บทที่ 2

วิธีวิเคราะห์

2.1 ความนำ

การวิเคราะห์โครงสร้างของงานวิจัยนี้ได้นำเอาผลของ P-Δ เข้าร่วมกับการวิเคราะห์โครงสร้างอันดับแรก โดยพิจารณาการย้อนกลับของแรงดัด ณ จุดหมุนพลาสติกและผลของการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยการเฉือนของชิ้นส่วนข้อต่อเพื่อให้ได้ผลการวิเคราะห์ในลักษณะเดียวกับการวิเคราะห์โครงสร้างอันดับสองและใช้วิธีการเปลี่ยนตำแหน่งแบบการรวมสติฟเนสโดยตรงซึ่งจะเหมาะกับ การนำไปใช้ วิเคราะห์โครงสร้างด้วยคอมพิวเตอร์เนื่องจากเป็นวิธีที่เป็นระบบ สามารถถ่ายทอดลงเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพการสังเคราะห์สติฟเนสของโครงสร้างจากสติฟเนสชิ้นส่วนย่อยสามารถทำให้ ประหยัดหน่วยความจำ และ ประหยัดเวลาคำนวณอีกด้วย

2.2 สมมติฐาน

2.2.1ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดของวัสดุเป็นแบบอีลาสติก-พลาสติกโดยสมบูรณ์ (Elastic - Perfectly Plastic) คือไม่พิจารณาผลของความเครียด แข็งที่เพิ่มขึ้น (Strain Hardening) และผลของหน่วยแรงคงค้าง (Residual Stresses)

2.2.2 สมมุติให้องค์อาคารระหว่างเกิด จุดหมุนพลาสติก (Plastic Hinge) แต่ละจุดยังคงมีพฤติกรรมแบบอีลาสติก และ มีการย้อนกลับ (Reversal) ของแรงดัดพลาสติก

2.2.3 ชิ้นส่วนข้อต่อต่างๆของโครงสร้าง มีความแข็งแรงพอที่จะยอมให้เกิดการกระจายของแรงเป็นไปตามสัดส่วนของความแข็งของทุกชิ้นส่วนที่ชิ้นส่วนข้อต่อนั้น

2.2.4 แรงภายนอกที่กระทำต่อ โครงสร้างเป็นแรงสถิต และเพิ่มขึ้นอย่างเป็นสัดส่วนจนโครงสร้างเกิดการวิบัติ

2.2.5 สมมุติให้การเกิดการคลากมีลักษณะเป็นจุดบนองค์อาคารในรูปแบบของจุดหมุนพลาสติก

2.2.6 มีการป้องกัน การเกิดการโก่งงอเฉพาะที่ (Local Buckling) การเกิดโก่งงอรวมด้านข้าง (Global Buckling) การบิดด้านข้าง (Twisting) ขององค์อาคาร

2.2.7 คำนึงถึงผลกระทบซึ่งกันและกันของ แรงในแนวแกน และ แรงดัด ทั้งในรูปแบบของ กำลัง และ เสถียรภาพ

2.2.8 มีการย้อนกลับของแรงดัด ณ จุดหมุนพลาสติกที่ปลายของชิ้นส่วน

2.2.9 มีการย้อนกลับของแรงดัด ณ จุดหมุนพลาสติกภายในชิ้นส่วน

2.3 <u>การวิเคราะห์โครงสร้าง</u>

เป็นการวิเคราะห์โครงสร้างโดยการเปลี่ยนตำแหน่งแบบรวมสติฟเนสโดยตรง(Direct Stiffness Method) ซึ่งเป็นวิธีการที่นิยมใช้และเหมาะสมสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์

การสังเคราะห์สติฟเนสรวมของโครงสร้างกระทำได้โดยการพิจารณาคุณสมบัติของชิ้นส่วนย่อย ความสอดคล้องกันทางเรขาคณิต (Compatibility) และ สภาวะสมดุลของชิ้นส่วนข้อต่อ (Equilibrium) โดยมีขั้นตอนการกระทำดังนี้

2.3.1 การหาสติฟเนสที่ปลายด้านซ้ายของชิ้นส่วนคานและเสา

2.3.1.1 หาความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายชิ้นส่วนของคานและเสากับชิ้นส่วนข้อต่อ (Joint panel)

ในการวิเคราะห์นี้ได้นำแบบจำลองของ Kato-Nakao (10) มาประยุกต์ ซึ่งพิจารณาการเปลี่ยนรูปร่างด้านการเฉือน (Shear Deformation) γ ของข้อต่อด้วย ดังแสดงในรูปที่ 2.1โดยรูปที่ 2.1 (ก) แสดงถึงชิ้นส่วนข้อต่อเมื่อยังไม่มีการเปลี่ยนตำแหน่งและเมื่อรับแรงจากภายนอกจะทำให้เกิดการเปลี่ยนตำแหน่ง u^p, v^p และ θ^p ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตำแหน่งแบบวัตถุเกร็ง (Rigid Body Displacement) และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยการเฉือน γ ของชิ้นส่วนข้อต่อ ดังแสดงในรูปที่ 2.1(ข) โดยจะแสดงในรูปของเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่ง r^p

โดยที่
$$\{r^p\} = \begin{Bmatrix} u^p \\ v^p \\ \theta^p \\ \gamma \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

โดยที่ $\{r^{p}\}$ =เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งที่ชิ้นส่วนข้อต่อสำหรับคานและเสาที่มาเชื่อมต่อมีการเปลี่ยนตำแหน่งและแรงภายในดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.1 (ค)และ(ง) ตามลำดับโดยจะแสดงในรูปของเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายชิ้นส่วนของคานด้านซ้าย $\{v^{b1}\}$ และด้านขวา $\{v^{b2}\}$ ส่วนเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายชิ้นส่วนของเสาด้านล่าง $\{v^{c1}\}$ และด้านบน $\{v^{c2}\}$ ซึ่ง

$$\{v^{b1}\} = \begin{Bmatrix} u^{b1} \\ v^{b1} \\ \theta^{b1} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{v^{b2}\} = \begin{Bmatrix} u^{b2} \\ v^{b2} \\ \theta^{b2} \end{Bmatrix} \tag{2.2ก}$$

และ

$$\{v^{c1}\} = \begin{Bmatrix} u^{c1} \\ v^{c1} \\ \theta^{c1} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{v^{c2}\} = \begin{Bmatrix} u^{c2} \\ v^{c2} \\ \theta^{c2} \end{Bmatrix} \tag{2.2ข}$$

โดยที่

$\{v^{b1}\}$ = เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายชิ้นส่วนด้านซ้ายของคาน

$\{v^{b2}\}$ = เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายชิ้นส่วนด้านขวาของคาน

$\{v^{c1}\}$ = เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายชิ้นส่วนด้านล่างของเสา

$\{v^{c2}\}$ = เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายชิ้นส่วนด้านบนของเสา

u^{b1} = การเปลี่ยนตำแหน่งตามแนวราบด้านซ้ายของคาน

u^{b2} = การเปลี่ยนตำแหน่งตามแนวราบด้านขวาของคาน

u^{c1} = การเปลี่ยนตำแหน่งตามแนวราบด้านบนของเสา

u^{c2} = การเปลี่ยนตำแหน่งตามแนวราบด้านล่างของเสา

v^{b1} = การเปลี่ยนตำแหน่งตามแนวดิ่งด้านซ้ายของคาน

v^{b2} = การเปลี่ยนตำแหน่งตามแนวดิ่งด้านขวาของคาน

v^{c1} = การเปลี่ยนตำแหน่งตามแนวดิ่งด้านล่างของเสา

v^{c2} = การเปลี่ยนตำแหน่งตามแนวดิ่งด้านบนของเสา

θ^{b1} = การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงมุมด้านซ้ายของคาน

θ^{b2} = การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงมุมด้านขวาของคาน

θ^{c1} = การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงมุมด้านล่างของเสา

θ^{c2} = การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงมุมด้านบนของเสา

ใช้เงื่อนไขของความสอดคล้องทางเรขาคณิต(Compatibility Conditions)จะได้

$$\theta^{b1} = \theta^{p}_{b1} - \frac{\gamma}{2} \quad , \quad \theta^{b2} = \theta^{p}_{b2} - \frac{\gamma}{2} \tag{2.3}$$

และ

$$\theta^{c1} = \theta^{p}_{c1} + \frac{\gamma}{2} \quad , \quad \theta^{c2} = \theta^{p}_{c2} + \frac{\gamma}{2} \tag{2.4}$$

โดยที่

θ^{p}_{b1} = การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงมุมที่กลางชิ้นส่วนข้อต่อของคานด้านขวามือ

θ^{p}_{b2} = การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงมุมที่กลางชิ้นส่วนข้อต่อของคานด้านซ้ายมือ

θ^{p}_{c1} = การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงมุมที่กลางชิ้นส่วนข้อต่อของเสาด้านบน

θ^{p}_{c2} = การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงมุมที่กลางชิ้นส่วนข้อต่อของเสาด้านล่าง

ซึ่งจะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายชิ้นส่วนกับชิ้นส่วนข้อต่อได้ดังนี้

สำหรับปลายด้านขวาของชิ้นส่วนข้อต่อหรือปลายด้านซ้ายของคาน, b1

$$\begin{Bmatrix} u^{b1} \\ v^{b1} \\ \theta^{b1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{w_1}{2} & \frac{w_1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{p} \\ v^{p} \\ \theta^{p} \\ \gamma \end{Bmatrix}_{b1} \tag{2.5}$$

หรือ

$$\{v^{b1}\} = [a^{b1}]\{r^{p}_{b1}\} \tag{2.6}$$

โดยที่ w_1 = ความกว้างของชิ้นส่วนข้อต่อที่ปลายด้านซ้ายของคาน

สำหรับปลายด้านซ้ายของชิ้นส่วนข้อต่อหรือปลายด้านขวาของคาน, b2

$$\begin{Bmatrix} u^{b2} \\ v^{b2} \\ \theta^{b2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{w_2}{2} & -\dfrac{w_2}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^p \\ v^p \\ \theta^p \\ \gamma \end{Bmatrix}_{b2} \tag{2.7}$$

หรือ $$\{v^{b2}\} = [a^{b2}]\{r^p_{b2}\} \tag{2.8}$$

โดยที่ w_2 = ความกว้างของชิ้นส่วนข้อต่อที่ปลายด้านขวาของคาน

สำหรับปลายด้านบนของชิ้นส่วนข้อต่อหรือปลายด้านล่างของเสา, c1

$$\begin{Bmatrix} u^{c1} \\ v^{c1} \\ \theta^{c1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{h_1}{2} & \dfrac{h_1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^p \\ v^p \\ \theta^p \\ \gamma \end{Bmatrix}_{c1} \tag{2.9}$$

หรือ $$\{v^{c1}\} = [a^{c1}]\{r^p_{c1}\} \tag{2.10}$$

โดยที่ h_1 = ความสูงของชิ้นส่วนข้อต่อที่ปลายด้านล่างของเสา

สำหรับปลายด้านล่างของชิ้นส่วนข้อต่อหรือปลายด้านบนของเสา, c2

$$\begin{Bmatrix} u^{c2} \\ v^{c2} \\ \theta^{c2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{h_2}{2} & -\dfrac{h_2}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^p \\ v^p \\ \theta^p \\ \gamma \end{Bmatrix}_{c2} \tag{2.11}$$

หรือ $$\{v^{c2}\} = [a^{c2}]\{r^p_{c2}\} \tag{2.12}$$

โดยที่ h_2 = ความสูงของชิ้นส่วนข้อต่อที่ปลายด้านบนของเสา

เมื่อรวมสมการที่ (2.6) และ (2.8) เข้าด้วยกันจะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} v^{b1} \\ v^{b2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [a^{b1}] & [0] \\ [0] & [a^{b2}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{b1}^{p} \\ r_{b2}^{p} \end{Bmatrix} \tag{2.13}$$

หรือ เขียนในรูปสัญลักษณ์จะได้ว่า

$$\{v^{b}\} = [A^{b}]\{r_{b}^{p}\} \tag{2.14}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อรวมสมการที่ (2.10) และ (2.12) เข้าด้วยกันจะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} v^{c1} \\ v^{c2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [a^{c1}] & [0] \\ [0] & [a^{c2}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{A}^{p} \\ r_{B}^{p} \end{Bmatrix} \tag{2.15}$$

หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์จะได้ว่า

$$\{v^{c}\} = [A^{c}]\{r_{c}^{p}\} \tag{2.16}$$

ซึ่งสมการที่ (2.14) และ (2.16) แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายชิ้นส่วนของคานและเสากับชิ้นส่วนข้อต่อตามลำดับ

โดยที่เวกเตอร์ $\{v^{b}\}$ และ $\{v^{c}\}$ มีมิติ 6x1 เวกเตอร์ $\{r_{b}^{p}\}$ และ $\{r_{c}^{p}\}$ มีมิติ 8x1ส่วนเมตริกซ์แปลง (Transformation Matrix) ของคานและเสา $[A^{b}]$และ$[A^{c}]$ต่างก็มีมิติ 6x8

2.3.1.2 การหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่ชิ้นส่วนข้อต่อกับปลายชิ้นส่วนของคานและ เสา (Equilibrium)

ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่ชิ้นส่วนข้อต่อกับปลายชิ้นส่วนของคานและเสาจะใช้สภาวะสมดุลของข้อต่อ โดยกำหนดให้

$$\{F^{p}\} = \begin{Bmatrix} F_{u}^{p} \\ F_{v}^{p} \\ M_{\theta}^{p} \\ M_{\gamma}^{p} \end{Bmatrix} \tag{2.17}$$

โดยที่

$\{F^{p}\}$ = เวกเตอร์ของแรงที่กระทำที่กลางชิ้นส่วนข้อต่อ

F_{u}^{p} = แรงที่กระทำกลางชิ้นส่วนข้อต่อตามแนวราบ

F_{v}^{p} = แรงที่กระทำกลางชิ้นส่วนข้อต่อตามแนวดิ่ง

M_{θ}^{p} = แรงดัดที่กระทำกลางชิ้นส่วนข้อต่อ

M_{γ}^{p} = แรงดัดที่กระทำกลางชิ้นส่วนข้อต่อแล้วทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยการเฉือน

และ

$$\{F^{b1}\} = \begin{Bmatrix} F_{u}^{b1} \\ F_{v}^{b1} \\ M_{\theta}^{b1} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{F^{b2}\} = \begin{Bmatrix} F_{u}^{b2} \\ F_{v}^{b2} \\ M_{\theta}^{b2} \end{Bmatrix} \tag{2.18}$$

$$\{F^{c1}\} = \begin{Bmatrix} F_{u}^{c1} \\ F_{v}^{c1} \\ M_{\theta}^{c1} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{F^{c2}\} = \begin{Bmatrix} F_{u}^{c2} \\ F_{v}^{c2} \\ M_{\theta}^{c2} \end{Bmatrix} \tag{2.19}$$

โดยที่

$\{F^{b1}\}$ = เวกเตอร์ของแรงที่กระทำที่ปลายชิ้นส่วนด้านซ้ายของคาน

$\{F^{b2}\}$ = เวกเตอร์ของแรงที่กระทำที่ปลายชิ้นส่วนด้านขวาของคาน

$\{F^{c1}\}$ = เวกเตอร์ของแรงที่กระทำที่ปลายชิ้นส่วนด้านล่างของเสา

$\{F^{c2}\}$ = เวกเตอร์ของแรงที่กระทำที่ปลายชิ้นส่วนด้านบนของเสา

F_{u}^{b1}, F_{u}^{b2} = แรงที่กระทำที่ปลายชิ้นส่วนของคานตามแนวราบด้านซ้ายและขวาตามลำดับ

F_{u}^{c1}, F_{u}^{c2} = แรงที่กระทำที่ปลายชิ้นส่วนของเสาตามแนวราบด้านล่างและบนตามลำดับ

F_{v}^{b1}, F_{v}^{b2} = แรงที่กระทำที่ปลายชิ้นส่วนของคานตามแนวดิ่งด้านซ้ายและขวาตามลำดับ

F_{v}^{c1}, F_{v}^{c2} = แรงที่กระทำที่ปลายชิ้นส่วนของเสาตามแนวดิ่งด้านล่างและบนตามลำดับ

$M_{\theta}^{b1}, M_{\theta}^{b2}$ = แรงดัดที่กระทำที่ปลายชิ้นส่วนของคานด้านซ้ายและขวาตามลำดับ

$M_{\theta}^{c1}, M_{\theta}^{c2}$ = แรงดัดที่กระทำที่ปลายชิ้นส่วนล่างของเสาด้านล่างและบนตามลำดับ

จากการใช้สภาวะสมดุลของแรงที่กระทำที่ชิ้นส่วนข้อต่อและที่ปลายชิ้นส่วนของคานและเสา จะได้ว่า

$$\{F_{b1}^{p}\} = [a^{b1}]^{T}\{F^{b1}\} \tag{2.20}$$

$$\{F_{b2}^{p}\} = [a^{b2}]^{T}\{F^{b2}\} \tag{2.21}$$

$$\{F_{c1}^{p}\} = [a^{c1}]^{T}\{F^{c1}\} \tag{2.22}$$

$$\{F_{c2}^{p}\} = [a^{c2}]^{T}\{F^{c2}\} \tag{2.23}$$

รวมสมการที่ (2.20) และ (2.21) เข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} F_{b1}^{p} \\ F_{b2}^{p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [a^{b1}]^{T} & [0] \\ [0] & [a^{b2}]^{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F^{b1} \\ F^{b2} \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$

หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์ จะได้

$$\{F_{b}^{p}\} = [A^{b}]^{T}\{F^{b}\} \tag{2.25}$$

ในทำนองเดียวกัน รวมสมการที่ (2.22) และ (2.23) เข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} F_{c1}^{p} \\ F_{c2}^{p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [a^{c1}]^{T} & [0] \\ [0] & [a^{c2}]^{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F^{c1} \\ F^{c2} \end{Bmatrix} \tag{2.26}$$

หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์ จะได้

$$\{F_{c}^{p}\} = [A^{c}]^{T}\{F^{c}\} \tag{2.27}$$

ซึ่งสมการที่ (2.25) และ (2.27) แสดงถึงความสัมพันธ์ของแรงที่ชิ้นส่วนข้อต่อกับปลายชิ้นส่วนของคานและเสาตามลำดับ

โดยที่เวกเตอร์ $\{F_b^p\}$ และ $\{F_c^p\}$ มีมิติ 8x1ส่วนเวกเตอร์ $\{F^b\}$ และ $\{F^c\}$ มีมิติ 6x1

2.3.1.3 การหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายในที่กระทำที่ปลายชิ้นส่วนด้านซ้ายของคานและเสากับการเปลี่ยนตำแหน่ง

ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายในที่กระทำที่ปลายชิ้นส่วนกับการเปลี่ยนตำแหน่ง โดยใช้กฎแห่งพฤติกรรมวัสดุ (Constitutive Law) จะได้

$$\begin{Bmatrix} F^{b1} \\ F^{b2} \end{Bmatrix} = [k^b]\begin{Bmatrix} \nu^{b1} \\ \nu^{b2} \end{Bmatrix} \tag{2.28}$$

และ

$$\begin{Bmatrix} F^{c1} \\ F^{c2} \end{Bmatrix} = [k^c]\begin{Bmatrix} \nu^{c1} \\ \nu^{c2} \end{Bmatrix} \tag{2.29}$$

หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์ จะได้

$$\{F^b\} = [k^b]\{\nu^b\} \tag{2.30}$$

และ

$$\{F^c\} = [k^c]\{\nu^c\} \tag{2.31}$$

ซึ่งค่าของ$[k^b]$และ$[k^c]$เป็นดังนี้

$$[k^b] = \frac{2}{(1+2\alpha)}\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

$$[k^c]=\frac{2}{(1+2\alpha)}\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

โดยที่

α = $\frac{6EI}{L^2GA_r}$

E = โมดูลัสยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity)

I = โมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of Inertia)

L = ความยาวของชิ้นส่วนจากขอบคานด้านซ้ายถึงด้านขวาหรือขอบเสาด้านล่างถึงด้านบน (Clear Span)

G = โมดูลัสเฉือน (Shear Modulas)

= $\frac{E}{2(1+\nu)}$

ν = อัตราส่วนปัวซอง (Poisson's Ratio)

= 0.3 สำหรับเหล็ก

A = พื้นที่หน้าตัดรวมของชิ้นส่วน

A_r = พื้นที่ลดลง (Reduced Area) ใช้สำหรับคำนวณความเครียดเฉือน

= $\frac{A}{\beta}$

β = ตัวประกอบรูปร่าง (Form Factor)

= 1.14 สำหรับหน้าตัดเหล็ก W

$[k^b]$ = สติฟเนสเมตริกซ์ (Stiffness Matrix) ของคาน โดยคิดถึงขอบเสา มีมิติ 6x6

$[k^c]$ = สติฟเนสเมตริกซ์ ของเสาโดยคิดถึงขอบคาน มีมิติ 6X6

แทนค่าสมการที่ (2.14) ใน (2.30) จะได้

$$\{F^b\}=[k^b][A^b]\{r_b^p\} \tag{2.34}$$

และ แทนค่าสมการที่ (2.34) ใน (2.25) จะได้

$$\{F_b^p\} = [A^b]^T [k^b][A^b]\{r_b^p\} = [k_e^b]\{r_b^p\} \tag{2.35}$$

โดยที่

$$[k_e^b] = [A^b]^T [k^b][A^b]$$

=สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนคานโดยคิดถึงกลางเสามีมิติ 8x8

สมการที่ (2.35) แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนที่ ที่ปลายคานในระดับชิ้นส่วน

ในทำนองเดียวกัน จากสมการที่ (2.16), (2.27) และ (2.31) จะได้ว่า

$$\{F_c^p\} = [A^c]^T [k^c][A^c]\{r_c^p\} = [k_e^c]\{r_c^p\} \tag{2.36}$$

โดยที่

$$[k_e^c] = [A^c]^T [k^c][A^c]$$

=สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนเสาโดยคิดถึงกลางคานมีมิติ 8x8

สมการที่ (2.36) แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนที่ ที่ปลายเสาในระดับชิ้นส่วน

ค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนคาน และเสา ต่างมีมิติ 8x8 โดยจะมีดีกรีของความอิสระ (Degree of Freedom) เพิ่มขึ้นมาอีก 2 ต่อชิ้นส่วน เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยการเฉือน

2.3.2 การหาสติฟเนสของชิ้นส่วนข้อต่อ

ในการวิเคราะห์นี้ใช้แบบจำลองของ Krawinkler (14) สำหรับชิ้นส่วนข้อต่อซึ่งมีการเสียรูปเนื่องจากการเฉือนเพียงอย่างเดียวและสามารถแสดงความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับสติฟเนสสำหรับชิ้นส่วนข้อต่อ ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} F_u^p \\ F_v^p \\ M_\theta^p \\ M_\gamma^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_j^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^p \\ v^p \\ \theta^p \\ \gamma \end{Bmatrix} \tag{2.37}$$

โดยที่

k_j^p = สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนข้อต่อที่ j ซึ่งมีค่าเท่ากับความชันของกราฟ M_γ^p กับ γ ดังแสดงในรูปที่ 2.2

$$= \begin{cases} k_e^p = G.w.h.t_e & \text{เมื่อ } 0 < \gamma \le \gamma_y \\ 0 & \text{เมื่อ } \gamma > \gamma_y \end{cases} \tag{2.38}$$

ซึ่ง

k_e^p = สติฟเนสของชิ้นส่วนข้อต่อในช่วงอีลาสติก

t_c = ความหนาของเหล็กแผ่นตั้ง (Web) ของเสา

b_{cf} = ความกว้างของเหล็กปีกเสา

t_{cf} = ความหนาของเหล็กปีกเสา

γ_y = การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ด้วยการเฉือน ณ จุดคลาก

$$= \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}G} \tag{2.39}$$

2.3.3 การพิจารณาสติฟเนสรวมของโครงสร้าง คาน,เสาและ ชิ้นส่วนข้อต่อ

ค่าสติฟเนสรวมของโครงสร้างเกิดจากการรวมสติฟเนสเมตริกซ์ในแต่ละชิ้นส่วนทั้งของ คาน, เสา และชิ้นส่วนข้อต่อ โดยจะถูกรวมเข้าไปในตำแหน่งที่เหมาะสมของ สติฟเนสเมตริกซ์รวมของโครงสร้างหรืออาจเรียกได้ว่าเป็นการสังเคราะห์(Synthesis)สติฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้างทั้งระบบ ซึ่งเป็นวิธีการรวมสติฟเนสของเมตริกซ์โดยตรง (Direct Stiffness Matrix)

โดยที่

$[K]$ = สติฟเนสเมตริกซ์รวมของโครงสร้างคาน,เสา และชิ้นส่วนข้อต่อ

$$= \left[K^b\right] + \left[K^c\right] + \left[K^p\right] \tag{2.40}$$

$[K^b]$ = สติฟเนสเมตริกซ์รวมของคาน m ชิ้นส่วน โดยจะถูกรวมเข้าไปในตำแหน่งที่เหมาะสม ตามดีกรีของความอิสระ

$$= \sum_{e=1}^{m} \left[k_e^b\right] \tag{2.41}$$

$[K^c]$ = สติฟเนสเมตริกซ์รวมของเสา n ชิ้นส่วน โดยจะถูกรวมเข้าไปในตำแหน่งที่เหมาะสม ตามดีกรีของความอิสระ

$$= \sum_{e=1}^{n}[k_e^c] \tag{2.42}$$

$[K^p]$ = สติฟเนสเมตริกซ์รวมของชิ้นส่วนข้อต่อ *l* ชิ้นส่วน โดยจะถูกรวมเข้าไปในตำแหน่งที่เหมาะสม ตามดีกรีของความอิสระ

$$= \sum_{j=1}^{l} k_j^p \tag{2.43}$$

นั่นคือสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนที่โดยรวมของ โครงสร้าง ดังนี้

$$\{F\} = [K]\{r\} \tag{2.44}$$

โดยที่

$\{F\}$ = เวกเตอร์ของแรงที่กระทำต่อโครงสร้าง

$\{r\}$ = เวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้าง

2.4 <u>การพิจารณารวมผลของ P-Δ</u>

โครงสร้างเกือบทั้งหมด เมื่อมีแรงมากระทำต่อโครงสร้าง ถึงแม้ว่าจะไม่มีแรงกระทำทางด้านข้างก็ตาม โครงสร้างก็จะมีระยะการเคลื่อนที่ทางด้านข้างเกิดขึ้น ผลของการเคลื่อนที่ทางด้านข้างที่เกิดขึ้นนี้จะทำให้มีแรงดัดที่กระทำต่อโครงสร้างมากขึ้นซึ่งเป็นผลมาจากแรงในแนวดิ่งและ ระยะการเคลื่อนที่ทางด้านข้าง แรงดัดส่วนที่เกิดขึ้นเพิ่มเติมนี้จะถูกต้านทานโดยแรงเฉือนในแต่ละชั้นของโครงสร้าง เพื่อรักษาสภาพสมดุลของโครงสร้าง ซึ่งแรงเฉือนที่เกิดขึ้นดังกล่าว จะนำไปรวมกับแรงที่มีอยู่แล้ว ทำให้โครงสร้างเสมือนว่ามีแรงกระทำทางด้านข้างเพิ่มขึ้น ซึ่งผลของการที่พิจารณาระยะการเคลื่อนที่ทางด้านข้างของโครงสร้างในการวิเคราะห์โครงสร้างนี้ เรียกว่า การวิเคราะห์โครงสร้างอันดับสอง (Second-Order Analysis) โดยพิจารณารวมผลของ P-Δ

ในโครงสร้าง ที่มีความสูงไม่มากนักผลของ P-Δ จะมีค่าน้อยจนสามารถตัดทิ้งได้ แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อโครงสร้างมีความสูงมากขึ้น เราจำเป็นต้องพิจารณาผลของ P-Δ โดยเฉพาะในกรณีที่โครงสร้างมีความอ่อนตัว (Flexible structure) และมีแรงกระทำในแนวดิ่งมาก มีความจำเป็นที่จะ

ต้องวิเคราะห์ถึงผลอันเนื่องจาก Nonlinearity โดยเฉพาะอย่างยิ่ง Geometrical Nonlinearity จะมีผลกระทบต่อแรงภายในและระยะการเคลื่อนที่ของโครงสร้างเป็นอย่างมาก ซึ่งถ้าเราไม่พิจารณาผลอันนี้ในการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างแล้ว อาจจะทำให้โครงสร้างเกิดการวิบัติได้

ในงานวิจัยนี้จะพิจารณาผลรวมของ P-Δ ด้วยวิธีทำซ้ำ (Iteration) ซึ่งวิธีนี้ผลของระยะเยื้องศูนย์ของแรงในแนวดิ่งจะถูกแปลงไปเป็นแรงเฉือนเทียบเท่าซึ่งมีผลทำให้แรงดัดที่เพิ่มขึ้นมีค่าเท่ากัน พิจารณาชิ้นส่วนในแนวดิ่งใด ๆ ตามรูป 2.3

ผลของ P-Δ จะทำให้มีแรงดัดในชิ้นส่วนเพิ่มขึ้น $P\delta^*$ จะได้ว่า

$$M^* = VH + P\delta^* \tag{2.45}$$

และแรงเฉือน V จะมีค่าเพิ่มขึ้น V' เมื่อคิดผลของ P-Δ จะได้ว่า

$$V' = \frac{P\delta^*}{H} = K_g\delta^* \tag{2.46}$$

เมื่อพิจารณารวมทั้งโครงสร้างโดยการรวมทุกชิ้นส่วนเข้าด้วยกันโดยอาศัยสมการสมดุลสามารถเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\{F^*\} = [K_g]\{r\} \tag{2.47}$$

เมื่อรวม $\{F^*\}$ เข้ากับแรงที่กระทำต่อโครงสร้างที่กำหนด ก็จะได้

$$\{F\} + [K_g]\{r\} = [K]\{r\} \tag{2.48}$$

หรือ

$$\{F\} = ([K] - [K_g])\{r\} = [K_s]\{r\} \tag{2.49}$$

โดยที่

$\{F^*\}$ = เวกเตอร์แรงที่กระทำต่อโครงสร้างเนื่องจาก P-Δ

P = แรงในแนวแกนของชิ้นส่วน

V = แรงเฉือนของชิ้นส่วน

V' = แรงเฉือนเทียบเท่า ส่วนที่เพิ่มเนื่องจาก P-Δ

M^* = แรงดัดของชิ้นส่วนเมื่อรวมผลจาก P-Δ

H = ความยาวของชิ้นส่วน

δ^* = ระยะเยื้องศูนย์ในแนวดิ่งของแรงในแนวแกน

K_g = สติฟเนสทางเรขาคณิตของชิ้นส่วน

$\left[K_g\right]$ = สติฟเนสเมตริกซ์ทางเรขาคณิต ของโครงสร้าง

$\left[K_s\right]$ = สติฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้างเมื่อพิจารณารวมผล P-Δ

ซึ่งเมื่อพิจารณาจะเห็นว่าการรวมผลP-Δเข้าไปจะทำให้สติฟเนสของโครงสร้างเดิมถูกลดลงด้วยสติฟเนสทางเรขาคณิต ซึ่งจะส่งผลทำให้โครงสร้างมีการเคลื่อนที่ของจุดข้อต่อ และแรงภายในของชิ้นส่วนมีค่ามากขึ้น และ เนื่องจากสติฟเนสทางเรขาคณิตของชิ้นส่วนจะขึ้นกับค่า P แต่ค่า P ยังเป็นค่าที่เราไม่ทราบ ดังนั้น จึงจำเป็นต้องใช้วิธีทำซ้ำ จนกระทั่งได้ P ที่เข้าใกล้กับค่าจริง และเราสามารถสรุปขั้นตอนต่าง ๆ ได้ดังนี้

ก. ทำการวิเคราะห์โครงสร้างจากแรงกระทำที่กำหนดมาโดยไม่คำนึงผล P-Δ ผลการวิเคราะห์จะได้ ระยะการเคลื่อนที่ และ ค่าแรงภายในของชิ้นส่วน

ข. คำนวณหา $\left[K_g\right]$ เพื่อนำไปหักออกจาก $[K]$ จะได้ $[K_s]$

ค. แก้สมการสมดุล จากสมการ (2.49) จะได้ระยะการเคลื่อนที่ และ ค่าแรงภายในซึ่งรวมผล P-Δ

ง. ขั้นตอน ข. และ ค. จะกระทำซ้ำจนกว่า P ที่วิเคราะห์ได้ จะแตกต่างจากค่าในรอบที่แล้วอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้

2.5 <u>เงื่อนไขในการเกิดจุดหมุนพลาสติก</u>

เป็นที่ทราบกันดีว่าแรงในแนวแกนนอกจากจะทำให้ชิ้นส่วนเกิดความไม่เสถียรภาพแล้วยังมีผลทำให้แรงดัดพลาสติกมีค่าลดลงอีกด้วย ในกรณีโครงสร้างสูง 1-2 ชั้น แรงในแนวแกนอาจมีค่าน้อย แต่สำหรับโครงสร้างสูงหลายชั้น (Multistory frames) แรงในแนวแกนของเสาชั้นล่างๆ จะมีค่ามาก ดังนั้นจึงจำเป็นต้องคำนึงถึงผลกระทบของ แรงในแนวแกน

สำหรับความสัมพันธ์ระหว่าง แรงในแนวแกน กับ แรงดัดในการรับน้ำหนักของชิ้นส่วนที่ใช้เป็นเงื่อนไขในการเกิดจุดหมุนพลาสติกในแง่ของกำลังซึ่ง สามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ ดังนี้

หน้าตัด WF สามารถแสดงได้ ในรูปที่ 2.4 , ตาม AISC Code

$$\frac{P}{P_y} + 0.85\frac{M}{M_p} \le 1.0 \qquad \text{เมื่อ} \qquad \frac{P}{P_y} > 0.15 \tag{2.50}$$

$$\frac{M}{M_p} \le 1.0 \qquad \text{เมื่อ} \qquad \frac{P}{P_y} \le 0.15 \tag{2.51}$$

โดยที่

P = แรงในแนวแกนของชิ้นส่วน

M = แรงดัดของชิ้นส่วน

P_y = $f_y A$

= แรงในแนวแกนเพียงอย่างเดียวที่ทำให้ชิ้นส่วนคลาก

f_y = กำลังคลากของวัสดุ

A = พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน

M_p = $f_y Z$

= แรงดัดพลาสติกของชิ้นส่วน

Z = พลาสติกโมดูลัสของหน้าตัด

2.6 <u>การพิจารณาการรวมผลของการย้อนกลับของแรงดัด ณ จุดหมุนพลาสติก</u>

หลังจากที่แรงในแนวแกนและแรงดัดขององค์อาคารทำให้เกิดเงื่อนไขในการเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นภายในองค์อาคารแล้ว องค์อาคารนั้นยังสามารถรับแรงในแนวแกนที่เพิ่มขึ้นได้อีก การเพิ่มของแรงในแนวแกนองค์ของอาคารนี้ทำให้เงื่อนไขของจุดหมุนพลาสติกเปลี่ยนไป จากรูปที่ 2.5 จุด A เป็นจุดที่องค์อาคารเกิดเงื่อนไขของจุดหมุนพลาสติก เมื่อองค์อาคารรับแรงในแนวแกนเพิ่ม ค่าของแรงภายในแสดงได้ด้วยจุด A' จะเห็นว่าจุด A' นี้เป็นจุดที่ไม่ควรเกิดขึ้นเนื่องจากไม่ถูกต้องตามเงื่อนไขของจุดหมุนพลาสติก เพื่อรักษาแรงแนวแกนที่เพิ่มขึ้นนี้ไว้ จึงใช้จุด B เป็นจุดที่เกิดเงื่อนไขของการเกิดจุดหมุนพลาสติก ดังนั้นความแตกต่างของแรงดัดระหว่างจุด A และจุด B จะทำให้เกิดแรงดัดย้อนกลับ ณ จุดหมุนพลาสติก แรงดัดย้อนกลับของชิ้นส่วนที่เกิดจุดหมุนพลาสติกที่อยู่ที่ชิ้นส่วนข้อต่อเดียวกันเมื่อรวมกันก็จะเป็นแรงดัดภายนอกกระทำที่ชิ้นส่วนข้อต่อของโครงสร้างจะเห็นว่าการที่จะทราบแรงแนวแกนเพื่อหาแรงดัดย้อนกลับนี้จะต้องใช้วิธีทำซ้ำเช่นเดียวกับการพิจารณา P-Δ

2.7 หลักการและวิธีทางอีลาสติก-พลาสติก

การวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีอีลาสติก-พลาสติก เป็นวิธีวิเคราะห์โครงสร้างที่นำเอาการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีอีลาสติกมาประยุกต์เข้ากับหลักการบางอย่าง โดยมีขั้นตอนหลักในการวิเคราะห์ดังนี้

2.7.1 วิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีการเปลี่ยนตำแหน่งดังกล่าวมาแล้วข้างต้น โดยผลของการวิเคราะห์ที่ได้ เช่น แรงภายในที่ชิ้นส่วนข้อต่อของแต่ละชิ้นส่วนจะถูกนำไปใช้ในการวิเคราะห์ขั้นตอนต่อไป

2.7.2 คำนวณค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุก (Load Factor) ที่ทั้งสองปลาย ของ แต่ละชิ้นส่วนย่อยทุก ๆ ชิ้นส่วน ซึ่งจะทำให้เกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นในชิ้นส่วนนั้น

2.7.3หาค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่มีค่าน้อยที่สุดและตำแหน่งที่เกิดจุดหมุนพลาสติก

2.7.4 คำนวณค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกสะสม ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสะสม และค่าแรงภายในสะสม

2.7.5 เปลี่ยนแปลงสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยเมื่อมีจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้น

2.7.6 กระทำซ้ำขั้นตอนที่ 2.7.2 ถึง 2.7.6 จนกว่าจะตรวจสอบพบว่าโครงสร้างไม่มีความเสถียร (Unstable)

สำหรับหลักการที่นำมาผสมผสานเข้ากับการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีอีลาสติกก็คือขั้นตอนที่ 2.7.2 ถึง 2.7.6 ซึ่งเป็นการทำในลักษณะที่เพิ่มน้ำหนักบรรทุกที่กระทำต่อโครงสร้างจนกระทั่ง มีบางจุดในโครงสร้างเกิดหน่วยแรงคลากตลอดทั้งหน้าตัด ซึ่งก็คือความหมาย ของ จุดหมุนพลาสติกจากนั้นก็เพิ่มน้ำหนักบรรทุกต่อจนทำให้โครงสร้างมีจำนวนจุดหมุนพลาสติกมากพอที่จะทำให้โครงสร้างไม่มีความเสถียร

2.8 การคำนวนค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุก

การคำนวนค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกเป็นขั้นตอนหนึ่งของการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีอีลาสติกพลาสติก ในขั้นตอนนี้จะเป็นการหาค่าที่ต่ำที่สุดของตัวประกอบน้ำหนักบรรทุก โดยจะคำนวนที่ปลายทั้งสองของแต่ละชิ้นส่วนย่อย ซึ่งเมื่อนำไปคูณกับแรงกระทำแล้วจะทำให้มีจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้นในโครงสร้างโดยที่แรงภายใน ที่จะทำให้เกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นก็คือ แรงดัดและแรงในแนวแกน ซึ่งสอดคล้องกับ เงื่อนไขที่ทำให้เกิด จุดหมุนพลาสติก ดังได้กล่าว มาแล้ว

ก็คือ แรงดัดและแรงในแนวแกน ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ทำให้เกิดจุดหมุนพลาสติกดังได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 2.5 สำหรับการหาค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่ทำให้เกิดจุดหมุนพลาสติกในแต่ละตัวที่อยู่ต่อเนื่องกัน สามารถทำได้โดยการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกจากตำแหน่งจุดหมุนพลาสติกเดิม(λ_i)ด้วยขนาด $\Delta\lambda_i$ โดยเลือกให้ $\Delta\lambda_i$ มีค่าน้อยเท่ากับค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ (Tolerance) สำหรับตัวประกอบน้ำหนักบรรทุก สำหรับงานวิจัยนี้ใช้ $\Delta\lambda_i$ เท่ากับ 0.001 ทั้งนี้เนื่องจากว่าถ้าเลือก $\Delta\lambda_i$ มีขนาดใหญ่เกินไปจะทำให้โครงสร้างที่วิเคราะห์ไม่มีความเสถียรภาพได้ จากนั้นทำการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยขนาดตัวประกอบน้ำหนักบรรทุก $\lambda_i + \Delta\lambda_i$ ถ้าโครงสร้างที่วิเคราะห์ไม่มีเสถียรภาพ จะถือว่าจุดหมุนพลาสติกที่มีอยู่เป็นจุดหมุนพลาสติกตัวสุดท้ายก่อนการวิบัติของโครงสร้างและค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกสูงสุดที่โครงสร้างสามารถรับได้ คือ λ_i โดยมีความผิดพลาดไม่เกิน $\Delta\lambda_i$ แต่ถ้าโครงสร้างที่วิเคราะห์มีเสถียรภาพ ก็จะคำนวนอัตราส่วนที่ทำให้เกิดจุดหมุนพลาสติก จากสมการ 2.50 และ2.51 จากนั้นก็จะประมาณค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกตัวถัดไป โดยอาศัยการประมาณแบบลากรางซ์ (Lagrange Interpolation) และทำการตรวจสอบเงื่อนไขการเกิดจุดหมุนพลาสติกในหัวข้อ2.5ของทุกชิ้นส่วนย่อยซ้ำจนกระทั่งได้ค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกน้อยที่สุดที่ทำให้เงื่อนไขของการเกิดจุดหมุนพลาสติกเป็นจริง ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการแสดงได้ดังนี้

$$\Delta\lambda_{i+1,n+1} = \lambda_i + \Delta\lambda_{n+1} = \sum \lambda_j(f)(\lambda_i + \Delta\lambda_j) \tag{2.52}$$

$$\Delta\lambda_j(f) = \frac{(f-f_1)\ldots(f-f_{j-1})(f-f_{j+1})\ldots(f-f_n)}{(f_j-f_1)\ldots(f_j-f_{j-1})(f_j-f_{j+1})\ldots(f_j-f_n)} \tag{2.53}$$

โดยที่ $f = 1.0$

สำหรับหน้าตัด W

$$f_j = \left|\frac{P_j}{P_y}\right| + 0.85\left|\frac{M_j}{M_p}\right| \quad \text{เมื่อ} \quad \frac{P}{P_y} > 0.15 \tag{2.54}$$

$$f_j = \left|\frac{M_j}{M_p}\right| \quad \text{เมื่อ} \quad \frac{P}{P_y} \le 0.15 \tag{2.55}$$

λ_i = ค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกเมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติก i จุด

$\lambda_{i+1,n+1}$ = ค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกเมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติก i+1 จุด โดยอาศัยการประมาณจากพหุนามอันดับที่ n

$\Delta\lambda_{n+1}$ = ค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่เพิ่มขึ้นจากเดิม ที่มีจุดหมุนพลาสติก i จุด เป็น i+1จุด โดยอาศัยการประมาณจากพหุนามอันดับที่ n

2.9 <u>การคำนวนค่าผลลัพธ์สะสม</u>

หลังจากที่ทราบค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่น้อยที่สุดในวงรอบการทำงานที่ j ซึ่งหมายถึง ค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่ทำให้โครงสร้างเดิมที่มีจุดหมุนพลาสติกอยู่ j-1 จุดและถูกกระทำอยู่ด้วยแรง $\lambda_c^{j-1}\{F\}$ กลายเป็นโครงสร้างที่มีจุดหมุนพลาสติก j จุด ภายใต้แรงกระทำ $\lambda_c^{j-1}\{F\}+\lambda_m^j\{F\}$ และสามารถคำนวนค่าผลลัพธ์สะสมอื่นๆ ได้ดังนี้

$$\lambda_c^j = \sum_{j=1}^{j} \lambda_m^j = \lambda_m^j + \lambda_c^{j-1} \tag{2.56}$$

$$D_{ci}^j = \sum_{j=1}^{j} \lambda_m^j D_i^j = \lambda_m^j D_i^j + D_{ci}^{j-1} \tag{2.57}$$

$$P_{ck}^j = \sum_{j=1}^{j} \lambda_m^j P_k^j = \lambda_m^j P_k^j + P_{ck}^{j-1} \tag{2.58}$$

$$M_{cik}^j = \sum_{j=1}^{j} \lambda_m^j M_{ik}^j = \lambda_m^j M_{ik}^j + M_{cik}^{j-1} \tag{2.59}$$

โดยที่

λ_c^j = ค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกสะสมในวงรอบการทำงานที่ j

λ_c^{j-1} = ค่าตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกสะสมในวงรอบการทำงานที่ j-1

D_{ci}^j = ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสะสมที่ข้อต่อ i ในวงรอบการทำงานที่ j

D_i^j = ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ข้อต่อ i ในวงรอบการทำงานที่ j

D_{ci}^{j-1} = ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสะสมที่ข้อต่อ i ในวงรอบการทำงานที่ j-1

P_{ck}^j = แรงในแนวแกนสะสมของชิ้นส่วน k ในวงรอบการทำงานที่ j

M_{cik}^j = แรงดัดสะสมที่ปลาย i ของชิ้นส่วน k ในวงรอบการทำงานที่ j

2.10 การเปลี่ยนแปลงสติฟเนสเมติกซ์ของชิ้นส่วนย่อยเมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติก

เมื่อจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้นที่ชิ้นส่วนใดในโครงสร้าง จะทำให้ความสามารถในการรับแรงของชิ้นส่วนนั้นๆเปลี่ยนไป ซึ่งย่อมจะมีผลกระทบต่อการรับแรงต่างๆทั้งหมดของโครงสร้างไปด้วย ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องพิจารณาเปลี่ยนแปลงค่าสติฟเนสเมติกซ์ ของชิ้นส่วนที่เกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นเพื่อให้สอดคล้องกับความเป็นจริงในการรับแรงของชิ้นส่วนนั้นๆและเงื่อนไขในการเกิดจุดหมุนพลาสติกในหัวข้อ 2.5 ที่มีผลมาจากแรงดัดและแรงในแนวแกนซึ่งสติฟเนสเมติกซ์ของชิ้นส่วนที่เกิดจุดหมุนพลาสติกในระบบพิกัดเฉพาะที่ เมื่อพิจารณาผลของแรงในแนวแกนและ แรงดัดที่มีผลต่อการเปลี่ยนตำแหน่งจะเป็นกรณีใดกรณีหนึ่งดังต่อไปนี้

2.10.1สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนคานเมื่อปลายทางด้านซ้ายมือเป็นจุดหมุนพลาสติก(Left Plastic Hinge) และด้านขวามือยังสามารถรับการกระจายของแรงดัดที่เพิ่มขึ้นได้ตามรูปที่ 2.6 สามารถแสดงได้ดังนี้

$$[k^b] = \frac{2}{(2+\alpha)}\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} \frac{A(2+\alpha)}{2I} & 0 & 0 & \frac{-A(2+\alpha)}{2I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{L^2} & 0 & 0 & \frac{-3}{L^2} & \frac{3}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-A(2+\alpha)}{2I} & 0 & 0 & \frac{A(2+\alpha)}{2I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{L^2} & 0 & 0 & \frac{3}{L^2} & \frac{-3}{L} \\ 0 & \frac{3}{L} & 0 & 0 & \frac{-3}{L} & 3 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

2.10.2 สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนคาน เมื่อปลายทางด้านขวามีจุดหมุนพลาสติก (Right Plastic Hinge) และด้านซ้ายมือยังสามารถรับการกระจายของแรงดัดที่เพิ่มขึ้นได้ ตามรูปที่ 2.7 สามารถแสดงได้ดังนี้

$$[k^b] = \frac{2}{(L+\alpha)}\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} \frac{A(2+\alpha)}{2I} & 0 & 0 & \frac{-A(2+\alpha)}{2I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{L^2} & \frac{3}{L} & 0 & \frac{-3}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{L} & 3 & 0 & \frac{-3}{L} & 0 \\ \frac{-A(2+\alpha)}{2I} & 0 & 0 & \frac{A(2+\alpha)}{2I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{L^2} & \frac{-3}{L} & 0 & \frac{3}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

2.10.3 สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนคาน เมื่อจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้นภายในชิ้นส่วน ตามรูปที่2.8

$$[k^b] = \frac{2EI}{(2+\alpha)(X_1^3+X_2^3)}\begin{bmatrix} \frac{A(2+\alpha)(X_1^3+X_2^3)}{2IL} & 0 & 0 & \frac{-A(2+\alpha)(X_1^3+X_2^3)}{2I} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3X_1 & 0 & -3 & 3X_2 \\ 0 & 3X_1 & 3X_1^2 & 0 & -3X_1 & 3X_1X_2 \\ \frac{-A(2+\alpha)(X_1^3+X_2^3)}{2IL} & 0 & 0 & \frac{A(2+\alpha)(X_1^3+X_2^3)}{2IL} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3X_1 & 0 & 3 & -3X_2 \\ 0 & 3X_2 & 3X_1X_2 & 0 & -3X_2 & 3X_2^2 \end{bmatrix}$$

(2.62)

2.10.4 สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนคาน ที่มีจุดหมุนพลาสติกสองจุดในชิ้นส่วน ได้แก่

2.10.4.1 ชิ้นส่วนคานที่มีจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้นที่ปลายด้านซ้าย และภายในชิ้นส่วน ตามรูปที่ 2.9

2.10.4.2 ชิ้นส่วนคานที่มีจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้นที่ปลายด้านขวา และภายในชิ้นส่วน ตามรูปที่ 2.10

2.10.4.3 ชิ้นส่วนคานที่มีจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้นที่ปลายด้านซ้าย และขวา ตามรูปที่ 2.11

ทั้งสามกรณีมีสติฟเนสเมตริกซ์ที่เหมือนกัน สามารถแสดงได้ดังนี้

$$[k^b]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

2.10.5 สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนเสา เมื่อปลายด้านล่างเป็นจุดหมุนพลาสติก (Bottom Plastic Hinge) และด้านบนยังสามารถรับการกระจายของแรงดัดที่เพิ่มขึ้นได้ ตามรูปที่ 2.12 สามารถแสดงได้ดังนี้

$$[k^c]=\frac{2}{(2+\alpha)}\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} \frac{3}{L^2} & 0 & 0 & \frac{-3}{L^2} & 0 & \frac{-3}{L} \\ 0 & \frac{A(2+\alpha)}{2I} & 0 & 0 & \frac{-A(2+\alpha)}{2I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & 0 & 0 & \frac{3}{L^2} & 0 & \frac{3}{L} \\ 0 & \frac{-A(2+\alpha)}{2I} & 0 & 0 & \frac{A(2+\alpha)}{2I} & 0 \\ \frac{-3}{L} & 0 & 0 & \frac{3}{L} & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

2.10.6 สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนเสา เมื่อปลายด้านบนเป็นจุดหมุนพลาสติก (Top Pastic Hinge) และด้านล่างยังสามารถรับการกระจายของแรงดัดที่เพิ่มขึ้นได้ ตามรูปที่ 2.13 สามารถแสดงได้ดังนี้

$$[k^c] = \frac{2}{(2+\alpha)}\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} \frac{3}{L^2} & 0 & \frac{-3}{L} & \frac{-3}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A(2+\alpha)}{2I} & 0 & 0 & \frac{-A(2+\alpha)}{2I} & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & 0 & 3 & \frac{3}{L} & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & 0 & \frac{3}{L} & \frac{3}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-A(2+\alpha)}{2I} & 0 & 0 & \frac{A(2+\alpha)}{2I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

2.10.7 สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนเสา เมื่อจุดหมุนพลาสติก เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วน ตามรูปที่ 2.14 สามารถแสดงได้ดังนี้

$$[k^c] = \frac{2EI}{(2+\alpha)(X_1^3+X_2^3)}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3X_1 & -3 & 0 & -3X_2 \\ 0 & \frac{A(2+\alpha)(X_1^3+X_2^3)}{2IL} & 0 & 0 & \frac{-A(2+\alpha)(X_1^3+X_2^3)}{2IL} & 0 \\ -3X_1 & 0 & 3X_1^2 & 3X_1 & 0 & 3X_1X_2 \\ -3 & 0 & 3X_1 & 3 & 0 & 3X_2 \\ 0 & \frac{-A(2+\alpha)(X_1^3+X_2^3)}{2IL} & 0 & 0 & \frac{A(2+\alpha)(X_1^3+X_2^3)}{2IL} & 0 \\ -3X_2 & 0 & 3X_1X_2 & 3X_2 & 0 & 3X_2^2 \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

2.10.8 สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนเสา ที่มีจุดหมุนพลาสติกสองจุดในชิ้นส่วน ได้แก่

2.10.8.1 ชิ้นส่วนเสาที่มีจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้นที่ปลายล่างและภายในชิ้นส่วน ตามรูปที่ 2.15

2.10.8.2 ชิ้นส่วนเสาที่มีจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้นที่ปลายบนและภายในชิ้นส่วน ตามรูปที่ 2.16

10.8.3 ชิ้นส่วนเสาที่มีจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้นที่ปลายบนและล่างตามรูปที่

ทั้งสามกรณีมีสติฟเนสเมตริกซ์ที่เหมือนกัน สามารถแสดงได้ดังนี้

$$
\left[k^{c}\right]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.67}
$$

2.11 <u>การตรวจสอบการวิบัติของโครงข้อแข็ง</u>

สติฟเนสเมตริกซ์ของโครงข้อแข็งเปลี่ยนแปลงตาม สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่ วน เมื่อจุดหมุนพลาสติกเกิดขึ้นจนในที่สุดโครงข้อแข็งเกิดความไม่เสถียร โดยตรวจสอบได้ดังนี้

ก) เทอมใดเทอมหนึ่งในแนวทแยง ของสติฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้างมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์

ข) ค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งมีค่ามาก เนื่องจาก เมื่อมีจุดหมุนพลาสติกมากพอ โครงสร้างก็จะมีการเปลี่ยนตำแหน่งมากอย่างไม่จำกัด โดยไม่สามารถรับน้ำหนักบรรทุกเพิ่มได้อีก

ค) ชิ้นส่วนข้อต่อมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยการเฉือน (γ) มากกว่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยการเฉือน ณ จุดคลาก (γ_y)