

## บทที่ 2

### ทฤษฎี

#### 2.1 ความนำ

การวิเคราะห์โครงสร้างแบบเชิงเส้นเกิดจากการหาค่าสติฟเนสในชั้นส่วนที่ยังไม่เคลื่อนที่ แล้วนำมารวมกันโดยวิธีรวมสติฟเนสโดยตรง ( Direct Stiffness Method ) แต่การวิเคราะห์โครงสร้างแบบไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิตเกิดจากการหาค่าสติฟเนสในชั้นส่วนที่เกิดการเคลื่อนที่แล้วนำมารวมกันโดยวิธีรวมสติฟเนสโดยตรง ( Direct Stiffness Method ) ส่วนการวิเคราะห์ความไม่เชิงเส้นทางวัสดุจะใช้การเพิ่มน้ำหนักกระทำที่ละชั้นจนโครงสร้างเกิดการวิบัติ

#### 2.2 พื้นฐานของทฤษฎีต่าง ๆ

หลักการพื้นฐานในการวิเคราะห์โครงสร้าง

1 เงื่อนไขสมดุลย์ โครงสร้างจะอยู่ในสภาพสมดุลย์ได้จะต้องมีแรงภายนอกเท่ากับแรงภายใน ไม่ว่าโครงสร้างนั้นจะอยู่ในรูปของโครงสร้างทั้งหมด ( whole structure ) หรืออยู่ในรูปชิ้นส่วนอิสระ ( free body ) ของโครงสร้างนั้น เงื่อนไขของความสมดุลย์บรรยายได้ในรูปสมการสมดุลย์ทางสถิตย ( static equilibrium equation ) ทั้งสามมิติ คือ

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0 \end{aligned}$$

2 กฎแห่งวัสดุ หมายถึง กฎจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อบรรยายพฤติกรรมของวัสดุภายใต้การกระทำของแรง

3 เงื่อนไขของการต่อเนื่องหรือความสอดคล้อง ความเครียดภายในและการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างต้องมีความสอดคล้องกัน โดยไม่เกิดการแตกแยก หรือเหลื่อมทับกันของทุก ๆ จุดของโครงสร้างและต้องสอดคล้องกับสภาพขอบหรือการรองรับ

ข้อสมมติฐานของการวิเคราะห์อีลาสติก

1 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดในชั้นส่วน จะต้องเป็นไปตามกฎของฮุก ( Hooke's Law ) คือความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดในชั้นส่วนจะต้องเป็นเส้นตรง

2 ความยาวของโครงสร้างในการวิเคราะห์ให้ความยาวก่อนน้ำหนักกระทำ

3 การวิเคราะห์เป็นแบบอันดับแรก หมายถึง การวิเคราะห์ขั้นแรกในการหาการตอบสนองของโครงสร้างเนื่องจากแรงกระทำ โดยไม่คำนึงถึงการวิเคราะห์อันดับที่สอง ซึ่งอาจประกอบด้วยผลของการใช้ความยาวใหม่หลังจากน้ำหนักกระทำ โมเมนต์ในชิ้นส่วนเนื่องจากแรงตามแนวแกนคู่กับระยะโค้ง

การวิเคราะห์อีลาสติก คือการวิเคราะห์หาแรงภายในของชิ้นส่วนโดยใช้เงื่อนไขสมมูลย์กฎแห่งวัสดุตามข้อสมมติฐาน ( Hooke's Law ) และเงื่อนไขของการต่อเนื่องหรือความสอดคล้อง โดยจะไม่คำนึงถึงสตีเฟนส์ที่เปลี่ยนไปเนื่องจากผลของการที่ชิ้นส่วนเกิดการเคลื่อนที่ ความยาวของชิ้นส่วนที่เปลี่ยนไปเนื่องจากแรงกระทำ และค่าโมเมนต์ที่เปลี่ยนไปเนื่องจากแรงในแนวแกนคู่กับระยะโค้ง

การวิเคราะห์อีลาสติก-พลาสติกอันดับที่ 1 หลักใหญ่ในการออกแบบคือ การหาค่าน้ำหนักบรรทุกสูงสุด ( maximum load ) ที่จะทำให้โครงสร้างเกิดการวิบัติ ( failure ) ภายใต้สภาวะที่เกิดการโก่งตัวอย่างมาก ประโยชน์ของการออกแบบโดยวิธีอีลาสติก-พลาสติกอันดับที่ 1 คือเป็นการออกแบบที่ประหยัดกว่าการออกแบบอีลาสติกสำหรับโครงสร้างอินดิเทอร์มิเนท ข้อสมมติฐานที่เปลี่ยนไปจากการวิเคราะห์อีลาสติกคือ การสมมติกฎแห่งวัสดุของชิ้นส่วนด้วยเส้นตรงสองเส้นหรือกำหนดให้ชิ้นส่วนมีคุณสมบัติอีลาสติก-พลาสติกสมบูรณ์ ( Elastic-Perfectly Plastic Material )

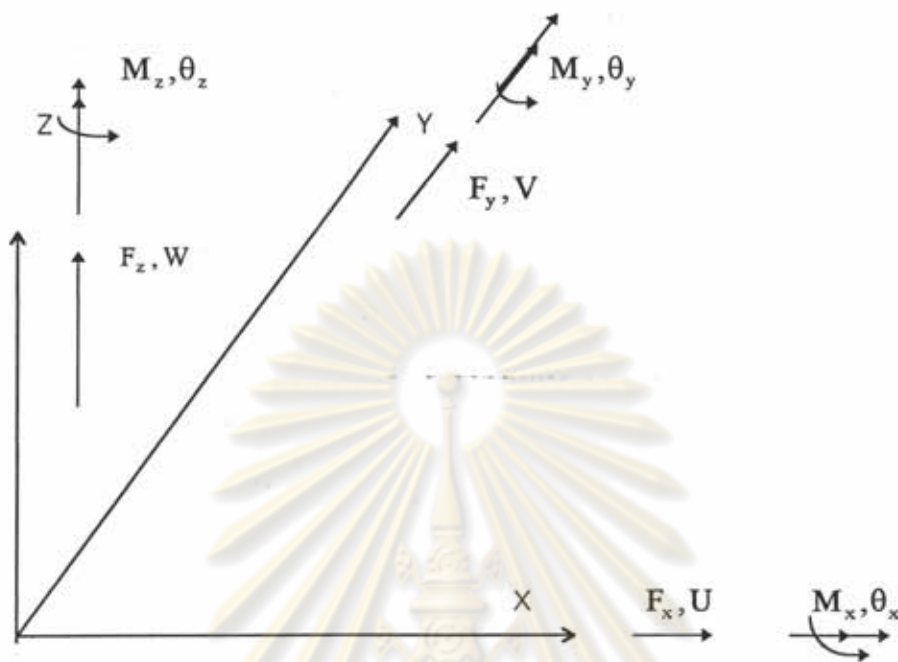
การวิเคราะห์อีลาสติก-พลาสติกอันดับที่ 2 หลักการวิเคราะห์จะเหมือนกับการวิเคราะห์อีลาสติก-พลาสติกอันดับที่ 1 แต่เนื่องจากโครงสร้างเกิดการโก่งตัวอย่างมากจึงทำให้ผลของแรงในแนวแกนคู่กับระยะโค้งมีค่ามาก โดยเฉพาะโครงสร้างที่ไม่มีการค้ำยัน ข้อสมมติฐานในการวิเคราะห์แบบอันดับที่หนึ่งจึงต้องเปลี่ยนเป็นการวิเคราะห์แบบอันดับที่สอง

### 2.3 ทฤษฎีของการวิเคราะห์หาค่าสตีเฟนส์ไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต ( Nonlinear Geometry ) กำหนดให้

เวกเตอร์ของแรงและการเคลื่อนที่จะเป็นบวกเมื่ออยู่ในทิศทางเดียวกันกับแกนบวก ทิศทางโมเมนต์ตามกฎมือขวา คือนิ้วมือที่กำจะแสดงการหมุนของโมเมนต์ นิ้วโป้งจะแสดงทิศทางของโมเมนต์

แรงดึงอยู่ในทิศทางบวกหรือแรงอัดอยู่ในทิศทางลบ

ทิศทางของแรงจะเป็นตามรูปที่ 2.1

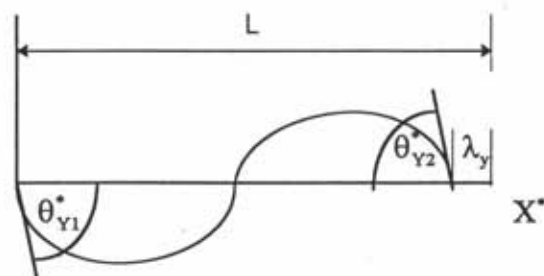


รูปที่ 2.1 ทิศทางของแรงและการเคลื่อนที่ ระยะยึดหดในแนวแกนในพิกัดออยเลอร์

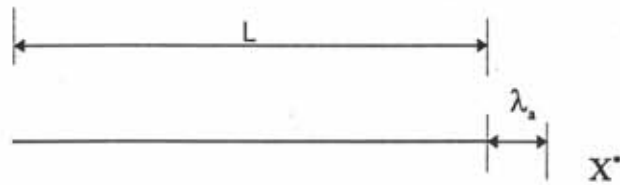


รูปที่ 2.2a การหดตัวของชิ้นส่วนที่รับโมเมนต์ในทิศทาง  $Z^*$  ในระนาบ  $X^*Y^*$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.2b การหดตัวของชิ้นส่วนที่รับโมเมนต์ในทิศทาง  $Y^*$  ในระนาบ  $X^*Z^*$



รูปที่ 2.2c การยืดตัวของชิ้นส่วนที่รับแรงดึงในแนวแกนในแกน  $X^*$

### รูปที่ 2.2

หมายเหตุ การกำหนดทิศทางของแกนต่าง ๆ จะใช้ตามรูปที่ 2.1

โดยที่

- $\theta_{z1}^*$  = มุมหมุนในทิศทางแกน  $Z^*$  ของชิ้นส่วนที่ปลาย 1
- $\theta_{z2}^*$  = มุมหมุนในทิศทางแกน  $Z^*$  ของชิ้นส่วนที่ปลาย 2
- $\theta_{y1}^*$  = มุมหมุนในทิศทางแกน  $Y^*$  ของชิ้นส่วนที่ปลาย 1
- $\theta_{y2}^*$  = มุมหมุนในทิศทางแกน  $Y^*$  ของชิ้นส่วนที่ปลาย 2
- $\lambda_z$  = ระยะหดตัวในแกน  $X^*$  เนื่องจากโมเมนต์ในทิศทางแกน  $Z^*$
- $\lambda_y$  = ระยะหดตัวในแกน  $X^*$  เนื่องจากโมเมนต์ในทิศทางแกน  $Y^*$
- $\lambda_s$  = ระยะยืดตัวในแกน  $X^*$  เนื่องจากแรงดึงในแนวแกน
- $L$  = ความยาวของชิ้นส่วนก่อนการเคลื่อนที่
- $Y(X)$  = ระยะโก่งตัวของชิ้นส่วนในแกน  $Y^*$  ที่ระยะ  $X$  จากปลาย 1
- $Z(X)$  = ระยะโก่งตัวของชิ้นส่วนในแกน  $Z^*$  ที่ระยะ  $X$  จากปลาย 1

พิจารณารูปที่ 2.2a เป็นการมองชิ้นส่วนโครงสร้างสามมิติในพิกัดออยเลอร์  $X^*Y^*Z^*$  เพื่อที่จะหาค่าสติเฟเนสและหาระยะยืดหดในแนวแกน ระบายที่พิจารณาคือระบาย  $X^*Y^*$  โดยพิจารณาชิ้นส่วนที่ปลายทั้งสองข้างของชิ้นส่วนซึ่งเกิดการหมุนเนื่องจากโมเมนต์ในแกน  $Z^*$  ของพิกัดออยเลอร์ คือมุมหมุน  $\theta_{z1}^*$  สำหรับปลายที่ 1 และ มุมหมุน  $\theta_{z2}^*$  สำหรับปลายที่ 2 ซึ่งการหมุนจะทำให้เกิดการหดตัวในแนวแกนเป็นระยะ  $\lambda_z$

การหาฟังก์ชันสมมติของชิ้นส่วนที่เกิดการโก่งตัว จะแทนฟังก์ชันการโก่งตัวด้วยโพลีโนเมียลซึ่งตามหลักคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันทุกฟังก์ชันสามารถแทนด้วยโพลีโนเมียลได้ ดังสมการที่ 2.1

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \quad (2.1)$$

โดยที่

$f(x)$  = ฟังก์ชันที่จะนำมาแทนระยะการโก่งตัวของชิ้นส่วนในระนาบ  $X^*Y^*$  และ  $X^*Z^*$   
 $a_n$  = ค่าคงที่พจน์ที่  $n$

พิจารณารูปที่ 2.2a เงื่อนไขขอบเขตของชิ้นส่วน ( Boundary Condition )

$$\begin{aligned} Y(0) &= 0 & Y'(0) &= \theta_{z1}^* \\ Y(L) &= 0 & Y'(L) &= \theta_{z1}^* \end{aligned} \quad (2.2)$$

พิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขตของชิ้นส่วน ( Boundary Condition ) เนื่องจากมีค่าคงที่ 4 ตัว สามารถแก้ฟังก์ชันได้ 4 พจน์ จะได้ว่าพจน์ของ  $f(x)$  ในสมการที่ 2.1 มี 4 พจน์ Ghali ( 9 )

พิจารณาระนาบ  $X^*Y^*$  ในรูปที่ 2.2a ฟังก์ชันการโก่งตัว  $Y(x)$  จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} Y(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ Y'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

ในสมการที่ 2.3 ระนาบที่พิจารณาคือ ระนาบ  $X^*Y^*$  ระยะการโก่งตัว  $Y(x)$  ที่ได้จากสมการที่ 2.3 จะเป็นระยะที่โปรเจกมาจากระนาบใด ๆ ของชิ้นส่วนที่ได้เกิดการโก่งตัวไปแล้วในสามมิติ มาสู่ระนาบ  $X^*Y^*$  นี้

เมื่อนำเงื่อนไขขอบเขตของชิ้นส่วน ( Boundary Condition ) แทนค่าลงไป ในสมการที่ 2.3 จะได้

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= \theta_{z1}^* \\ a_0 + a_1L + a_2L^2 + a_3L^3 &= 0 \\ a_1 + 2a_2L + 3a_3L^2 &= \theta_{z2}^* \end{aligned} \quad (2.4)$$

แก้สมการจะได้ค่า

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 & a_1 &= \theta_{z1}^* \\ a_2 &= -\frac{2\theta_{z1}^*}{L} - \frac{\theta_{z2}^*}{L} & a_3 &= \frac{\theta_{z1}^*}{L^2} + \frac{\theta_{z2}^*}{L^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

ฟังก์ชันรูปร่างสมมติ จะได้เท่ากับ

$$Y(x) = \left( x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \theta^*_{z1} + \left( -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \theta^*_{z2} \quad (2.6)$$

การหาระยะการหดตัวเนื่องจากโมเมนต์ในแกน  $Z^*$



รูปที่ 2.3 รูปแสดงการหาค่าหดตัวของชั้นส่วน

จากรูปที่ 2.3 แสดงการหดตัวของชั้นส่วนย่อยที่ตัดมาจากคานหรือเสา ก่อนและหลังที่จะรับโมเมนต์ จะได้คำตอบเป็นการหดตัวต่อความยาว  $dx$  สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} d\lambda &= dx - dx \cdot \cos\theta \\ d\lambda &= dx(1 - \cos\theta) \\ d\lambda &= dx \left( \frac{\theta}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (2.7)$$

สามารถหาระยะการหดตัว  $\lambda_z$  เนื่องจากโมเมนต์ในแกน  $Z^*$  ในระนาบ  $X^*Y^*$  ของรูปที่ 2.2a โดยการอินทิเกรตสมการที่ 2.7 จะได้เป็น

$$\lambda_z = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (2.8a)$$

นำสมการที่ 2.6 มาหาอนุพันธ์เป็นสมการที่ 2.9 แล้วแทนลงในสมการที่ 2.8a เพื่อที่จะหาระยะหดในแนวแกนจากโมเมนต์ในทิศทาง  $Z$

$$Y(x) = \left( x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \theta^*_{z1} + \left( -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \theta^*_{z2}$$

$$Y'(x) = \left(1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}\right)\theta_{z1}^* + \left(-\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}\right)\theta_{z2}^* \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \lambda_z &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left(1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}\right)\theta_{z1}^* + \left(-\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}\right)\theta_{z2}^* \right]^2 dx \\ \lambda_z &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left(1 - \frac{4X}{L} + \frac{3X^2}{L^2}\right)\theta_{z1}^* \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left(-\frac{2X}{L} + \frac{3X^2}{L^2}\right)\theta_{z2}^* \right]^2 dx \\ &\quad + \int_0^L \left[ \left(1 - \frac{4X}{L} + \frac{3X^2}{L^2}\right)\left(-\frac{2X}{L} + \frac{3X^2}{L^2}\right)\theta_{z1}^*\theta_{z2}^* \right] dx \end{aligned} \quad (2.8b)$$

เราจะทำการอินทิเกรตสมการที่ 2.8b ที่ละพจน์ เพื่อความสะดวกในการหาคำตอบ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left(1 - \frac{4X}{L} + \frac{3X^2}{L^2}\right)\theta_{z1}^* \right]^2 dx &= \frac{\theta_{z1}^{*2}}{2} \int_0^L \left(1 - \frac{8X}{L} + \frac{22X^2}{L^2} - \frac{24X^3}{L^3} + \frac{9X^4}{L^4}\right) dx \\ &= \frac{\theta_{z1}^{*2}L}{2} \left(1 - \frac{8}{2} + \frac{22}{3} - \frac{24}{4} + \frac{9}{5}\right) \\ &= \frac{2\theta_{z1}^{*2}L}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left(-\frac{2X}{L} + \frac{3X^2}{L^2}\right)\theta_{z2}^* \right]^2 dx &= \frac{\theta_{z2}^{*2}}{2} \int_0^L \left(\frac{4X^2}{L^2} - \frac{12X^3}{L^3} + \frac{9X^4}{L^4}\right) dx \\ &= \frac{\theta_{z2}^{*2}L}{2} \left(\frac{4}{3} - \frac{12}{4} + \frac{9}{5}\right) \\ &= \frac{2\theta_{z2}^{*2}L}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[ \left(1 - \frac{4X}{L} + \frac{3X^2}{L^2}\right)\left(-\frac{2X}{L} + \frac{3X^2}{L^2}\right)\theta_{z1}^*\theta_{z2}^* \right] dx &= \theta_{z1}^*\theta_{z2}^* \int_0^L \left(\frac{-2X}{L} + \frac{11X^2}{L^2} - \frac{18X^3}{L^3} + \frac{9X^4}{L^4}\right) dx \\ &= \theta_{z1}^*\theta_{z2}^*L \left(\frac{-2}{2} + \frac{11}{3} - \frac{18}{4} + \frac{9}{5}\right) \\ &= -\frac{\theta_{z1}^*\theta_{z2}^*L}{30} \end{aligned}$$

เมื่อได้พจน์ที่อินทิเกรตแล้ว นำลงไปแทนในสมการที่ 2.8b จะได้

$$\lambda_z = \left(2\theta_{z1}^{*2} - \theta_{z1}^*\theta_{z2}^* + 2\theta_{z2}^{*2}\right) \frac{L}{30} \quad (2.10)$$

โดยที่

$Y(X)$  = ระยะโก่งตัวของชิ้นส่วนในแกน  $Y^*$  ที่ระยะ  $X$  จากปลาย 1

$$\begin{aligned}\theta_{z1}^* &= \text{มุมหมุนในทิศทางแกน } Z^* \text{ ของชิ้นส่วนในที่ปลาย 1} \\ \theta_{z2}^* &= \text{มุมหมุนในทิศทางแกน } Z^* \text{ ของชิ้นส่วนในที่ปลาย 2}\end{aligned}$$

พิจารณารูปที่ 2.2b เป็นการมองชิ้นส่วนโครงสร้างสามมิติในพิกัดออยเลอร์  $X^*Y^*Z^*$  เพื่อที่จะหาค่าสติฟเนสและหาระยะยืดหดในแนวแกน ระบายที่พิจารณาคือระบาย  $X^*Z^*$  โดยพิจารณาชิ้นส่วนที่ปลายทั้งสองข้างของชิ้นส่วน ซึ่งเกิดการหมุนเนื่องจากโมเมนต์ในแกน  $Y^*$  ของพิกัดออยเลอร์คือ มุมหมุน  $\theta_{y1}^*$  สำหรับปลายที่ 1 และ มุมหมุน  $\theta_{y2}^*$  สำหรับปลายที่ 2 ซึ่งการหมุนจะทำให้เกิดการหดตัวในแนวแกนเป็นระยะ  $\lambda_y$  จากสมการที่ 2.6 ในกรณีเดียวกัน ฟังก์ชันรูปร่างระยะโค้งในแกน  $Z^*$  ที่พิจารณาจากรระบาย  $X^*Z^*$  ตามรูปที่ 2.2b จะได้

$$Z(x) = -\left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L}\right)\theta_{y1}^* - \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_{y2}^* \quad (2.11)$$

ในกรณีเดียวกันกับสมการที่ 2.8a ระยะหดเนื่องจากโมเมนต์ในแกน  $Y^*$  ในระบาย  $X^*Z^*$  จะได้

$$\lambda_y = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 dx \quad (2.12)$$

เมื่อนำสมการที่ 2.11 มาหาอนุพันธ์ แล้วแทนลงในสมการที่ 2.13 จะได้การหดตัวเนื่องจากโมเมนต์ในแกน  $Y^*$  คล้ายสมการที่ 2.10

$$\lambda_y = (2\theta_{y1}^{*2} - \theta_{y1}^*\theta_{y2}^* + 2\theta_{y2}^{*2}) \frac{L}{30} \quad (2.13)$$

การยืดหดตัวเนื่องจากแรงในแนวแกน ตามรูปที่ 2.2c

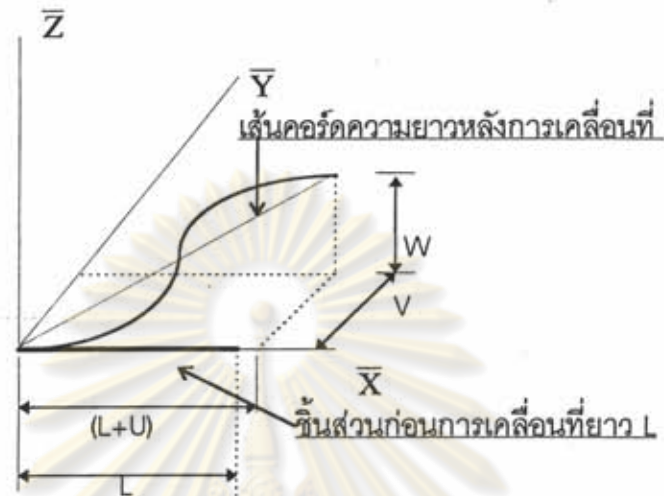
$$\lambda_x = \frac{P_x^* L}{AE} \quad (2.14)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}P_x^* &= \text{แรงในแนวแกนในพิกัดออยเลอร์} \\ A &= \text{พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน} \\ E &= \text{โมดูลัสยืดหยุ่นของชิ้นส่วน} \\ L &= \text{ความยาวของชิ้นส่วนก่อนการเคลื่อนที่}\end{aligned}$$



การหดตัวทั้งหมดสามารถหาได้ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 แสดงการยืดหดในแนวแกนของชิ้นส่วนที่เกิดการเคลื่อนที่

จากรูปที่ 2.4 ชิ้นส่วนยาว  $L$  เกิดการเคลื่อนที่ และการหมุนของจุดต่อในทิศทางต่าง ๆ ทำให้ความยาวในแนวแกนเปลี่ยนแปลงไป สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

ความยาวที่เปลี่ยนแปลง = ความยาวเส้นคอร์ดหลังการเคลื่อนที่ - ความยาวก่อนการเคลื่อนที่

$$\lambda_c = \sqrt{((L+U)^2 + V^2 + W^2)} - L \quad (2.15)$$

โดยที่

$\lambda_c$  = การเปลี่ยนแปลงระยะทั้งหมดในแนวแกน เนื่องจากการหมุนและการเคลื่อนตัวของจุดต่อ หรือเนื่องจากแรงในแนวแกน, โมเมนต์ในแกน  $\bar{Y}$  และโมเมนต์ในแกน  $\bar{Z}$

$U$  = ค่าการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างทั้งสองปลายในทิศทาง  $\bar{X}$

$V$  = ค่าการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างทั้งสองปลายในทิศทาง  $\bar{Y}$

$W$  = ค่าการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างทั้งสองปลายในทิศทาง  $\bar{Z}$

เนื่องจากระยะการยืดหดทั้งหมดอยู่ในแกนเดียวกันจึงสามารถรวมกันได้โดยตรง

หลักการคิดเครื่องหมายบวกลบ

ชิ้นส่วนที่เกิดการยืดตัวจะให้เครื่องหมายบวก

$\lambda_x$  ระยะยึดตัวในแกน  $X^*$  เนื่องมาจากแรงดึงในแนวแกน ดูในรูปที่ 2.2c  
 ชิ้นส่วนที่เกิดการหดตัวจะให้เครื่องหมายลบ

$\lambda_z$  ระยะหดตัวในแกน  $X^*$  เนื่องมาจากโมเมนต์ในทิศทางแกน  $Z^*$  ดูในรูปที่ 2.2a

$\lambda_y$  ระยะหดตัวในแกน  $X^*$  เนื่องมาจากโมเมนต์ในทิศทางแกน  $Y^*$  ดูในรูปที่ 2.2b

ระยะยึดหดทั้งหมดจะเท่ากับ

$$\lambda_t = \lambda_x - \lambda_y - \lambda_z$$

$$\lambda_x = \lambda_t + \lambda_y + \lambda_z$$

$$\lambda_x = \lambda_t + (2\theta_{y1}^{*2} - \theta_{y1}^* \theta_{y2}^* + 2\theta_{y2}^{*2}) \frac{L}{30} + (2\theta_{z1}^{*2} - \theta_{z1}^* \theta_{z2}^* + 2\theta_{z2}^{*2}) \frac{L}{30} \quad (2.16)$$

โดยที่

$\lambda_z$  = การเปลี่ยนแปลงระยะในแนวแกน เนื่องจากโมเมนต์ทิศทาง  $Z$

$\lambda_y$  = การเปลี่ยนแปลงระยะในแนวแกน เนื่องจากโมเมนต์ทิศทาง  $Y$

$\lambda_x$  = การเปลี่ยนแปลงระยะในแนวแกน เนื่องจากแรงในแนวแกน

$\lambda_t$  = การเปลี่ยนแปลงระยะในแนวแกนทั้งหมด เนื่องจากการหมุนและการเคลื่อนตัวของจุดต่อ หรือเนื่องจากแรงในแนวแกน, โมเมนต์ในแกน  $Y$  และโมเมนต์ในแกน  $Z$

พลังงานความเครียดทั้งหมด ( $U$ ) ในพิกัดออยเลอร์

$$U = \frac{EI_y}{2} \int_0^L \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EI_z}{2} \int_0^L \left( \frac{d^2 z}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^L \left( \frac{\lambda_x}{L} \right)^2 dx + \frac{GJ}{2} \int_0^L \left( \frac{d\phi_t}{dx} \right)^2 dx \quad (2.17.1)$$

สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$U = \frac{1}{2} M_{z1} \theta_{z1}^* + \frac{1}{2} M_{z2} \theta_{z2}^* + \frac{1}{2} M_{y1} \theta_{y1}^* + \frac{1}{2} M_{y2} \theta_{y2}^* + \frac{EA}{2L} \lambda_x^2 + \frac{1}{2} M_x \theta_x^* \quad (2.17.2)$$

แต่

$$M_{z1} = \left( \frac{4EI_z}{L} \theta_{z1}^* + \frac{2EI_z}{L} \theta_{z2}^* \right) \quad M_{z2} = \left( \frac{4EI_z}{L} \theta_{z2}^* + \frac{2EI_z}{L} \theta_{z1}^* \right)$$

$$M_{y1} = \left( \frac{4EI_y}{L} \theta_{y1}^* + \frac{2EI_y}{L} \theta_{y2}^* \right) \quad M_{y2} = \left( \frac{4EI_y}{L} \theta_{y2}^* + \frac{2EI_y}{L} \theta_{y1}^* \right)$$

$$M_x = \frac{GJ\theta_x^*}{L}$$

จากสมการที่ 2.17.2 เราจะได้พลังงานทั้งหมดของชิ้นส่วนที่เกิดการเคลื่อนที่ และสามารถนำสมการดังกล่าวไปหาค่าสตีเฟนเนสของชิ้นส่วนได้ โดยอาศัยทฤษฎีพลังงาน

การหาค่าสตีเฟนเนสโดยใช้ทฤษฎีที่หนึ่งของคาสติกลีอาโน ( Castigliano )

หลักการคือการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ทั้งหมด เนื่องจากงานสมมติของระยะโก่งที่ตำแหน่ง  $i$  มีค่าเป็นศูนย์ หรือเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$d\Pi = dU - dW_e = 0 \quad (2.18.1)$$

ระยะโก่งที่สมมติคือ จะเกิดการเคลื่อนที่สมมติ  $dD_i$  ที่ทุกตำแหน่งที่แรงกระทำ  $S_i$

เนื่องจาก  $U$  เป็นฟังก์ชันของ  $D_i$  ;  $U = f(D_1, D_2, D_3, \dots)$  เพราะฉะนั้นจะได้อะไรจากการเปลี่ยนแปลงพลังงานความเครียดจากงานสมมติจะเท่ากับ

$$dU = \frac{\partial U}{\partial D_i} dD_i \quad (2.18.2)$$

งานสมมติภายนอกเนื่องจากการเคลื่อนที่สมมติจะเท่ากับ แรงคูณกับการเคลื่อนที่สมมติ จะได้

$$dW = S_i dD_i \quad (2.18.3)$$

นำสมการที่ 2.18.2 และ 2.18.3 แทนลงในสมการที่ 2.18.1 จะได้

$$\frac{\partial U}{\partial D_i} dD_i - S_i dD_i = 0 \quad (2.19)$$

โดยที่

$d\Pi$  = การเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ทั้งหมดเนื่องจากการเคลื่อนที่สมมติ

$dU$  = การเปลี่ยนแปลงพลังงานความเครียดเนื่องจากการเคลื่อนที่สมมติ

$dW_e$  = งานสมมติภายนอกเนื่องจากการเคลื่อนที่สมมติ

$D_i$  = การเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนที่ตำแหน่ง  $i$  เมื่อรับแรงกระทำ  $S_i$

$dD_i$  = ระยะโก่งสมมติ ทิศทางเดียวกับแรง  $S_i$

$S_i$  = แรงภายในของชิ้นส่วนที่จุด  $i$

$dS_i$  = แรงที่เปลี่ยนไปเนื่องจากการเกิดการเคลื่อนที่สมมติ

$\frac{\partial U}{\partial D_i}$  = พาหะลิตริวาที่ฟของฟังก์ชัน  $U$  ต่อตัวแปร  $D_i$

จากสมการที่ 2.19 สามารถเขียนในรูป

$$\delta\Pi = \left( \frac{\partial U}{\partial D_i} - S_i \right) dD_i = 0$$

เนื่องจาก เทอม  $dD_i$  จะต้องไม่เป็นศูนย์เพราะจะไม่มีประโยชน์ในการวิเคราะห์ จะได้ว่า

$$\frac{\partial U}{\partial D_i} - S_i = 0$$

สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$S_i = \frac{\partial U}{\partial D_i} \quad (2.20)$$

การหาค่าสติฟเนสชันส่วนหาได้โดย หาค่าแรงภายในที่เปลี่ยนไปต่อหนึ่งหน่วยการเคลื่อนที่ที่จุดนั้น หรือสามารถหาได้โดยการหาอนุพันธ์ของแรงด้วยการเคลื่อนที่นั้น

$$\frac{\partial S_i}{\partial D_j} = K_{ij} \quad (2.21)$$

โดยที่

$$K_{ij} = \text{ค่าสติฟเนสเมตริกซ์}$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial D_j} = \text{พหุคูณลาติวาที่ฟของฟังก์ชัน } S_i \text{ ต่อตัวแปร } D_j \text{ หรือค่าการเปลี่ยนแปลงของแรงภายในที่จุด } i \text{ ต่อการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่หนึ่งหน่วยที่จุด } j$$

$$D_j = \text{การเคลื่อนที่ที่จุด } j$$

แทนค่าสมการที่ 2.20 ลงในสมการที่ 2.21 จะได้

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_i \partial D_j} \quad (2.22)$$

ต่อไปจะแสดงการหาค่า  $K_{11}, K_{13}, K_{14}, K_{33}, K_{34}, K_{35}$  ด้วยสมการที่ 2.22 เพื่อเป็นตัวอย่าง

การหาแรงในแนวแกน จากสมการที่ 2.20 จะได้

$$S_i \text{ คือแรงในแนวแกนของพิกัดออยเลอร์ซึ่งจะเท่ากับ } P_x^*$$

$D_i$  คือระยะการเคลื่อนที่ทั้งหมดของ  $P_x^*$  ซึ่งเท่ากับ  $\lambda_t$

$$P_x^* = \frac{\partial U}{\partial \lambda_t} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2} M_{z1} \theta_{z1}^* + \frac{1}{2} M_{z2} \theta_{z2}^* + \frac{1}{2} M_{y1} \theta_{y1}^* + \frac{1}{2} M_{y2} \theta_{y2}^* + \frac{EA}{2L} \cdot \lambda_t^2 + \frac{1}{2} M_x \theta_x^* \right)}{\partial \lambda_t}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_t} = \frac{EA}{L} \left( \lambda_t + \frac{L}{30} (2\theta_{y1}^{*2} - \theta_{y1}^* \theta_{y2}^* + 2\theta_{y2}^{*2}) + \frac{L}{30} (2\theta_{z1}^{*2} - \theta_{z1}^* \theta_{z2}^* + 2\theta_{z2}^{*2}) \right)$$

เมื่อได้แรงในแนวแกน  $P_x^*$  แล้ว จะหาค่าสติฟเนสในแนวของแรงในแนวแกนได้ โดยสมการที่ 2.21

$$K_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_t^2} = \frac{EA}{L}$$

$$K_{13} = \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_t \partial \theta_{y1}^*} = \frac{EA}{30} (4\theta_{y1}^* - \theta_{y2}^*)$$

$$K_{14} = \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_t \partial \theta_{z1}^*} = \frac{EA}{30} (4\theta_{z1}^* - \theta_{z2}^*)$$

การหาโมเมนต์ที่ปลาย 1 ของชิ้นส่วน ในทิศทาง  $Y^*$  ที่ปลาย 1 ของชิ้นส่วน

$S_i$  คือโมเมนต์ที่ปลาย 1 ของชิ้นส่วน ในทิศทาง  $Y^*$  ซึ่งเท่ากับ  $M_{y1}^*$

$D_i$  คือระยะการเคลื่อนที่ของ  $M_{y1}^*$  ซึ่งเท่ากับ  $\theta_{y1}^*$

$$M_{y1}^* = \frac{\partial U}{\partial \theta_{y1}^*} = \left( \frac{4EI_y}{L} \theta_{y1}^* + \frac{2EI_y}{L} \theta_{y2}^* \right) + \frac{EA}{L} \left( \lambda_t + \frac{L}{30} (2\theta_{y1}^{*2} - \theta_{y1}^* \theta_{y2}^* + 2\theta_{y2}^{*2}) + \frac{L}{30} (2\theta_{z1}^{*2} - \theta_{z1}^* \theta_{z2}^* + 2\theta_{z2}^{*2}) \right) \times \frac{L}{30} (4\theta_{y1}^* - \theta_{y2}^*)$$

เมื่อได้  $M_{y1}^*$  แล้ว จะหาค่าสติฟเนสในแนวของ  $M_{y1}^*$  ได้ โดยสมการที่ 2.21

$$K_{33} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_{y1}^{*2}} = \frac{4EI_y}{L} + \frac{4EA\lambda_t}{30} + \frac{EAL}{300} (8\theta_{y1}^{*2} - 4\theta_{y1}^* \theta_{y2}^* + 3\theta_{y2}^{*2}) + \frac{EAL}{900} (8\theta_{z1}^{*2} - 4\theta_{z1}^* \theta_{z2}^* + 8\theta_{z2}^{*2})$$

$$K_{34} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_{y1}^* \partial \theta_{z1}^*} = \frac{EAL}{900} (4\theta_{y1}^* - \theta_{y2}^*) (4\theta_{z1}^* - \theta_{z2}^*)$$

$$K_{35} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_{y1}^* \partial \theta_{y2}^*}$$

$$= \frac{2EI_y}{L} - \frac{EA\lambda_1}{30} + \frac{EAL}{300} (2\theta_{y1}^{*2} - 6\theta_{y1}^* \theta_{y2}^* + 2\theta_{y2}^{*2}) + \frac{EAL}{900} (2\theta_{z1}^{*2} - \theta_{z1}^* \theta_{z2}^* + 2\theta_{z2}^{*2})$$

ดังนั้นสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับค่าการเคลื่อนที่ได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} P_x^* \\ M_x^* \\ M_{y1}^* \\ M_{z1}^* \\ M_{y2}^* \\ M_{z2}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_1 \partial \theta_x^*} & \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_1 \partial \theta_{y1}^*} & \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_1 \partial \theta_{z1}^*} & \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_1 \partial \theta_{y2}^*} & \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_1 \partial \theta_{z2}^*} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_x^{*2}} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_x^* \partial \theta_{y1}^*} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_x^* \partial \theta_{z1}^*} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_x^* \partial \theta_{y2}^*} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_x^* \partial \theta_{z2}^*} & \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_{y1}^{*2}} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_{y1}^* \partial \theta_{z1}^*} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_{y1}^* \partial \theta_{y2}^*} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_{y1}^* \partial \theta_{z2}^*} & & \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_{z1}^{*2}} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_{z1}^* \partial \theta_{y2}^*} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_{z1}^* \partial \theta_{z2}^*} & & & \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_{y2}^{*2}} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_{y2}^* \partial \theta_{z2}^*} & & & & \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_{z2}^{*2}} & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1^* \\ \theta_x^* \\ \theta_{y1}^* \\ \theta_{z1}^* \\ \theta_{y2}^* \\ \theta_{z2}^* \end{Bmatrix}$$

SYM

เขียนให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์

$$\{S^*\} = [K^*] \{D^*\}$$

โดยที่

$\{S^*\}$  = เมตริกซ์แรงของชิ้นส่วนในพิกัดออยเลอร์

$\{D^*\}$  = เมตริกซ์การเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนในพิกัดออยเลอร์

$[K^*]$  = สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนในพิกัดออยเลอร์

แทนค่า  $\{S^*\}$   $[K^*]$  และ  $\{D^*\}$  ให้อยู่ในรูปตัวแปรจะได้

$$\begin{Bmatrix} P_x^* \\ M_x^* \\ M_{y1}^* \\ M_{z1}^* \\ M_{y2}^* \\ M_{z2}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1^* \\ \theta_x^* \\ \theta_{y1}^* \\ \theta_{z1}^* \\ \theta_{y2}^* \\ \theta_{z2}^* \end{Bmatrix}$$

(2.23)

โดยที่

$$K_{11} = \frac{EA}{L} \quad K_{22} = \frac{GJ}{L}$$

$$K_{33} = \frac{4EI_y}{L} + \frac{4EA\lambda_t}{30} + \frac{EAL}{300} (8\theta_{y1}^{*2} - 4\theta_{y1}^*\theta_{y2}^* + 3\theta_{y2}^{*2}) + \frac{EAL}{900} [8\theta_{z1}^{*2} - 4\theta_{z1}^*\theta_{z2}^* + 8\theta_{z1}^{*2}]$$

$$K_{44} = \frac{4EI_z}{L} + \frac{4EA\lambda_t}{30} + \frac{EAL}{300} (8\theta_{z1}^{*2} - 4\theta_{z1}^*\theta_{z2}^* + 3\theta_{z2}^{*2}) + \frac{EAL}{900} [8\theta_{y1}^{*2} - 4\theta_{y1}^*\theta_{y2}^* + 8\theta_{y2}^{*2}]$$

$$K_{55} = \frac{4EI_y}{L} + \frac{4EA\lambda_t}{30} + \frac{EAL}{300} (8\theta_{y2}^{*2} - 4\theta_{y1}^*\theta_{y2}^* + 3\theta_{y1}^{*2}) + \frac{EAL}{900} [8\theta_{z1}^{*2} - 4\theta_{z1}^*\theta_{z2}^* + 8\theta_{z2}^{*2}]$$

$$K_{66} = \frac{4EI_z}{L} + \frac{4EA\lambda_t}{30} + \frac{EAL}{300} (8\theta_{z2}^{*2} - 4\theta_{z1}^*\theta_{z2}^* + 3\theta_{z1}^{*2}) + \frac{EAL}{900} [8\theta_{y1}^{*2} - 4\theta_{y1}^*\theta_{y2}^* + 8\theta_{y2}^{*2}]$$

$$K_{13} = \frac{EA}{30} (4\theta_{y1}^* - \theta_{y2}^*) \quad K_{14} = \frac{EA}{30} (4\theta_{z1}^* - \theta_{z2}^*)$$

$$K_{15} = \frac{EA}{30} (4\theta_{y2}^* - \theta_{y1}^*) \quad K_{16} = \frac{EA}{30} (4\theta_{z2}^* - \theta_{z1}^*)$$

$$K_{34} = \frac{EAL}{900} (4\theta_{y1}^* - \theta_{y2}^*)(4\theta_{z1}^* - \theta_{z2}^*)$$

$$K_{35} = \frac{2EI_y}{L} - \frac{EA\lambda_t}{30} - \frac{EAL}{300} (2\theta_{y1}^{*2} - 6\theta_{y1}^*\theta_{y2}^* + 2\theta_{y2}^{*2}) - \frac{EAL}{900} (2\theta_{z1}^{*2} - \theta_{z1}^*\theta_{z2}^* + 2\theta_{z2}^{*2})$$

$$K_{36} = \frac{EAL}{900} (4\theta_{y1}^* - \theta_{y2}^*)(4\theta_{z2}^* - \theta_{z1}^*)$$

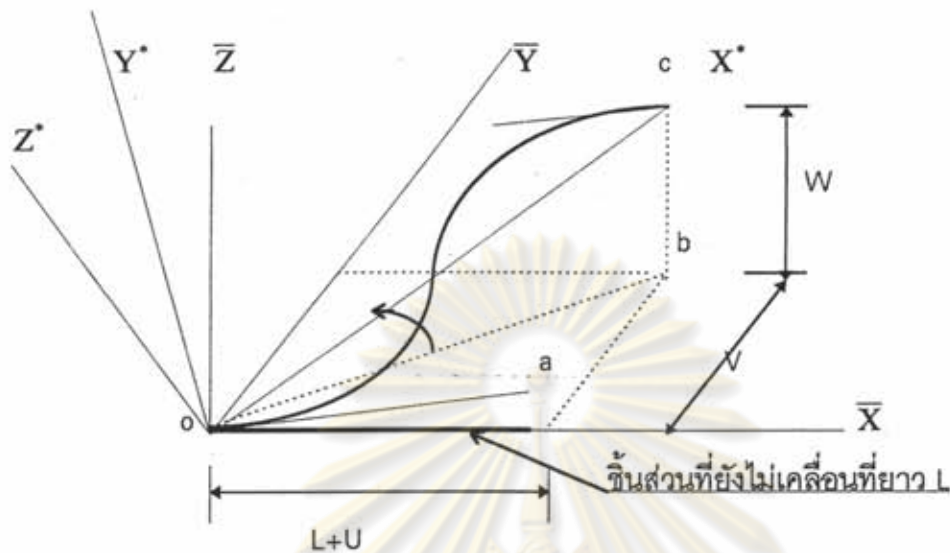
$$K_{45} = \frac{EAL}{900} (4\theta_{y2}^* - \theta_{y1}^*)(4\theta_{z1}^* - \theta_{z2}^*)$$

$$K_{46} = \frac{2EI_z}{L} - \frac{EA\lambda_t}{30} - \frac{EAL}{300} (2\theta_{z1}^{*2} - 6\theta_{z1}^*\theta_{z2}^* + 2\theta_{z2}^{*2}) - \frac{EAL}{900} (2\theta_{y1}^{*2} - \theta_{y1}^*\theta_{y2}^* + 2\theta_{y2}^{*2})$$

$$K_{56} = \frac{EAL}{900} (4\theta_{y2}^* - \theta_{y1}^*)(4\theta_{z2}^* - \theta_{z1}^*)$$

ค่าที่ไม่ได้แสดงมีค่าเป็น 0

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเคลื่อนที่ในพิกัดออยเลอร์กับลากรางจ์เสนอโดย Ram Chandra

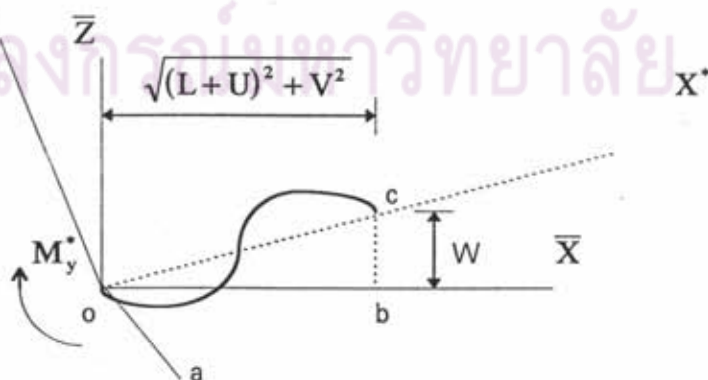


รูปที่ 2.5 รูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่างมุมในพิกัดออยเลอร์  $Y^*$  กับพิกัดลากรางจ์  $\bar{Y}$

จากรูปที่ 2.5 ชิ้นส่วนที่ยังไม่ได้เคลื่อนที่ในพิกัดลากรางจ์แกน  $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  เกิดการเคลื่อนที่ไปอยู่ในพิกัดออยเลอร์แกน  $X^*Y^*Z^*$  เป็นเส้นโค้ง  $oc$  เนื่องจากเมื่อโครงสร้างได้รับแรงกระทำที่จุดต่อของโครงสร้าง จะทำให้ชิ้นส่วนเกิดแรงภายใน ซึ่งแรงภายในนี้จะทำให้ชิ้นส่วนเกิดการหมุนที่จุดต่อ และเกิดการเคลื่อนที่สัมพันธ์ระหว่างปลายทั้งสองข้าง ในทิศทาง  $\bar{X}$  เป็นระยะ  $U$  ในทิศทาง  $\bar{Y}$  เป็นระยะ  $V$  และในทิศทาง  $\bar{Z}$  เป็นระยะ  $W$  จากการที่ชิ้นส่วนเกิดการเคลื่อนที่นี้จะทำให้แกนของชิ้นส่วนเปลี่ยนทิศทางไปด้วย

การหาความสัมพันธ์ระหว่างมุมในแกน  $\bar{Y}$  กับมุมในแกน  $Y^*$  ทำได้โดยการโปรเจกต์เส้นตรงของชิ้นส่วนก่อนการเคลื่อนที่ไปยังระนาบ  $X^*Z^*$  จะได้เส้นตรง  $ob$  จากรูปที่ 2.5 จะได้

$$\text{ความยาวเส้นตรง } ob = \sqrt{(L+U)^2 + V^2}$$



รูปที่ 2.6 เปรียบเทียบมุมในแกน  $Y$  ระหว่างพิกัดออยเลอร์กับพิกัดลากรางจ์ ในระนาบ  $\bar{X}\bar{Z}$



ในรูปที่ 2.6 เป็นรูปขยายของรูปที่ 2.5 โดยมองในระนาบ  $X^*Z^*$  แกน  $Y^*$  จะอยู่ที่จุด  $o$  มีทิศทางพุ่งเข้าไปในกระดาษจะทำให้การหมุนของชิ้นส่วนที่ปลาย  $o$  มีทิศทางตามเข็มนาฬิกา จากรูปพิจารณาเส้นคอร์ด  $ob$  และเส้นคอร์ด  $oc$  จะได้ว่าเส้นคอร์ดระหว่างปลายทั้งสองข้างของ ชิ้นส่วนเปลี่ยนไปเป็นมุม  $boc$  ซึ่งจะทำให้มุมหมุนที่ปลายทั้งสองของชิ้นส่วนในพิกัดลากรานจ์ต่าง จากพิกัดออยเลอร์ เนื่องจากมุมในพิกัดออยเลอร์คิดจากเส้นคอร์ดของชิ้นส่วนที่เคลื่อนที่ไปแล้ว  $oc$  แต่มุมในพิกัดลากรานจ์คิดจากเส้นคอร์ดของชิ้นส่วนที่ยังไม่ได้เคลื่อนที่  $ob$

จากรูปที่ 2.6

มุมหมุนในพิกัดลากรานจ์คือ มุม  $boa$

มุมหมุนในพิกัดออยเลอร์คือ มุม  $coa$

มุมหมุนเนื่องจากการเคลื่อนที่คือ มุม  $boc$

$$\text{มุม}coa = \text{มุม}boa + \text{มุม}boc$$

สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\theta^*_{Y1} &= \bar{\theta}_{Y1} + \text{Arc tan} \left( \frac{W}{\sqrt{(L+U)^2 + V^2}} \right) \\ \theta^*_{Y2} &= \bar{\theta}_{Y2} + \text{Arc tan} \left( \frac{W}{\sqrt{(L+U)^2 + V^2}} \right)\end{aligned}\quad (2.24)$$

โดยที่

$\theta^*_{Y1}$  = มุมหมุนของจุดต่อที่ปลาย 1 ในแกน  $Y^*$  ของพิกัดออยเลอร์

$\theta^*_{Y2}$  = มุมหมุนของจุดต่อที่ปลาย 2 ในแกน  $Y^*$  ของพิกัดออยเลอร์

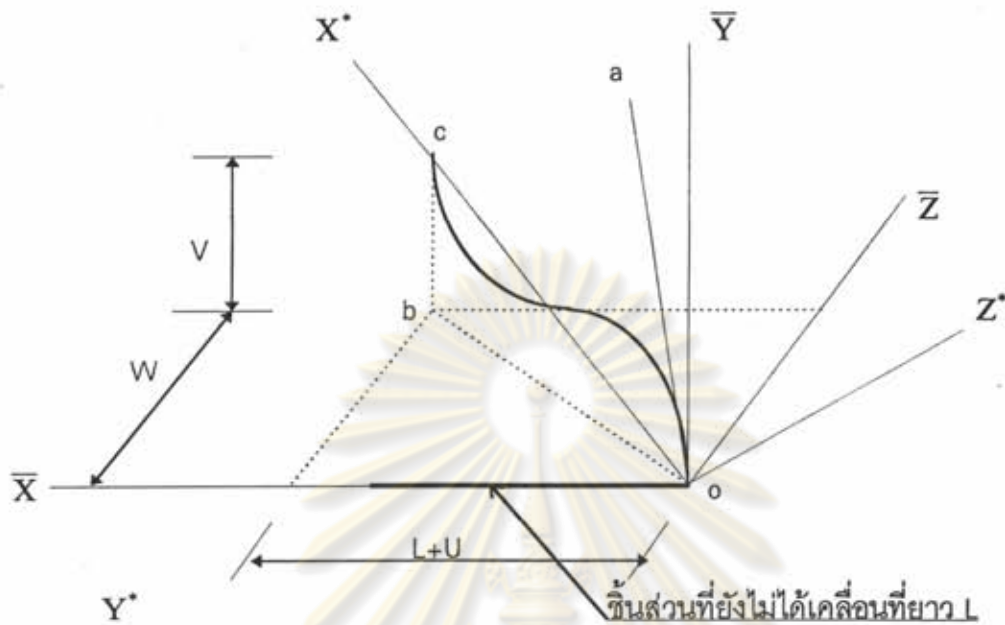
$\bar{\theta}_{Y1}$  = มุมหมุนของจุดต่อที่ปลาย 1 ในแกน  $\bar{Y}$  ของพิกัดลากรานจ์

$\bar{\theta}_{Y2}$  = มุมหมุนของจุดต่อที่ปลาย 2 ในแกน  $\bar{Y}$  ของพิกัดลากรานจ์

$U$  = การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างปลายที่ 1 กับ 2 ในแกน  $\bar{X}$  ของพิกัดลากรานจ์

$V$  = การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างปลายที่ 1 กับ 2 ในแกน  $\bar{Y}$  ของพิกัดลากรานจ์

$W$  = การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างปลายที่ 1 กับ 2 ในแกน  $\bar{Z}$  ของพิกัดลากรานจ์

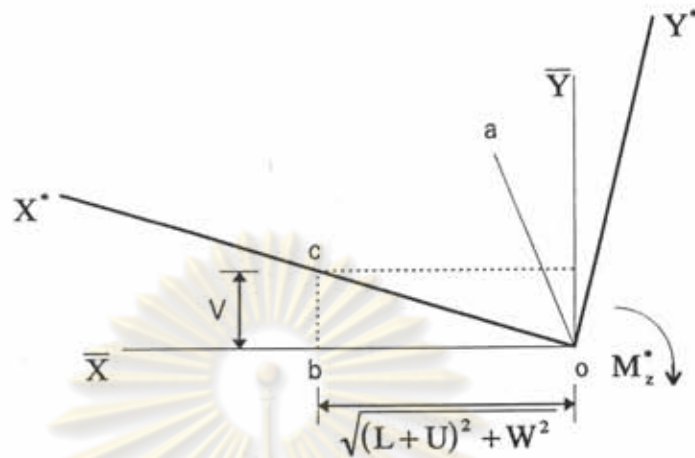


รูปที่ 2.7 รูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่างมุมในพิกัดขอยเลอร์  $Z^*$  กับพิกัดลากรางจ์  $\bar{Z}$

จากรูปที่ 2.7 ชิ้นส่วนที่ยังไม่ได้เคลื่อนที่ในพิกัดลากรางจ์แกน  $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  เกิดการเคลื่อนที่ไปอยู่ในพิกัดขอยเลอร์แกน  $X^*Y^*Z^*$  เป็นเส้นโค้ง  $oc$  เนื่องจากเมื่อโครงสร้างได้รับแรงกระทำที่จุดต่อของโครงสร้าง จะทำให้ชิ้นส่วนเกิดแรงภายใน ซึ่งแรงภายในนี้จะทำให้ชิ้นส่วนเกิดการหมุนที่จุดต่อและเกิดการเคลื่อนที่สัมพันธ์ระหว่างปลายทั้งสองข้าง ในทิศทาง  $\bar{X}$  เป็นระยะ  $U$  ในทิศทาง  $\bar{Y}$  เป็นระยะ  $V$  และในทิศทาง  $\bar{Z}$  เป็นระยะ  $W$  จากการทำชิ้นส่วนเกิดการเคลื่อนที่นี้จะทำให้แกนของชิ้นส่วนเปลี่ยนทิศทางไปด้วย

การหาความสัมพันธ์ระหว่างมุมในแกน  $\bar{Z}$  กับมุมในแกน  $Z^*$  ทำได้โดยการโปรเจกต์เส้นตรงของชิ้นส่วนก่อนการเคลื่อนที่ไปยังระนาบ  $X^*Y^*$  จะได้เส้นตรง  $ob$  จากรูปที่ 2.7 จะได้

$$\text{ความยาวเส้นตรง } ob = \sqrt{(L+U)^2 + W^2}$$



รูปที่ 2.8 เปรียบเทียบมูมในแกน Z ระหว่างพิกัดออยเลอร์กับพิกัดลากรางจ์ ในระนาบ  $\bar{X}\bar{Y}$

ในรูปที่ 2.8 เป็นรูปขยายของรูปที่ 2.7 โดยมองในระนาบ  $X^*Y^*$  แกน  $Z^*$  จะอยู่ที่จุด  $o$  มีทิศทางพุ่งเข้าไปในกระดาษจะทำให้การหมุนของชิ้นส่วนที่ปลาย  $o$  มีทิศทางตามเข็มนาฬิกา จากรูปพิจารณาเส้นคอร์ด  $ob$  และเส้นคอร์ด  $oc$  จะได้ว่าเส้นคอร์ดระหว่างปลายทั้งสองข้างของชิ้นส่วนเปลี่ยนไปเป็นมุม  $boc$  ซึ่งจะทำให้มุมหมุนที่ปลายทั้งสองของชิ้นส่วนในพิกัดลากรางจ์ต่างจากพิกัดออยเลอร์ เนื่องจากมุมในพิกัดออยเลอร์คิดจากเส้นคอร์ดของชิ้นส่วนที่เคลื่อนที่ไปแล้ว  $oc$  แต่มุมในพิกัดลากรางจ์คิดจากเส้นคอร์ดของชิ้นส่วนที่ยังไม่ได้เคลื่อนที่  $ob$

พิจารณาจากรูปที่ 2.8

มุมหมุนในพิกัดลากรางจ์คือ มุม  $boa$

มุมหมุนในพิกัดออยเลอร์คือ มุม  $coa$

มุมหมุนเนื่องจากการเคลื่อนที่คือ มุม  $boc$

$$\text{มุม } coa = \text{มุม } boa - \text{มุม } boc$$

สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\theta_{z1}^* = \bar{\theta}_{z1} - \text{Arc tan} \left( \frac{v}{\sqrt{(L+U)^2 + W^2}} \right)$$

$$\theta_{z2}^* = \bar{\theta}_{z2} - \text{Arc tan} \left( \frac{v}{\sqrt{(L+U)^2 + W^2}} \right)$$

(2.25)

โดยที่

- $\theta_{z1}^*$  = มุมหมุนของจุดต่อที่ปลาย 1 ในแกน  $Z^*$  ของพิกัดออยเลอร์  
 $\theta_{z2}^*$  = มุมหมุนของจุดต่อที่ปลาย 2 ในแกน  $Z^*$  ของพิกัดออยเลอร์  
 $\bar{\theta}_{z1}$  = มุมหมุนของจุดต่อที่ปลาย 1 ในแกน  $\bar{Z}$  ของพิกัดลากรานจ์  
 $\bar{\theta}_{z2}$  = มุมหมุนของจุดต่อที่ปลาย 2 ในแกน  $\bar{Z}$  ของพิกัดลากรานจ์  
 $U$  = การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างปลายที่ 1 กับ 2 ในแกน  $\bar{X}$  ของพิกัดลากรานจ์  
 $V$  = การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างปลายที่ 1 กับ 2 ในแกน  $\bar{Y}$  ของพิกัดลากรานจ์  
 $W$  = การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างปลายที่ 1 กับ 2 ในแกน  $\bar{Z}$  ของพิกัดลากรานจ์

เมื่อได้ความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ในพิกัดออยเลอร์และลากรานจ์แล้ว จะสามารถหาเมตริกซ์ในการแปลงพิกัดได้ โดยการหาอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ในพิกัดออยเลอร์ด้วยการเคลื่อนที่ในพิกัดลากรานจ์

$$\{dD^*\} = [A]\{d\bar{D}\} \quad (2.26.1)$$

$$\begin{Bmatrix} d\lambda_t \\ d\theta_x^* \\ d\theta_{y1}^* \\ d\theta_{z1}^* \\ d\theta_{y2}^* \\ d\theta_{z2}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_t}{\partial U} & \frac{\partial \lambda_t}{\partial V} & \frac{\partial \lambda_t}{\partial W} & \frac{\partial \lambda_t}{\partial \bar{\theta}_x} & \frac{\partial \lambda_t}{\partial \bar{\theta}_{y1}} & \frac{\partial \lambda_t}{\partial \bar{\theta}_{z1}} & \frac{\partial \lambda_t}{\partial \bar{\theta}_{y2}} & \frac{\partial \lambda_t}{\partial \bar{\theta}_{z2}} \\ \frac{\partial \theta_x^*}{\partial U} & \frac{\partial \theta_x^*}{\partial V} & \frac{\partial \theta_x^*}{\partial W} & \frac{\partial \theta_x^*}{\partial \bar{\theta}_x} & \frac{\partial \theta_x^*}{\partial \bar{\theta}_{y1}} & \frac{\partial \theta_x^*}{\partial \bar{\theta}_{z1}} & \frac{\partial \theta_x^*}{\partial \bar{\theta}_{y2}} & \frac{\partial \theta_x^*}{\partial \bar{\theta}_{z2}} \\ \frac{\partial \theta_{y1}^*}{\partial U} & \frac{\partial \theta_{y1}^*}{\partial V} & \frac{\partial \theta_{y1}^*}{\partial W} & \frac{\partial \theta_{y1}^*}{\partial \bar{\theta}_x} & \frac{\partial \theta_{y1}^*}{\partial \bar{\theta}_{y1}} & \frac{\partial \theta_{y1}^*}{\partial \bar{\theta}_{z1}} & \frac{\partial \theta_{y1}^*}{\partial \bar{\theta}_{y2}} & \frac{\partial \theta_{y1}^*}{\partial \bar{\theta}_{z2}} \\ \frac{\partial \theta_{z1}^*}{\partial U} & \frac{\partial \theta_{z1}^*}{\partial V} & \frac{\partial \theta_{z1}^*}{\partial W} & \frac{\partial \theta_{z1}^*}{\partial \bar{\theta}_x} & \frac{\partial \theta_{z1}^*}{\partial \bar{\theta}_{y1}} & \frac{\partial \theta_{z1}^*}{\partial \bar{\theta}_{z1}} & \frac{\partial \theta_{z1}^*}{\partial \bar{\theta}_{y2}} & \frac{\partial \theta_{z1}^*}{\partial \bar{\theta}_{z2}} \\ \frac{\partial \theta_{y2}^*}{\partial U} & \frac{\partial \theta_{y2}^*}{\partial V} & \frac{\partial \theta_{y2}^*}{\partial W} & \frac{\partial \theta_{y2}^*}{\partial \bar{\theta}_x} & \frac{\partial \theta_{y2}^*}{\partial \bar{\theta}_{y1}} & \frac{\partial \theta_{y2}^*}{\partial \bar{\theta}_{z1}} & \frac{\partial \theta_{y2}^*}{\partial \bar{\theta}_{y2}} & \frac{\partial \theta_{y2}^*}{\partial \bar{\theta}_{z2}} \\ \frac{\partial \theta_{z2}^*}{\partial U} & \frac{\partial \theta_{z2}^*}{\partial V} & \frac{\partial \theta_{z2}^*}{\partial W} & \frac{\partial \theta_{z2}^*}{\partial \bar{\theta}_x} & \frac{\partial \theta_{z2}^*}{\partial \bar{\theta}_{y1}} & \frac{\partial \theta_{z2}^*}{\partial \bar{\theta}_{z1}} & \frac{\partial \theta_{z2}^*}{\partial \bar{\theta}_{y2}} & \frac{\partial \theta_{z2}^*}{\partial \bar{\theta}_{z2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dU \\ dV \\ dW \\ d\bar{\theta}_x \\ d\bar{\theta}_{y1} \\ d\bar{\theta}_{z1} \\ d\bar{\theta}_{y2} \\ d\bar{\theta}_{z2} \end{Bmatrix}$$

โดยที่

$\{dD^*\}$  = การเคลื่อนที่ในพิกัดออยเลอร์

$\{d\bar{D}\}$  = การเคลื่อนที่ในพิกัดลากรานจ์ ( พิกัดชิ้นส่วน )

$[A]$  = เมตริกซ์การแปลงการเคลื่อนที่จากพิกัดออยเลอร์ไปพิกัดลากรานจ์

แทนสมการที่ 2.15, 2.24 และ 2.25 ลงในสมการที่ 2.26 จะได้

$$\begin{Bmatrix} d\lambda_i \\ d\theta_x^* \\ d\theta_{Y1}^* \\ d\theta_{Z1}^* \\ d\theta_{Y2}^* \\ d\theta_{Z2}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L+U}{L+\lambda_i} & \frac{V}{L+\lambda_i} & \frac{W}{L+\lambda_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Wf(4) & -f(5) & f(6) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Vf(1)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{-f(2)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{f(3)}{(L+\lambda_i)^2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{Vf(1)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{-f(2)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{f(3)}{(L+\lambda_i)^2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -Wf(4) & -f(5) & f(6) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{Vf(1)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{-f(2)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{f(3)}{(L+\lambda_i)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dU \\ dV \\ dW \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_{Y1} \\ \bar{\theta}_{Z1} \\ \bar{\theta}_{Y2} \\ \bar{\theta}_{Z2} \end{Bmatrix} \quad (2.26.2)$$

จะได้เมตริกซ์แปลงจากพิกัดออยเลอร์เป็นลากรางจ์

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{L+U}{L+\lambda_i} & \frac{V}{L+\lambda_i} & \frac{W}{L+\lambda_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Wf(4) & -f(5) & f(6) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Vf(1)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{-f(2)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{f(3)}{(L+\lambda_i)^2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{Vf(1)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{-f(2)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{f(3)}{(L+\lambda_i)^2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -Wf(4) & -f(5) & f(6) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{Vf(1)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{-f(2)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{f(3)}{(L+\lambda_i)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$f(1) = \frac{(L+U)}{[(L+u)^2 + W^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$f(3) = \frac{V \cdot W}{[(L+u)^2 + W^2]^{\frac{1}{2}}}$$

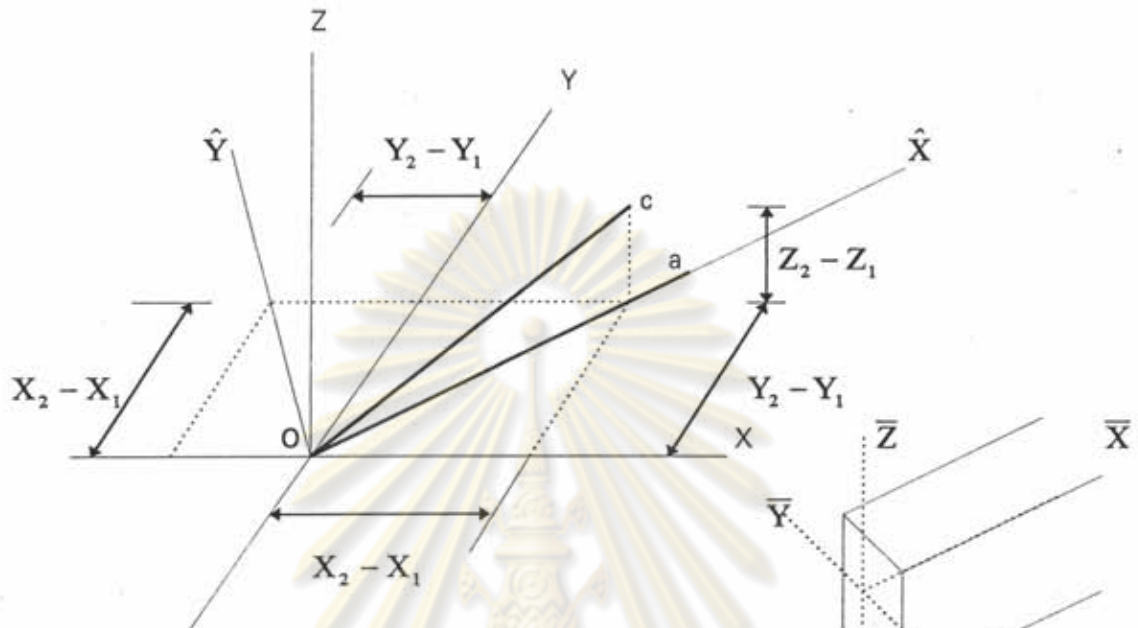
$$f(5) = \frac{V \cdot W}{[(L+u)^2 + V^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$f(2) = [(L+U)^2 + W^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$f(4) = \frac{(L+U)}{[(L+u)^2 + V^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$f(6) = [(L+U)^2 + V^2]^{\frac{1}{2}}$$

เมตริกซ์การแปลงพิกัดลากรางจ์เป็นพิกัดโครงสร้าง สามารถหาได้จากเวกเตอร์ของแกน  
ชั้นส่วนในพิกัดลากรางจ์ ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9a แกนของพิกัดลากรางจ์กับแกนของพิกัดโครงสร้าง

รูปที่ 2.9b แกนของชั้นส่วน

กำหนดให้

$$XX = X_2 - X_1, \quad YY = Y_2 - Y_1, \quad ZZ = Z_2 - Z_1$$

โดยที่

- $X_1$  = โคออร์ดิเนตบนแกน X ในพิกัดโครงสร้างของชั้นส่วน ที่ปลาย 1
- $X_2$  = โคออร์ดิเนตบนแกน X ในพิกัดโครงสร้างของชั้นส่วน ที่ปลาย 2
- $Y_1$  = โคออร์ดิเนตบนแกน Y ในพิกัดโครงสร้างของชั้นส่วน ที่ปลาย 1
- $Y_2$  = โคออร์ดิเนตบนแกน Y ในพิกัดโครงสร้างของชั้นส่วน ที่ปลาย 2
- $Z_1$  = โคออร์ดิเนตบนแกน Z ในพิกัดโครงสร้างของชั้นส่วน ที่ปลาย 1
- $Z_2$  = โคออร์ดิเนตบนแกน Z ในพิกัดโครงสร้างของชั้นส่วน ที่ปลาย 2
- $i$  = เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกน X ในพิกัดโครงสร้าง
- $j$  = เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกน Y ในพิกัดโครงสร้าง
- $k$  = เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกน Z ในพิกัดโครงสร้าง

จากรูปที่ 2.9a แกน  $X, Y, Z$  เป็นแกนในพิกัดโครงสร้าง ( Global Coordinate ) พิจารณาเส้นตรง  $oa$  วางอยู่บนแกน  $\hat{X}$  ซึ่งแกน  $\hat{X}$  อยู่ในระนาบ  $XY$  และมีเวกเตอร์ดังต่อไปนี้

$$\text{เวกเตอร์ของแกน } \hat{X} = (XX)_{i} + (YY)_{j}$$

จากรูปที่ 2.9b เป็นการแสดงทิศทางแกนของชิ้นส่วน ถ้านำเอาชิ้นส่วนตามรูปที่ 2.9b วางลงบนเส้นตรง  $oa$  จะได้แกนของพิกัดชิ้นส่วนในรูปฟังก์ชันของพิกัดโครงสร้าง ( Global Coordinate ) ดังนี้

เนื่องจากวางชิ้นส่วนลงบนแกน  $\hat{X}$  ดังนั้นจะได้เวกเตอร์แกน  $\bar{X}$  ของชิ้นส่วนดังนี้

$$\text{เวกเตอร์ของแกน } \bar{X} \text{ ของชิ้นส่วนที่เส้น } oa = (XX)_{i} + (YY)_{j}$$

ระนาบที่วางชิ้นส่วนเป็นระนาบ  $XY$  จะได้ว่าแกน  $\bar{Y}$  ของชิ้นส่วนจะต้องตั้งฉากกับแกน  $\bar{X}$  ของชิ้นส่วนในระนาบ  $XY$  ดังนั้นจะได้เวกเตอร์แกน  $\bar{Y}$  ของชิ้นส่วนดังนี้

$$\text{เวกเตอร์ของแกน } \bar{Y} \text{ ของชิ้นส่วนที่เส้น } oa = -(YY)_{i} + (XX)_{j}$$

เนื่องจากชิ้นส่วนถูกวางในระนาบ  $XY$  แกน  $Z$  ของชิ้นส่วนจะเป็นแกนในแนวตั้ง

$$\text{เวกเตอร์ของแกน } \bar{Z} \text{ ของชิ้นส่วนที่เส้น } oa = k$$

พิจารณาเส้น  $oa$  ถ้าชิ้นส่วนหมุนรอบแกน  $\hat{Y}$  จนกระทั่งมีความสูงในแกน  $Z$  เท่ากับ  $ZZ$  เส้น  $oa$  จะถูกเลื่อนจนกลายเป็นเส้น  $oc$  จะสามารถหาเวกเตอร์ของแกนได้ดังนี้

แกน  $\bar{X}$  ของชิ้นส่วน  $oc$  จะแตกต่างกับแกน  $\bar{X}$  ของชิ้นส่วน  $oa$  ตรงที่มีความสูงในแกน  $Z$  ดังนั้นจะได้สมการแกน  $\bar{X}$  ของชิ้นส่วน  $oc$  ดังนี้

$$\text{เวกเตอร์ของแกน } \bar{X} \text{ ของชิ้นส่วน } oc = (XX)_{i} + (YY)_{j} + (ZZ)_{k}$$

เนื่องจากชิ้นส่วนหมุนรอบแกนนี้จะได้แกน  $\bar{Y}$  ของชิ้นส่วน  $oc$  เท่ากับ  $\bar{Y}$  ของชิ้นส่วน  $oa$

$$\text{เวกเตอร์ของแกน } \bar{Y} \text{ ของชิ้นส่วน } oc = -(YY)_{i} + (XX)_{j}$$

เมื่อเราทราบแกน  $X$  และแกน  $Y$  จะสามารถหาแกน  $Z$  ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{เวกเตอร์ของแกน } \bar{Z} \text{ ของชิ้นส่วน oc} &= ((XX)i + (YY)j + (ZZ)k) \times (-(YY)i + (XX)j) \\ &= -(XX.ZZ)i - (YY.ZZ)j + (XX.XX + YY.YY)k \end{aligned}$$

ชิ้นส่วน oc สามารถเป็นตัวแทนของชิ้นส่วนในสามมิติทั้งหมดได้ เพราะมีระยะในแกนทุกแกนทั้งแกน X, Y, Z แต่ไม่สามารถใช้ได้ในกรณีที่ชิ้นส่วนอยู่ในแกน Z เพราะจะทำให้หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยไม่ได้ ดูสมการที่ 2.27 ในกรณีที่ XX และ YY เป็นศูนย์จะหาค่าไม่ได้

สามารถเขียนในรูปเวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกน } \bar{X} &= \frac{((XX)i + (YY)j + (ZZ)k)}{\sqrt{(XX)^2 + (YY)^2 + (ZZ)^2}} \\ \text{เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกน } \bar{Y} &= \frac{(-(YY)i + (XX)j)}{\sqrt{(XX)^2 + (YY)^2}} \\ \text{เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกน } \bar{Z} &= \frac{(-(XX.ZZ)i + (YY.ZZ)j + (XX^2 + YY^2)k)}{\sqrt{XX^2 + YY^2} \sqrt{XX^2 + YY^2 + ZZ^2}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

เมื่อสามารถเขียนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของพิกัดลากรางจ์ให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในพิกัดออยเลอร์ได้ จะทำให้สามารถหาเมตริกซ์แปลง [T] ได้ดังนี้

$$\{d\bar{D}\} = [T] \{dD\} \quad (2.28)$$

โดยที่

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$\{d\bar{D}\}$  = การเคลื่อนที่ในพิกัดลากรางจ์  
 $\{dD\}$  = การเคลื่อนที่ในพิกัดโครงสร้าง  
[T] = เมตริกซ์แปลงจากพิกัดลากรางจ์ไปพิกัดโครงสร้าง

ทิศทางของแกนกับการเคลื่อนที่เหมือนกัน จึงสามารถแทนสมการที่ 2.27 ลงในสมการที่ 2.28 จะได้



$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ \bar{\theta}_{x1} \\ \bar{\theta}_{y1} \\ \bar{\theta}_{z1} \\ U \\ V \\ W \\ \bar{\theta}_{x2} \\ \bar{\theta}_{y2} \\ \bar{\theta}_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{44} & T_{45} & T_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{54} & T_{55} & T_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{64} & T_{65} & T_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{77} & T_{78} & T_{79} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{87} & T_{88} & T_{89} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{97} & T_{98} & T_{99} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{aa} & T_{ab} & T_{ac} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ba} & T_{bb} & T_{bc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{ca} & T_{cb} & T_{cc} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= \frac{XX}{\sqrt{XX^2 + YY^2 + ZZ^2}} = T_{44} = T_{77} = T_{aa} \\
 T_{12} &= \frac{YY}{\sqrt{XX^2 + YY^2 + ZZ^2}} = T_{45} = T_{78} = T_{ab} \\
 T_{13} &= \frac{ZZ}{\sqrt{XX^2 + YY^2 + ZZ^2}} = T_{46} = T_{79} = T_{ac} \\
 T_{21} &= \frac{-YY}{\sqrt{XX^2 + YY^2}} = T_{54} = T_{87} = T_{ba} \\
 T_{22} &= \frac{XX}{\sqrt{XX^2 + YY^2}} = T_{55} = T_{88} = T_{bb} \\
 T_{23} &= 0 = T_{56} = T_{89} = T_{bc} \\
 T_{31} &= \frac{-XX \cdot ZZ}{\sqrt{XX^2 + YY^2 + ZZ^2} \sqrt{XX^2 + YY^2}} = T_{64} = T_{97} = T_{ca} \\
 T_{32} &= \frac{-YY \cdot ZZ}{\sqrt{XX^2 + YY^2 + ZZ^2} \sqrt{XX^2 + YY^2}} = T_{65} = T_{98} = T_{cb} \\
 T_{33} &= \frac{(XX^2 + YY^2)}{\sqrt{XX^2 + YY^2 + ZZ^2} \sqrt{XX^2 + YY^2}} = T_{66} = T_{99} = T_{cc}
 \end{aligned}$$

$\bar{\theta}_{x1}$  = การหมุนของชิ้นส่วนที่ปลาย 1 ในแกน  $\bar{X}$  ของพิกัดลากรางจ์

$\bar{\theta}_{x2}$  = การหมุนของชิ้นส่วนที่ปลาย 2 ในแกน  $\bar{X}$  ของพิกัดลากรางจ์

$\theta_{x1}$  = การหมุนของชิ้นส่วนที่ปลาย 1 ในแกน  $X$  ของพิกัดโครงสร้าง

$\theta_{x2}$  = การหมุนของชิ้นส่วนที่ปลาย 2 ในแกน  $X$  ของพิกัดโครงสร้าง

$\theta_{y1}$  = การหมุนของชิ้นส่วนที่ปลาย 1 ในแกน  $Y$  ของพิกัดโครงสร้าง

- $\theta_{y2}$  = การหมุนของชิ้นส่วนที่ปลาย 2 ในแกน Y ของพิกัดโครงสร้าง  
 $\theta_{z1}$  = การหมุนของชิ้นส่วนที่ปลาย 1 ในแกน Z ของพิกัดโครงสร้าง  
 $\theta_{z2}$  = การหมุนของชิ้นส่วนที่ปลาย 2 ในแกน Z ของพิกัดโครงสร้าง

การหาสติฟเนสเส้นสัมผัส (Tangent Stiffness) ของโครงสร้าง

สติฟเนสในพิกัดโครงสร้างจะหาได้จากการแปลงสติฟเนสชิ้นส่วนในพิกัดออยเลอร์มาสู่พิกัดลากรานจ์ แล้วแปลงสติฟเนสในพิกัดลากรานจ์สู่พิกัดโครงสร้าง จะได้สมการคำตอบดังนี้

$$\{S\} = [T]^T [A]^T [K^*] [A] [T] \{D\} \quad (2.30)$$

โดยที่

- $[T]$  = เมตริกซ์แปลงการเคลื่อนที่จากพิกัดลากรานจ์ไปพิกัดโครงสร้าง  
 $[A]$  = เมตริกซ์การแปลงการเคลื่อนที่จากพิกัดออยเลอร์ไปพิกัดลากรานจ์  
 $\{S\}$  = แรงในพิกัดโครงสร้าง  
 $\{D\}$  = การเคลื่อนที่ในพิกัดโครงสร้าง  
 $[K^*]$  = สติฟเนสชิ้นส่วนในพิกัดออยเลอร์

สมการที่ 2.30 ได้มาจากวิธีวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธีเมตริกซ์ตามหนังสือทั่วไป สติฟเนสที่ได้เป็นความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำกับการเคลื่อนที่

สติฟเนสเส้นสัมผัส (Tangent Stiffness) จะเป็นสติฟเนสที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงของแรงกระทำกับการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ ซึ่งจะต้องหามาจากความสัมพันธ์ระหว่างแรงในพิกัดต่าง ๆ ก่อน แล้วนำแรงนั้นมาหาอนุพันธ์เพื่อประยุกต์ในการหาค่าสติฟเนสเส้นสัมผัส (Tangent Stiffness) ของโครงสร้าง

การหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงในพิกัดต่าง ๆ จะหาได้จากทฤษฎีพลังงาน จากพลังงานในพิกัดลากรานจ์เท่ากับพลังงานในพิกัดออยเลอร์ จะได้

$$\{\bar{S}\}^T \{d\bar{D}\} = \{S^*\}^T \{dD^*\}$$

เปลี่ยนการเคลื่อนที่ในพิกัดออยเลอร์เป็นการเคลื่อนที่ในพิกัดลากรางจ์

$$\begin{aligned}\{\bar{S}\}^T \{d\bar{D}\} &= \{S^*\}^T [A] \{dD\} \\ \{\bar{S}\}^T &= \{S^*\}^T [A]\end{aligned}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}\{S^*\} &= \text{แรงกระทำในพิกัดออยเลอร์} \quad (\text{ดูในสมการที่ 39}) \\ \{\bar{S}\} &= \text{แรงกระทำในพิกัดลากรางจ์} \quad (\text{ดูในสมการที่ 39})\end{aligned}$$

จะได้

$$\{\bar{S}\} = [A]^T \{S^*\} \quad (2.31)$$

ในกรณีเดียวกันกับสมการที่ 2.31 จะได้สมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงในพิกัดลากรางจ์และแรงในพิกัดโครงสร้างเป็น

$$\{S\} = [T]^T \{\bar{S}\} \quad (2.32)$$

เมื่อได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงในพิกัดต่าง ๆ แล้วนำมาหาอนุพันธ์เพื่อประยุกต์หาค่าสติฟเนสเส้นสัมผัส (Tangent Stiffness)

หาอนุพันธ์สมการที่ 2.31 จะได้

$$\{d\bar{S}\} = [T]^T \{d\bar{S}\} \quad (2.33)$$

การหาอนุพันธ์ของแรงในพิกัดลากรางจ์จากสมการที่ 2.31 เพื่อแทนลงในสมการที่ 2.33

$$\begin{aligned}\{d\bar{S}\} &= [A]^T \{dS^*\} + [dA]^T \{S^*\} \\ &= [A]^T [K^*] \{dD^*\} + [dA]^T \{S^*\} \\ &= [A]^T [K^*] [A] \{d\bar{D}\} + [dA]^T \{S^*\}\end{aligned} \quad (2.34)$$

แทนสมการที่ 2.34 ลงในสมการที่ 2.33 จะได้

$$\{dS\} = [T]^T ([A]^T [K^*] [A] \{d\bar{D}\} + [dA]^T \{S^*\}) \quad (2.35)$$

เพื่อให้การหาค่าสติฟเนสได้สะดวก จะเปลี่ยนรูปของ  $[dA]^T \{S^*\}$  ให้อยู่ในรูป  $\{B\} \{d\bar{D}\}$

$$[dA]^T \{S^*\} = [B] \{d\bar{D}\} \quad (2.36)$$

การหาเมตริกซ์  $[B]$  จะแสดงในภายหลัง

เมื่อแทนสมการที่ 2.36 ลงในสมการที่ 2.35 จะได้

$$\{dS\} = [T]^T ([A]^T [K^*] [A] \{d\bar{D}\} + [B] \{d\bar{D}\}) \quad (2.37)$$

แทนสมการที่ 2.28 ลงในสมการที่ 2.37 จะได้

$$\{dS\} = [T]^T ([A]^T [K^*] [A] + [B]) [T] \{dD\} \quad (2.38)$$

$$\{dS\} = [K_t] \{dD\} \quad (2.39)$$

โดยที่

$\{dS\}$  = น้ำหนักกระทำเพิ่มขึ้นในระบบพิกัดของโครงสร้าง

$\{dD\}$  = การเคลื่อนที่เพิ่มขึ้นในระบบพิกัดของโครงสร้าง

$[K_t]$  = สติฟเนสเส้นสัมผัส (Tangent Stiffness) ของชิ้นส่วนในระบบพิกัดของโครงสร้าง

$$= [T]^T ([A]^T [K^*] [A] [T] + [B] [T])$$

จากสมการที่ 2.38 แสดงถึงผลของการเปลี่ยนแปลงของแรงในพิกัดลากรานจ์ ซึ่งมีอิทธิพลต่อแรงในพิกัดออยเลอร์และการเคลื่อนที่ในพิกัดออยเลอร์

จากงานวิจัยที่ผ่านมาของ Oran (12), Kassimali (11), Ram (14) ได้กล่าวว่าเมตริกซ์การแปลงแกนจากพิกัดลากรานจ์ไปสู่พิกัดออยเลอร์ในการวิเคราะห์สามมิติไม่สามารถหาคำตอบได้ เนื่องจากแกนของชิ้นส่วนที่หมุนไปสามารถเขียนในรูปฟังก์ชันของการเคลื่อนที่  $f(U, V, W)$  ได้มากกว่าหนึ่งฟังก์ชัน เมตริกซ์การแปลงแกนที่ได้จึงเป็นเพียงการประมาณ ซึ่งจะเป็นสาเหตุให้เกิดความผิดพลาดในการวิเคราะห์

เมตริกซ์การแปลงแกนจากพิกัดลากรานจ์ไปสู่พิกัดออยเลอร์ของ Ram ที่ได้แสดง เป็นการพัฒนามาจากเมตริกซ์การแปลงของ Jennings ซึ่งอยู่ในเรื่องการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิตของโครงสร้างสองมิติ คำตอบที่ได้ของ Ram ได้มีการสมมติให้แกนที่หมุนไปไม่ตั้งฉากกัน ทำให้หาพจน์  $[B]$  ในสมการที่ 2.38 ได้ยาก

การหาพจน์ [B] จากเมตริกซ์แปลงแรงในแนวแกนจากพิกัดออยเลอร์ไปพิกัดลากรานจ์  
 การหาเมตริกซ์แปลงแรงในแนวแกนจากพิกัดออยเลอร์ไปพิกัดลากรานจ์ หาได้โดยนำเมตริกซ์  
 [A] สมการที่ 2.26b แทนลงในสมการที่ 2.31 จะได้

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \\ \bar{M}_X \\ \bar{M}_{Y1} \\ \bar{M}_{Z1} \\ \bar{M}_{Y2} \\ \bar{M}_{Z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L+U}{L+\lambda_i} & \frac{V}{L+\lambda_i} & \frac{W}{L+\lambda_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Wf(4) & -f(5) & f(6) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Vf(1)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{-f(2)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{f(3)}{(L+\lambda_i)^2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-Wf(4)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{-f(5)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{f(6)}{(L+\lambda_i)^2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{Vf(1)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{-f(2)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{f(3)}{(L+\lambda_i)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} P_X^* \\ M_X^* \\ M_{Y1}^* \\ M_{Z1}^* \\ M_{Y2}^* \\ M_{Z2}^* \end{Bmatrix} \quad (2.40.1)$$

เราจะนำเฉพาะพจน์  $F_X, F_Y, F_Z$  มาพิจารณาในการหาพจน์ [B] จะนำมาเฉพาะสามแถวแรก  
 พร้อมทั้งรวมโมเมนต์ในแกน Y เข้าด้วยกันกับรวมโมเมนต์ในแกน Z เข้าด้วยกัน หลังจากนั้น  
 Transpose เมตริกซ์คืนจะได้

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L+U}{L+\lambda_i} & \frac{Vf(1)}{(L+\lambda_i)} & \frac{-Wf(4)}{(L+\lambda_i)} \\ V & -f(2) & f(5) \\ \frac{W}{L+\lambda_i} & \frac{f(3)}{(L+\lambda_i)^2} & \frac{f(6)}{(L+\lambda_i)^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_X^* \\ (M_{Z1}^* + M_{Z2}^*) \\ (M_{Y1}^* + M_{Y2}^*) \end{Bmatrix} \quad (2.40.2)$$

โดยที่

$F_X$  = แรงในแนวแกน  $\bar{X}$  ของพิกัดลากรานจ์

$F_Y$  = แรงในแนวแกน  $\bar{Y}$  ของพิกัดลากรานจ์

$F_Z$  = แรงในแนวแกน  $\bar{Z}$  ของพิกัดลากรานจ์

$P_X^*$  = แรงในแนวแกน  $X^*$  ของพิกัดออยเลอร์

$\frac{(M_{Z1}^* + M_{Z2}^*)}{(L+\lambda_i)}$  = แรงในแนวแกน  $Y^*$  ของพิกัดออยเลอร์ ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์

$$\frac{(M_{Y1}^* + M_{Y2}^*)}{(L + \lambda_1)} = \text{แรงในแนวแกน } Z^* \text{ ของพิกัดออยเลอร์ ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์}$$

การแปลงแรงในแนวแกน  $Y^*$  และแรงในแนวแกน  $Z^*$  จากโมเมนต์จะกล่าวในหัวข้อถัดไป

จากสมการที่ 2.40.2 ถ้าจะหาเมตริกซ์ [B] จากสมการนี้จะยากมากจะได้พจน์ยาวจึงจะเสนอเมตริกซ์ใหม่เพื่อที่จะทำให้สะดวกขึ้น

ข้อดีของเมตริกซ์ของ Ram (14)

- 1 เป็นเมตริกซ์ที่เข้าใจได้ง่าย
- 2 สำหรับการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิตด้วยวิธีทำซ้ำโดยตรงจะให้คำตอบเร็ว

ข้อเสียของเมตริกซ์ของ Ram (14)

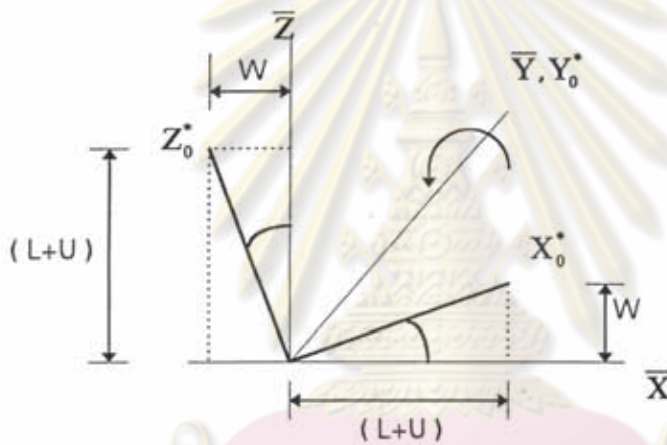
- 1 เมตริกซ์ที่ได้เป็นเมตริกซ์ประมาณจะนำไปสู่ความผิดพลาดในการวิเคราะห์
- 2 ไม่สะดวกในการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้นด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน เพราะจะทำให้พจน์ยาวมาก

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### เมตริกซ์แปลงที่เสนอในงานวิจัยนี้

เพื่อที่จะทำให้เมตริกซ์แปลงแกนในการวิเคราะห์สามมิติยังคงตั้งฉากกัน ผู้วิจัยจึงจะหาเวกเตอร์ของแกนออยเลอร์โดยการหมุนแกนทั้งสามในทิศทางเดียวกันที่ละขั้นตอน เริ่มต้นจะสมมติให้ชั้นส่วนเกิดการหมุนรอบแกน  $\bar{Y}$  ก่อน แล้วจึงหมุนในแนวแกน  $\bar{Z}$  ดังรูปที่ 2.10 และ 2.11 ตามลำดับ

เมื่อชั้นส่วนเกิดการเคลื่อนที่รอบแกน  $\bar{Y}$  จะทำให้แกนชั้นส่วนเกิดการเปลี่ยนทิศไป

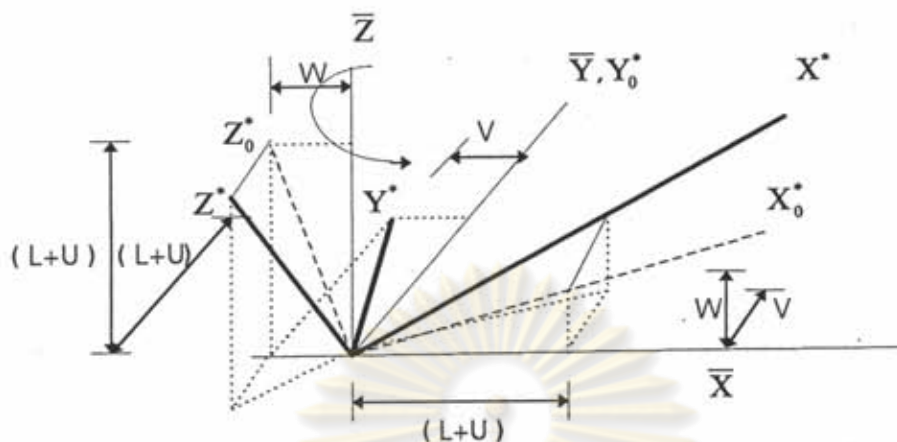


รูปที่ 2.10 แสดงการหมุนของแกนทั้งสามรอบแกน  $\bar{Y}$

จากรูปที่ 2.10 แกนของชั้นส่วน  $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  เกิดการหมุนรอบแกน  $\bar{Y}$  ทำให้แกน  $\bar{X}$  และแกน  $\bar{Z}$  เปลี่ยนไปเป็นแกน  $X_0^*$  และแกน  $Z_0^*$  ตามลำดับ แต่แกน  $Y_0^*$  ยังคงเป็นแกน  $\bar{Y}$  เหมือนเดิม

หลังจากนั้นจะหมุนแกน  $X_0^*$  แกน  $Y_0^*$  และแกน  $Z_0^*$  รอบแกน  $\bar{Z}$  เป็นมุม  $\tan^{-1}\left(\frac{V}{L+U}\right)$  เพื่อที่จะทำให้แกน  $X^*$  ที่หมุนไปมีเวกเตอร์ดังสมการ

$$\text{เวกเตอร์แกน } X^* = ((L+U)\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k}) \quad (2.41)$$



รูปที่ 2.11 แสดงการหมุนของแกน  $Y_0^*$  รอบแกน  $Z$

พิจารณารูปที่ 2.11 เป็นการแสดงการหมุนรอบแกน  $Z$  ของแกน  $X_0^*, Y_0^*, Z_0^*$  เป็นมุม  $\tan^{-1}\left(\frac{V}{L+U}\right)$  ซึ่งจะกลายเป็นแกน  $X^*, Y^*, Z^*$  ตามลำดับ

กำหนดให้

$\bar{i}$  = เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแกน  $\bar{X}$

$\bar{j}$  = เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแกน  $\bar{Y}$

$\bar{k}$  = เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแกน  $\bar{Z}$

$U = U_2 - U_1$

$V = V_2 - V_1$

$W = W_2 - W_1$

โดยที่

$U_1$  = การเคลื่อนที่ของปลายที่ 1 ในแกน  $\bar{X}$  ของพิกัดลากรางจ์

$U_2$  = การเคลื่อนที่ของปลายที่ 2 ในแกน  $\bar{X}$  ของพิกัดลากรางจ์

$V_1$  = การเคลื่อนที่ของปลายที่ 1 ในแกน  $\bar{Y}$  ของพิกัดลากรางจ์

$V_2$  = การเคลื่อนที่ของปลายที่ 2 ในแกน  $\bar{Y}$  ของพิกัดลากรางจ์

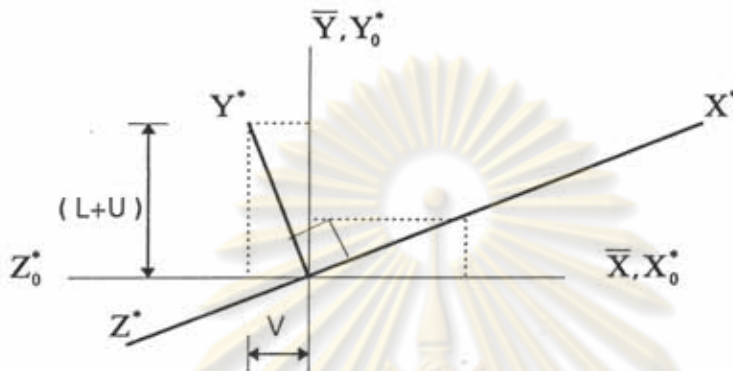
$W_1$  = การเคลื่อนที่ของปลายที่ 1 ในแกน  $\bar{Z}$  ของพิกัดลากรางจ์

$W_2$  = การเคลื่อนที่ของปลายที่ 2 ในแกน  $\bar{Z}$  ของพิกัดลากรางจ์



จากรูปที่ 2.11 จะได้

$$\text{เวกเตอร์หนึ่งหน่วย } Y^* = -\frac{V}{\sqrt{(L+U)^2 + V^2}} \bar{i} + \frac{L+U}{\sqrt{(L+U)^2 + V^2}} \bar{j} \quad (2.42)$$



รูปที่ 2.12 แสดงการหมุนรอบแกน  $Z$  ของแกน  $X_0, Y_0, Z_0$  ในระนาบ  $\bar{X}\bar{Y}$

จากรูปที่ 2.12 จะเป็นการมองรูปที่ 2.11 ในระนาบ  $\bar{X}\bar{Y}$  เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น แกน  $X_0, Y_0, Z_0$  จะหมุนรอบแกน  $Z$  กลายเป็นแกน  $X^*, Y^*, Z^*$  ตามลำดับ ในระนาบนี้แกน  $\bar{Y}, Y_0, Y^*$  จะอยู่ในระนาบ แต่แกน  $X^*, Z^*, X_0, Z_0$  จะเป็นภาพเส้นที่ได้มาจากการโปรเจค

จากการที่เราทราบเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกน  $X^*$  ว่าเป็นเส้นคอร์คของชิ้นส่วน โดยดูจากรูปที่ 2.4 และเมื่อรู้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกน  $Y^*$  ตามรูปที่ 2.11 หรือรูปที่ 2.12 จะทำให้สามารถหาแกน  $Z^*$  ได้โดยการนำเวกเตอร์แกน  $X^*$  มาคูณกับเวกเตอร์แกน  $Y^*$  เวกเตอร์ของแกน  $Z^* = (\text{เวกเตอร์ของแกน } X^*) \times (\text{เวกเตอร์ของแกน } Y^*)$

$$\begin{aligned} &= ((L+U)\bar{i} + V\bar{j} + W\bar{k}) \times (-V\bar{i} + (L+U)\bar{j}) \\ &= -W(L+U)\bar{i} - WV\bar{j} + ((L+U)^2 + V^2)\bar{k} \end{aligned} \quad (2.43)$$

สามารถทำเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้โดยการหารด้วยขนาดของเวกเตอร์

$$\text{เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกน } Z^* = \frac{-W(L+U)}{\| \cdot \|} \bar{i} + \frac{-WV}{\| \cdot \|} \bar{j} + \frac{\sqrt{(L+U)^2 + V^2}}{\| \cdot \|} \bar{k}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned} \| &= \sqrt{(L+U)^2 + V^2} \\ \| \cdot \| &= \sqrt{(L+U)^2 + V^2 + W^2} \end{aligned}$$

จากรูปจะได้แกน X, Y, Z ใหม่ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \text{เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกน } X^* &= \frac{(L+U)}{lt} \bar{i} + \frac{V}{lt} \bar{j} + \frac{W}{lt} \bar{k} \\ \text{เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกน } Y^* &= \frac{-V}{ll} \bar{i} + \frac{(L+U)}{ll} \bar{j} \\ \text{เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกน } Z^* &= \frac{-W(L+U)}{ll \cdot lt} \bar{i} + \frac{-WV}{ll \cdot lt} \bar{j} + \frac{\sqrt{(L+U)^2 + V^2}}{lt} \bar{k} \end{aligned} \right\} (2.44)$$

โดยที่

$X^*$  = แกน X ในพิกัดลากรางจ์ที่เคลื่อนที่แล้ว หรือแกน X ในพิกัดออยเลอร์

$Y^*$  = แกน Y ในพิกัดลากรางจ์ที่เคลื่อนที่แล้ว หรือแกน Y ในพิกัดออยเลอร์

$Z^*$  = แกน Z ในพิกัดลากรางจ์ที่เคลื่อนที่แล้ว หรือแกน Z ในพิกัดออยเลอร์

จะได้สมการแปลงพิกัดแรงจากพิกัดออยเลอร์ไปพิกัดลากรางจ์ ดังนี้

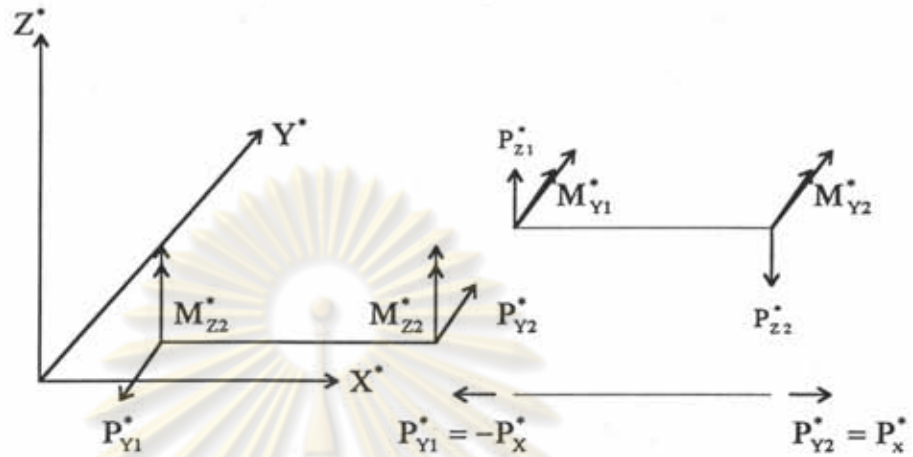
$$\begin{Bmatrix} P_{X2}^* \\ P_{Y2}^* \\ P_{Z2}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L+U}{lt} & \frac{V}{lt} & \frac{W}{lt} \\ -\frac{V}{ll} & \frac{(L+U)}{ll} & 0 \\ \frac{-W(L+U)}{ll \cdot lt} & \frac{-WV}{ll \cdot lt} & \frac{ll}{lt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{Z2} \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

ถ้าทำการอินเวอร์สสมการที่ 2.45 จะได้

$$\begin{Bmatrix} F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{Z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L+U}{lt} & \frac{-V}{ll} & \frac{-W(L+U)}{ll \cdot lt} \\ \frac{V}{ll} & \frac{(L+U)}{ll} & \frac{-WV}{ll \cdot lt} \\ \frac{W}{lt} & 0 & \frac{ll}{lt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{X2}^* \\ P_{Y2}^* \\ P_{Z2}^* \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

รูปที่ 2.13 แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือนกับโมเมนต์ โดยการนำโมเมนต์ทั้งสองปลายมาบวกกันแล้วหารด้วยขนาดความยาวชิ้นส่วน จะได้แรงเฉือนออกมาซึ่งอาจจะมีทิศทางบวกหรือลบขึ้นอยู่กับทิศทางของแกนที่เรากำหนด การที่เราหาความสัมพันธ์นี้เพื่อที่จะนำไปใช้

ในการแปลงแรงในแนวแกนของพิกัดลากรานจ์ในสมการที่ 2.49 ที่เปลี่ยนแปลงไปให้อยู่ในรูปของโมเมนต์และแรงในแนวแกนของพิกัดออยเลอร์



รูปที่ 2.13 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงในพิกัดออยเลอร์กับโมเมนต์ในพิกัดออยเลอร์  
จากรูปที่ 2.13 สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} P_{X2}^* \\ P_{Y2}^* \\ P_{Z2}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{lt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{X2}^* \\ M_{Z1}^* + M_{Z2}^* \\ M_{Y1}^* + M_{Y2}^* \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

โดยที่

- $P_{X1}^*$  = แรงในทิศทาง  $X^*$  ของพิกัดออยเลอร์ที่ปลาย 1
- $P_{Y1}^*$  = แรงในทิศทางแกน  $Y^*$  ของพิกัดออยเลอร์ที่ปลาย 1
- $P_{Z1}^*$  = แรงในทิศทางแกน  $Z^*$  ของพิกัดออยเลอร์ที่ปลาย 1
- $F_{X1}$  = แรงในทิศทางแกน  $\bar{X}$  ของพิกัดลากรานจ์ที่ปลาย 1
- $F_{Y1}$  = แรงในทิศทางแกน  $\bar{Y}$  ของพิกัดลากรานจ์ที่ปลาย 1
- $F_{Z1}$  = แรงในทิศทางแกน  $\bar{Z}$  ของพิกัดลากรานจ์ที่ปลาย 1
- $P_{X2}^*$  = แรงในทิศทาง  $X^*$  ของพิกัดออยเลอร์ที่ปลาย 2
- $P_{Y2}^*$  = แรงในทิศทางแกน  $Y^*$  ของพิกัดออยเลอร์ที่ปลาย 2
- $P_{Z2}^*$  = แรงในทิศทางแกน  $Z^*$  ของพิกัดออยเลอร์ที่ปลาย 2

$F_{X2}$  = แรงในทิศทางแกน  $\bar{X}$  ของพิกัดลากรานจ์ที่ปลาย 2

$F_{Y2}$  = แรงในทิศทางแกน  $\bar{Y}$  ของพิกัดลากรานจ์ที่ปลาย 2

$F_{Z2}$  = แรงในทิศทางแกน  $\bar{Z}$  ของพิกัดลากรานจ์ที่ปลาย 2

แทนสมการที่ 2.47 ลงในสมการที่ 2.46 จะได้เมตริกซ์แปลงแรงของพิกัดลากรานจ์ เป็นแรงในแนวแกนและโมเมนต์ของพิกัดออยเลอร์

$$\begin{Bmatrix} F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{Z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L+U}{lt} & \frac{-V}{ll \cdot lt} & \frac{W(L+U)}{ll \cdot lt^2} \\ \frac{V}{lt} & \frac{(L+U)}{ll \cdot lt} & \frac{WV}{ll \cdot lt^2} \\ \frac{W}{lt} & 0 & \frac{-ll}{lt^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{X2}^* \\ (M_{Z1}^* + M_{Z2}^*) \\ (M_{Y2}^* + M_{Y1}^*) \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

นำสมการที่ 2.48 มาหาอินเวอร์สจะได้

$$\begin{Bmatrix} P_{X2}^* \\ M_{Z1}^* + M_{Z2}^* \\ M_{Y1}^* + M_{Y2}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L+U}{lt} & \frac{V}{lt} & \frac{W}{lt} \\ \frac{-V \cdot lt}{(L+U) \cdot lt} & \frac{ll}{ll} & 0 \\ \frac{W(L+U)}{ll} & \frac{WV}{ll} & -ll \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{Z2} \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

จากสมการที่ 2.49 เนื่องจากแรงที่ปลาย 1 มีขนาดเท่ากับปลาย 2 แต่ทิศทางตรงข้าม (ดูจากรูปที่ 2.13) เมตริกซ์แปลง จึงจะเปลี่ยนแค่เครื่องหมายเท่านั้น

$$\begin{Bmatrix} P_{X2}^* \\ M_{Z1}^* + M_{Z2}^* \\ M_{Y1}^* + M_{Y2}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(L+U)}{lt} & \frac{-V}{lt} & \frac{-W}{lt} \\ \frac{V \cdot lt}{(L+U) \cdot lt} & \frac{ll}{ll} & 0 \\ \frac{-W(L+U)}{ll} & \frac{-WV}{ll} & ll \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{Z1} \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

เมื่อหาอินเวอร์สสมการที่ 2.50 จะได้

$$\begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{Z1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(L+U)}{lt} & \frac{V \cdot lt}{ll} & \frac{-W(L+U)}{ll} \\ \frac{-V}{(L+U) \cdot lt} & \frac{ll}{ll} & \frac{-WV}{ll} \\ \frac{-W(L+U)}{ll} & \frac{WV}{ll} & ll \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{X2}^* \\ M_{Z1}^* + M_{Z2}^* \\ M_{Y1}^* + M_{Y2}^* \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

การที่เราจะสนใจเฉพาะการแปลงของแรง  $F_x, F_y, F_z$  เท่านั้นเพราะเราจะถือว่าโมเมนต์ไม่มีการ  
 แยกไปอยู่ในแกนอื่น( Conservative Moment )

จากการที่โมเมนต์ไม่มีการแยกไปอยู่ในแกนอื่น( Conservative Moment ) จะทำให้เราได้รับความ  
 สัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ในพิกัดลากรานจ์กับโมเมนต์ในพิกัดโครงสร้างดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_{x1} \\ \bar{M}_{y1} \\ \bar{M}_{z1} \\ \bar{M}_{x2} \\ \bar{M}_{y2} \\ \bar{M}_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x^* \\ M_{y1}^* \\ M_{z1}^* \\ M_{y2}^* \\ M_{z2}^* \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

จากสมการที่ 2.46, 2.48, 2.51 กับสมการที่ 2.52 จะได้เมตริกซ์การแปลงแรงจากออยเลอร์เป็น  
 ลากรานจ์

$$\{\bar{S}\} = [A]^T \{S^*\} \quad (2.53)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x1} \\ F_{x1} \\ \bar{M}_{x1} \\ \bar{M}_{y1} \\ \bar{M}_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{x2} \\ F_{x2} \\ \bar{M}_{x2} \\ \bar{M}_{y2} \\ \bar{M}_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(L+U)}{lt} & 0 & \frac{-W(L+U)}{ll \cdot lt^2} & \frac{V}{ll \cdot lt} & \frac{-W(L+U)}{ll \cdot lt^2} & \frac{V}{ll \cdot lt} \\ -\frac{V}{lt} & 0 & \frac{-WV}{ll \cdot lt^2} & \frac{(L+U)}{ll \cdot lt} & \frac{-WV}{ll \cdot lt^2} & \frac{(L+U)}{ll \cdot lt} \\ \frac{lt}{-W} & 0 & \frac{ll}{lt^2} & 0 & \frac{ll}{lt^2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(L+U)}{lt} & 0 & \frac{W(L+U)}{ll \cdot lt^2} & \frac{-V}{ll \cdot lt} & \frac{W(L+U)}{ll \cdot lt^2} & \frac{-V}{ll \cdot lt} \\ \frac{lt}{V} & 0 & \frac{WV}{ll \cdot lt^2} & \frac{-(L+U)}{ll \cdot lt} & \frac{WV}{ll \cdot lt^2} & \frac{-(L+U)}{ll \cdot lt} \\ \frac{lt}{W} & 0 & \frac{-ll}{lt^2} & 0 & \frac{-ll}{lt^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x^* \\ M_x^* \\ M_{y1}^* \\ M_{z1}^* \\ M_{y2}^* \\ M_{z2}^* \end{Bmatrix}$$

หมายเหตุ

$$P_x^* = P_{x2}^*$$

$P_x^* = -P_{x1}^*$  เพราะ  $P_x^*$  ที่เราใช้มาตั้งแต่ต้นอยู่ที่ปลาย 2

จากสมการที่ 2.53 จะได้เมตริกซ์การแปลงพิกัดจากออยเลอร์เป็นลากรางจ์

จากสมการที่ 2.31  $\{\bar{S}\} = [A]^T \{S^*\}$  ถ้านำเมตริกซ์  $[A]$  ในสมการที่ 2.49 มาแทนลงในสมการที่ 2.26.1 จะสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\{dD^*\} = [A]\{d\bar{D}\}$$

$$\begin{Bmatrix} d\lambda_t \\ d\theta_x^* \\ d\theta_{y1}^* \\ d\theta_{z1}^* \\ d\theta_{y2}^* \\ d\theta_{z2}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(L+U)}{lt} & 0 & \frac{-W(L+U)}{ll \cdot lt^2} & \frac{V}{ll \cdot lt} & \frac{-W(L+U)}{ll \cdot lt^2} & \frac{V}{ll \cdot lt} \\ -\frac{V}{lt} & 0 & \frac{-WV}{-WV} & \frac{(L+U)}{(L+U)} & \frac{-WV}{-WV} & \frac{(L+U)}{(L+U)} \\ \frac{lt}{lt} & 0 & \frac{ll \cdot lt^2}{ll \cdot lt^2} & \frac{ll \cdot lt}{ll \cdot lt} & \frac{ll \cdot lt^2}{ll \cdot lt^2} & \frac{ll \cdot lt}{ll \cdot lt} \\ -\frac{W}{lt} & 0 & \frac{ll}{lt^2} & 0 & \frac{ll}{lt^2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (L+U) & 0 & \frac{W(L+U)}{W(L+U)} & \frac{-V}{-V} & \frac{W(L+U)}{W(L+U)} & \frac{-V}{-V} \\ \frac{lt}{lt} & 0 & \frac{ll \cdot lt^2}{ll \cdot lt^2} & \frac{ll \cdot lt}{ll \cdot lt} & \frac{ll \cdot lt^2}{ll \cdot lt^2} & \frac{ll \cdot lt}{ll \cdot lt} \\ \frac{V}{lt} & 0 & \frac{WV}{WV} & \frac{-(L+U)}{-(L+U)} & \frac{WV}{WV} & \frac{-(L+U)}{-(L+U)} \\ \frac{lt}{lt} & 0 & \frac{ll \cdot lt^2}{ll \cdot lt^2} & \frac{ll \cdot lt}{ll \cdot lt} & \frac{ll \cdot lt^2}{ll \cdot lt^2} & \frac{ll \cdot lt}{ll \cdot lt} \\ \frac{W}{lt} & 0 & \frac{-ll}{lt^2} & 0 & \frac{-ll}{lt^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dU_1 \\ dV_1 \\ dW_1 \\ \bar{\theta}_{x1} \\ \bar{\theta}_{y1} \\ \bar{\theta}_{z1} \\ dU_2 \\ dV_2 \\ dW_2 \\ \bar{\theta}_{x2} \\ \bar{\theta}_{y2} \\ \bar{\theta}_{z2} \end{Bmatrix}$$

เป็นสมการที่ 2.54 ซึ่งจะเป็นเมตริกซ์สำหรับใช้ในการแปลงแกนจากพิกัดออยเลอร์มาลากรางจ์

จากสมการที่ 2.38 ที่จะใช้ในการหาสติฟเนสเส้นสัมผัส (Tangent Stiffness)

$$\{dS\} = [T]^T ([A]^T [K^*] [A] + [B]) [T] \{dD\}$$

โดยที่

$$[dA]^T \{S^*\} = [B] \{d\bar{D}\} \quad \text{จากสมการที่ 2.36}$$

พิจารณาจากสมการที่ 2.34 เราจะต้องหาหาค่า  $[B]$  ที่สมมติเอาไว้

$$\{d\bar{S}\} = [A]^T [K^*] [A] \{d\bar{D}\} + [dA]^T \{S^*\}$$

จากการสังเกตจะได้ว่า  $[dA]^T \{S^*\} = \{d\bar{S}\}$  เมื่อกำหนดให้  $\{S^*\}$  เป็นค่าคงที่



$$[b] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{X2}}{\partial U_2} & \frac{\partial F_{X2}}{\partial V_2} & \frac{\partial F_{X2}}{\partial W_2} \\ \frac{\partial F_{Y2}}{\partial U_2} & \frac{\partial F_{Y2}}{\partial V_2} & \frac{\partial F_{Y2}}{\partial W_2} \\ \frac{\partial F_{Z2}}{\partial U_2} & \frac{\partial F_{Z2}}{\partial V_2} & \frac{\partial F_{Z2}}{\partial W_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$[0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{X1}}{\partial \theta_{X1}} & \frac{\partial F_{X1}}{\partial \theta_{Y1}} & \frac{\partial F_{X1}}{\partial \theta_{Z1}} \\ \frac{\partial F_{Y1}}{\partial \theta_{X1}} & \frac{\partial F_{Y1}}{\partial \theta_{Y1}} & \frac{\partial F_{Y1}}{\partial \theta_{Z1}} \\ \frac{\partial F_{Z1}}{\partial \theta_{X1}} & \frac{\partial F_{Z1}}{\partial \theta_{Y1}} & \frac{\partial F_{Z1}}{\partial \theta_{Z1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากโมเมนต์จะคงที่เสมอ ( Conservative Moment ) ไม่มีการเปลี่ยนทิศอนุพันธ์จะเป็นศูนย์

$$[0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial U} & \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial V} & \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial W} \\ \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial U} & \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial V} & \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial W} \\ \frac{\partial \bar{M}_z}{\partial U} & \frac{\partial \bar{M}_z}{\partial V} & \frac{\partial \bar{M}_z}{\partial W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{M}_{x1}}{\partial \theta_{x1}} & \frac{\partial \bar{M}_{x1}}{\partial \theta_{y1}} & \frac{\partial \bar{M}_{x1}}{\partial \theta_{z1}} \\ \frac{\partial \bar{M}_{y1}}{\partial \theta_{x1}} & \frac{\partial \bar{M}_{y1}}{\partial \theta_{y1}} & \frac{\partial \bar{M}_{y1}}{\partial \theta_{z1}} \\ \frac{\partial \bar{M}_{z1}}{\partial \theta_{x1}} & \frac{\partial \bar{M}_{z1}}{\partial \theta_{y1}} & \frac{\partial \bar{M}_{z1}}{\partial \theta_{z1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีการหาค่าในสมการที่ 2.56

นำสมการที่ 2.48 มาแทนในสมการที่ 2.56 ก็จะสามารถหาเมตริกซ์ [b] ได้ แต่จะแสดงการหาเมตริกซ์ [b] ในสมการที่ 2.56 ที่สะดวกเพื่อความสะดวกในการหา แถวที่ 1 ของสมการที่ 2.56 จะเป็นการหาอนุพันธ์เทียบกับ  $U_2$  จะได้ผลดังนี้



$$\begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{Bmatrix} = \frac{\begin{Bmatrix} \frac{\partial F_{x_2}}{\partial U_2} \\ \frac{\partial F_{y_2}}{\partial U_2} \\ \frac{\partial F_{z_2}}{\partial U_2} \end{Bmatrix}}{\partial U_2} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{L+U}{lt} & \frac{-V}{ll \cdot lt} & \frac{W(L+U)}{ll \cdot lt^2} \\ \frac{V}{lt} & \frac{(L+U)}{ll \cdot lt} & \frac{WV}{ll \cdot lt^2} \\ \frac{W}{lt} & 0 & \frac{-ll}{lt^2} \end{bmatrix}}{\partial U_2} \begin{Bmatrix} P_{x_2}^* \\ (M_{z_1}^* + M_{z_2}^*) \\ (M_{y_2}^* + M_{y_2}^*) \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

เมื่อทำการหาอนุพันธ์สมการที่ 2.57 เทียบกับ  $U_2$  เสร็จแล้ว จะแทนค่า  $P_{x_2}^*$ ,  $M_{y_1}^* + M_{y_2}^*$ ,  $M_{z_1}^* + M_{z_2}^*$  ซึ่งเป็นค่าคงที่ ด้วย  $F_x, F_y, F_z$  โดยอาศัยความสัมพันธ์ในสมการที่ 2.49 จะได้ผลดังนี้

$$\begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{L+U}{lt} & \frac{-V}{ll \cdot lt} & \frac{W(L+U)}{ll \cdot lt^2} \\ \frac{V}{lt} & \frac{(L+U)}{ll \cdot lt} & \frac{WV}{ll \cdot lt^2} \\ \frac{W}{lt} & 0 & \frac{-ll}{lt^2} \end{bmatrix}}{\partial U_2} \begin{bmatrix} \frac{(L+U)}{lt} & \frac{V}{lt} & \frac{W}{lt} \\ -V & (L+U) & 0 \\ \frac{ll}{W(L+U)} & \frac{ll}{WV} & -ll \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ F_{z_2} \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

สำหรับแถวที่ 2 ของสมการที่ 2.56 จะหาเหมือนสมการที่ 2.58 เพียงแต่จะเปลี่ยนจากการหาอนุพันธ์เทียบกับ  $U_2$  เป็นการหาอนุพันธ์เทียบกับ  $V_2$

$$\begin{Bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{L+U}{lt} & \frac{-V}{ll \cdot lt} & \frac{W(L+U)}{ll \cdot lt^2} \\ \frac{V}{lt} & \frac{(L+U)}{ll \cdot lt} & \frac{WV}{ll \cdot lt^2} \\ \frac{W}{lt} & 0 & \frac{-ll}{lt^2} \end{bmatrix}}{\partial V_2} \begin{bmatrix} \frac{(L+U)}{lt} & \frac{V}{lt} & \frac{W}{lt} \\ -V & (L+U) & 0 \\ \frac{ll}{W(L+U)} & \frac{ll}{WV} & -ll \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ F_{z_2} \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

สำหรับแถวที่ 3 ของสมการที่ 2.56 จะหาเหมือนสมการที่ 2.58 เพียงแต่จะเปลี่ยนจากการหาอนุพันธ์เทียบกับ  $U_2$  เป็นการหาอนุพันธ์เทียบกับ  $W_2$

$$\begin{Bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial W_2} \begin{bmatrix} \frac{L+U}{lt} & \frac{-V}{\Pi \cdot lt} & \frac{W(L+U)}{\Pi \cdot lt^2} \\ \frac{V}{W} & \frac{\Pi \cdot lt}{(L+U)} & \frac{\Pi \cdot lt^2}{WV} \\ \frac{lt}{W} & \frac{\Pi \cdot lt}{\Pi \cdot lt} & \frac{\Pi \cdot lt^2}{-\Pi} \\ \frac{lt}{lt} & 0 & \frac{-\Pi}{lt^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(L+U)}{lt} & \frac{V}{lt} & \frac{W}{lt} \\ -V & \frac{(L+U)}{\Pi} & 0 \\ \frac{\Pi}{W(L+U)} & \frac{\Pi}{WV} & -\Pi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

เมื่อแก้สมการที่ 2.58 , 2.59 และ 2.60 จะได้เมตริกซ์ [b] ในสมการที่ 2.56

ต่อไปจะแสดงวิธีการหา  $b_{11}$  เป็นตัวอย่าง

$$\begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial U_2} \begin{bmatrix} \frac{L+U}{lt} & \frac{-V}{\Pi \cdot lt} & \frac{W(L+U)}{\Pi \cdot lt^2} \\ \frac{V}{W} & \frac{\Pi \cdot lt}{(L+U)} & \frac{\Pi \cdot lt^2}{WV} \\ \frac{lt}{W} & \frac{\Pi \cdot lt}{\Pi \cdot lt} & \frac{\Pi \cdot lt^2}{-\Pi} \\ \frac{lt}{lt} & 0 & \frac{-\Pi}{lt^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(L+U)}{lt} & \frac{V}{lt} & \frac{W}{lt} \\ -V & \frac{(L+U)}{\Pi} & 0 \\ \frac{\Pi}{W(L+U)} & \frac{\Pi}{WV} & -\Pi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

จากสมการที่ 2.61 เราจะหาอนุพันธ์พจน์  $\frac{(L+U)}{lt}$  ของเมตริกซ์แปลง  $b_{11}$  ก่อน และแทนค่าที่ได้กำหนดไว้คือ  $\Pi$  กับ  $lt$  ลงไปด้วย ( มาจากกำหนดที่สมการที่ 2.43 )

$$\Pi = \sqrt{(L+U)^2 + V^2}$$

$$lt = \sqrt{(L+U)^2 + V^2 + W^2}$$

จะได้

$$\frac{\partial \left( \frac{(L+U)}{\sqrt{(L+U)^2 + V^2 + W^2}} \right)}{\partial U_2} = \left( \frac{\sqrt{(L+U)^2 + V^2 + W^2} - \frac{(L+U)^2}{\sqrt{(L+U)^2 + V^2 + W^2}}}{(L+U)^2 + V^2 + W^2} \right) \frac{d(L+U)}{dU_2}$$

เนื่องจาก L เป็นค่าคงที่เมื่อหาอนุพันธ์จะได้ศูนย์

$$= \left( \frac{(V^2 + W^2)}{((L+U)^2 + V^2 + W^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{d(U)}{dU_2} \quad (2.62)$$

เมื่อแทน  $U = U_2 - U_1$  ;  $V = V_2 - V_1$  ;  $W = W_2 - W_1$  ( ได้จากที่กำหนดไว้ในสมการที่ 2.41 ) ลงในสมการที่ 2.62 จะได้

$$= \left( \frac{(V^2 + W^2)}{((L+U)^2 + V^2 + W^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

จากสมการที่ 2.61 เราจะหาอนุพันธ์ของพจน์  $\frac{-V}{ll \cdot lt}$  ของเมตริกซ์แปลง  $b_{11}$  จะได้

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left( \frac{(-V)}{\sqrt{(L+U)^2 + V^2} \sqrt{(L+U)^2 + V^2 + W^2}} \right)}{\partial U_2} \\ &= \left( \frac{V((L+U)((L+U)^2 + V^2 + W^2) + (L+U)((L+U)^2 + V^2))}{((L+U)^2 + V^2)^{\frac{3}{2}} ((L+U)^2 + V^2 + W^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{d(L+U)}{dU_2} \\ &= \left( \frac{V((L+U)((L+U)^2 + V^2 + W^2) + (L+U)((L+U)^2 + V^2))}{((L+U)^2 + V^2)^{\frac{3}{2}} ((L+U)^2 + V^2 + W^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

จากสมการที่ 2.61 เราจะหาอนุพันธ์ของพจน์  $\frac{-W(L+U)}{ll \cdot lt}$  ของเมตริกซ์แปลง  $b_{11}$  จะได้

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left( \frac{-W(L+U)}{\sqrt{(L+U)^2 + V^2} \sqrt{(L+U)^2 + V^2 + W^2}} \right)}{\partial U_2} \\ &= \left( \frac{-W(V^2((L+U)^2 + V^2 + W^2) - 2(L+U)^2((L+U)^2 + V^2))}{((L+U)^2 + V^2)^{\frac{3}{2}} ((L+U)^2 + V^2 + W^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{d(L+U)}{dU_2} \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{-W(V^2((L+U)^2 + V^2 + W^2) - 2(L+U)^2((L+U)^2 + V^2))}{((L+U)^2 + V^2)^2((L+U)^2 + V^2 + W^2)^2} \right)$$

เมื่อนำค่าทั้งสามพจน์ที่หาอนุพันธ์แล้วไปแทนค่าลงในสมการที่ 2.61 แล้วคูณเมตริกซ์ในสมการนั้นให้เรียบร้อย จากนั้นจัดรูปเสียใหม่ จะได้ ค่า  $b_{11}$  ดังนี้

$$b_{11} = \left( \frac{W^2(L+U)V^2lt^2 - V^2(L+U)lt^4 - W^2(L+U)^3ll^2}{lt^4ll^4} \right) F_x + \left( \frac{Vlt^2ll^4 + V(L+U)^2lt^4 - V(L+U)^2W^2ll^2}{lt^4ll^4} \right) F_y + \left( \frac{-V^2W^3}{lt^4ll^4} + \frac{W^3 + 2(L+U)^2W}{lt^4} \right) F_z$$

ค่า [b] อื่น ๆ จะหาได้โดยวิธีเดียวกัน

สมการข้างล่างจะเป็นการแสดงตัวแปรในสมการที่ 2.56 ที่จะนำไปใช้แทนค่าสติฟเนสเส้นสัมผัส (Tangent Stiffness) ในสมการที่ 2.38

$$b_{11} = \left( \frac{W^2(L+U)V^2lt^2 - V^2(L+U)lt^4 - W^2(L+U)^3ll^2}{lt^4ll^4} \right) F_x + \left( \frac{Vlt^2ll^4 + V(L+U)^2lt^4 - V(L+U)^2W^2ll^2}{lt^4ll^4} \right) F_y + \left( \frac{-V^2W^3}{lt^4ll^4} + \frac{W^3 + 2(L+U)^2W}{lt^4} \right) F_z$$

$$b_{12} = \left( \frac{-W^2(L+U)^2V - V^3lt^2}{lt^4ll^2} \right) F_x + \left( \frac{-W^2V^2(L+U)(lt^2 + ll^2) - (L+U)^3lt^4}{lt^4ll^4} \right) F_y + \left( \frac{WV(L+U)(lt^2 + ll^2)}{lt^4ll^4} \right) F_z$$

$$b_{13} = \left( \frac{-W^3(L+U)^2 - WV^2lt^2}{lt^4ll^4} \right) F_x + \left( \frac{WV(L+U)}{lt^4} \right) F_y + \left( \frac{-(L+U)ll^2}{lt^4} \right) F_z$$

$$b_{21} = \left( \frac{-W^2 V(L+U)^2 (lt^2 + l^2) - V^3 lt^4}{lt^4 l^4} \right) F_x + \left( \frac{-W^2 V^2 (L+U) - (L+U)^3 lt^2}{lt^4 l^2} \right) F_y + \left( \frac{WV(L+U)(lt^2 + l^2)}{lt^4 l^2} \right) F_z$$

$$b_{22} = \left( \frac{(L+U)lt^2 l^2 + W^2 (L+U)^3 lt^2 + V^2 (L+U)lt^4}{lt^4 l^4} \right) F_x + \left( \frac{W^2 V(L+U)^2 lt^2 - W^2 V^3 l^2 - (L+U)^2 lt^4 V}{lt^4 l^4} \right) F_y + \left( \frac{WV^2 (lt^2 + l^2)}{lt^4 l^4} \right) F_z$$

$$b_{23} = \left( \frac{WV(L+U)}{lt^4} \right) F_x - \left( \frac{W^3 V^2 (2l^2 + W^2) + W(L+U)^2 lt^2 l^2}{lt^4 l^4} \right) F_y + \left( \frac{Vl^4 + WV^2 lt^4}{lt^4 l^2} \right) F_z$$

$$b_{31} = \left( \frac{-W^3 (L+U)^2}{lt^4 l^2} \right) F_x + \left( \frac{-W^3 V(L+U)}{lt^4 l^2} \right) F_y + \left( \frac{-(L+U)l^2}{lt^4} \right) F_z$$

$$b_{32} = \left( \frac{-WV^3 (L+U)}{lt^4 l^2} \right) F_x + \left( \frac{-W^3 V^2}{lt^4 l^2} \right) F_y + \left( \frac{-Vl^2}{lt^4} \right) F_z$$

$$b_{33} = \left( \frac{(L+U)(lt^2 + W^2)}{lt^4} \right) F_x + \left( \frac{V(lt^2 + W^2)}{lt^4} \right) F_y + \left( \frac{-Wl^2}{lt^2} \right) F_z$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## 2.4 ทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัยในช่วงพลาสติก (Nonlinear Material)

ในงานวิจัยนี้จะหาหน้าหนักบรรทุกทุกประลัยโดยใช้วิธีสมดุลย์ (Equilibrium) ซึ่งเป็นวิธีทั่วไปในทางการวิเคราะห์แบบพลาสติก ใช้ในการหาหน้าหนักบรรทุกประลัยโดยการเพิ่มน้ำหนักกระทำต่อชิ้นส่วนที่ล้นน้อยจนกระทั่งชิ้นส่วนเกิดจุดหมุนพลาสติกเพียงพอที่จะทำให้เกิดกลไกวิบัติ ดังที่จะแสดงต่อไปนี้

สมการในการวิเคราะห์โครงสร้าง

$$[K]\{D\} = \{F\} \quad (2.63)$$

โดยที่

$[K]$  = สติฟเนสของโครงสร้าง

$\{D\}$  = ค่าการเคลื่อนที่

$\{F\}$  = แรงที่กระทำต่อโครงสร้าง

1 แรงที่กระทำต่อโครงสร้างจะอยู่ในรูปเมตริกซ์  $\{F\}$  ซึ่งเมตริกซ์นี้จะเป็นตัวกำหนดรูปแบบของแรงกระทำ หรือเซตของแรงกระทำที่กระทำต่อโครงสร้างในแต่ละขั้นตอน

2 กระทำแรงต่อโครงสร้าง  $0.0005\{F\}$

3 วิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธีวิเคราะห์ฮิสตริกอันดับที่ 1 เพื่อหาแรงภายในของชิ้นส่วน

4 กระทำแรงต่อโครงสร้างอีกทีละ  $0.0005\{F\}$  จนกระทั่งเกิดจุดหมุนพลาสติก เมื่อไรในการเกิดจุดหมุนพลาสติกจะอธิบายในหัวข้อถัดไป

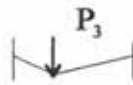
5 หากค่าสติฟเนส  $[K]$  ใหม่โดยกำหนดให้จุดหมุนพลาสติกที่เกิดขึ้นในหัวข้อที่ 4 เป็นจุดหมุนจริง การหาค่าสติฟเนสในชิ้นส่วนจะแสดงไว้ในภายหลัง

6 กระทำซ้ำในหัวข้อที่ 4 และหัวข้อที่ 5 จนเกิดจุดหมุนมากพอที่จะทำให้โครงสร้างวิบัติ

 รูปที่ 2.14a โครงสร้างรับแรง  $P_0$

 รูปที่ 2.14b เมื่อโครงสร้างรับแรง  $P_1$  จะเกิดจุดหมุนที่ปลาย 1

 รูปที่ 2.14c เมื่อโครงสร้างรับแรง  $P_2$  จะเกิดจุดหมุนที่ปลาย 2



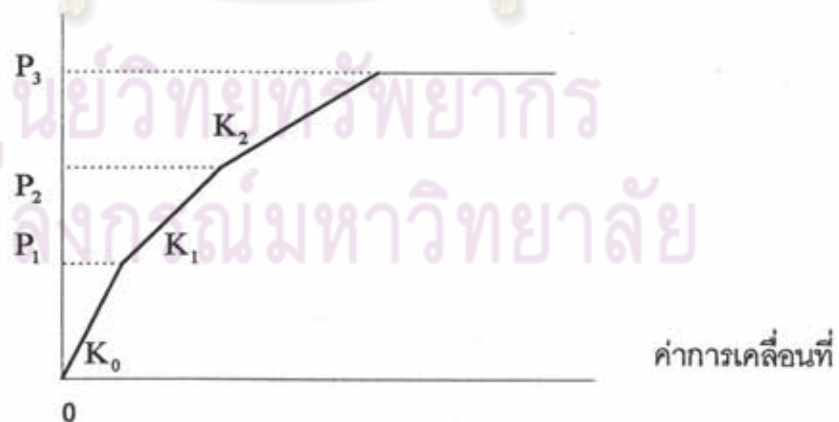
รูปที่ 2.14d เมื่อโครงสร้างรับแรง  $P_3$  โครงสร้างจะเกิดการวิบัติ

รูปที่ 2.14 แสดงโครงสร้างธรรมดาที่วิเคราะห์ด้วยวิธีสมดุลย์ (Equilibrium Method)

จากรูปที่ 2.14a โครงสร้างรับแรงกระทำเพิ่มจนกระทั่งถึงแรง  $P_0$  สติฟเนสที่ได้ยังคงเหมือนเดิมไม่มีการเกิดจุดหมุนพลาสติก ในรูปที่ 2.14b โครงสร้างรับแรงกระทำเพิ่มจนกระทั่งถึงแรง  $P_1$  จะเกิดจุดหมุนพลาสติกที่ปลาย 1 สติฟเนสใหม่ที่จะใช้ในการวิเคราะห์ระหว่างช่วงแรง  $P_1$  ถึงแรง  $P_2$  จะเป็นสติฟเนสที่หามาจากการที่โครงสร้างมีจุดหมุนจริงที่ปลาย 1 ในรูปที่ 2.14c โครงสร้างรับแรงกระทำเพิ่มจนกระทั่งถึงแรง  $P_2$  จะเกิดจุดหมุนพลาสติกที่ปลาย 1 และที่ปลาย 2 สติฟเนสใหม่ที่จะใช้ในการวิเคราะห์ระหว่างช่วงแรง  $P_2$  ถึงแรง  $P_3$  จะเป็นสติฟเนสที่หามาจากการที่โครงสร้างมีจุดหมุนจริงที่ปลาย 1 และเมื่อโครงสร้างรับแรงจนกระทั่งถึงแรง  $P_3$  จะเกิดการวิบัติ ซึ่งแรง  $P_3$  คือน้ำหนักบรรทุกสูงสุด

สามารถแสดงในรูปกราฟได้ดังรูปที่ 2.15 เริ่มต้นโครงสร้างจะมีสติฟเนส  $K_0$  หลังจากนั้นจะรับแรงที่ละ  $0.0005P$  จนกระทั่งถึงแรง  $P_1$  จะเกิดจุดหมุนพลาสติกที่ปลาย 1 สติฟเนสของโครงสร้างจะเปลี่ยนเป็น  $K_1$  เนื่องจากการสมมติให้จุดที่ปลาย 1 เป็นจุดหมุนจริง หลังจากนั้นจะกระทำแรง  $0.0005P$  ต่อจนกระทั่งถึงแรง  $P_2$  โครงสร้างจะเกิดจุดหมุนที่ปลาย 2 สติฟเนสของโครงสร้างจะเปลี่ยนเป็น  $K_2$  เนื่องจากการสมมติให้จุดที่ปลาย 2 เป็นจุดหมุนจริง หลังจากนั้นจะกระทำแรง  $0.0005P$  ต่อจนกระทั่งถึงแรง  $P_3$  โครงสร้างก็จะถึงจุดวิบัติ

แรงกระทำ



รูปที่ 2.15 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของแรงกระทำกับการเคลื่อนที่ของรูปที่ 2.14

หมายเหตุ การตรวจสอบว่าโครงสร้างไม่เสถียรภาพ

- ตรวจสอบได้จากในแนวทแยงของเมตริกซ์โครงสร้างว่ามีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์

การหาจุดหมุนพลาสติกของหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า Bruinette ( 5 )

การพิจารณาหาโมเมนต์พลาสติกของโมเมนต์สองทางจะอาศัยการสมมติเส้นแกนสะเทิน ( Neutral Axis ) ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงในแนวแกนและโมเมนต์สองทาง

หลักการคิดจะหาความสัมพันธ์ของแรงต่าง ๆ เริ่มต้นจะสมมติเส้นแกนสะเทินในรูปของสมการเส้นตรง จากนั้นจะสมมติให้ชิ้นส่วนรับโมเมนต์แกน Z เป็นหลัก เริ่มต้นจะพิจารณารกณที่มีโมเมนต์ในแกน Z อย่างเดียวหลังจากนั้นจะสมมติว่าเกิดโมเมนต์แกน Y ซึ่งจะทำให้ลดโมเมนต์ในแกน Z ลง และก็จะสมมติให้รับแรงในแนวแกน แรงในแนวแกนจะไปลดโมเมนต์ในแกน Z อีก จากนั้นเขียนให้อยู่ในรูปที่สัมพันธ์กัน ฉะนั้นเมื่อรู้แรงในแนวแกน และ โมเมนต์ในแกน Y จะทำให้สามารถรู้โมเมนต์พลาสติกในแกน Z ได้

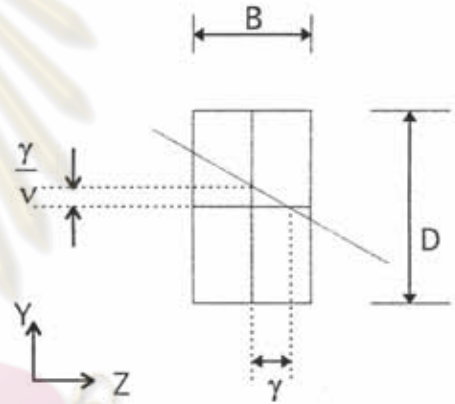
พิจารณาสี่เหลี่ยมกว้าง B ยาว D

กำหนดให้ Neutral Axis  $Y=f(z)=\frac{-Z+\gamma}{v}$

ความชัน  $=-\frac{1}{v}$

จุดตัดแกน  $z = \gamma$

จุดตัดแกน  $y = \frac{\gamma}{v}$



รูปที่ 2.16

พิจารณาโมเมนต์ในแกน Z จากรูปที่ 2.17 โมเมนต์แกน Z จะถูกลดลงโดยโมเมนต์แกน Y ตามรูปที่ 2.18 สามเหลี่ยมที่เปลี่ยนจากแรงดึงเป็นแรงอัด จะทำให้โมเมนต์ในแกน Y เพิ่มขึ้น แต่จะทำให้โมเมนต์กลับทิศทางกับแกน Z

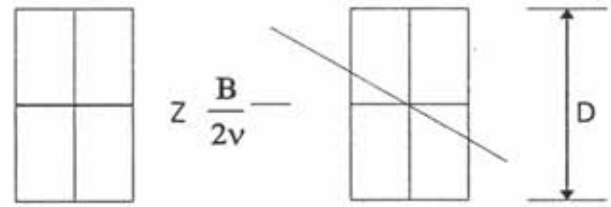
Tension Zone



Compression Zone

$$M_z = M_{pz} - \frac{\sigma_y B^3}{12v^2}$$

$$M_y = \frac{B^3 \sigma_y}{6v}$$



รูปที่ 2.17

รูปที่ 2.18



โดยที่

$$M_{PZ} = \text{โมเมนต์พลาสติกในแกน Z} , M_{PZ} = \frac{BD^2}{4} \sigma_Y$$

$$\sigma_Y = \text{แรงที่จุดคาน}$$

$$M_Z = \text{โมเมนต์ในแกน Z}$$

$$M_Y = \text{โมเมนต์ในแกน Y}$$

$$B = \text{ความกว้างของคาน}$$

$$D = \text{ความลึกของคาน}$$

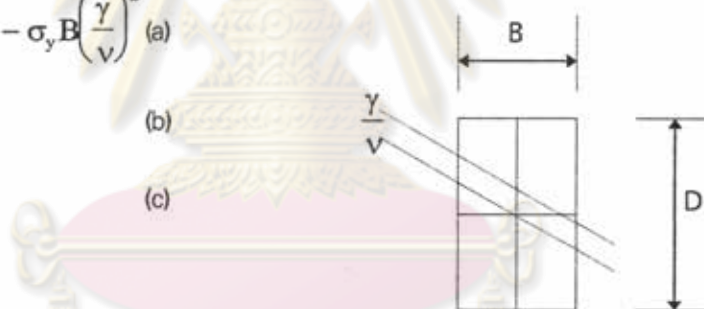
พิจารณาโมเมนต์ในแกน Z จากรูปที่ 2.18 โมเมนต์ในแกน Z จะถูกลดลงโดยแรงในแนวแกนและโมเมนต์ทางแกน Y (ตามรูปที่ 2.19) เนื่องจากการเลื่อนไปของแกนสะเทินในทิศทางของแกนรอง

$$M_Z = M_{PZ} - \frac{\sigma_Y B^3}{12v^2} - \sigma_Y B \left( \frac{\gamma}{v} \right)^2 \quad (a)$$

$$M_Y = \frac{B^3 \sigma_Y}{6v}$$

$$P = 2\sigma_Y B \frac{\gamma}{v}$$

$$P_Y = \sigma_Y BD$$



รูปที่ 2.19

โดยที่

$$M_{PY} = \text{โมเมนต์พลาสติกในแกน Y} , M_{PY} = \frac{B^2 D}{4} \sigma_Y$$

กำหนดให้

$$\rho = \frac{P}{P_Y} = \frac{2\gamma}{Dv} \quad (2.64)$$

$$m_Y = \frac{M_Y}{M_{PY}} = \frac{2B}{3vD} \quad (2.65)$$

$$m_Z = \frac{M_Z}{M_{PZ}} = 1 - \frac{B^2}{3v^2 D^3} - \frac{4}{D^2} \left( \frac{\gamma}{v} \right)^2 \quad (2.66)$$

โดยที่

$$M_{PZ} = \text{โมเมนต์พลาสติกในแกน } Z, M_{PZ} = \frac{BD^2}{4} \sigma_Y$$

$$\sigma_Y = \text{แรงที่จุดคาน}$$

$$M_Z = \text{โมเมนต์ในแกน } Z$$

$$M_Y = \text{โมเมนต์ในแกน } Y$$

$$B = \text{ความกว้างของคาน}$$

$$D = \text{ความลึกของคาน}$$

พิจารณาโมเมนต์ในแกน Z จากรูปที่ 2.18 โมเมนต์ในแกน Z จะถูกลดลงโดยแรงในแนวแกนและโมเมนต์ทางแกน Y (ตามรูปที่ 2.19) เนื่องจากการเลื่อนไปของแกนสะเทินในทิศทางของแกนรอง

$$M_Z = M_{PZ} - \frac{\sigma_Y B^3}{12v^2} - \sigma_Y B \left( \frac{\gamma}{v} \right)^2 \quad (a)$$

$$M_Y = \frac{B^3 \sigma_Y}{6v}$$

$$P = 2\sigma_Y B \frac{\gamma}{v}$$

$$P_Y = \sigma_Y BD$$



รูปที่ 2.19

โดยที่

$$M_{PY} = \text{โมเมนต์พลาสติกในแกน } Y, M_{PY} = \frac{B^2 D}{4} \sigma_Y$$

กำหนดให้

$$\rho = \frac{P}{P_Y} = \frac{2\gamma}{Dv} \quad (2.64)$$

$$m_Y = \frac{M_Y}{M_{PY}} = \frac{2B}{3vD} \quad (2.65)$$

$$m_Z = \frac{M_Z}{M_{PZ}} = 1 - \frac{B^2}{3v^2 D^2} - \frac{4}{D^2} \left( \frac{\gamma}{v} \right)^2 \quad (2.66)$$

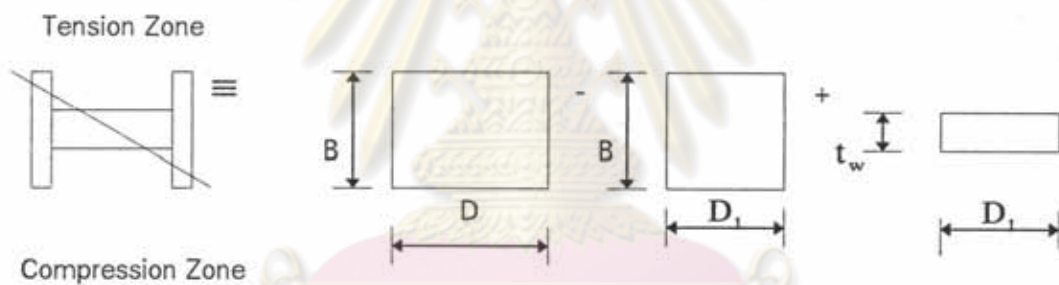
การหาโมเมนต์พลาสติกสองทางของหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะได้ออกมาเป็นฟังก์ชันของแรงในแนวแกนและโมเมนต์ในอีกทิศทางหนึ่ง . ซึ่งจะหาค่าโมเมนต์พลาสติกดังกล่าวได้โดยการแทนค่าสมการที่ 2.64 และสมการที่ 2.65 ลงในสมการที่ 2.66 จะได้

$$m_z = 1 - \frac{3}{4}m_y^2 - \rho^2$$

จัดรูปใหม่ จะได้เป็นสมการหาจุดหมุนพลาสติกสำหรับหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$m_z + 75m_y^2 + \rho^2 = 1 \quad (2.67)$$

ในกรณีหน้าตัดรูป WF จะใช้วิธีการบวกหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้ได้รูป WF ดังรูป



รูปที่ 2.20 การแทนหน้าตัด WF ที่รับโมเมนต์ในแกนรองเป็นหลัก ด้วยสี่เหลี่ยมหลายรูป

จากสมการ a,b,c

$$P = \frac{4\sigma_Y \gamma}{v} \left[ \frac{D}{2} - \frac{D_1}{2} - \frac{D_1}{2} \right] = \frac{2\sigma_Y \gamma D}{v}$$

$$P_Y = \sigma_Y [BD - BD_1 + t_w D_1]$$

$$M_z = \frac{\sigma_Y D^3}{6v} - \frac{\sigma_Y D_1^3}{6v} + \frac{\sigma_Y D_1^3}{6v} = \frac{\sigma_Y D^3}{6v}$$

$$M_{Pz} = Z_{Pz} \sigma_Y$$

$$M_z = D\sigma_Y \left[ \frac{B^2}{4} - \left( \frac{\gamma}{v} \right)^2 - \frac{D^2}{12v^2} \right] - D_1\sigma_Y \left[ \frac{B^2}{4} - \left( \frac{\gamma}{v} \right)^2 - \frac{D_1^2}{12v^2} \right] + D_1\sigma_Y \left[ \frac{t_w^2}{4} - \left( \frac{\gamma}{v} \right)^2 - \frac{D_1^2}{12v^2} \right]$$

$$M_Y = \sigma_Y \left[ \frac{B^2 D}{4} - \frac{B^2 D_1}{4} + \frac{t_w^2 D_1}{4} \right] - \sigma_Y D \left( \frac{\gamma}{v} \right)^2 - \sigma_Y \frac{D^3}{12v^2}$$

$$M_{PY} = Z_{PY}\sigma_Y$$

$$\rho = \frac{P}{P_Y} = \frac{2D}{[BD - BD_1 + t_w D_1]} \cdot \frac{\gamma}{v} \quad \text{กำหนดให้ } a_2 = \frac{[BD - BD_1 + t_w D_1]}{2D}$$

$$\frac{\gamma}{v} = a_2 \rho \quad (2.68)$$

$$m_Z = \frac{M_Z}{M_{PZ}} = \frac{D^3}{6Z_{PZ}v}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{6Z_{PZ}}{D^3} \cdot m_Z \quad (2.69)$$

$$m_Y = \frac{M_Y}{M_{PY}} = 1 - D \left( \frac{\gamma}{v} \right)^2 \cdot \frac{1}{Z_{PY}} - \frac{D^3}{12v^2} \cdot \frac{1}{Z_{PY}} \quad (2.70)$$

แทนค่าสมการที่ 2.68, 2.69 ลงในสมการที่ 2.70 จะได้

$$m_Y = 1 - \frac{Da_2^2}{Z_{PY}} \rho^2 - \frac{3Z_{PZ}^2}{Z_{PY}D^3} \cdot m_Z^2$$

$$\text{กำหนดให้ } b_2 = \frac{4Z_{PZ}}{D^3}$$

$$m_Y = 1 - \frac{Da_2^2}{Z_{PY}} \rho^2 - \frac{3D^3}{4Z_{PY}} \cdot \frac{b_2^2}{4} \cdot m_Z^2$$

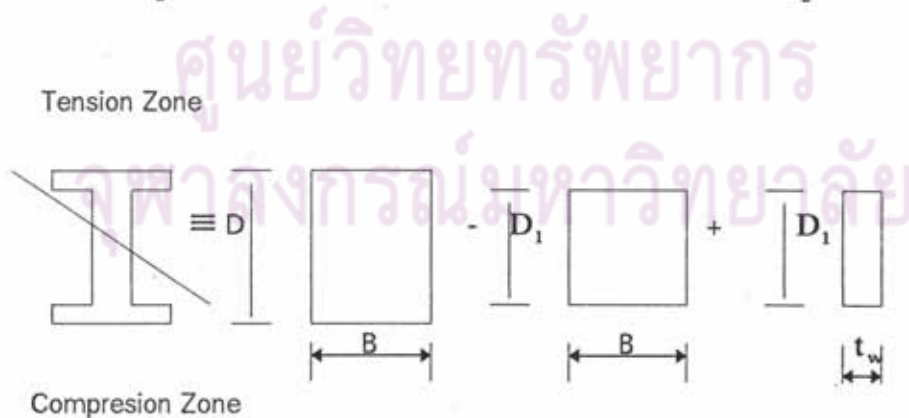
$$\text{กำหนดให้ } c_2 = \frac{2D^3}{Z_{PY}} \left( \frac{b_2^2}{8} \right) \quad e_2 = D \cdot \frac{a_2^2}{Z_{PY}}$$

$$m_Y = 1 - e_2 \rho^2 - .75c_2 \cdot m_Z^2$$

$$m_Y + .75c_2 \cdot m_Z^2 + e_2 \cdot \rho^2 = 1 \quad (2.71)$$

สมการที่ 2.71 เป็นสมการในกรณีนี้ที่  $|m_Y| > |m_Z|$

ในกรณีหน้าตัดรูป WF จะใช้วิธีการบวกลบหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้ได้รูป WF ดังรูป



รูปที่ 2.21 การแทนหน้าตัด WF ที่รับโมเมนต์ในแกนเอกเป็นหลัก ด้วยสี่เหลี่ยมหลายรูป

จากสมการ a,b,c

$$P = \frac{4\sigma_Y \gamma}{v} \left[ \frac{B}{2} - \frac{B}{2} - \frac{t_w}{2} \right] = \frac{2\sigma_Y \gamma t_w}{v}$$

$$P_Y = \sigma_Y [BD - BD_1 + t_w D_1]$$

$$M_Y = \frac{\sigma_Y B^3}{6v} - \frac{\sigma_Y B^3}{6v} + \frac{\sigma_Y t_w^3}{6v} = \frac{\sigma_Y t_w^3}{6v}$$

$$M_{PY} = Z_{PY} \sigma_Y$$

$$M_Z = B\sigma_Y \left[ \frac{D^2}{4} - \left( \frac{\gamma}{v} \right)^2 - \frac{B^2}{12v^2} \right] - B\sigma_Y \left[ \frac{D_1^2}{4} - \left( \frac{\gamma}{v} \right)^2 - \frac{B^2}{12v^2} \right] + t_w \sigma_Y \left[ \frac{D_1^2}{4} - \left( \frac{\gamma}{v} \right)^2 - \frac{t_w^2}{12v^2} \right]$$

$$M_Z = \sigma_Y \left[ \frac{BD^2}{4} - \frac{BD_1^2}{4} + \frac{t_w D_1^2}{4} \right] - \sigma_Y t_w \left( \frac{\gamma}{v} \right)^2 - \sigma_Y \frac{t_w^3}{12v^2}$$

$$M_{PZ} = Z_{PZ} \sigma_Y$$

$$\rho = \frac{P}{P_Y} = \frac{2Dt_w}{[BD - BD_1 + t_w D_1]} \cdot \frac{\gamma}{v} \quad \text{กำหนดให้ } a_1 = \frac{[BD - BD_1 + t_w D_1]}{2t_w}$$

$$\frac{\gamma}{v} = a_1 \rho \tag{2.72}$$

$$m_Y = \frac{M_Y}{M_{PY}} = \frac{t_w^3}{6Z_{PY} v}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{6Z_{PY}}{D^3} \cdot m_Y \tag{2.73}$$

$$m_Z = \frac{M_Z}{M_{PZ}} = 1 - t_w \left( \frac{\gamma}{v} \right)^2 \cdot \frac{1}{Z_{PZ}} - \frac{t_w^3}{12v^2} \cdot \frac{1}{Z_{PZ}} \tag{2.74}$$

แทนค่าสมการที่ 2.72, 2.73 ลงในสมการที่ 2.74 จะได้

$$m_Z = 1 - \frac{t_w a_1^2}{Z_{PZ}} \rho^2 - \frac{3Z_{PY}^2}{Z_{PZ} t_w^3} \cdot m_Y^2$$

$$\text{กำหนดให้ } b_1 = \frac{4Z_{PY}}{t_w^3}$$

$$m_Z = 1 - \frac{t_w a_1^2}{Z_{PZ}} \rho^2 - \frac{3t_w^3}{4Z_{PZ}} \cdot \frac{b_1^2}{4} \cdot m_Y^2$$

$$\text{กำหนดให้ } c_1 = \frac{t_w \cdot b_1^2}{4Z_{PZ}} \quad e_1 = t_w \cdot \frac{a_1^2}{Z_{PZ}}$$

$$m_Z = 1 - e_1 \rho^2 - .75c_1 \cdot m_Y^2$$

$$m_Z + .75c_1 \cdot m_Y^2 + e_1 \cdot \rho^2 = 1 \tag{2.75}$$

สมการที่ 2.75 เป็นสมการในกรณีที่  $|m_Z| > |m_Y|$

ในกรณีที่จะนำแรงบิดมาพิจารณาจะต้องใช้ข้อสมมติฐานข้อที่ 1.5.7 มาช่วยโดยจะทำให้สมการที่ 2.71 เป็นดังนี้ ข้อสมมติฐานข้อ 1.5.7 คือการกระจายของความเค้นในแนวแกน(Normal

Stress) จะมีการกระจายเหมือนกับการกระจายของหน้าตัดที่ถึงจุดกลางแต่จะมีขนาดเล็กลง จะสามารถเขียนสมการที่ 2.71 ได้เป็น

$$m_y \left( \frac{\sigma_y}{\sigma} \right) + .75c_2 \cdot \left( \frac{m_y \sigma_y}{\sigma} \right)^2 + e_2 \cdot \left( \frac{m_y \rho}{\sigma} \right)^2 = 1 \quad (2.76)$$

กำหนด  $t_x = \frac{M_x}{M_{px}} = \frac{T}{T_p} = \frac{\tau}{\tau_p}$  จะได้  $\tau = t_x \tau_p$  (2.77)

$$\tau_p = \frac{\sigma_p}{\alpha} \quad (2.78)$$

เมื่อ  $\alpha = \sqrt{3}$  คือค่าคงที่ในการหาแรงเฉือนสูงสุดของ Von-Mises (16)

$$\tau = \frac{\sigma}{\alpha}$$

ผลรวมของความเค้นในแนวแกน ( Normal Stress ) กับแรงเฉือน จากหลักการที่ว่าระนาบยังคงเป็นระนาบทำให้สามารถรวมแรงได้ เนื่องจากความเค้นในแนวแกน ( Normal Stress ) มีทิศทางในแนวแกน ส่วนแรงเฉือนมีทิศทางตั้งฉากกับแนวแกน การรวมแรงจะเหมือนการรวมของเวกเตอร์ คือจะยกกำลังสองแล้วบวกกัน จะได้

$$\sigma^2 + \alpha^2 \tau^2 = \sigma_y^2 \quad \text{หรือ} \quad \sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_y^2 \quad (2.79)$$

สมการที่ 2.79 คือ Von Mises yield criterion ( 10 )

แทนค่าสมการที่ 2.77 ลงในสมการที่ 2.79

$$\sigma^2 = \sigma_y^2 - \alpha^2 (t_x \tau_p)^2 \quad (2.80)$$

แทนค่าสมการที่ 2.78 ลงในสมการที่ 2.80

$$\sigma^2 = \sigma_y^2 (1 - t_x^2) \quad (2.81)$$

แทนค่าสมการที่ 2.81 ลงในสมการที่ 2.76

$$\begin{aligned} \frac{m_y}{\sqrt{1-t^2}} + .75c_2 \cdot \frac{m_z^2}{1-t^2} + e_2 \cdot \frac{\rho^2}{1-t^2} &= 1 \\ m_y \sqrt{1-t^2} + .75c_2 \cdot m_z^2 + e_2 \cdot \rho^2 + t^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.82)$$

ในกรณีเดียวกันสมการที่ 2.75 กลายเป็น

$$m_z \sqrt{1-t^2} + 0.75c_1 \cdot m_y^2 + e_1 \cdot \rho^2 + t^2 = 1 \quad (2.83)$$

สมการที่ 2.82 สำหรับกรณีที่มี  $|m_y| > |m_z|$

สมการที่ 2.83 สำหรับกรณีที่มี  $|m_z| > |m_y|$

เมตริกซ์ที่ใช้ในการคำนวณในกรณีต่างๆ

เมตริกซ์ในกรณีที่ไม่เกิดจุดหมุนพลาสติก จากสมการที่ 2.35 และ 2.36 สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\{dS\} = [K_i]\{dD\} \quad (2.84)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{zj} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \\ M_{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} & K_{19} & K_{1A} & K_{1B} & K_{1C} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} & K_{29} & K_{2A} & K_{2B} & K_{2C} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} & K_{39} & K_{3A} & K_{3B} & K_{3C} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} & K_{49} & K_{4A} & K_{4B} & K_{4C} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} & K_{59} & K_{5A} & K_{5B} & K_{5C} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} & K_{69} & K_{6A} & K_{6B} & K_{6C} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} & K_{79} & K_{7A} & K_{7B} & K_{7C} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} & K_{89} & K_{8A} & K_{8B} & K_{8C} \\ K_{91} & K_{92} & K_{93} & K_{94} & K_{95} & K_{96} & K_{97} & K_{98} & K_{99} & K_{9A} & K_{9B} & K_{9C} \\ K_{A1} & K_{A2} & K_{A3} & K_{A4} & K_{A5} & K_{A6} & K_{A7} & K_{A8} & K_{A9} & K_{AA} & K_{AB} & K_{AC} \\ K_{B1} & K_{B2} & K_{B3} & K_{B4} & K_{B5} & K_{B6} & K_{B7} & K_{B8} & K_{B9} & K_{BA} & K_{BB} & K_{BC} \\ K_{C1} & K_{C2} & K_{C3} & K_{C4} & K_{C5} & K_{C6} & K_{C7} & K_{C8} & K_{C9} & K_{CA} & K_{CB} & K_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{xi} \\ D_{yi} \\ D_{zi} \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ D_{xj} \\ D_{yj} \\ D_{zj} \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \\ \theta_{\phi} \end{Bmatrix}$$

เมื่อชิ้นส่วนรับแรงกระทำถึงจุดคดง (Yield Point) จะทำให้เกิดเป็นจุดหมุนพลาสติกมีผลให้การเปลี่ยนแปลงค่า  $M_x, M_y, M_z$  หลังจากเกิดจุดหมุนพลาสติกมีค่าเป็น 0 เนื่องจากที่จุดคดง (Yield Point) จะเกิดการเคลื่อนที่โดยที่ไม่ต้องมีแรงกระทำเพิ่ม ซึ่งจะทำให้เกิดการลดลงของสติฟเนสและจะให้ค่าสติฟเนสใหม่ในการพิจารณาใน Step ต่อไป

$$\text{กำหนดให้} \quad \begin{Bmatrix} \Delta F_{xi} \\ \Delta F_{yi} \\ \Delta F_{zi} \end{Bmatrix} = [F_i] \quad \begin{Bmatrix} \Delta F_{xj} \\ \Delta F_{yj} \\ \Delta F_{zj} \end{Bmatrix} = [F_j]$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{xi} \\ \Delta M_{yi} \\ \Delta M_{zi} \end{Bmatrix} = [M_i] \quad \begin{Bmatrix} \Delta M_{xj} \\ \Delta M_{yj} \\ \Delta M_{zj} \end{Bmatrix} = [M_j]$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta D_{xi} \\ \Delta D_{yi} \\ \Delta D_{zi} \end{Bmatrix} = [D_i] \quad \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{xi} \\ \Delta \theta_{yi} \\ \Delta \theta_{zi} \end{Bmatrix} = [\theta_i]$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta D_{xj} \\ \Delta D_{yj} \\ \Delta D_{zj} \end{Bmatrix} = [D_j] \quad \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{xj} \\ \Delta \theta_{yj} \\ \Delta \theta_{zj} \end{Bmatrix} = [\theta_j]$$

$$\begin{aligned} [K_{11}] &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} & [K_{12}] &= \begin{bmatrix} K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{34} & K_{35} & K_{36} \end{bmatrix} \\ [K_{13}] &= \begin{bmatrix} K_{17} & K_{18} & K_{19} \\ K_{27} & K_{28} & K_{29} \\ K_{37} & K_{38} & K_{39} \end{bmatrix} & [K_{14}] &= \begin{bmatrix} K_{1A} & K_{1B} & K_{1C} \\ K_{2A} & K_{2B} & K_{2C} \\ K_{3A} & K_{3B} & K_{3C} \end{bmatrix} \\ [K_{21}] &= \begin{bmatrix} K_{41} & K_{42} & K_{43} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} \end{bmatrix} & [K_{22}] &= \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \\ [K_{23}] &= \begin{bmatrix} K_{47} & K_{48} & K_{49} \\ K_{57} & K_{58} & K_{59} \\ K_{67} & K_{68} & K_{69} \end{bmatrix} & [K_{24}] &= \begin{bmatrix} K_{4A} & K_{4B} & K_{4C} \\ K_{5A} & K_{5B} & K_{5C} \\ K_{6A} & K_{6B} & K_{6C} \end{bmatrix} \\ [K_{31}] &= \begin{bmatrix} K_{71} & K_{72} & K_{73} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} \\ K_{91} & K_{92} & K_{93} \end{bmatrix} & [K_{32}] &= \begin{bmatrix} K_{74} & K_{75} & K_{76} \\ K_{84} & K_{85} & K_{86} \\ K_{94} & K_{95} & K_{96} \end{bmatrix} \\ [K_{33}] &= \begin{bmatrix} K_{77} & K_{78} & K_{79} \\ K_{87} & K_{88} & K_{89} \\ K_{97} & K_{98} & K_{99} \end{bmatrix} & [K_{34}] &= \begin{bmatrix} K_{7A} & K_{7B} & K_{7C} \\ K_{8A} & K_{8B} & K_{8C} \\ K_{9A} & K_{9B} & K_{9C} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[K_{41}] = \begin{bmatrix} K_{A1} & K_{A2} & K_{A3} \\ K_{B1} & K_{B2} & K_{B3} \\ K_{C1} & K_{C2} & K_{C3} \end{bmatrix} \quad [K_{42}] = \begin{bmatrix} K_{A4} & K_{A5} & K_{A6} \\ K_{B4} & K_{B5} & K_{B6} \\ K_{C4} & K_{C5} & K_{C6} \end{bmatrix}$$

$$[K_{43}] = \begin{bmatrix} K_{A7} & K_{A8} & K_{A9} \\ K_{B7} & K_{B8} & K_{B9} \\ K_{C7} & K_{C8} & K_{C9} \end{bmatrix} \quad [K_{44}] = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} & K_{AC} \\ K_{BA} & K_{BB} & K_{BC} \\ K_{CA} & K_{CB} & K_{CC} \end{bmatrix}$$

สมการที่ 2.84 สามารถเขียนใหม่เป็น



$$\begin{Bmatrix} [F_i] \\ [M_i] \\ [F_j] \\ [M_j] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] & [K_{34}] \\ [K_{41}] & [K_{42}] & [K_{43}] & [K_{44}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [D_i] \\ [\theta_i] \\ [D_j] \\ [\theta_j] \end{Bmatrix} \quad (2.85)$$

เมื่อชิ้นส่วนเกิดจุดหมุนพลาสติก จะมีการสมมติให้จุดหมุนนั้นเป็นจุดหมุนจริง เพราะฉะนั้น การหาค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนที่เกิดจุดหมุนพลาสติก จะทำได้โดยการลดสติฟเนส (Reduce Stiffness) ของชิ้นส่วนนั้น แล้วนำไปรวมกันเป็นสติฟเนสโครงสร้างโดยวิธีรวมโดยตรง (Direct Stiffness) เราจึงจะหาเมตริกซ์ที่มีการลดสติฟเนส (Reduce Stiffness) แล้ว เพื่อนำไปวิเคราะห์ การเกิดจุดหมุนพลาสติกแบ่งได้เป็น 3 กรณี

1 องค์อาคารเกิดจุดหมุนพลาสติกเฉพาะปลาย i



$$M_i = 0$$

2 องค์อาคารเกิดจุดหมุนพลาสติกเฉพาะปลาย j



$$M_j = 0$$

3 องค์อาคารเกิดจุดหมุนพลาสติกทั้งสองปลาย



$$M_i = 0, M_j = 0$$

รูปที่ 2.22

พิจารณากรณีที่ 1 องค์อาคารเกิดจุดหมุนพลาสติกเฉพาะปลาย i

เมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกที่ปลาย i จะทำให้การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ที่จุด i เป็นศูนย์

$$[M_i] = [0]$$

นำ  $[M_i] = [0]$  ลงไปแทนในสมการที่ 2.85 จะได้

$$[0] = [K_{21}][D_i] + [K_{22}][\theta_i] + [K_{23}][D_j] + [K_{24}][\theta_j]$$

แล้วแก้สมการหาเมตริกซ์  $[\theta_i]$  จะได้

$$[\theta_i] = -[K_{22}]^{-1}[K_{21}][D_i] - [K_{22}]^{-1}[K_{23}][D_j] - [K_{22}]^{-1}[K_{24}][\theta_j] \quad (2.86)$$

แทนค่าสมการที่ 2.86 ลงในสมการที่ 2.85 จะได้

$$\begin{Bmatrix} [F_1] \\ [0] \\ [F_2] \\ [M_2] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}] & 0 & [K_{13}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{23}] & [K_{14}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{24}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ [K_{31}] - [K_{32}][K_{22}]^{-1}[K_{21}] & 0 & [K_{33}] - [K_{32}][K_{22}]^{-1}[K_{23}] & [K_{34}] - [K_{32}][K_{22}]^{-1}[K_{24}] \\ [K_{41}] - [K_{42}][K_{22}]^{-1}[K_{21}] & 0 & [K_{43}] - [K_{42}][K_{22}]^{-1}[K_{23}] & [K_{44}] - [K_{42}][K_{22}]^{-1}[K_{24}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [D_1] \\ [\theta_1] \\ [D_2] \\ [\theta_2] \end{Bmatrix}$$

เป็นสมการที่ 2.87

พิจารณากรณีที่ 2 องค์อาคารเกิดจุดหมุนพลาสติกเฉพาะปลาย  $j$

เมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกที่ปลาย  $j$  จะทำให้การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ที่จุด  $j$  เป็นศูนย์

$$[M_j] = [0]$$

นำ  $[M_j] = [0]$  ลงไปแทนในสมการที่ 2.85 จะได้

$$[0] = [K_{41}][D_1] + [K_{42}][\theta_1] + [K_{43}][D_2] + [K_{44}][\theta_2]$$

แล้วแก้สมการหาเมตริกซ์  $[\theta_2]$  จะได้

$$[\theta_2] = -[K_{44}]^{-1}[K_{41}][D_1] - [K_{44}]^{-1}[K_{42}][\theta_1] - [K_{44}]^{-1}[K_{43}][D_2] \quad (2.88)$$

แทนค่าสมการที่ 2.88 ลงในสมการที่ 2.85 จะได้

$$\begin{Bmatrix} [F_1] \\ [M_1] \\ [F_2] \\ [0] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] - [K_{14}][K_{44}]^{-1}[K_{41}] & [K_{12}] - [K_{14}][K_{44}]^{-1}[K_{42}] & [K_{13}] - [K_{14}][K_{44}]^{-1}[K_{43}] & 0 \\ [K_{21}] - [K_{24}][K_{44}]^{-1}[K_{41}] & [K_{22}] - [K_{24}][K_{44}]^{-1}[K_{42}] & [K_{23}] - [K_{24}][K_{44}]^{-1}[K_{43}] & 0 \\ [K_{31}] - [K_{34}][K_{44}]^{-1}[K_{41}] & [K_{32}] - [K_{34}][K_{44}]^{-1}[K_{42}] & [K_{33}] - [K_{34}][K_{44}]^{-1}[K_{43}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [D_1] \\ [\theta_1] \\ [D_2] \\ [\theta_2] \end{Bmatrix}$$

เป็นสมการที่ 2.89

กรณีที่ 3 องค์อาคารเกิดจุดหมุนพลาสติกทั้งสองปลาย สมการที่ 2.85 สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} [F_1] \\ [F_2] \\ [M_1] \\ [M_2] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] & [K_{34}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] \\ [K_{41}] & [K_{42}] & [K_{43}] & [K_{44}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [D_1] \\ [D_2] \\ [\theta_1] \\ [\theta_2] \end{Bmatrix} \quad (2.90)$$

กำหนดให้

$$\begin{Bmatrix} [F_i] \\ [F_j] \end{Bmatrix} = [F]_a \qquad \begin{Bmatrix} [D_i] \\ [D_j] \end{Bmatrix} = [D]_a$$

$$\begin{Bmatrix} [M_i] \\ [M_j] \end{Bmatrix} = [M]_b \qquad \begin{Bmatrix} [\theta_i] \\ [\theta_j] \end{Bmatrix} = [\theta]_b$$

$$[K]_{aa} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] \end{bmatrix} \qquad [K]_{ab} = \begin{bmatrix} [K_{13}] & [K_{14}] \\ [K_{33}] & [K_{34}] \end{bmatrix}$$

$$[K]_{ba} = \begin{bmatrix} [K_{21}] & [K_{22}] \\ [K_{41}] & [K_{42}] \end{bmatrix} \qquad [K]_{bb} = \begin{bmatrix} [K_{23}] & [K_{24}] \\ [K_{43}] & [K_{44}] \end{bmatrix}$$

สมการที่ 2.90 สามารถเขียนใหม่เป็น

$$\begin{Bmatrix} [F]_a \\ [M]_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{aa} & [K]_{ab} \\ [K]_{ba} & [K]_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [D]_a \\ [\theta]_b \end{Bmatrix} \qquad (2.91)$$

พิจารณารณกรณีที่ 3 องค์อาคารเกิดจุดหมุนพลาสติกทั้งสองปลาย

เมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกที่ปลาย  $i$  และปลาย  $j$  จะทำให้การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ที่จุด  $i$  และจุด  $j$  เป็นศูนย์ จะได้

$$[M]_b = [0]$$

นำ  $[M]_b = [0]$  แทนลงในสมการที่ 2.91 จะได้

$$[0] = [K]_{ba}[D]_a + [K]_{bb}[\theta]_b$$

จะทำให้สามารถหาค่า  $[\theta]_b$  ได้ดังนี้

$$[\theta]_b = [K]_{bb}^{-1}[K]_{ba}[D]_a \qquad (2.92)$$

แทนค่าสมการที่ 2.92 ลงในสมการที่ 2.91 จะได้

$$[F]_a = [K]_{aa} - [K]_{ab}[K]_{bb}^{-1}[K]_{ba}[D]_a \qquad (2.93)$$

นำเมตริกซ์มาวิเคราะห์โดยวิธีรวมสติเฟเนสโดยตรง ( Direct Stiffness Method ) และแก้สมการโดยวิธี Newton Raphson ตามขั้นตอนของวิธีสมดุลย์ ( Equilibrium ) จะได้ค่าความปลอดภัยแบบการวิเคราะห์หี้อิสติก-พลาสติกอันดับที่หนึ่ง

สำหรับการวิเคราะห์หี้อลาสติก-พลาสติกโดยคำนึงถึงผลของความไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต  
จะใช้คอมพิวเตอร์มาช่วยในการวิเคราะห์



ศูนย์วิจัยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย