

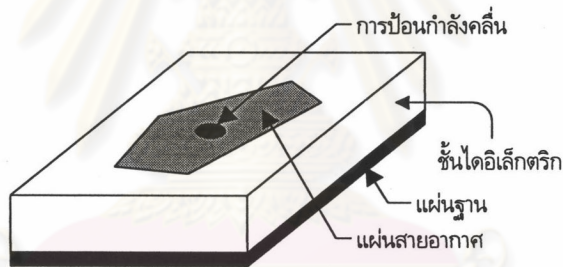
บทที่ 2

การวิเคราะห์สายอากาศไมโครสตริป

สายอากาศไมโครสตริปเป็นสายอากาศชนิดหนึ่งที่ใช้งานในย่านความถี่ไมโครเวฟ โดยสายอากาศไมโครสตริปที่ใช้ในงานในแต่ละประเภทมีลักษณะแตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับลักษณะการใช้งาน ในบทนี้จะกล่าวถึงโครงสร้างของสายอากาศไมโครสตริปและหลักการพื้นฐานของวิธีการวิเคราะห์ในงานวิจัยโดยใช้ฟังก์ชันของกรีนชนิดไดโอดิกในสมการอินทิกรัลของศักย์แม่เหล็กและไฟฟ้าร่วมกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

โครงสร้างของสายอากาศไมโครสตริป

สายอากาศไมโครสตริปโดยทั่วไปมีโครงสร้างดังรูปที่ 2.1 ประกอบไปด้วย



รูปที่ 2.1 โครงสร้างพื้นฐานของสายอากาศไมโครสตริป

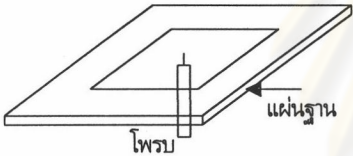
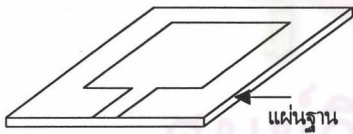
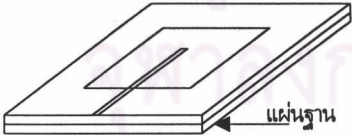
1. แผ่นสายอากาศ (patch) เป็นแผ่นโลหะแบนบาง มีรูปร่างได้ไม่เจาะจง แต่โดยทั่วไปนิยมใช้รูปร่างเรขาคณิต เช่น สี่เหลี่ยม วงกลม สามเหลี่ยม วงแหวน วงรี เป็นต้น ซึ่งขึ้นอยู่กับ การออกแบบสำหรับแต่ละลักษณะการใช้งาน ขนาดและรูปร่างของแผ่นสายอากาศมีผลต่อความถี่ที่ใช้งาน และยังส่งผลต่อลักษณะสมบัติชนิดอื่นของสายอากาศด้วย

2. ชั้นไดอิเล็กตริก (dielectric substrate) ชนิดและขนาดของชั้นไดอิเล็กตริกเป็นปัจจัยสำคัญในการออกแบบสายอากาศไมโครสตริป โดยมีผลต่อค่าพารามิเตอร์ เช่น แถบความถี่ อัตราขยาย ตัวประกอบคุณภาพ การสูญเสียของไดอิเล็กตริก เป็นต้น เมื่อพิจารณาชั้นไดอิเล็กตริกจะสนใจถึงลักษณะของค่าคงตัวไดอิเล็กตริกสัมพัทธ์ (ϵ_r) ความสูงของชั้นไดอิเล็กตริก และแทนเจนต์การสูญเสีย (loss tangent, $\tan \delta$)

3. พื้นฐาน (ground plane) ลักษณะของพื้นฐานโดยทั่วไปจะเป็นแผ่นโลหะขนาดใหญ่กว่าขนาดของแผ่นสายอากาศมาก ซึ่งจะมีผลต่อแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศ

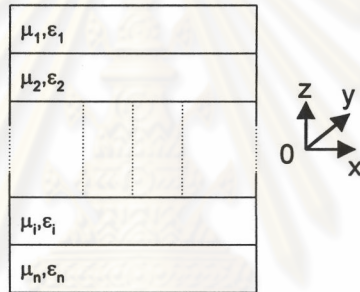
4. ระบบป้อนกำลัง (feed) ทำหน้าที่ในการจ่ายกำลังงานให้แก่สายอากาศไมโครสตริป ระบบป้อนกำลังถือเป็นเรื่องสำคัญที่ส่งผลกระทบต่อลักษณะสมบัติของสายอากาศ ไม่ว่าจะเป็นแบบรูปการแผ่พลังงาน แถบความถี่ และประสิทธิภาพของสายอากาศ ระบบป้อนกำลังที่ใช้กันโดยทั่วไปจะมีหลายลักษณะตามการส่งผ่านพลังงานให้แก่สายอากาศ ตัวอย่างเช่น การใช้โพรบโคแอกเซียล การใช้สายนำสัญญาณไมโครสตริป การใช้ปรากฏการณ์เชื่อมต่อร่วม (Aksun, Chuang and Lo, 1990) ซึ่งแต่ละระบบก็มีข้อดีข้อเสียแตกต่างกันไปตามลักษณะการใช้งานดังแสดงในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ตัวอย่างระบบป้อนกำลังลักษณะต่างๆ ของสายอากาศไมโครสตริป

ระบบป้อนกำลัง	ข้อดี	ข้อด้อย
1. การใช้โพรบโคแอกเซียล 	<ul style="list-style-type: none"> • ไม่มีการสูญเสียเนื่องจากการแผ่พลังงานที่สายนำสัญญาณ • การแมตซ์อิมพีแดนซ์ทำได้ง่ายโดยการเลื่อนตำแหน่งโพรบโคแอกเซียล 	<ul style="list-style-type: none"> • มีต้นทุนการผลิตสูง
2. การใช้สายนำสัญญาณไมโครสตริป 	<ul style="list-style-type: none"> • สามารถผลิตได้ง่ายโดยผลิตไปพร้อมแผ่นสายอากาศในขั้นตอนเดียว 	<ul style="list-style-type: none"> • ต้องมีการแมตซ์อิมพีแดนซ์ • มีการสูญเสียเนื่องจากการแผ่พลังงานที่สายนำสัญญาณ
3. การใช้ปรากฏการณ์เชื่อมต่อร่วม 	<ul style="list-style-type: none"> • มีหลายระดับชั้นทำให้มีความยืดหยุ่นในการออกแบบสูง • มีแถบความถี่สูง 	<ul style="list-style-type: none"> • มีชั้นไดอิเล็กทริกหลายชั้น • การปรับค่าที่เหมาะสมทำได้ยาก • การระบายความร้อนทำได้ยาก

หลักการวิเคราะห์สายอากาศไมโครสตริปด้วยสมการอินทิกรัลของศักย์แม่เหล็กและไฟฟ้า

การวิเคราะห์สายอากาศไมโครสตริปโดยทั่วไป จะสนใจลักษณะของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่กระจายออกมาหลังจากกระแสไฟฟ้าถูกส่งผ่านระบบบ่อนกำลังไปยังแผ่นสายอากาศ ซึ่งคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่ออกมาและลักษณะสมบัติอื่นๆ ของสายอากาศไมโครสตริปสามารถหาได้จากลักษณะการกระจายกระแสบนแผ่นสายอากาศเสียก่อน การหาการกระจายความหนาแน่นกระแสบนแผ่นสายอากาศ (surface current density) นั้นมีหลายวิธี (Hall and James, eds., 1989; Alexopoulos and others, 1992) สมการอินทิกรัลของศักย์แม่เหล็กและไฟฟ้าเป็นรูปแบบของสมการแบบหนึ่ง ซึ่งสามารถใช้ได้กับโครงสร้างของสายอากาศไมโครสตริปได้ทุกรูปแบบ โดยพิจารณาแผ่นสายอากาศไมโครสตริปที่มีรูปร่างไม่เจาะจง (arbitrarily shaped) และมีชั้นของไดอิเล็กตริกหลายๆ ชั้น ดังแสดงในรูปที่ 2.1 และ 2.2 ตามลำดับ



รูปที่ 2.2 โครงสร้างที่เป็นชั้นของไดอิเล็กตริกหลายๆ ชั้น (stratified medium)

รูปแบบของสมการอินทิกรัลของศักย์แม่เหล็กและไฟฟ้านั้น จะเริ่มต้นจากการพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวของตัวนำดังแสดงในสมการที่ (2.1) (Itoh, ed., 1989)

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^s &= \mathbf{n} \times \mathbf{E}^e \dots\dots\dots (2.1) \\
 -\mathbf{z} \times \mathbf{E}^s &= \mathbf{z} \times \mathbf{E}^e
 \end{aligned}$$

เมื่อ \mathbf{n} คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวตั้งฉากกับแผ่นสายอากาศและในกรณีนี้ที่พิจารณาดังรูปที่ 2.2 จะได้ว่า \mathbf{n} คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน z หรือ \mathbf{z}

\mathbf{E}^s คือสนามไฟฟ้าที่กระจัดกระจาย (scattered electric field)

\mathbf{E}^e คือสนามไฟฟ้าที่ตกกระทบ (incident electric field)

สนามไฟฟ้า \mathbf{E}^s นั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างค่าศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าชนิดเวกเตอร์ (magnetic vector potential) และศักย์สเกลาร์ (scalar potential) ได้ดังนี้

$$-\mathbf{E}^s = j\omega\mathbf{A} + \nabla\phi \dots\dots\dots (2.2)$$

ศักย์สเกลาร์ ϕ สัมพันธ์กับศักย์แม่เหล็กชนิดเวกเตอร์ \mathbf{A} ผ่านเกจของโลเรนซ์ (Lorentz's gauge) ดังแสดงในสมการที่ (2.3) ดังนี้

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\mu_0\epsilon\phi = 0 \quad (2.3)$$

โดยที่ \mathbf{A} มีความสัมพันธ์กับความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า (electric current density) หรือความหนาแน่นกระแส \mathbf{J}_s คือ

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_S \overline{\mathbf{G}}_A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dS' \quad (2.4)$$

เมื่อ S เป็นพื้นที่บนแผ่นสายอากาศและ $\overline{\mathbf{G}}_A$ เป็นฟังก์ชันของกรีนชนิดไดอะดิก 3 มิติ (dyadic Green's function) ความหมายในทางกายภาพของ $\overline{\mathbf{G}}_A$ คือส่วนประกอบสเกลาร์ G_A คือส่วนประกอบทิศทาง s ของศักย์ชนิดเวกเตอร์ที่เกิดที่ตำแหน่ง \mathbf{r} โดยเกิดจากไดโพลแบบเฮิร์ตซ์ (Hertz dipole) ในทิศทาง t และตั้งอยู่ที่ตำแหน่ง \mathbf{r}' สำหรับพิกัดแบบไพรม์ (primed coordinate) เป็นการแสดงถึงทิศทางของแหล่งกำเนิดซึ่งจะถือเป็นสัญลักษณ์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ทั้งหมด

จากสมการที่ (2.3) และ (2.4) นั้นจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ϕ และ $\overline{\mathbf{G}}_A$ ได้ดังนี้

$$j\omega\mu\epsilon\phi(\mathbf{r}') = - \int_S \nabla \cdot \overline{\mathbf{G}}_A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dS' \quad (2.5)$$

สำหรับฟังก์ชันของกรีนที่เกี่ยวข้องกับศักย์สเกลาร์หรือฟังก์ชันของกรีนชนิดสเกลาร์ G^ϕ นั้น จะมีความเป็นหนึ่งเดียว (uniqueness) ได้ถ้าไดเวอร์เจนซ์ของ $\overline{\mathbf{G}}_A$ นั้นเป็นเวกเตอร์ที่ไม่หมุน (irrotational vector) (Hall and James, eds., 1989) จะได้ว่า

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{G}}_A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \mu\epsilon\nabla G^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\mu\epsilon\nabla' G^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \quad (2.6)$$

เมื่อแทนสมการที่ (2.6) ลงในสมการที่ (2.5) นั้นจะได้ว่า

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{j\omega} \int_S (-\nabla' G^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')) \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dS' \quad (2.7)$$

อินทิกรัลในสมการที่ (2.7) นั้นสามารถแปลงให้อยู่ในรูปสมการที่ (2.8) ได้ดังนี้

$$\frac{1}{j\omega} \int_S \nabla' G^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dS' = \frac{-1}{j\omega} \int_S G^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \nabla \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dS' + \sum_i \int_{c_i} G^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{J}_s)(\mathbf{r}') dc \quad (2.8)$$

เมื่อ c_i เป็นเส้นรอบรูปของแผ่นสายอากาศ จากเงื่อนไขขอบเขตที่ส่วนประกอบในแนวตั้งฉากกับขอบของกระแสนิวตันนำจะเป็นศูนย์ที่ขอบเส้นรอบรูปแผ่นสายอากาศนั้นคือ (Matsuhara, 1996)

$$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{J}_s = 0 \text{ บนขอบเขตภายนอกของแผ่นสายอากาศ}$$

และ
$$\sum_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{J}_s = 0 \text{ บนขอบเขตภายในระหว่างอิลิเมนต์ } i \quad (2.9)$$

จากสมการที่ (2.9) ทำให้สมการที่ (2.8) ลดรูปลงดังสมการที่ (2.10)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{j\omega} \int_S \nabla' G^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dS' = -\frac{1}{j\omega} \int_S G^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \nabla \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dS' \quad (2.10)$$

เมื่อพิจารณาค่า E^s ในสมการที่ (2.2) จะเห็นได้ว่า E^s สัมพันธ์กับค่าศักย์แม่เหล็กและไฟฟ้า ในขณะที่ค่าศักย์แม่เหล็กชนิดเวกเตอร์สามารถคำนวณได้จากอินทิกรัลระหว่างค่าฟังก์ชันของกรีนชนิดไดโอดิกกับความหนาแน่นกระแส สำหรับค่าศักย์สเกลาร์จะคำนวณได้จากอินทิกรัลระหว่างค่าฟังก์ชันของกรีนชนิดสเกลาร์กับไดเวอร์เจนซ์ของความหนาแน่นกระแส ดังแสดงในสมการที่ (2.3) ถึง (2.10)

เมื่อแทนค่าสมการที่ (2.4) และ (2.10) ลงในสมการที่ (2.2) ได้ผลดังสมการที่ (2.11) และนำผลที่ได้ไปแทนค่าสมการที่ (2.1) จึงจะได้สมการที่มีทั้งการอินทิกรัลของศักย์แม่เหล็กและไฟฟ้าซึ่งเรียกว่าสมการอินทิกรัลของศักย์แม่เหล็กและไฟฟ้า ดังแสดงในสมการที่ (2.12) ดังนี้

$$-E^s = j\omega \int_V \overline{G}_A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) dS' - \frac{1}{j\omega} \int_V \nabla(\nabla' G^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')) \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) dS' \dots\dots\dots (2.11)$$

$$\mathbf{z} \times \left(j\omega \int_V \overline{G}_A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) dS' - \frac{1}{j\omega} \int_V \nabla(\nabla' G^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')) \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) dS' \right) = \mathbf{z} \times \mathbf{E}^e \dots\dots\dots (2.12)$$

จากสมการที่ (2.12) จะเห็นว่าพารามิเตอร์ที่ต้องหาค่าคือฟังก์ชันของกรีนซึ่งมีวิธีการแก้ปัญหาได้หลายวิธี เช่น วิธีของ Michalski (1985), Fang, Yang, and Delisle (1988), Irsadi, Aksan, and Mitra (1992) และความหนาแน่นกระแสซึ่งสามารถหาได้จากวิธีทางเชิงเลขซึ่งมีหลายวิธี เช่น วิธีของ โม่เมนต์ (Pozar, 1982; Gardiol and Mosig, 1983; Michalski, 1985), วิธีผลต่างสลับเนื่องเชิงเวลา (Kashiwa, Onishi and Fukai, 1983) ในส่วนต่อไปนี้จะเน้นขั้นตอนในการหาฟังก์ชันของกรีนและความหนาแน่นกระแส \mathbf{J}_s โดยใช้วิธีไฟไนต์อิลิเมนต์

การหาค่าฟังก์ชันของกรีน

ขั้นตอนในการหาฟังก์ชันของกรีนนั้น เริ่มจากพิจารณาค่าศักย์แม่เหล็กชนิดเวกเตอร์และศักย์สเกลาร์ ซึ่งถูกนำมาใช้เพื่อช่วยในการคำนวณหาค่าส่วนประกอบสเกลาร์ทั้ง 6 ส่วนของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ได้แก่ E_x , E_y , E_z , H_x , H_y และ H_z ซึ่งค่าศักย์ทั้งสองแบบนี้มีหลายรูปแบบ เช่น การใช้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวตั้งฉากกับระนาบ x-y ซึ่งก็คือ E_z และ H_z เป็นค่าศักย์ (Itoh, eds., 1989) หรือใช้ค่าศักย์เวกเตอร์ซึ่งเป็นค่ารูปแบบหนึ่งประกอบไปด้วยค่าศักย์ไฟฟ้าชนิดเวกเตอร์ \mathbf{F} และศักย์แม่เหล็กชนิดเวกเตอร์ \mathbf{A} ซึ่งค่าศักย์ทั้งสองต้องสอดคล้องกับสมการเฮล์มโฮลทซ์คือ

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\mathbf{A} &= -\mu\mathbf{J} \\ (\nabla^2 + k^2)\mathbf{F} &= -\varepsilon\mathbf{M} \end{aligned} \dots\dots\dots (2.13)$$

เมื่อ \mathbf{M} เป็นความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก (magnetic current density) จากนั้นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในโดเมนอวกาศจะสัมพันธ์กับค่าทั้งสองดังแสดงในสมการที่ (2.14)

$$\begin{aligned} j\omega\mu\varepsilon\mathbf{E} &= k^2\mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - j\omega\mu\nabla \times \mathbf{F} \\ j\omega\mu\varepsilon\mathbf{H} &= k^2\mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) + j\omega\varepsilon\nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \dots\dots\dots (2.14)$$

โดยที่ค่าศักย์ทั้งสองสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของกรีนชนิดไดโอดิกได้คือ

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \overline{\overline{\mathbf{G}}}_A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r}') d\mathbf{l}'$$

$$d\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \overline{\overline{\mathbf{G}}}_F(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r}') d\mathbf{l}' \dots\dots\dots (2.15)$$

สำหรับค่าศักย์เวกเตอร์ทั้งสองนั้นมีหลายรูปแบบให้เลือกใช้ ตัวอย่างเช่น ศักย์เฮิร์ตซ์-เดอบาย (Hertz-Debye potentials) ศักย์ตามขวาง (transverse potentials) (Itoh, ed., 1989) สำหรับงานวิจัยนี้ จะใช้ศักย์ซอมเมอร์เฟลด์ (Sommerfeld potentials) (Sommerfeld, 1949) ซึ่งเป็นวิธีหนึ่งสำหรับหาค่าศักย์ และเป็นที่ยอมรับสำหรับปัญหาในตัวกลางหลายชั้น

Sommerfeld (1949) ได้กำหนดให้ค่ากระแสแม่เหล็กเป็นศูนย์ดังนั้นค่า $\mathbf{F}=0$ จะเหลือเพียงค่าศักย์แม่เหล็กชนิดเวกเตอร์ ในการหาค่าศักย์นั้นจำเป็นต้องทราบค่าฟังก์ชันของกรีนชนิดไดโอดิก $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_A(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ ก่อน ในการหาส่วนประกอบของ $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_A(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ นั้นต้องทำการวางทิศของไดโพลให้ชี้ไปทางทิศ x ทิศ y และทิศ z ตามลำดับ ซึ่งแบ่งตามระนาบได้เป็น 2 ระนาบคือ ไดโพลไฟฟ้าแนวตั้ง (vertical electric dipole, VED) ซึ่งจะเกิดขึ้นบนระนาบ z ที่มีส่วนประกอบส่วนเดียวคือ A_z และไดโพลไฟฟ้าแนวนอน (horizontal electric dipole, HED) ซึ่งจะเกิดขึ้นบนระนาบ x และระนาบ y โดยแต่ละระนาบมีส่วนประกอบสองส่วนที่ขนานกับแหล่งกำเนิดดังแสดงในสมการที่ (2.16) สำหรับ $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_A$ จะมีค่าดังนี้

$$\overline{\overline{\mathbf{G}}}_A = (\overline{\overline{x}}G_A^{xx} + \overline{\overline{z}}G_A^{zx})\overline{\overline{x}} + (\overline{\overline{y}}G_A^{yy} + \overline{\overline{z}}G_A^{zy})\overline{\overline{y}} + \overline{\overline{z}}G_A^{zz}\overline{\overline{z}} \dots\dots\dots (2.16)$$

ในการวิเคราะห์หาส่วนประกอบของค่าฟังก์ชันของกรีนชนิดไดโอดิก สามารถคำนวณหาได้จากวิธีทางเชิงวิเคราะห์ โดยการหาค่าตอบของสมการเฮล์มโฮลต์ซ์ สำหรับสารที่ไม่เป็นเนื้อเดียวกัน (inhomogeneous Helmholtz equation) ได้คือ

$$(\nabla^2 + k^2)\overline{\overline{\mathbf{G}}}_A = -\mu\overline{\overline{\mathbf{I}}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \dots\dots\dots (2.17)$$

เมื่อ $\overline{\overline{\mathbf{I}}} = \overline{\overline{xx}} + \overline{\overline{yy}} + \overline{\overline{zz}}$ และ $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ คือฟังก์ชันเดลตา (delta function) ที่มีค่าที่ $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ และต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตระหว่างชั้นคือ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวสัมผัสมีความต่อเนื่องที่ชั้น l ใดๆ ดังนี้

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_{l+1} - \mathbf{E}_l) = 0 \text{ และ } \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_{l+1} - \mathbf{E}_l) = 0 \dots\dots\dots (2.18)$$

ซึ่งการหาค่าฟังก์ชันของกรีนในสมการที่ (2.17) นั้นต้องทำการแปลงฟูริเยร์ให้อยู่ในโดเมนสเปกตรัม (spectral domain) ก่อนดังแสดงในสมการที่ (2.19) จากนั้นจึงทำการแปลงกลับฟูริเยร์ดังแสดงในสมการที่ (2.20)

$$\overline{\overline{\mathfrak{F}}}(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(jk_x x + jk_y y) dx dy \dots\dots\dots (2.19)$$

$$f(x, y) = \overline{\overline{\mathfrak{F}}}^{-1}[\overline{\overline{\mathfrak{F}}}(k_x, k_y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{\mathfrak{F}}}(k_x, k_y) \exp(-jk_x x - jk_y y) dk_x dk_y \dots\dots\dots (2.20)$$

สาเหตุที่ต้องมีการแปลงโดเมนจากโดเมนอวกาศให้อยู่ในโดเมนสเปกตรัมเพื่อแปลงสมการผลต่างบางส่วน (partial differential equation) ให้อยู่ในรูปสมการผลต่างสามัญ (ordinary differential equation) ดังแสดงในสมการที่ (2.21) โดยแปลงสมการที่ (2.17) ให้อยู่ในโดเมนสเปกตรัมจะได้

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + u^2\right)\tilde{\psi} = -\mu\delta(z-z') \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

$$u^2 = k^2 - k_p^2 = k_x^2 + k_y^2 - k_p^2$$

เมื่อ ψ เป็นส่วนประกอบใดๆ ที่ต้องการ และ k เป็นค่าเวฟนัมเบอร์ในชั้นไดอิเล็กทริก (wave number), $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ โดยที่ μ คือค่าความซึมได้ (permeability) และ ε คือค่าสภาพยอม (permittivity) จากนั้นจึงนำสมการเงื่อนไขขอบเขตมาช่วยในการหาคำตอบของสมการที่ (2.17) ก็จะทราบค่าส่วนประกอบของฟังก์ชันกรีนชนิดไดอะดิกในโดเมนสเปกตรัม

เมื่อหาค่าฟังก์ชันของกรีนชนิดไดอะดิกทั้ง 5 ส่วนตามสมการที่ (2.16) และฟังก์ชันของกรีนชนิดสเกลาร์ G^ϕ ในโดเมนสเปกตรัมได้แล้ว ก็ทำการแปลงกลับฟูริเยร์เพื่อนำค่าฟังก์ชันของกรีนไปใช้ในโดเมนอวกาศดังนี้

(1) กำหนดให้ \tilde{G}_A^{ww} เป็นนิพจน์ในโดเมนสเปกตรัมของ $\tilde{G}_A^{xx}, \tilde{G}_A^{yy}, \tilde{G}_A^{zz}$ จะได้ G_A^{ww} ในโดเมนอวกาศมีค่าเป็นดังนี้

$$G_A^{ww}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \mathfrak{T}^{-1}[\tilde{G}_A^{ww}(k_p)] = \int_0^\infty \tilde{G}_A^{ww}(k_p) J_0(k_p \rho) k_p dk_p \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

(2) กำหนดให้ \tilde{G}_A^{zx} เป็นนิพจน์ในโดเมนสเปกตรัมจะได้ G_A^{zx} ในโดเมนอวกาศมีค่าเป็น

$$G_A^{zx}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \mathfrak{T}^{-1}[-jk_x \tilde{G}_A^{zx}(k_p)]$$

$$= -\cos\phi \int_0^\infty \tilde{G}_A^{zx}(k_p) J_1(k_p \rho) k_p^2 dk_p \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

(3) กำหนดให้ \tilde{G}_A^{zy} เป็นนิพจน์ในโดเมนสเปกตรัมจะได้ G_A^{zy} ในโดเมนอวกาศมีค่าเป็น

$$G_A^{zy}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \mathfrak{T}^{-1}[-jk_y \tilde{G}_A^{zy}(k_p)]$$

$$= -\sin\phi \int_0^\infty \tilde{G}_A^{zy}(k_p) J_1(k_p \rho) k_p^2 dk_p \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

(4) กำหนดให้ G^ϕ เป็นนิพจน์ในโดเมนสเปกตรัมจะได้ G^ϕ ในโดเมนอวกาศมีค่าเป็น

$$G^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \mathfrak{T}^{-1}[\tilde{G}^\phi(k_p)]$$

$$= \int_0^\infty \tilde{G}^\phi(k_p) J_0(k_p \rho) k_p dk_p \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

เมื่อ $\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ โดยที่ (x,y,z) เป็นพิกัดของจุดสังเกต (x',y',z') เป็นพิกัดของแหล่งกำเนิด J_0 เป็นฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับศูนย์ (Bessel function of the first kind of order 0) และ J_1 เป็นฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับหนึ่ง (Bessel function of the first kind of order 1)

จะเห็นได้ว่าเมื่อแปลงโดเมนจากโดเมนอวกาศเป็นโดเมนสเปกตรัมแล้วแปลงกลับเป็นโดเมนอวกาศอีกครั้งในรูปของฟังก์ชันเชิงซ้อน จะช่วยลดรูปจากอินทิกรัล 2 ชั้นในสมการที่ (2.19) และ (2.20) เหลือเพียงอินทิกรัลชั้นเดียวดังสมการที่ (2.22) ถึง (2.25) ในการคำนวณค่าชุดของสมการที่ (2.22) ถึง (2.25) ที่มีการอินทิเกรตตั้งแต่ศูนย์ถึงอนันต์นั้นมีเทคนิคหลายวิธีการ ตัวอย่างเช่น รูปแบบปิดเชิงเส้นกำกับ (asymptotic closed-form) ของ Barkeshli และ Pathak (1990) ทฤษฎีเชิงเงาแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete image theory) ของ Fang, Young และ Delisle (1988) เป็นต้น เทคนิคของ Pozar (1982) ซึ่งเป็นเทคนิคหนึ่งที่อาศัยการอินทิเกรตด้วยวิธีทางเชิงเลขที่เหมาะสมกับโครงสร้างที่ไม่สลับซับซ้อน และให้คำตอบที่มีความแม่นยำในระดับที่ยอมรับได้ อีกทั้งมีการประยุกต์ใช้งานกันอย่างกว้างขวาง เทคนิคนี้จะอาศัยการแบ่งช่วงการอินทิเกรตออกเป็น 3 ช่วงดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

ในการอินทิเกรตด้วยวิธีทางเชิงเลขของฟังก์ชันที่อินทิเกรตตั้งแต่ศูนย์ถึงอนันต์ และมีโพลที่ทำให้เกิดจุดเอกฐาน (singular point) ในระนาบเชิงซ้อน $k_p = \lambda - jv$ ดังรูปที่ 2.3 นั้นต้องแบ่งช่วงของการอินทิเกรตออกเป็น 3 ช่วงได้แก่



รูปที่ 2.3 ระนาบเชิงซ้อน k_p

- (1) ช่วงที่ 1 อินทิเกรตตั้งแต่ 0 ถึง $\lambda - \delta$ เมื่อ δ มีค่าประมาณ $0.001k_p$
- (2) ช่วงที่ 2 อินทิเกรตตั้งแต่ $\lambda - \delta$ ถึง $\lambda + \delta$ ซึ่งจะอินทิเกรตด้วยวิธีทางเชิงวิเคราะห์เพื่อหลีกเลี่ยงความยุ่งยากเนื่องจากวิธีทางเชิงเลขเนื่องจากเป็นช่วงที่มีจุดเอกฐาน
- (3) ช่วงที่ 3 อินทิเกรตตั้งแต่ $\lambda + \delta$ ถึงอนันต์ซึ่งการประมาณช่วงในการอินทิเกรตถึงอนันต์นั้นสามารถประมาณค่า k_p ที่ $150k_p$ ได้ ซึ่งถือว่าเป็นค่ามากพอที่จะประมาณเป็นอนันต์ได้

การหาค่าของฟังก์ชันในช่วงที่ 2 ซึ่งอาศัยวิธีทางเชิงวิเคราะห์แทนนั้น กำหนดให้ $f(k_p)$ เป็นฟังก์ชันของกรีนที่จะหาค่าและให้ I เป็นฟังก์ชันในช่วงดังกล่าวจะได้

$$I = \int_{\lambda - \delta}^{\lambda + \delta} f(k_p) dk_p = \int_{\lambda - \delta}^{\lambda + \delta} \frac{g(k_p)}{T_m(k_p)} dk_p \dots\dots\dots (2.26)$$

เมื่อ $T_m(k_p)$ มีโพลที่ $k_p = \lambda_1 - jv_1$ เมื่อ $v_1 > 0$ และ $g(k_p)$ คือฟังก์ชันส่วนที่ไม่เป็นเอกฐานของการอินทิเกรต จากนั้นใช้การแผ่ขยายอนุกรมเทย์เลอร์เพียง 2 พจน์ของ T_m รอบจุด $k_p = \lambda_1 - jv_1$ จะได้

$$I = \frac{j \cdot g(\lambda - jv)}{T_m'(\lambda - jv)} \tan^{-1} \left(\frac{-2\delta v}{v^2 - \delta^2} \right) \dots\dots\dots (2.27)$$

เมื่อหาค่าของฟังก์ชันของกรีนได้ครบทุกส่วนประกอบแล้ว นำค่าเหล่านี้ไปใช้ร่วมกับสมการอินทิกรัลของศักย์แม่เหล็กและไฟฟ้า จากนั้นจึงทำการวิเคราะห์ค่าความหนาแน่นกระแสโดยใช้วิธีไฟไนต์อิลิเมนต์

การวิเคราะห์สายอากาศไมโครสตริปด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนพื้นฐานของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์และการวิเคราะห์เพื่อหาความหนาแน่นกระแสโดยใช้วิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ดังนี้

ขั้นตอนพื้นฐานของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์

วิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ (Jin, 1993) จัดเป็นวิธีการเชิงเลขวิธีหนึ่งที่แทนโดเมนที่ต่อเนื่องทั้งหมดในบริเวณที่พิจารณาด้วยจำนวนของโดเมนย่อย โดยฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่าถูกแทนที่ด้วยฟังก์ชันการประมาณกับสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า จากนั้นสร้างสมการโดยใช้วิธีนิพจน์แปรผัน (variational expression method) หรือวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual method) แบบกัลเลอร์คิน (Galerkin's method) ใส่เงื่อนไขขอบเขต และผลเฉลยของปัญหาค่าขอบเขตคำนวณโดยการแก้ระบบสมการ ดังนั้นในการวิเคราะห์ด้วยวิธีการไฟไนต์อิลิเมนต์สามารถสรุปเป็นขั้นตอนพื้นฐานได้ดังนี้

1. การแบ่งโดเมน (discretization of subdivision of the domain) ซึ่งเป็นขั้นตอนแรกในการแบ่งขอบเขตของบริเวณที่พิจารณาออกเป็นอิลิเมนต์ย่อยๆ
2. การเลือกฟังก์ชันการประมาณ เป็นขั้นตอนในการเลือกฟังก์ชันการประมาณ (interpolation functions) ภายในอิลิเมนต์เพื่อใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า
3. การสร้างระบบสมการ เป็นขั้นตอนการสร้างสมการในอิลิเมนต์และรวมเข้าเป็นระบบสมการชุดใหญ่ซึ่งถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ โดยการสร้างสมการสามารถสร้างขึ้นโดยใช้วิธีนิพจน์แปรผันหรือวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบกัลเลอร์คิน
4. การแก้ปัญหาค่าขอบเขต เป็นการรวมเงื่อนไขขอบเขตเข้าไปในระบบสมการชุดใหญ่ เพื่อช่วยในการหาผลเฉลยของระบบสมการ
5. การหาผลเฉลยของระบบสมการ เป็นขั้นตอนในการหาคำตอบของสมการเพื่อหาค่าผลเฉลยของระบบสมการชุดใหญ่

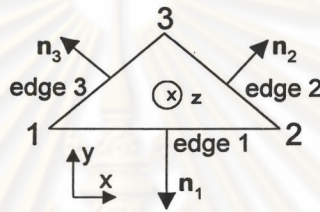
เมื่อได้ค่าผลเฉลยของระบบสมการออกมาแล้ว จึงนำผลเฉลยที่ได้มาหาค่าอื่นที่เกี่ยวข้องซึ่งต้องการทราบค่าต่อไปได้ จากขั้นตอนทั้งหมดข้างต้นนี้ จะเห็นได้ว่าวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์เป็นวิธีที่มีระเบียบแบบแผนและมีการทำงานเป็นขั้นเป็นตอน ซึ่งเป็นเหตุผลหนึ่งที่เลือกวิธีนี้มาใช้ในงานวิจัย

การวิเคราะห์ความหนาแน่นกระแสด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์

การคำนวณหาความหนาแน่นกระแสบนแผ่นสายอากาศด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ชนิดเวกเตอร์ (vector finite element or edge-based vector basis functions) นั้น เริ่มจากการแบ่งแผ่นสายอากาศออกเป็นสามเหลี่ยมขนาดเล็กลงแสดงในรูปที่ 2.4 และทำการประมาณตัวแปรที่ไม่ทราบค่าภายในแต่ละอิลิเมนต์ดังนี้

$$J_s = \sum_{i=1}^m \alpha_j S_j \dots\dots\dots (2.28)$$

เมื่อ α_j คือสัมประสิทธิ์การกระจายที่ไม่ทราบค่า (unknown expansion coefficient) ที่ขอบ (edge) j ใดๆ S_j คือฟังก์ชันเบสิคชนิดเวกเตอร์ (vector basis function) และ m คือจำนวนอิลิเมนต์ทั้งหมดที่แบ่ง



รูปที่ 2.4 อิลิเมนต์สามเหลี่ยม

เมื่อแทนที่สมการที่ (2.28) ลงในสมการที่ (2.12) และจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\sum_{j=1}^m \left[z \times j\omega \int_S \overline{G}_A \cdot S_j dS' - \frac{1}{j\omega} \int_S \nabla(\nabla' G^\phi \cdot S_j dS') \right] \alpha_j = z \times E^e \dots\dots\dots (2.29)$$

โดยสมการที่ (2.29) จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตคือ

$$\begin{aligned} n_1 \cdot S_j &= 0 \text{ บนขอบเขตภายนอกของแผ่นสายอากาศ} \\ \sum_i n_i \cdot S_j &= 0 \text{ บนขอบเขตภายในระหว่างอิลิเมนต์} \dots\dots\dots (2.30) \end{aligned}$$

เมื่อ n_i เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวตั้งฉากกับขอบ i ($i=1,2,3$) ของอิลิเมนต์ จากสมการที่ (2.30) จะเห็นได้ว่าชุดของฟังก์ชันเบสิคชนิดเวกเตอร์สามารถเป็นตัวแทนของความหนาแน่นกระแสได้โดยมีความต่อเนื่องในแนวตั้งฉาก

จากนั้นสร้างระบบสมการโดยในงานวิจัยนี้เลือกวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบการเลอว์คินด้วยฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก W_i (weighting function) ทำการถ่วงน้ำหนักทั้งสองข้างของสมการที่ (2.29) และอินทิเกรตทั้งพื้นที่ผิว dS จะได้ว่า

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \int_S W_i \left[z \times \left(j\omega \int_S \overline{G}_A \cdot S_j dS' - \frac{1}{j\omega} \int_S \nabla(\nabla' G^\phi \cdot S_j dS') \right) \right] dS \dots\dots\dots (2.31) \\ b_i &= \int_S W_i \cdot (z \times E^e) dS \end{aligned}$$

เมื่อ $\sum_{j=1}^m C_{ij} \alpha_j = b_i$ หรือ $[C][\alpha] = [b]$

ซึ่งเป็นชุดสมการเชิงเส้น โดยที่ C_{ij} เป็นส่วนประกอบของเมตริกซ์จัตุรัส $[C]$ และ b_i เป็นส่วนประกอบของเมตริกซ์แถวตั้ง $[b]$

สำหรับค่า b_i ซึ่งแสดงถึงระบบป้อนกำลังนั้น ในงานวิจัยนี้เลือกใช้โพรบโคแอกเซียล เนื่องจากไม่มีการสูญเสียเนื่องจากการแผ่พลังงานที่สายนำสัญญาณ และสามารถทำการแมตช์อิมพีแดนซ์ได้ง่าย ค่า b_i สามารถจัดรูปได้ใหม่โดยใช้ทฤษฎีบทภาวะย้อนกลับ (reciprocity theorem) ดังนี้

$$b_i = \int_S \mathbf{W}_i \cdot \mathbf{E}^c dS = \int_V \mathbf{J}^c \cdot \mathbf{E}_i dV \dots\dots\dots (2.32)$$

เมื่อ \mathbf{E}_i คือสนามไฟฟ้าที่สร้างโดยความหนาแน่นกระแส $\mathbf{J}_s = \mathbf{S}_i$ และ \mathbf{E}^c เป็นสนามไฟฟ้าที่สร้างโดยความหนาแน่นกระแสที่มากะตุ้น \mathbf{J}^c (A/m^2) ผ่านจุดป้อนกำลังที่ตำแหน่ง (x_e, y_e) ซึ่งกระแสกระตุ้นทั้งหมดจะถูกนอร์แมลไลซ์กับกระแสขนาด 1 A ดังนั้นจะได้ว่า

$$\mathbf{J}^c = z\delta(x - x_e)\delta(y - y_e) \dots\dots\dots (2.33)$$

และโดเมน V_0 ที่พิจารณาจะถูกลดรูปเป็นส่วนของความยาว h ของโพรบ ถ้ามองเป็นส่วนที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางประมาณเป็นศูนย์ จะแสดง b_i ได้ดังสมการที่ (2.34)

$$b_i = \int_h^0 z \cdot \mathbf{E}_i dz \dots\dots\dots (2.34)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(x, y, z) &= -j\omega \mathbf{A} - \nabla\phi \\ &= -j\omega \int_S \overline{\mathbf{G}}_A(x, y, z|x', y', 0) \cdot \mathbf{W}(x', y', 0) dS' + \dots\dots\dots (2.35) \\ &\quad + \frac{1}{j\omega} \nabla \int_S G^\phi(x, y, z|x', y', 0) \cdot \nabla' \cdot \mathbf{W}(x', y', 0) dS' \end{aligned}$$

แทนค่า \mathbf{E}_i ในสมการที่ (2.35) ลงในสมการที่ (2.34) จะได้ค่า b_i เมื่อสร้างระบบสมการได้แล้วจึงทำการใส่เงื่อนไขขอบเขตดังสมการที่ (2.30) จึงจะได้ค่า α_j ใดๆ ได้ เมื่อได้ค่าแล้วก็นำค่าเหล่านี้ไปหาค่าอิมพีแดนซ์ขาเข้าและแบบรูปการแผ่พลังงานต่อไป