4}$ ใน (1),

$$h - \frac{5}{4} = 1$$

$$h = 1 + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{9}{4}$$

แทนค่า $h = \frac{9}{4}, k = -\frac{5}{4}$ ใน (2)

$$\left(-2 - \frac{9}{4}\right)^2 + \left(-3 + \frac{5}{4}\right)^2 = r^2$$

$$\frac{338}{16} = r^2$$

\therefore สมการของวงกลม คือ

$$\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{338}{16}$$

$$16x^2 + 76y^2 - 72x + 40y - 232 = 0$$

การให้คะแนน

1 คะแนน

2 คะแนน

1 คะแนน

3 คะแนน

1 คะแนน

2 คะแนน

2. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสของวงรี

$16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0$ และแกนโทของวงรีทับไตเรกตริกซ์ของพาราโบลา

วิธีทำ สมการของวงรี คือ

$$16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0$$

$$16(x^2 - 2x) + 25(y^2 - 4y) = 284$$

$$16(x-1)^2 + 25(y-2)^2 = 400$$

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 \quad \dots (1)$$

จุดศูนย์กลางของวงรีคือ จุด $(1, 2)$

แกนโทของวงรี มีสมการเส้นตรงเป็น $x = 1$

\therefore ไตเรกตริกซ์ของพาราโบลา คือ เส้นตรง $x = 1$

จาก (1),

$$a^2 = 25, \quad b^2 = 16$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$= 25 - 16$$

$$= 9$$

$$c = \pm 3$$

จุดโฟกัสของวงรี คือ จุด $(4, 2)$ และ $(-2, 2)$

\therefore จุดยอดของพาราโบลา คือ จุด $(4, 2)$ หรือ $(-2, 2)$

แกนของพาราโบลานานกับแกน x , ระยะห่างระหว่างจุดยอด

กับจุดโฟกัสคือ $c = \pm 3$

สมการพาราโบลาอยู่ในรูป $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

\therefore สมการของพาราโบลา คือ $(y-2)^2 = 4(3)(x-4)$

$$y^2 - 4y + 4 = 12x - 48$$

$$y^2 - 4y - 12x + 52 = 0$$

หรือ

$$(y-2)^2 = 4(-3)(x+2)$$

$$y^2 - 4y + 12x - 20 = 0$$

การให้คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

2 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

3. จงหาโคออร์ดิเนตของจุดศูนย์กลาง จุดยอด และสมการวงรีที่ผ่านจุดเริ่มต้นและมีจุด $(\pm 1, 1)$ เป็นจุดโฟกัส

วิธีทำ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรี

และ จุด $(0, 0)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรี

จุดโฟกัสของวงรีคือ จุด $(1, 1)$ กับ $(-1, 1)$

จากนิยามของวงรี $|PF'| + |PF| = 2a$

$$\therefore \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2a \dots (1)$$

$$\therefore \sqrt{(0+1)^2 + (0-1)^2} + \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2} = 2a \dots (2)$$

$$(1) = (2),$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง,

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 8 - 4\sqrt{2}(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + (x-1)^2 + (y-1)^2)$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}) = 2 - x$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง,

$$2[(x-1)^2 + (y-1)^2] = 4 - 4x + x^2$$

$$x^2 + 2y^2 - 4y = 0$$

สมการวงรีคือ

$$\frac{x^2}{2} + (y-1)^2 = 1$$

จุดศูนย์กลางของวงรีคือ จุด $(0, 1)$

จุดยอดของวงรีคือ จุด $(\sqrt{2}, 1)$ กับ $(-\sqrt{2}, 1)$

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

3 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. จงหาจุดโฟกัสและจงหาสมการของไฮเพอร์โบลา ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนจุดยอดของพาราโบลา $3x^2 - 18x - y + 30 = 0$ โดยแกนตามขวางทับแกนของพาราโบลา และจุดยอดจุดหนึ่งเป็นจุดโฟกัสของพาราโบลา ความยาวของแกนตามขวางทับแกนของพาราโบลาและจุดยอดจุดหนึ่งเป็นจุดโฟกัสของพาราโบลา ความยาวของแกนตั้งฉากเท่ากับรัศมีของวงกลม $4x^2 + 4y^2 - 16y + 15 = 0$

วิธีทำ

สมการของพาราโบลา คือ $3x^2 - 18x - y + 30 = 0$

$$3x^2 - 18x = y - 30$$

$$3(x^2 - 6x + 9) = y - 30 + 27$$

$$(x-3)^2 = \frac{1}{3}(y-3)$$

$$(x-3)^2 = 4\left(\frac{1}{12}\right)(y-3)$$

จุดยอดของพาราโบลา คือ จุด $(3, 3)$

\therefore จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา คือ จุด $(3, 3)$

จุดโฟกัสของพาราโบลา คือ จุด $(3, \frac{37}{12})$

\therefore จุดยอดจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลา คือ จุด $(3, \frac{37}{12})$

ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางกับจุดยอดของ ไฮเพอร์โบลา

(a) เท่ากับ $\frac{1}{12}$

จากสมการวงกลม $4x^2 + 4y^2 - 16y + 15 = 0$

$$4x^2 + 4(y-2)^2 = -15 + 16$$

$$x^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4}$$

\therefore รัศมีของวงกลม = $\frac{1}{2}$

ความยาวของแกนตั้งฉาก = $\frac{1}{2}$

$$\therefore b = \frac{1}{4}$$

จาก

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{10}{144}$$

$$c = \pm \frac{\sqrt{10}}{12}$$

\therefore จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา คือ จุด $(3, 3 \pm \frac{\sqrt{10}}{12})$

สมการของไฮเพอร์โบลา คือ

$$\frac{(y-3)^2}{\left(\frac{1}{12}\right)^2} - \frac{(x-3)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1$$

การให้คะแนน

2 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

2 คะแนน

1 คะแนน

$$144(y^2 - 6y + 9) - 16(x^2 - 6x + 9) = 1$$

$$144y^2 - 16x^2 + 96x - 864y + 1151 = 0$$

$$16x^2 - 144y^2 - 96x + 864y - 1151 = 0$$

} 1 คชแนน



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เรื่อง "ตรีโกณมิติ"

คำชี้แจง ข้อสอบฉบับนี้มีทั้งหมด 4 ข้อๆละ 10 คะแนน
การให้คะแนนให้ถือตามที่กำหนดไว้ในช่องทางขวามือ

1. จงหาค่าของ

$$\frac{2\sin(-330^\circ) + \tan(-405^\circ)}{\sin\frac{2\pi}{3} \tan\frac{7\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cot -\frac{5\pi}{3}} \times \frac{\cot^2 225^\circ}{\tan^3 \frac{67\pi}{4}}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \sin(-330^\circ) &= \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \\ \tan(-405^\circ) &= -\tan 45^\circ &= -1 \\ \sin\frac{2\pi}{3} &= \sin\frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan\frac{7\pi}{6} &= \tan\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos\frac{\pi}{6} & &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cot -\frac{5\pi}{3} &= \cot\frac{\pi}{3} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan\frac{67\pi}{4} &= -\tan\frac{\pi}{4} &= -1 \\ \cot 225^\circ &= \cot 45^\circ &= 1 \end{aligned}$$

แทนค่าในโจทย์

$$\frac{2 \times \frac{1}{2} + (-1)}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} \times \frac{(1)^2}{(-1)^3} = 0$$

การให้คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

2 คะแนน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. จงหาค่าของ

$$\frac{\cos^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{6} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \cos^2 \frac{7\pi}{6}}{3 \sin \frac{25\pi}{6} - 3 \tan \frac{13\pi}{4} + 2 \cos \frac{19\pi}{3}}$$

วิธีทำ

$$\sin^2 \frac{5\pi}{6} = \sin^2 \frac{\pi}{6}$$

$$\cos^2 \frac{7\pi}{6} = (-\cos \frac{\pi}{6})^2 = \cos^2 \frac{\pi}{6}$$

$$\sin \frac{25\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{13\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cos \frac{19\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} = 1$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1$$

แทนค่าในโจทย์

$$\frac{1 + 1}{3(\frac{1}{2}) - 3(1) + 2(\frac{1}{2})} = \frac{2}{\frac{3}{2} - 3 + 1}$$

$$= \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$$

การให้คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

2 คะแนน

1 คะแนน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

3.1 $\cos x + 1 = \sin^2 x$ เมื่อ $0 \leq x < 2\pi$

3.2 $3\sec^2 x = 2\tan x + 4$ เมื่อ $0^\circ < x < 360^\circ$

วิธีทำ

3.1

$$\cos x + 1 = \sin^2 x$$

$$\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x + \cos x = 0$$

$$\cos x (\cos x + 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = 0, -1$$

$$\cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x = -1 = \cos \pi$$

$$x = \pi$$

$$\therefore x \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi \right\}$$

3.2

$$3\sec^2 x = 2\tan x + 4$$

$$3(1+\tan^2 x) = 2\tan x + 4$$

$$3 + 3\tan^2 x = 2\tan x + 4$$

$$3\tan^2 x - 2\tan x - 1 = 0$$

$$(3\tan x + 1)(\tan x - 1) = 0$$

$$\tan x = 1 = \tan 45^\circ$$

$$= \tan 225^\circ$$

$$x = 45^\circ, 225^\circ$$

หรือ

$$\tan x = -\frac{1}{3}$$

$$x = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$x \in \left\{ 45^\circ, 225^\circ, \tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \right\}$$

การใช้คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

4. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้ แล้วพิจารณารายละเอียดดังนี้
ช่วงใดที่ฟังก์ชันตรีโกณมิติมีค่าเพิ่มขึ้น
ช่วงใดที่ฟังก์ชันตรีโกณมิติมีค่าลดลง

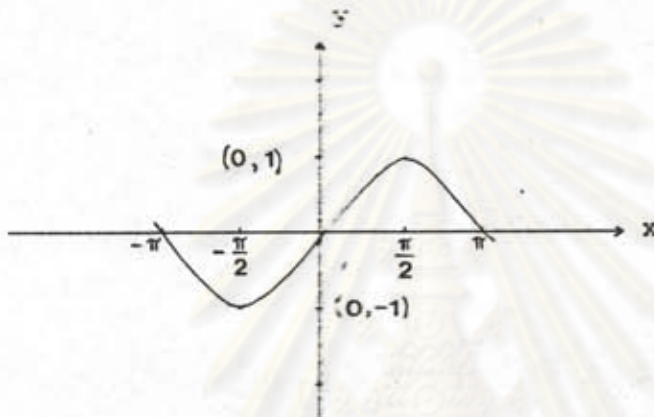
เมื่อ 4.1 $y = \sin(2n\pi + x)$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$

4.2 $y = \tan x$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$

วิธีทำ

4.1
$$y = \sin(2n\pi + x)$$

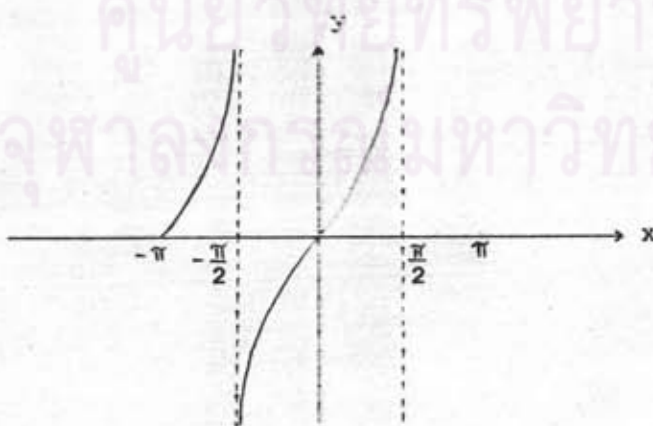
$$= \sin x$$



จากกราฟ ฟังก์ชันซายน์เพิ่มในช่วง $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$

ฟังก์ชันซายน์ลดในช่วง $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$

4.2 $y = \tan x$ เมื่อ $-\pi < x < \frac{\pi}{2}$



จากกราฟ ฟังก์ชันแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้นไม่มีช่วงใดที่จะทำให้ฟังก์ชันแทนเจนต์มีค่าลดลง

การให้คะแนน

1 คะแนน

2 คะแนน

1 คะแนน

1 คะแนน

3 คะแนน

2 คะแนน



ประวัติผู้เขียน

นางสาวทัศนาวร คลังแก้ว เกิดวันที่ 1 มีนาคม พ.ศ. 2499 สำเร็จ
 การศึกษาระดับปริญญาตรีจากมหาวิทยาลัยขอนแก่น วิชาเอกคณิตศาสตร์ - นิสิกส์ เมื่อปีการศึกษา
 2521 เข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาโทสาขาคณิตศาสตร์มหาบัณฑิต สาขาการศึกษาคณิตศาสตร์
 ภาควิชามัธยมศึกษา ปีการศึกษา 2530 ปัจจุบันรับราชการในตำแหน่งอาจารย์ ระดับ 5
 โรงเรียนเทพศิลา กรุงเทพมหานคร



ศูนย์วิทยทรัพยากร
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย