

บทที่ 6

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียงโดยทั่วไปมักจะพบคลื่นช็อก (shock wave) ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของไหลอย่างฉับพลันผ่านแนวของคลื่นช็อกนี้ ดังนั้นในบริเวณดังกล่าวจึงต้องมีจำนวนเอลิเมนต์และทิศทางกรวางตัวของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม จึงจะให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงได้ แต่โดยทั่วไปแล้วทิศทางและตำแหน่งของคลื่นช็อกไม่สามารถทราบได้ล่วงหน้า ทำให้การที่จะให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงได้นั้น จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กทั่วทั้งโดเมน ทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์มากขึ้นไปด้วย ดังนั้นหากสามารถเลือกใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเฉพาะในบริเวณที่เหมาะสมได้ ก็จะทำให้เวลาในการคำนวณลดลงและเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ขึ้นด้วย ในบทนี้จะได้กล่าวถึงหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ (adaptive remeshing technique) และขั้นตอนในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เข้ากับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

6.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ คือ การใช้ข้อมูลของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และผลลัพธ์ที่มีอยู่ เพื่อปรับขนาดเอลิเมนต์ให้มีเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของผลลัพธ์สูง และ เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของผลลัพธ์ต่ำ โดยหลักการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ อาศัยหลักการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (principle stress) ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) คือ เริ่มจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของคำตอบที่จะใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ เช่น ความหนาแน่น ความดัน ความเร็ว เป็นต้น สำหรับการไหลในสองมิติค่าอนุพันธ์อันดับสองของผลลัพธ์มี 3 ค่าคือ $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

โดยที่ ϕ คือ ผลลัพธ์ของปัญหาที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์

ค่าอนุพันธ์อันดับสองทั้ง 3 ค่า จะนำมาคำนวณหาค่าในแนวแกนหลักได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2} \quad (6.4)$$

ในวิชานี้พนธ์นี้ได้ใช้ค่าความหนาแน่น หรือค่ามอดุลัมเบอร์ ที่ได้จากการคำนวณเป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ จึงขอยกตัวอย่างการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของค่าความหนาแน่นในแนวแกนหลักดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \rho}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

โดยที่

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} \right)^2} \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial Y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} \right)^2} \quad (6.7)$$

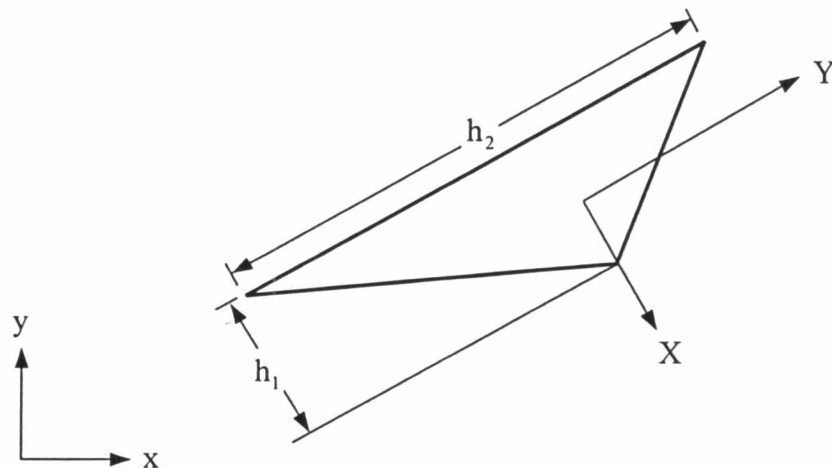
กระบวนการดังกล่าวจะทำการคำนวณสำหรับทุกๆ จุดต่อในรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีอยู่ จากนั้นจึงนำค่า $\frac{\partial^2 p}{\partial X^2}$ และ $\frac{\partial^2 p}{\partial Y^2}$ ของทุกๆ จุดต่อมาเปรียบเทียบกันเพื่อหาค่าอนุพันธ์อันดับสองที่มีค่ามากที่สุดของปัญหาซึ่งแทนด้วย λ_{\max} โดยที่

$$\lambda_{\max} = \max \left[\frac{\partial^2 p}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 p}{\partial Y^2} \right] \quad (6.8)$$

ค่า λ_{\max} ที่คำนวณได้จะถูกใช้ในการคำนวณเพื่อหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ ดังต่อไปนี้

$$h_1^2 \left| \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} \right| = h_2^2 \left| \frac{\partial^2 p}{\partial Y^2} \right| = h_{\min}^2 \lambda_{\max} \quad (6.9)$$

โดยที่ h_1 คือ ความยาวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก X และ h_2 คือ ความยาวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก Y ดังแสดงในรูปที่ 6.1 ดังนั้นหากกำหนดขนาดความยาวของเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กที่สุด h_{\min} และขนาดความยาวของเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ที่สุด h_{\max} ให้แล้ว ค่าความยาว h_1 และ h_2 ที่เหมาะสมของเอลิเมนต์อื่นๆ สำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่จึงสามารถคำนวณได้



รูปที่ 6.1 การวางตัวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก X และ Y

จากสมการ (6.9) พบว่าค่า h_{\min} มีความสำคัญอย่างยิ่งในการปรับขนาดเอลิเมนต์ กล่าวคือ หากกำหนดค่า h_{\min} ที่น้อยเกินไปจะทำให้มีการแบ่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีจำนวนมากเกินไป ในทางกลับกันถ้าหากกำหนดค่า h_{\min} ที่มากเกินไปก็จะมีเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวนน้อยเกินไป ซึ่งอาจ

ส่งผลต่อความแม่นยำในการคำนวณของผลลัพธ์ ดังนั้นการเลือกค่า h_{\min} ที่เหมาะสมจึงเป็นสิ่งที่สำคัญมาก ในทางปฏิบัติยังไม่มีวิธีใดที่สามารถบอกได้ว่าค่า h_{\min} ที่เหมาะสมควรมีค่าเท่าใด ทั้งนี้ก็ขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาและประสบการณ์ สำหรับค่า h_{\max} ซึ่งคือ ขนาดความยาวของเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ที่สุดอาจจะเพิ่มขึ้นประมาณ 2 เท่า สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งแรกๆ หลังจากนั้น ค่า h_{\max} อาจจะปรับให้เพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยหรืออาจจะให้คงที่ได้ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับรูปร่างของปัญหาและรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นหลัก

ค่าอนุพันธ์อันดับสองของความหนาแน่นทั้ง 3 ค่า ซึ่งคือ $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y}$ ที่จุดต่อต่างๆ ในรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีอยู่แล้วสามารถคำนวณได้โดยใช้ขั้นตอนดังต่อไปนี้ [34, 35] สมมติต้องการคำนวณหา $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ ซึ่งลักษณะการกระจายของความหนาแน่นบนเอลิเมนต์คือ

$$\rho^{(e)} = [N]\{\rho\} \quad (6.10)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\partial \rho^{(e)}}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{\rho\} \quad (6.11)$$

ซึ่งมีค่าคงที่และรู้ค่าสำหรับเอลิเมนต์นั้น ในขณะที่เดียวกันหากมองโดเมนของการไหลในภาพรวมแล้วสมมติว่า ค่าความชันของความหนาแน่นบนเอลิเมนต์นั้นมีลักษณะการกระจายแบบแผ่นเรียบ ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าความชันของความหนาแน่นที่จุดต่อดังนี้

$$\frac{\partial \hat{\rho}^{(e)}}{\partial x} = [N] \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} \quad (6.12)$$

จากนั้นนำสมการ (6.12) ลบออกจากสมการ (6.11) แล้วประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างจะได้

$$\int_A \{N\} \left(\frac{\partial \hat{\rho}^{(e)}}{\partial x} - \frac{\partial \rho^{(e)}}{\partial x} \right) dA = 0 \quad (6.13)$$

แทนค่าสมการ (6.12) ลงในสมการ (6.13) จะได้

$$\int_A \{N\} [N] dA \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} = \int_A \{N\} dA \frac{\partial \rho^{(e)}}{\partial x} \quad (6.14)$$

$$[M] \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} = \int_A \{N\} dA \frac{\partial p^{(e)}}{\partial x} \quad (6.15)$$

โดยที่ $[M]$ คือ เมตริกซ์มวลแบบแบนนัยดังแสดงสมการ (3.87) สำหรับสมการ (6.15) เป็นสมการของแต่ละเอลิเมนต์ ดังนั้นจึงต้องทำการคำนวณสำหรับทุกๆ เอลิเมนต์แล้วรวมขึ้นเป็นระบบสมการใหญ่เพื่อหาค่าความชันของความหนาแน่นที่จุดต่อ อนึ่งระบบสมการใหญ่สามารถแก้ได้ง่ายขึ้นหากแปลงเมตริกซ์มวลแบบเต็มให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์มวลแบบรวมที่จุดต่อดังสมการ (3.88)

การคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับสองสามารถดำเนินไปในแนวทางเดียวกัน กล่าวคือ หลังจากทราบค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อแล้วสามารถคำนวณค่าอนุพันธ์อันดับสองได้จาก

$$\frac{\partial^2 p^{(e)}}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\} \quad (6.16)$$

สมมติอนุพันธ์อันดับสองของความหนาแน่นบนเอลิเมนต์นั้นมีลักษณะการกระจายแบบแผ่นเรียบ ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าอนุพันธ์อันดับสองของความหนาแน่นที่จุดต่อดังนี้

$$\frac{\partial^2 p^{(e)}}{\partial x^2} = [N] \left\{ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right\} \quad (6.17)$$

จากนั้นค่าอนุพันธ์อันดับสองของความหนาแน่นที่จุดต่อจึงคำนวณได้จาก

$$\int_A \{N\} [N] dA \left\{ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right\} = \int_A \{N\} dA \frac{\partial^2 p^{(e)}}{\partial x^2} \quad (6.18)$$

$$[M] \left\{ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right\} = \int_A \{N\} dA \frac{\partial^2 p^{(e)}}{\partial x^2} \quad (6.19)$$

สำหรับขั้นตอนในการหาค่า $\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}$ สามารถคำนวณได้ในทำนองเดียวกัน

6.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้โปรแกรม FEMESH ซึ่งได้พัฒนาขึ้นโดย สุทธิศักดิ์ พงศ์ณาพาณิชย์ [15] ในการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ FEMESH เป็นโปรแกรมที่ทำงานในโหมดกราฟิก สามารถที่จะสร้างรูปแบบของปัญหาและสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมได้ทันที และยังสามารถ

ส่งต่อข้อมูลให้กับโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์อื่นๆ เพื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาได้ในหลายรูปแบบ รวมถึงการแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณในรูปแบบกราฟิกได้ด้วย โดยประสิทธิภาพและความถูกต้องของโปรแกรม FEMESH ได้ถูกตรวจสอบและแสดงไว้ในเอกสารอ้างอิง [34]

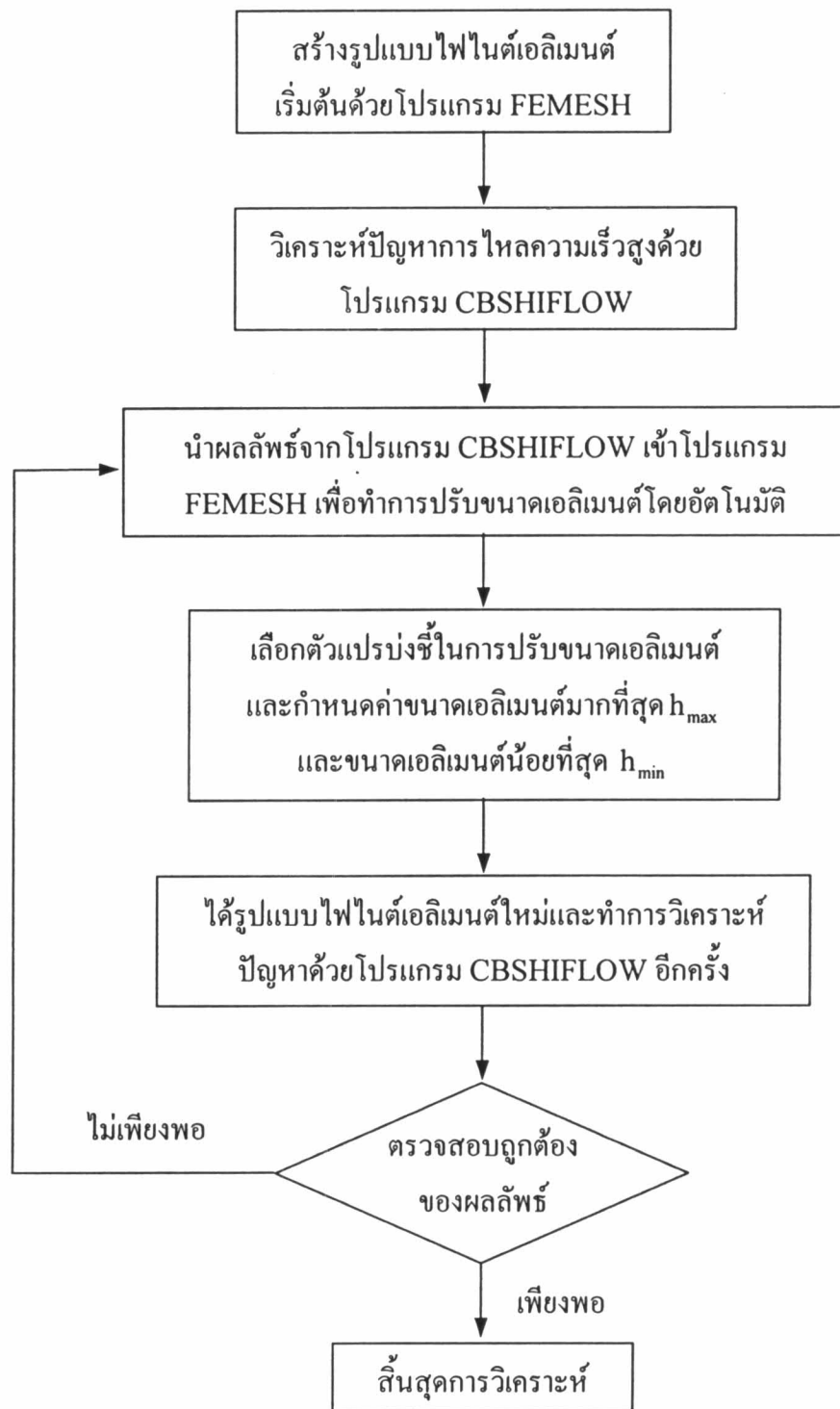
ภาพโดยรวมของโครงสร้างการทำงาน of โปรแกรม FEMESH สามารถที่จะแบ่งออกได้เป็นสามส่วนหลัก ๆ ดังนี้

1. ส่วนทำงานก่อนการประมวลผล (Pre-processing) เป็นส่วนของโปรแกรมที่ช่วยในการสร้างรูปร่างของปัญหาต่างๆ เช่น การวาดเส้นตรง หรือเส้นโค้ง การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม หรือการกำหนดเงื่อนไขที่ขอบ (boundary constraint) เป็นต้น งานหลักของส่วนทำงานก่อนการประมวลผล ก็คือ การทำงานด้านคอมพิวเตอร์ช่วยการออกแบบ (CAD) ซึ่งประกอบด้วยคำสั่งต่างๆ มากมายที่ช่วยในการสร้างรูปทรงเรขาคณิต
2. ส่วนการประมวลผล (Processing) ซึ่งหมายถึง ส่วนของโปรแกรมที่ทำการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับปัญหาต่างๆ
3. ส่วนทำงานหลังการประมวลผล (Post-processing) เป็นส่วนของโปรแกรมที่ช่วยในการแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณในรูปแบบกราฟิก เช่น การแสดงเส้นชั้น (contour) หรือการแสดงเวกเตอร์ของความเร็ว (velocity vector) เป็นต้น นอกจากนี้ การประยุกต์เทคนิคปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive meshing technique) เข้ากับปัญหาเพื่อต้องการให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น ก็จะเป็นการทำงานในส่วนนี้ด้วยเช่นกัน โดยจะนำผลลัพธ์ที่ได้มาทำการคำนวณขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมและทำการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขึ้นมาใหม่อีก

6.3 การประยุกต์โปรแกรม CBSHIFLOW กับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ขั้นตอนการประยุกต์โปรแกรม CBSHIFLOW เข้ากับ โปรแกรม FEMESH เพื่อปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ สามารถอธิบายได้ด้วยแผนภูมิการทำงานดังแสดงในรูปที่ 6.2 ซึ่งมีรายละเอียดโดยสรุปดังต่อไปนี้

- 6.3.1 สร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นด้วยโปรแกรม FEMESH โดยรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นจะประกอบด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดสม่ำเสมอเท่ากันทั้งโดเมน



รูปที่ 6.2 แผนผังการทำงานของการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

6.3.2 นำโปรแกรม CBSHIFLOW มาทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงโดยใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จากข้อ 6.3.1

6.3.3 นำผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากข้อ 6.3.2 เข้าโปรแกรม FEMESH เพื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยในขั้นตอนนี้จำเป็นต้องเลือกตัวชี้วัดในการปรับขนาดเอลิเมนต์ซึ่งในที่นี้ใช้ค่าความหนาแน่น หรือค่าม็คนัมเบอร์ และกำหนดค่าความยาวของเอลิเมนต์ที่มากที่สุด h_{max} และค่าความยาวของเอลิเมนต์ที่น้อยที่สุด h_{min} ทำให้ได้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการคำนวณครั้งต่อไปออกมา โดยจะมีเอลิเมนต์ขนาดเล็กจะวางตัวอยู่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของผลลัพธ์สูงและเอลิเมนต์ขนาดใหญ่วางตัวในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของผลลัพธ์น้อย

6.3.4 ทำซ้ำขั้นตอนที่ 6.3.2 และ 6.3.3 อีกครั้งจนผลลัพธ์มีแม่นยำมากขึ้น

6.4 ลักษณะของแฟ้มข้อมูลนำเข้าโปรแกรม FEMESH

ลักษณะของแฟ้มข้อมูลนำเข้าโปรแกรม FEMESH เพื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงประกอบด้วย 2 ส่วน ดังต่อไปนี้

ส่วนที่ 1 ส่วนคำสั่ง (command section) ประกอบด้วยข้อมูลต่างๆ เพื่อให้โปรแกรม FEMESH ตรวจสอบแฟ้มข้อมูลที่น่าเข้ามามีความสอดคล้องกับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้น

ตัวอย่างเช่น

```
OUT_FILE_VERSION=1.0
TITLE=FINITE ELEMENT MODEL FOR MACH 2 WALL SHOCK
SUBTITLE=MODEL WITH 1642 TRIANGULAR ELEMENTS AND 862 NODES
DATE=20-JAN-03 12:39:52
SOL=15
PROBLEMID=15822203
SOLVERSTART=20-JAN-03 12:39:52
SOLVEREND=20-JAN-03 12:41:13
REMESH_HMIN=0.025
REMESH_HMAX=0.150
END=CMD
```

ส่วนที่ 2 ส่วนผลลัพธ์ (solution section) ประกอบด้วยค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในแต่ละจุดต่อซึ่งประกอบด้วย หมายเลขจุดต่อ ค่าความหนาแน่น ความเร็ว u และ v ค่าพลังงานรวม ค่าความดันและขนาดเอลิเมนต์

ตัวอย่างเช่น

NODAL VALUES SOLUTIONS [862]:

NODE	RHO	U	V	E	P	H
1	0.1000E+01	0.9848E+00	0.000E+00	0.9464E+00	0.1785E+00	0.00E+00
2	0.1253E+01	0.9252E+00	0.000E+00	0.9240E+00	0.2486E+00	0.00E+00
3	0.1409E+01	0.9090E+00	0.000E+00	0.9290E+00	0.2908E+00	0.00E+00

6.5 ตัวอย่างการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหาการไหลความเร็วสูง

ในหัวข้อนี้ขอยกตัวอย่าง การประยุกต์โปรแกรม CBSHIFLOW เข้ากับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติด้วยโปรแกรม FEMESH เพื่อการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงต่างๆ ที่ได้ตรวจสอบความถูกต้องแล้วในบทที่ 5 เพื่อดูความถูกต้องของผลลัพธ์ที่เพิ่มขึ้นหลังการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

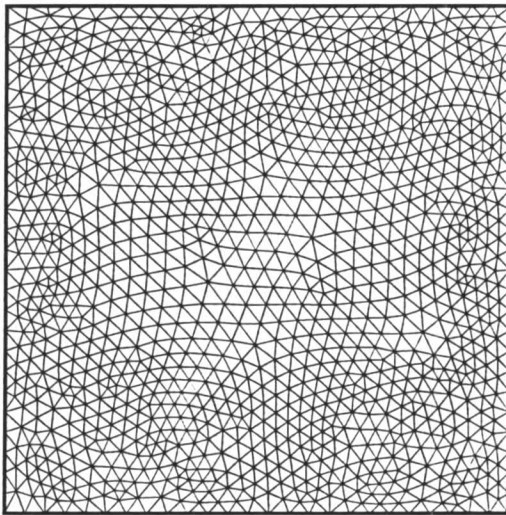
6.5.1 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่าตกกระทบพื้นราบ

การวิเคราะห์ปัญหาเริ่มด้วยการใช้โปรแกรม FEMESH สร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดสม่ำเสมอทั่วทั้งโดเมนจำนวน 2,334 เอลิเมนต์ 1,218 จุดต่อ ดังรูปที่ 6.3(ก) จากนั้นทำการวิเคราะห์ปัญหานี้ด้วยโปรแกรม CBSHIFLOW โดยรูปที่ 6.3 (ข)-(ง) เป็นเส้นชั้นของความหนาแน่น ความดัน และศักย์เบอร์ตามลำดับ ซึ่งจะพบว่าคลื่นช็อกที่ได้ยังมีความหนาอยู่มากทั้งนี้เนื่องจากขนาดของเอลิเมนต์ในบริเวณดังกล่าวมีขนาดใหญ่

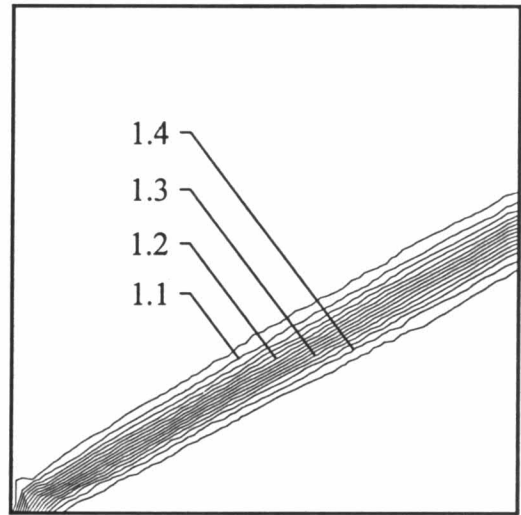
ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยการนำผลลัพธ์ที่คำนวณได้เข้าโปรแกรม FEMESH เพื่อคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม โดยใช้ค่าความหนาแน่นเป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ซึ่งจะได้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ครั้งใหม่ ดังรูปที่ 6.4 (ก) โดยประกอบด้วย 3,499 เอลิเมนต์ 1,809 จุดต่อ จะเห็นว่าเอลิเมนต์ขนาดเล็กเริ่มวางตัวในแนวของคลื่นช็อก ส่วนบริเวณก่อนและหลังคลื่นช็อกซึ่งการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ค่อนข้างน้อยจะมีเอลิเมนต์ขนาดใหญ่วางตัวอยู่ ในรูปที่ 6.4 (ข)-(ง) เป็นเส้นชั้นของความหนาแน่น ความดัน และศักย์เบอร์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ตามลำดับ

ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม CBSHIFLOW ของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ปรับขนาดครั้งที่ 1 ได้นำเข้าโปรแกรม FEMESH อีกครั้งเพื่อคำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมและสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณครั้งต่อไป ในรูปที่ 6.5(ก) เป็นรูปแบบ

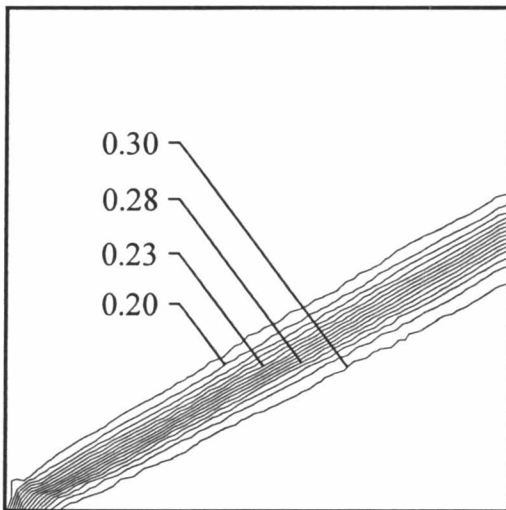
ไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ปรับขนาดครั้งที่ 2 พบว่าการวางตัวของเอลิเมนต์ขนาดเล็กตามแนวคลื่นช็อก มีความชัดเจนขึ้นและคลื่นช็อกที่ได้มีความหนาลดลง โดยเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และม៉กนัมเบอร์ ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 แสดงในรูปที่ 6.5 (ข)-(ง) ตามลำดับ



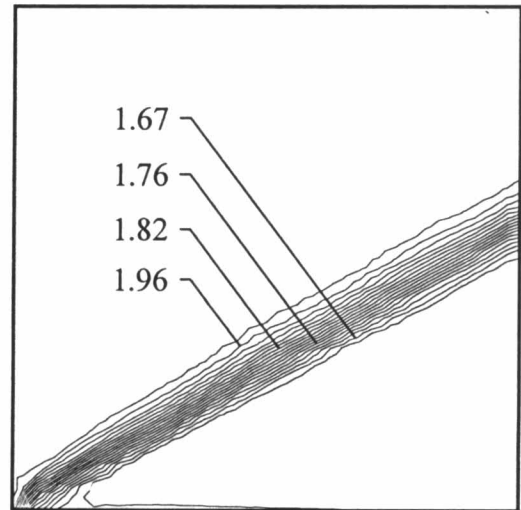
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

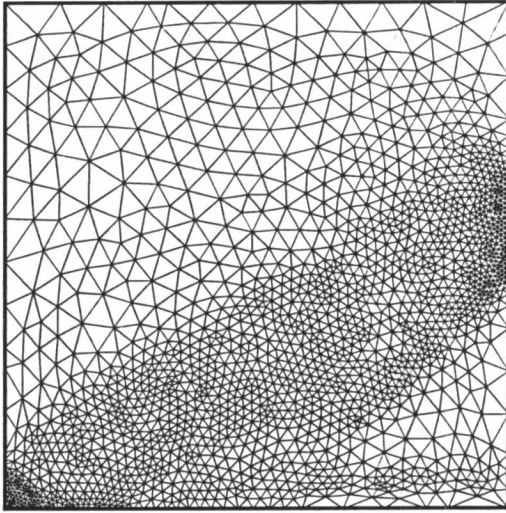


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

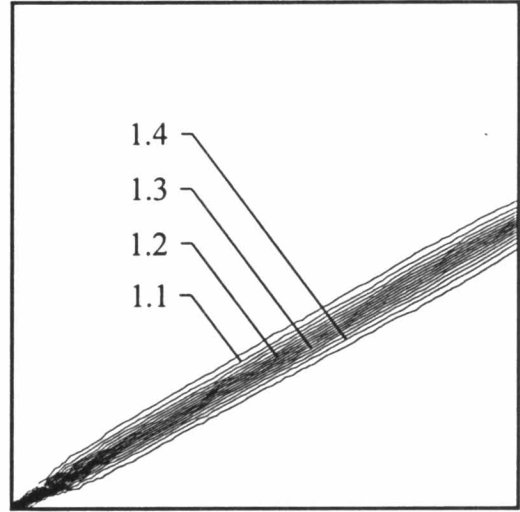


(ง) เส้นชั้นของค่าม៉กนัมเบอร์

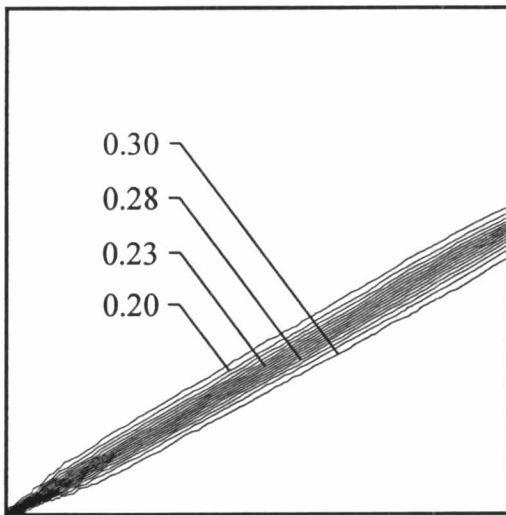
รูปที่ 6.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และม៉กนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ



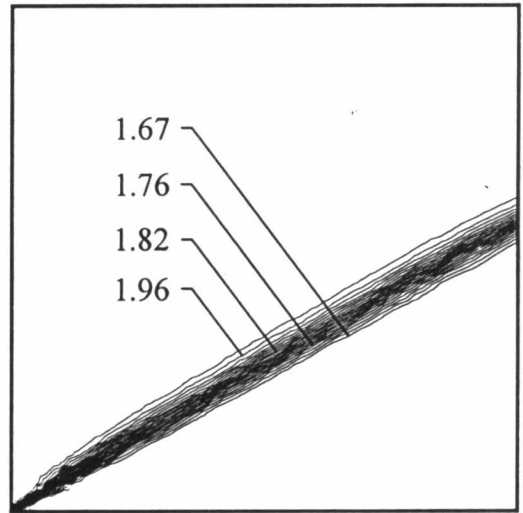
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

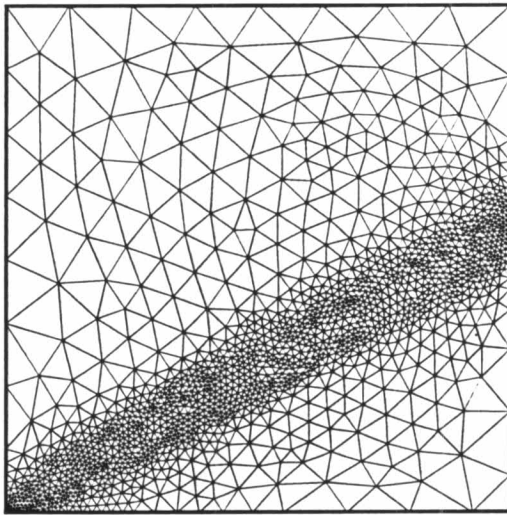


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

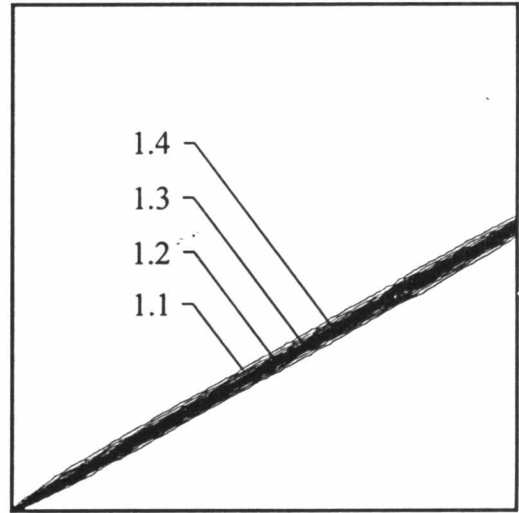


(ง) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์

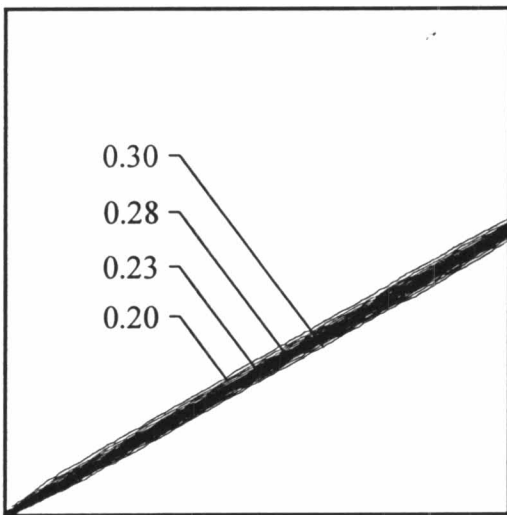
รูปที่ 6.4 การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และ มัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ



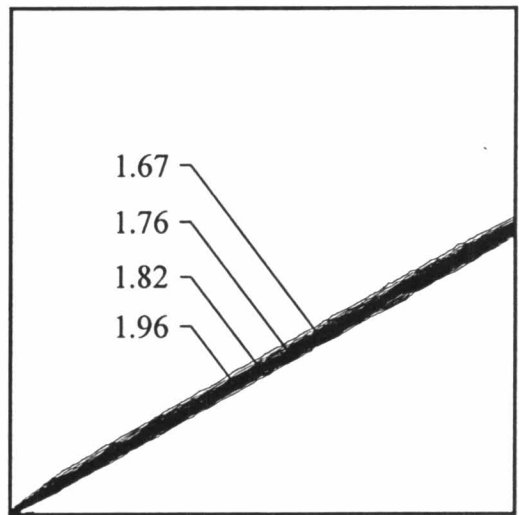
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

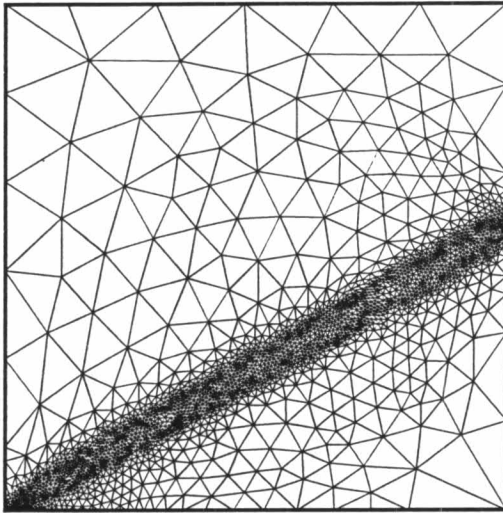


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

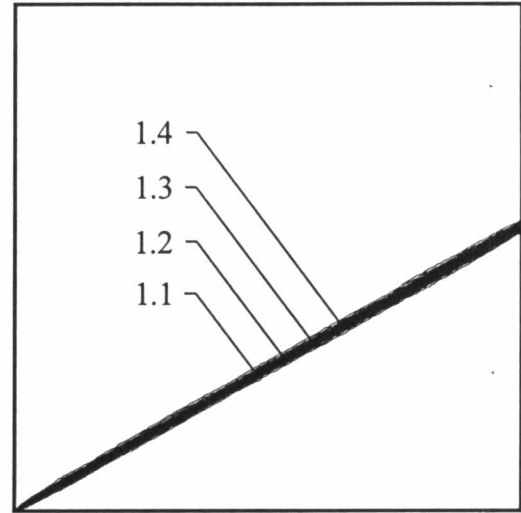


(ง) เส้นชั้นของค่ามัคกัมเบอร์

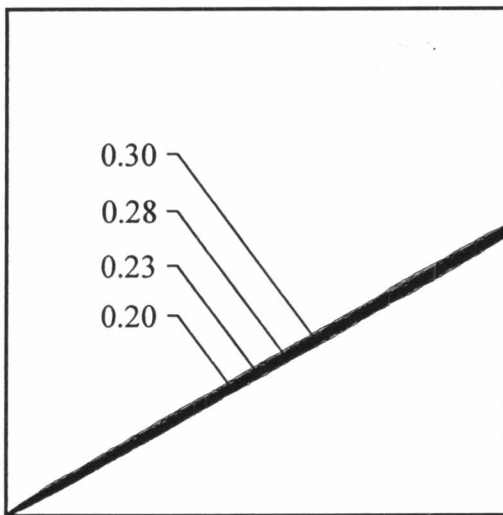
รูปที่ 6.5 การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และ มัคกัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ



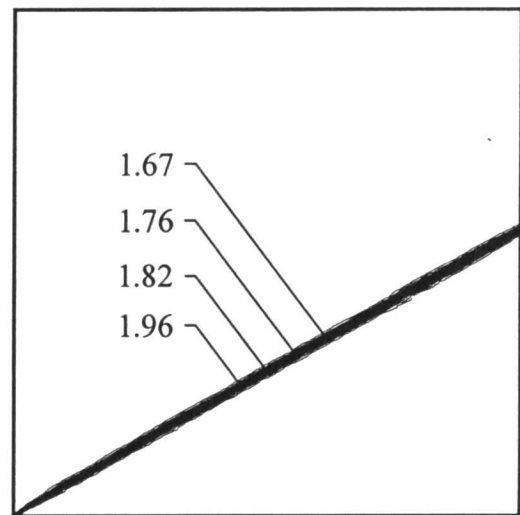
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

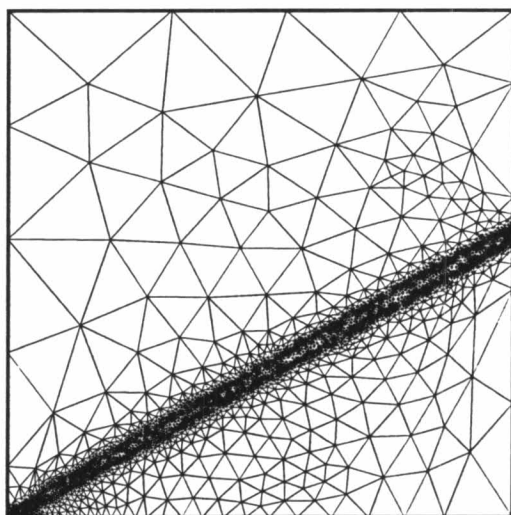


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

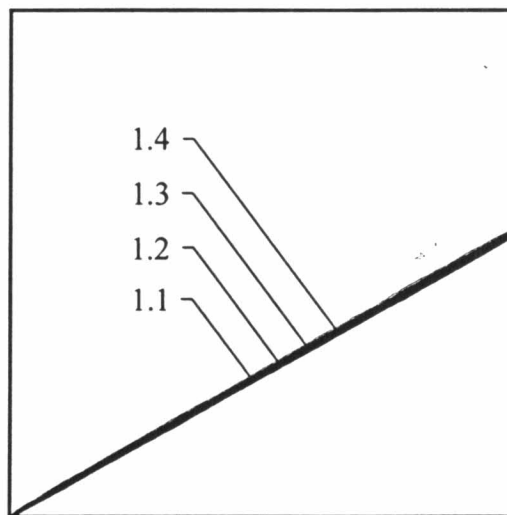


(ง) เส้นชั้นของค่าม៉ัคนัมเบอร์

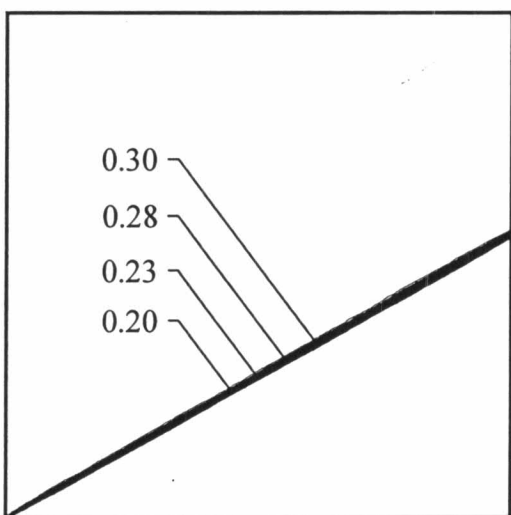
รูปที่ 6.6 การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 3 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และ มัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ



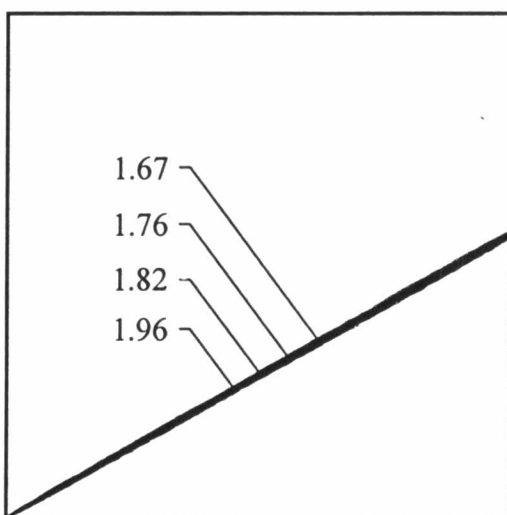
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

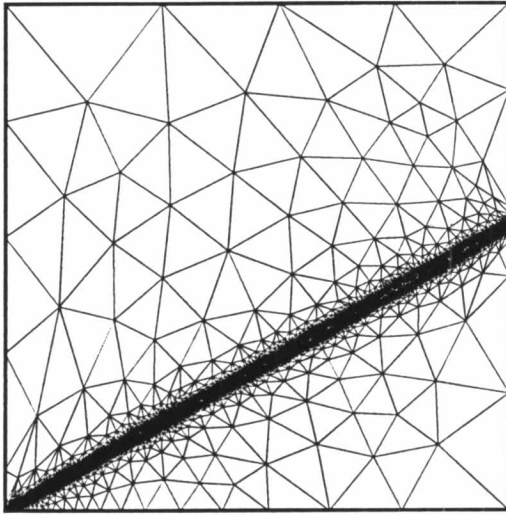


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

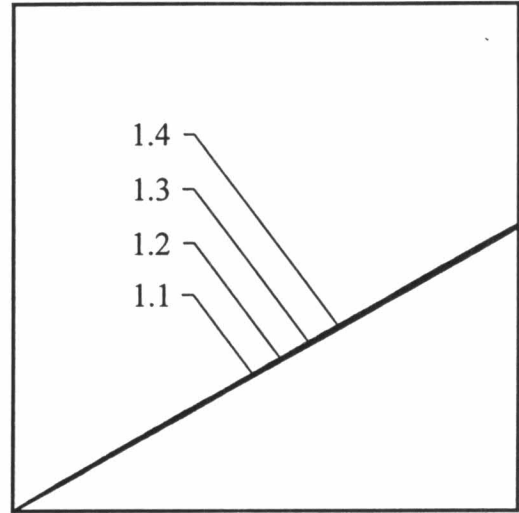


(ง) เส้นชั้นของค่ามัคคัมเบอร์

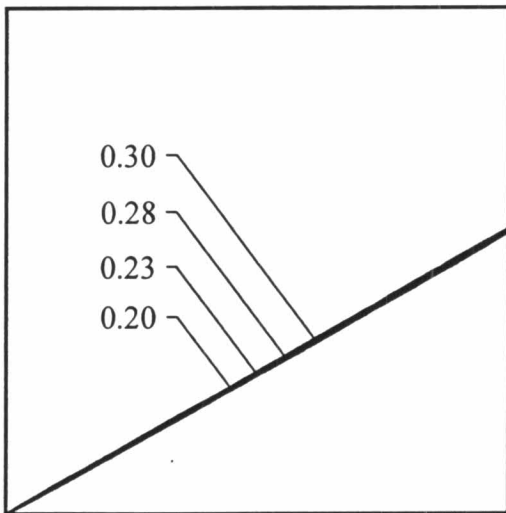
รูปที่ 6.7 การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 4 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และ มัคคัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ



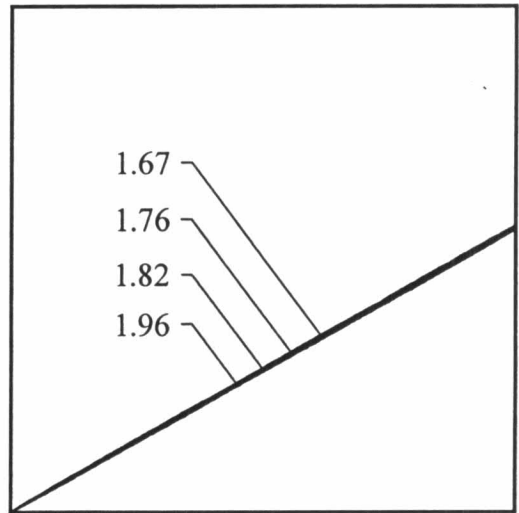
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น



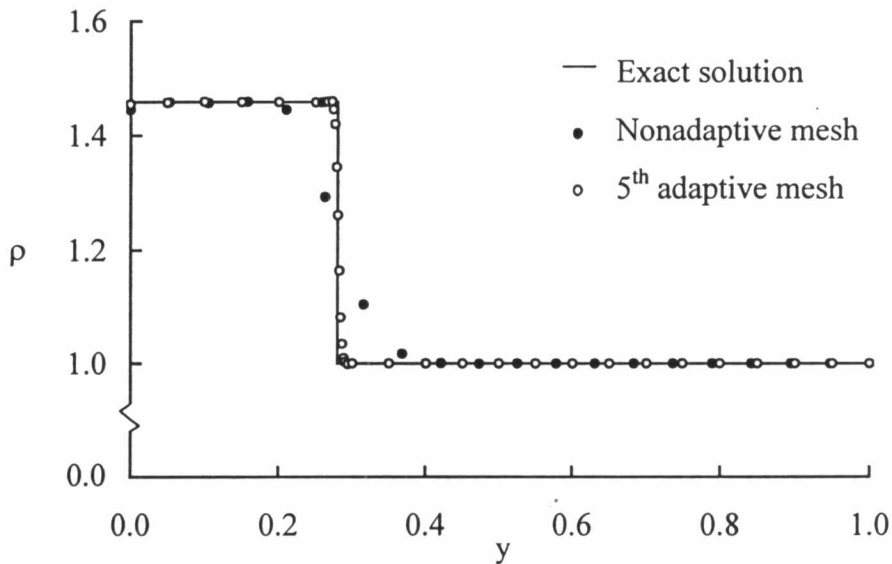
(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน



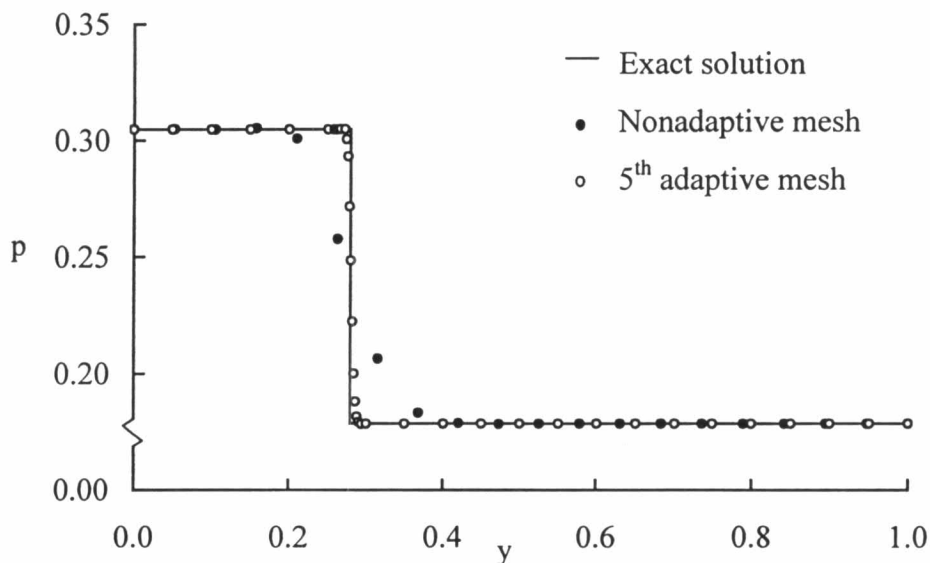
(ง) เส้นชั้นของค่าม៉ัคนัมเบอร์

รูปที่ 6.8 การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 5 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และ มัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ตกกระทบพื้นราบ

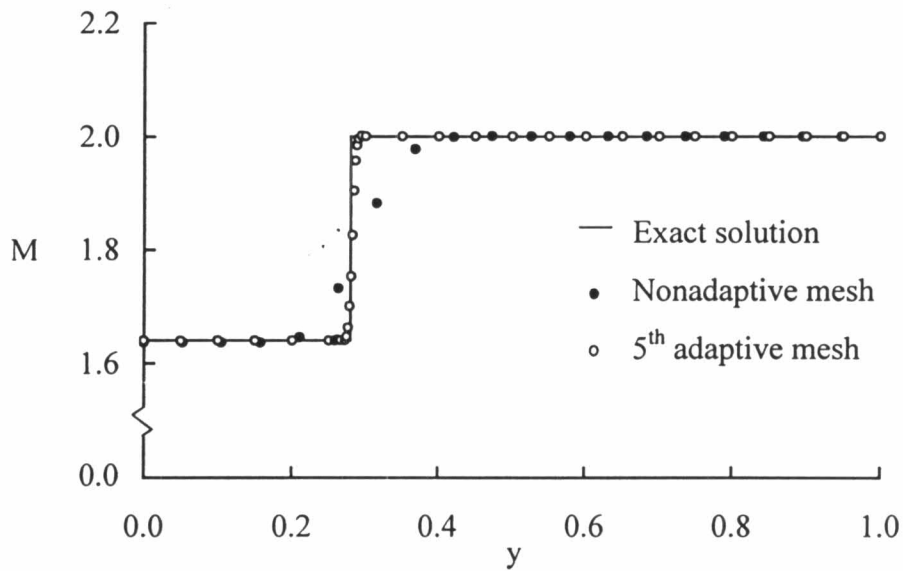
รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และม็คนัมเบอร์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งต่อๆ ไป ได้แสดงในรูปที่ 6.6-6.8 จะพบว่าการวางตัวของเอลิเมนต์มีความชัดเจนขึ้น และแนวของคลื่นช็อกก็มีความคมชัดขึ้น เมื่อพิจารณาการกระจายของค่าความหนาแน่น ความดัน และม็คนัมเบอร์ ที่ตำแหน่ง $x = 0.5$ ที่ได้จากการคำนวณเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ดังแสดงในรูปที่ 6.9-6.11 จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเข้าใกล้ผลเฉลยแม่นยำตรงมากขึ้น



รูปที่ 6.9 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นเมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงตกกระทบบนราบ ที่ตำแหน่ง $x=0.5$



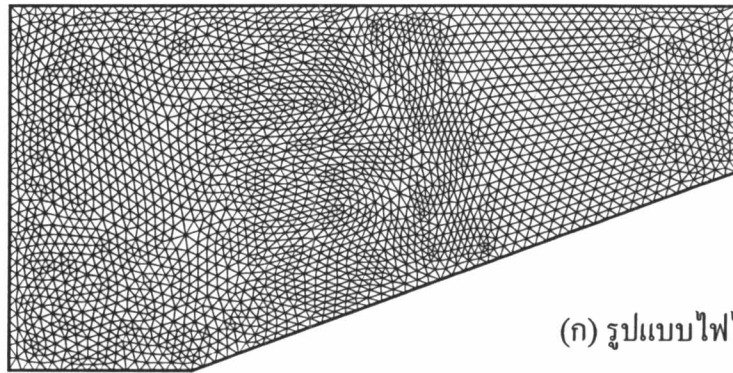
รูปที่ 6.10 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันเมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงตกกระทบบนราบ ที่ตำแหน่ง $x=0.5$



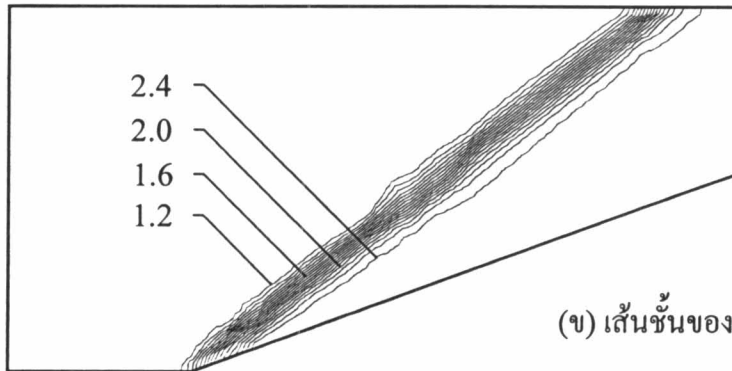
รูปที่ 6.11 การเปรียบเทียบการกระจายของค่ามัคคัมเบอร์เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงตกกระทบบนราบ ที่ตำแหน่ง $x=0.5$

6.5.2 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°

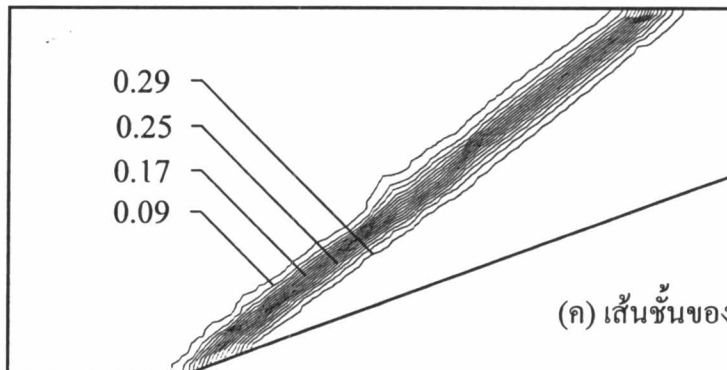
การประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เข้ากับปัญหาการไหลนี้ เริ่มด้วยการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น ด้วยโปรแกรม FEMESH รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นที่สร้างประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขนาดสม่ำเสมอทั่วทั้งโดเมนจำนวน 5,137 เอลิเมนต์ 2,649 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.12(ก) จากนั้นทำการวิเคราะห์ปัญหานี้ด้วยโปรแกรม CBSHIFLOW ผลลัพธ์ที่ได้แสดงอยู่ในรูปแบบของเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคคัมเบอร์ดังรูปที่ 6.12(ข)-(ง) จะเห็นได้ว่าคลื่นช็อกที่ได้มีความหนาอยู่มากเพราะเอลิเมนต์ที่วางตัวอยู่ตามแนวคลื่นช็อกมีขนาดใหญ่ เมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 พบว่ามีเอลิเมนต์ขนาดเล็กเริ่มวางตัวตามแนวคลื่นช็อก และ คลื่นช็อกที่คำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ครั้งใหม่นี้ก็มีความหนาที่ลดลง ดังแสดงในรูปที่ 6.13(ก)-(ง) การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งต่อๆ ไปจะได้รับการวางตัวของเอลิเมนต์ขนาดเล็กตามแนวคลื่นช็อกที่ชัดเจนขึ้น และคลื่นช็อกที่คำนวณได้ก็บางลงมากขึ้นเมื่อเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น ดังแสดงในรูปที่ 6.14-6.17 เพื่อเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่เพิ่มขึ้น ในรูปที่ 6.18-6.20 ได้แสดงเป็นการเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคคัมเบอร์ที่ $y = 0.7$ ตามลำดับ



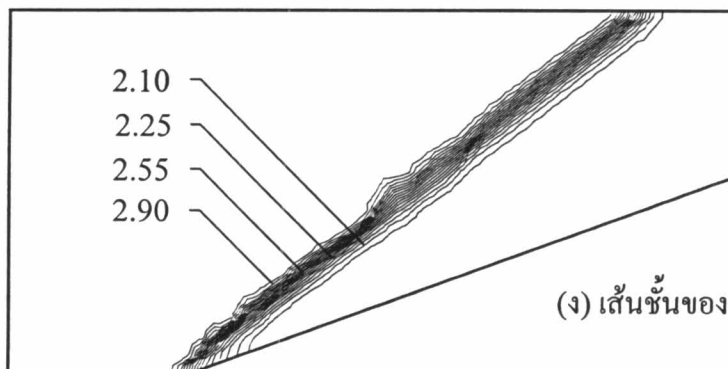
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

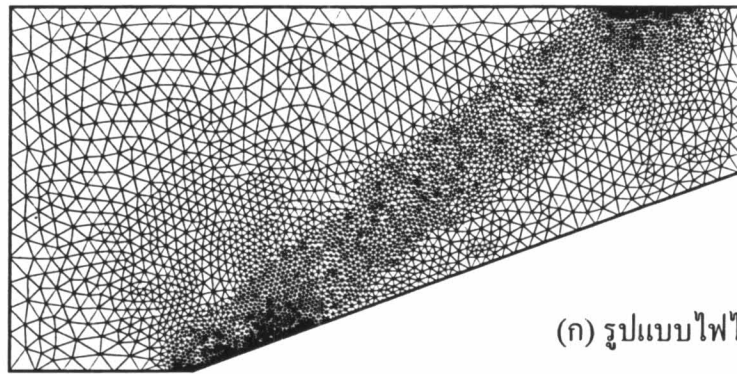


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

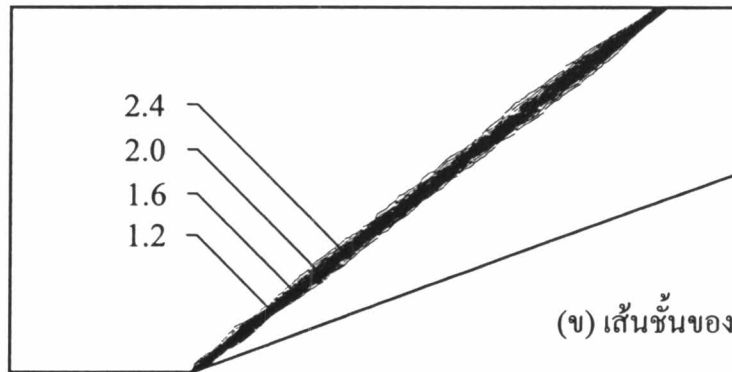


(ง) เส้นชั้นของค่ามอดูลัสเบอร์

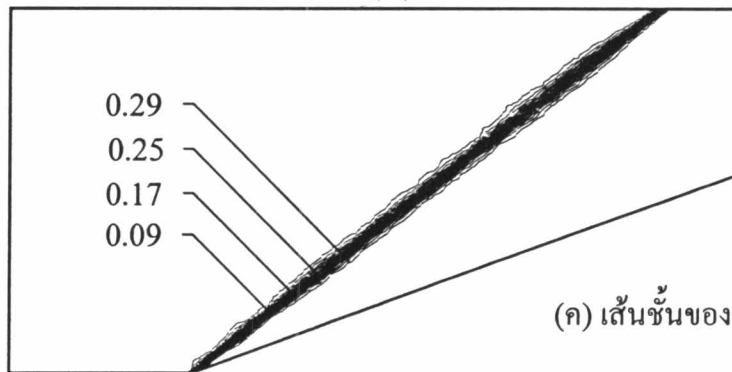
รูปที่ 6.12 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และ มอดูลัสเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



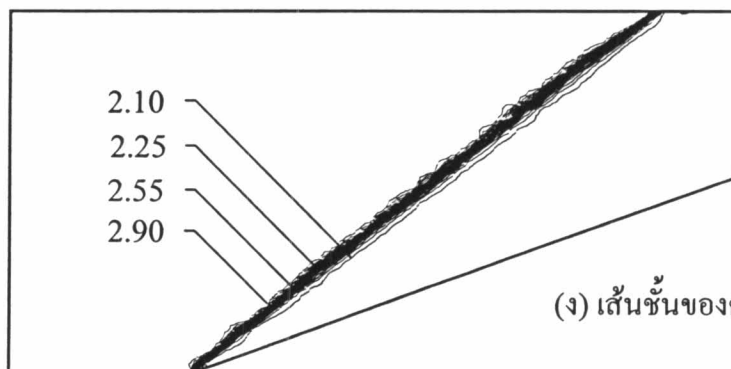
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

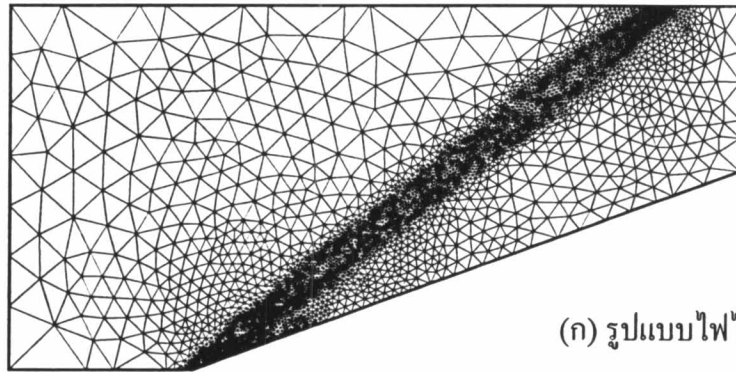


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

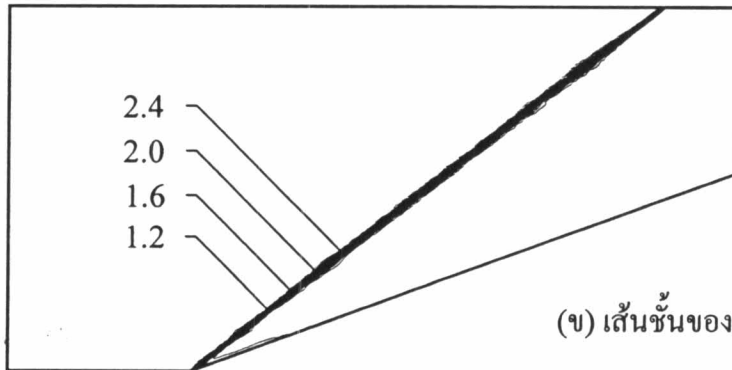


(ง) เส้นชั้นของค่ามัคคัมเบอร์

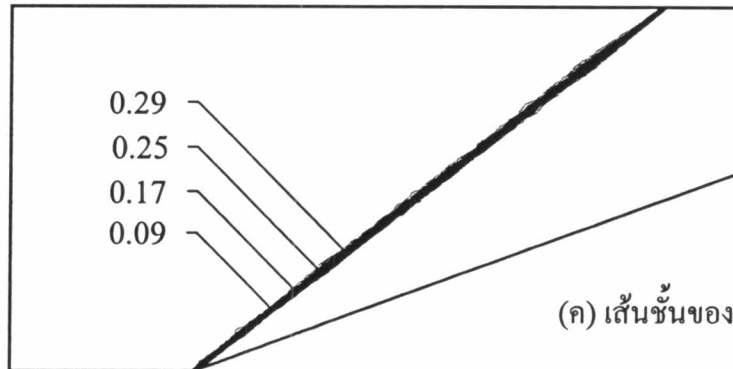
รูปที่ 6.13 การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งที่ 1 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



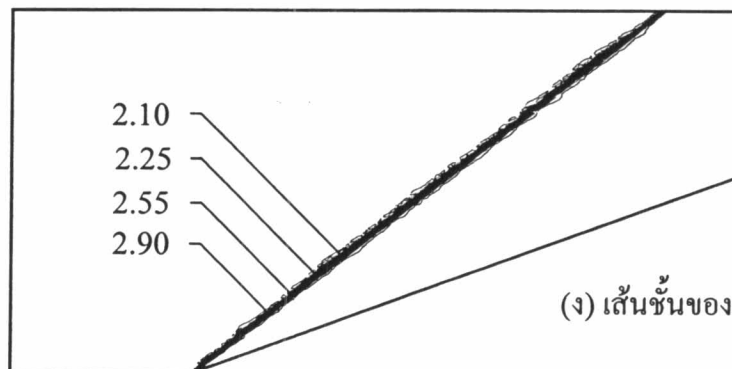
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

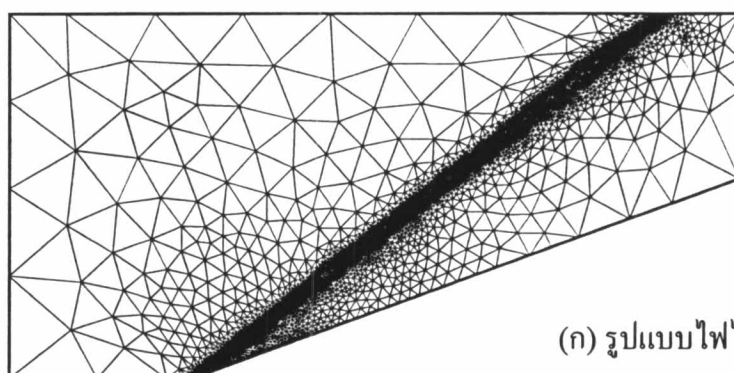


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

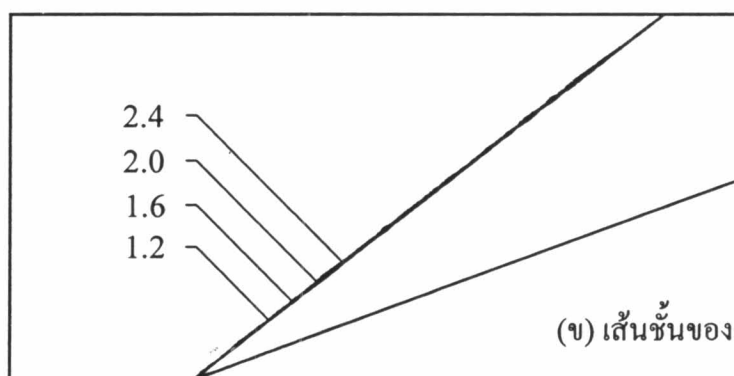


(ง) เส้นชั้นของค่ามอดูลัสเบอร์

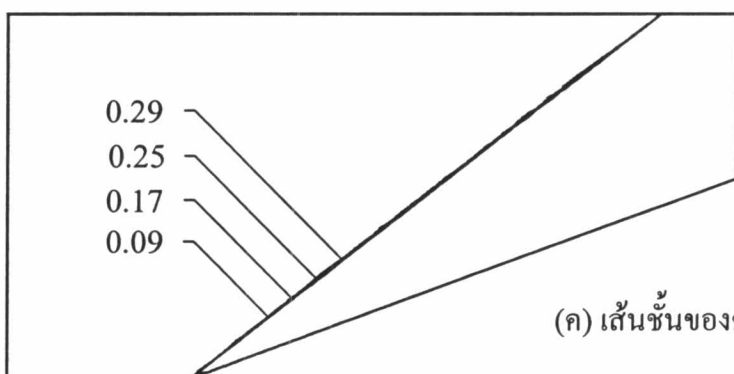
รูปที่ 6.14 การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งที่ 2 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



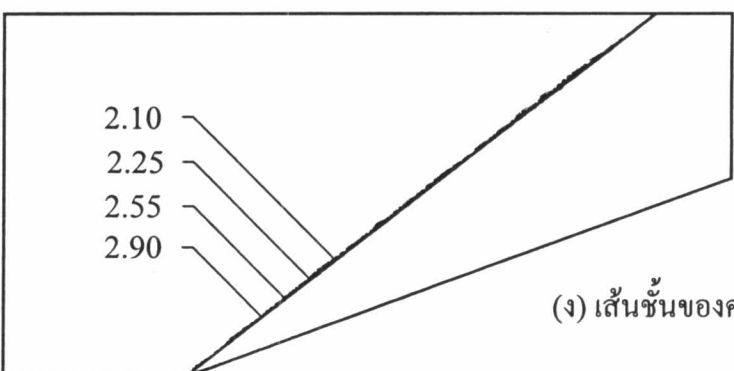
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

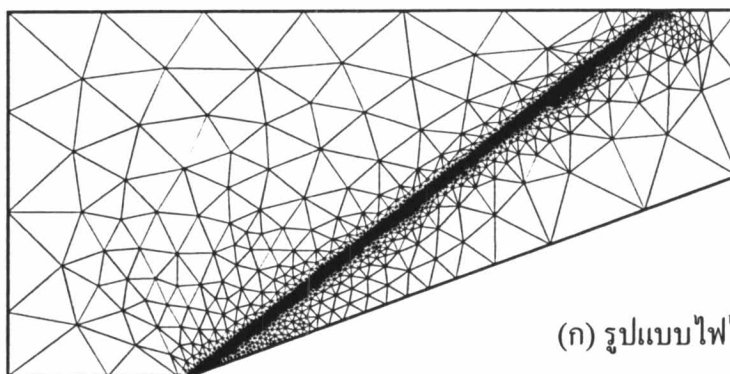


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

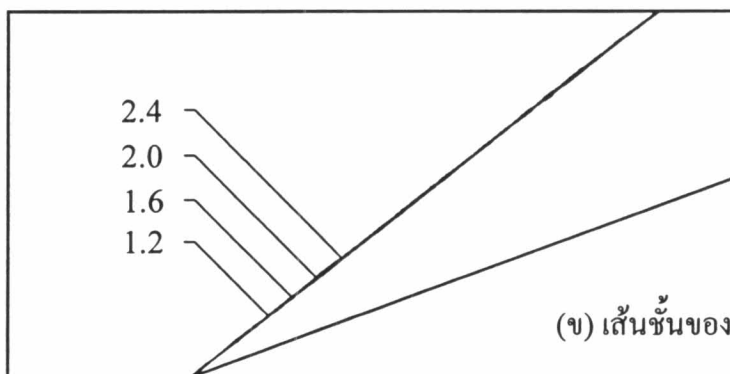


(ง) เส้นชั้นของค่ามอดูลัสเบอร์

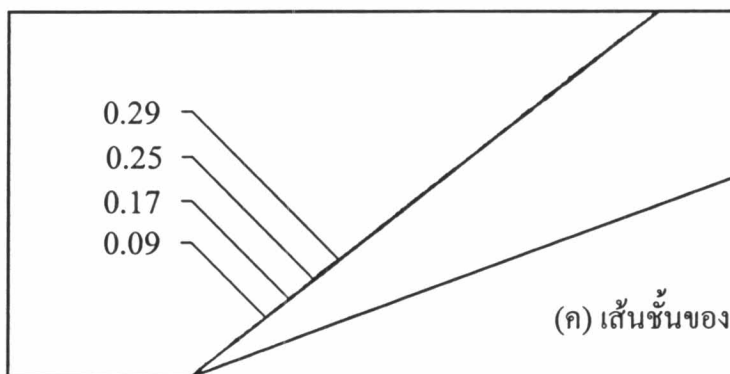
รูปที่ 6.15. การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งที่ 3 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



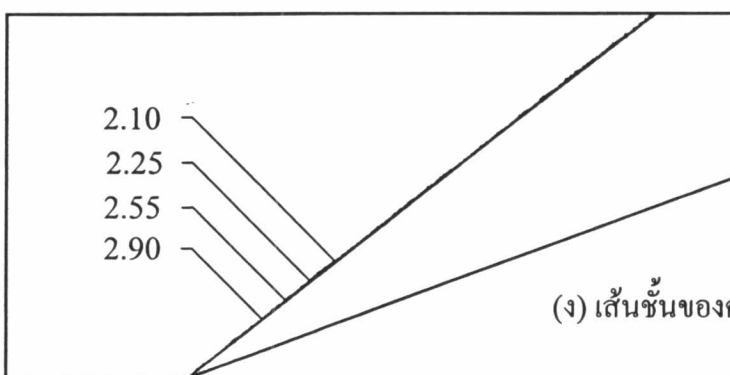
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

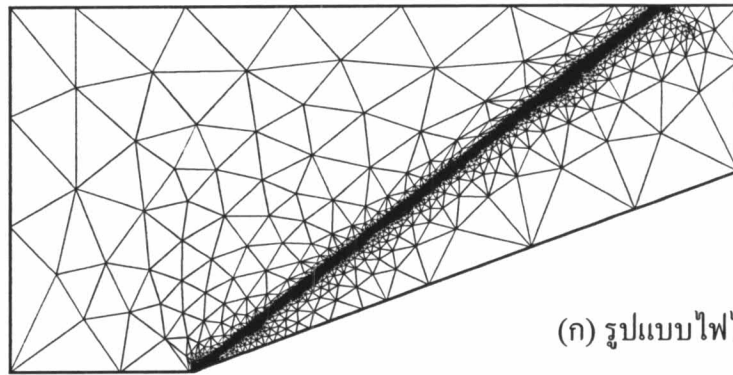


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

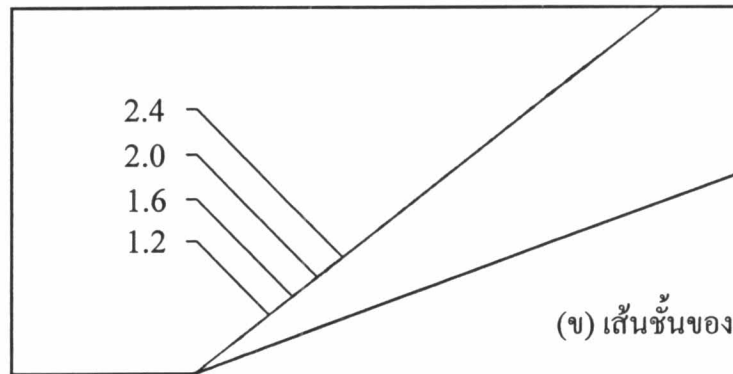


(ง) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์

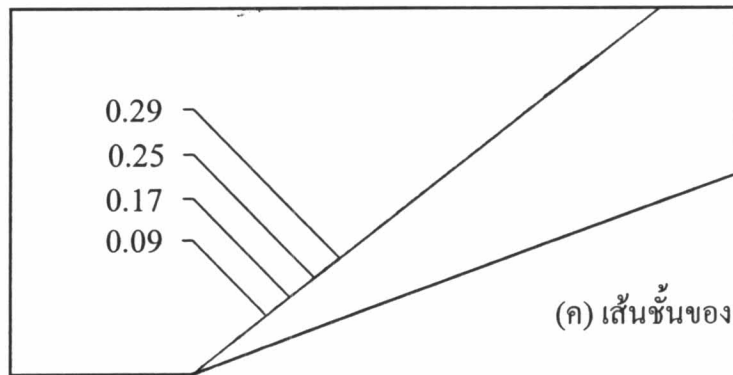
รูปที่ 6.16. การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งที่ 4 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



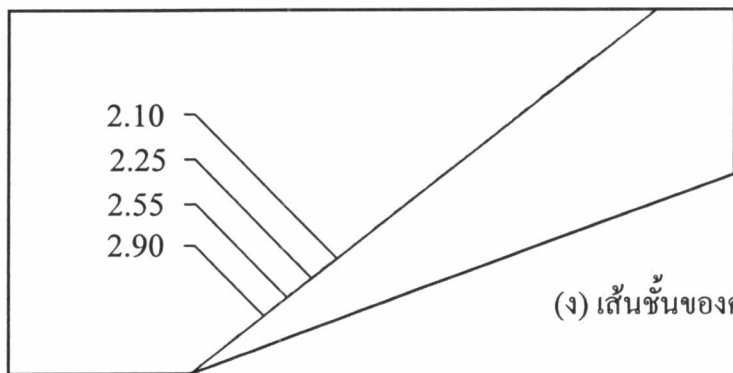
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

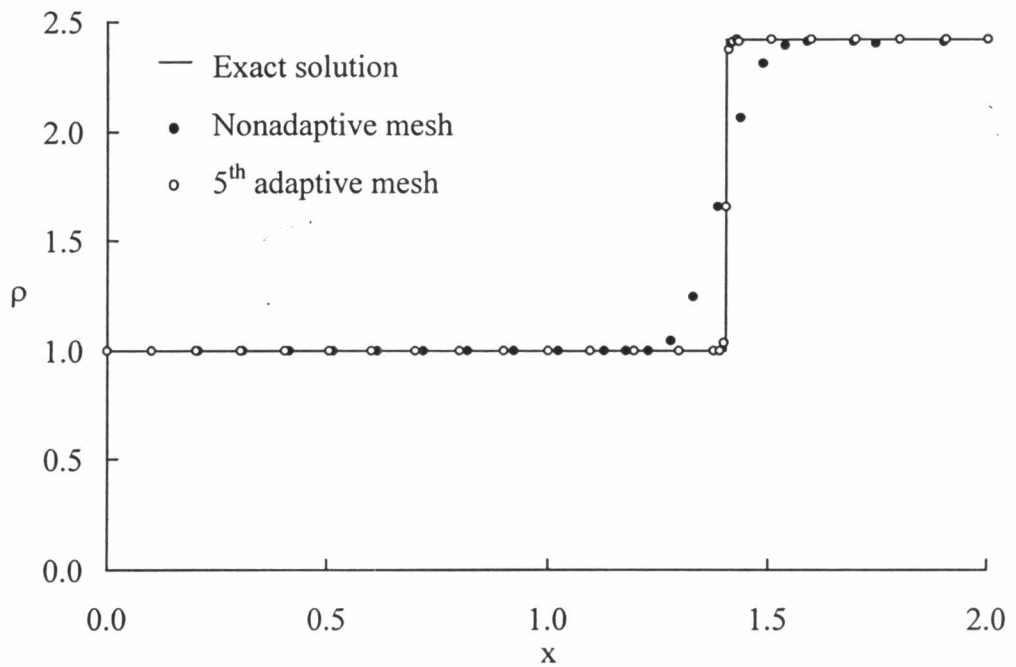


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

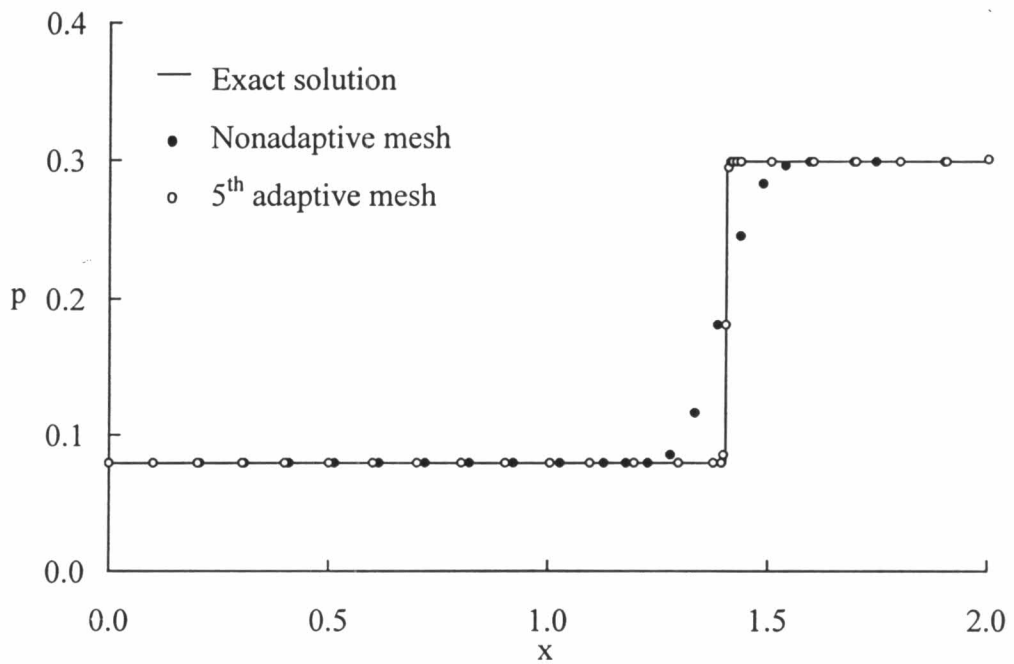


(ง) เส้นชั้นของค่ามอดูลัมเบอร์

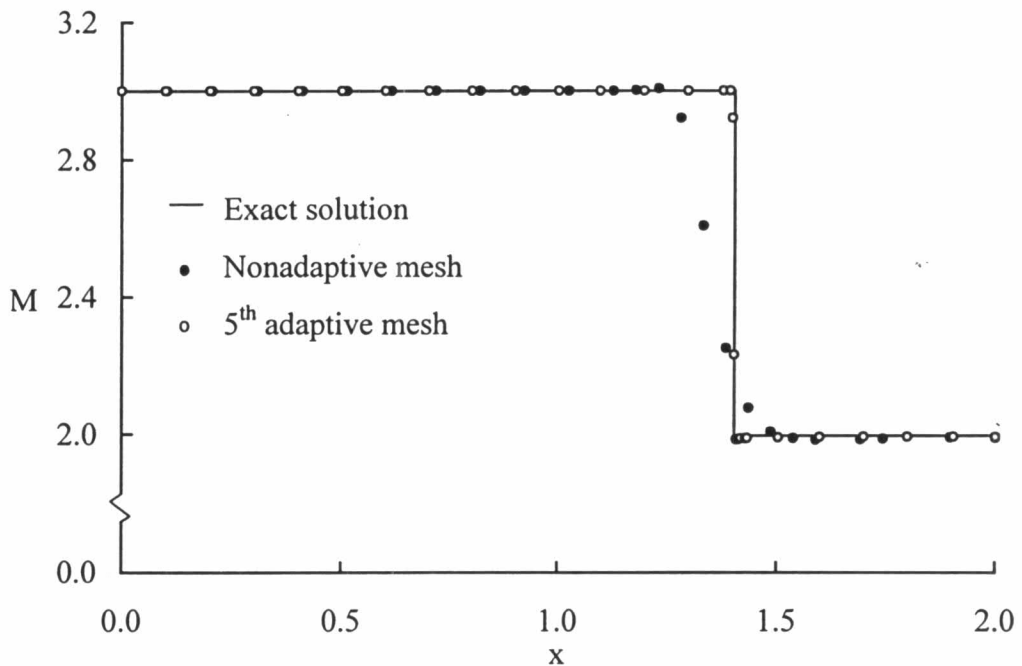
รูปที่ 6.17. การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งที่ 5 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



รูปที่ 6.18 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นเมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับ
ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° ที่ตำแหน่ง $y=0.7$



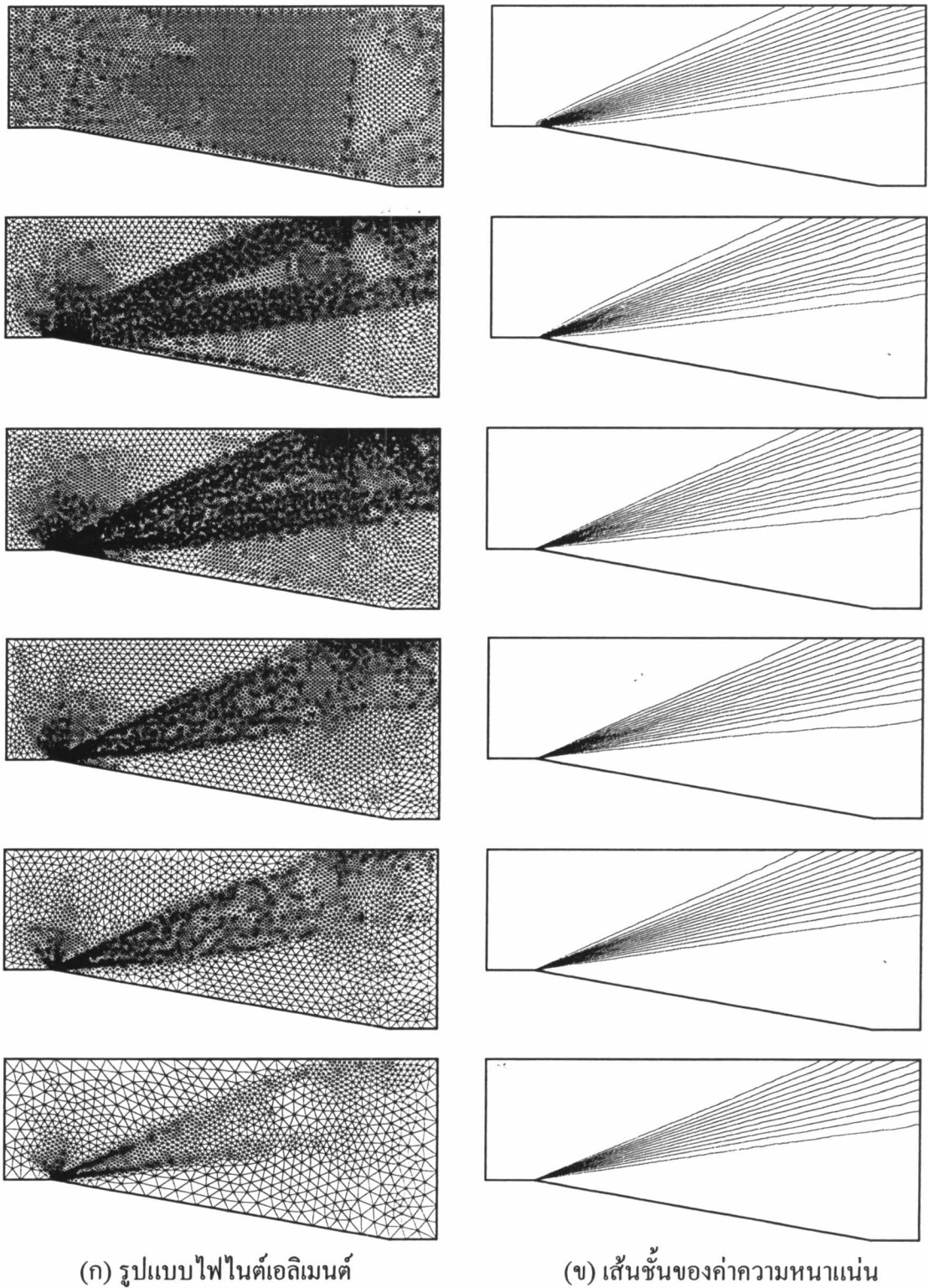
รูปที่ 6.19 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันเมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับ
ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° ที่ตำแหน่ง $y=0.7$



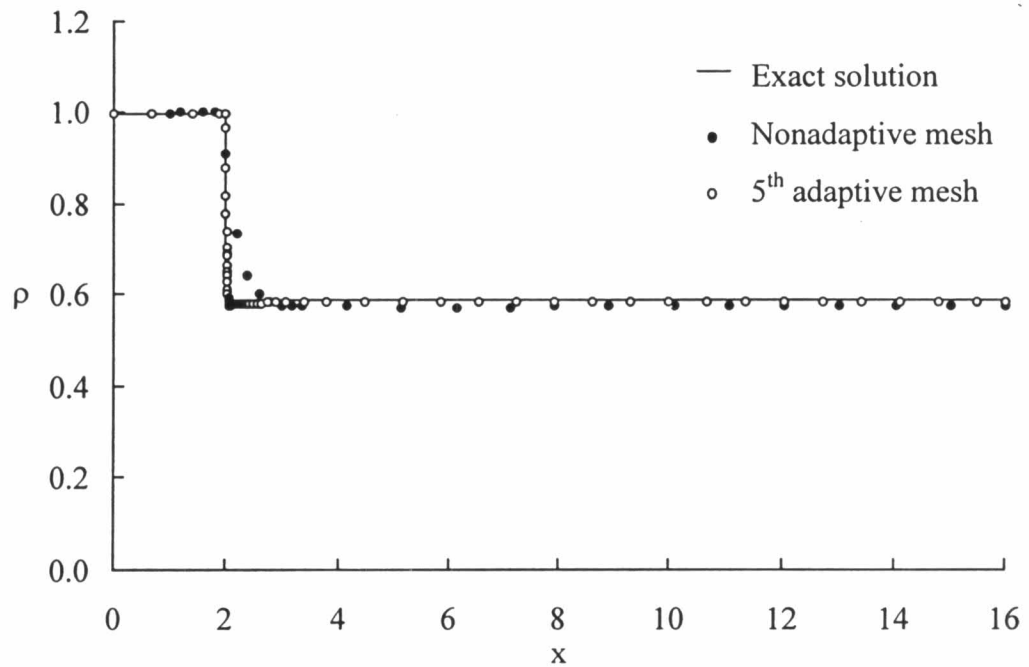
รูปที่ 6.20 การเปรียบเทียบการกระจายของค่ามัคนิมเบอร์เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับ ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° ที่ตำแหน่ง $y=0.7$

6.5.3 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่าผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย

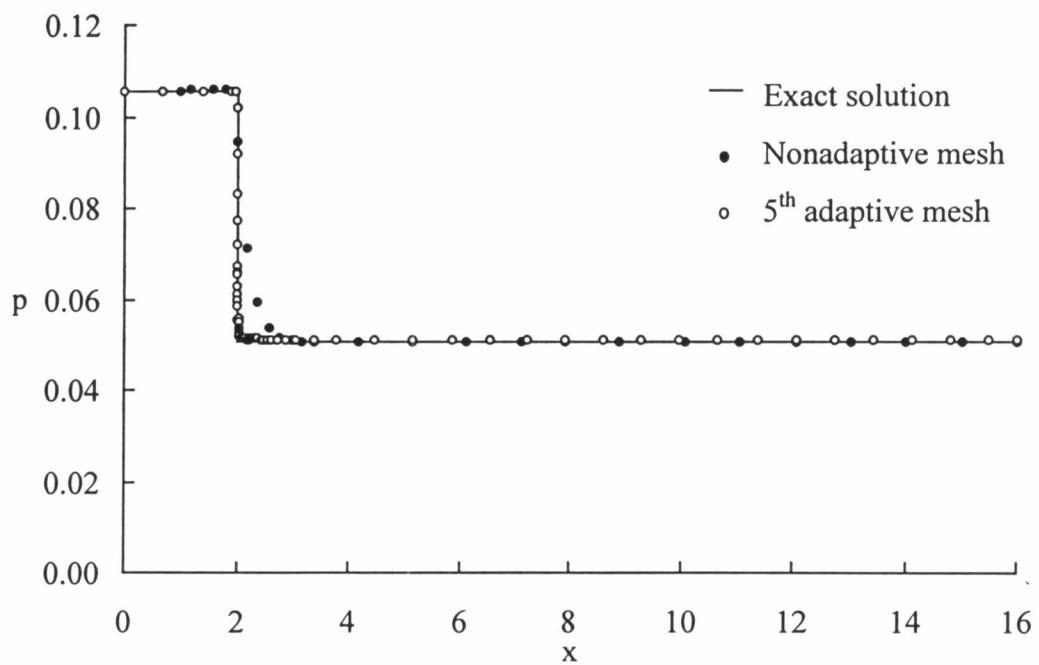
ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่าผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย เมื่อทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ พบว่าที่จุดหักมุม (expansion corner) จะมีเอลิเมนต์เล็กๆ วางตัวอยู่เป็นจำนวนมาก ทั้งนี้เนื่องจากในบริเวณดังกล่าวมีการเปลี่ยนแปลงสภาวะการไหลอย่างฉับพลันทั้งความหนาแน่น ความดัน ความเร็ว ส่วนบริเวณอื่นๆซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงอย่างค่อยเป็นค่อยไปก็มีเอลิเมนต์ขนาดใหญ่วางตัวอยู่ รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่ได้ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ได้แสดงในรูปที่ 6.21 สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ โดยเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นและค่าความดันที่ผนังของโดเมน ดังแสดงในรูปที่ 6.22 และ 6.23 ตามลำดับ พบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเข้าใกล้ผลเฉลยแม่นยำมากขึ้น แสดงให้เห็นว่าเอลิเมนต์ขนาดเล็กที่วางตัวที่จุดหักมุมสามารถจัดการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันที่จุดหักมุมนี้ได้



รูปที่ 6.21 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นสำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่าผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย



รูปที่ 6.22 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นตามผนังของปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์



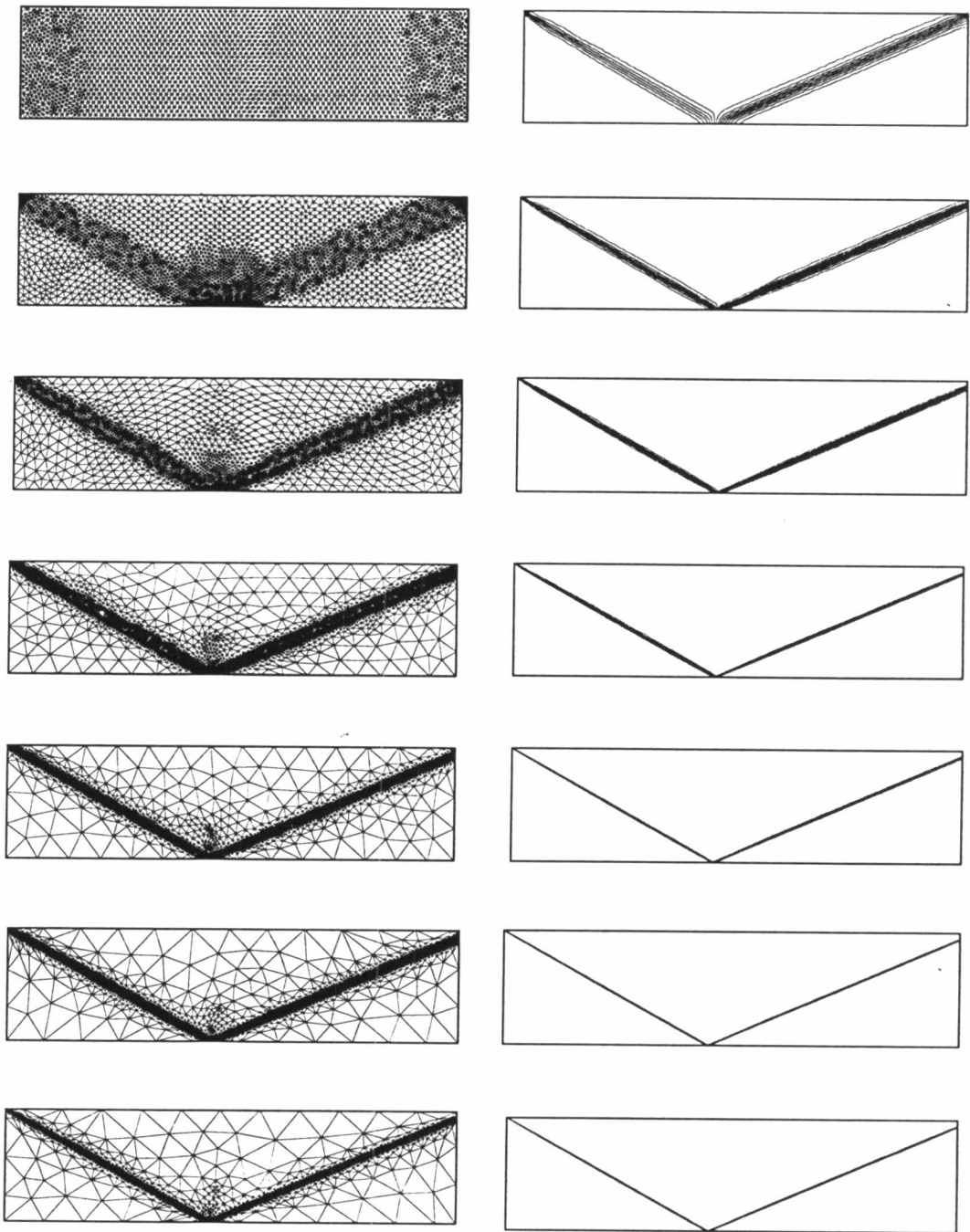
รูปที่ 6.23 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันตามผนังของปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ผ่านพื้นที่หน้าตัดขยายเมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์

6.5.4 ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ

การวิเคราะห์เริ่มด้วยการใช้โปรแกรม FEMESH ทำการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นซึ่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดสม่ำเสมอทั่วทั้งโดเมน จากนั้นใช้โปรแกรม CBSHIFLOW เพื่อคำนวณหาผลลัพธ์ จะพบว่าลักษณะของคลื่นช็อกก่อนกระทบพื้นและหลังจากสะท้อนจากพื้นราบมีความหนาอยู่มาก ทั้งนี้เนื่องจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในบริเวณดังกล่าวมีขนาดใหญ่ ผลลัพธ์จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นได้ถูกนำเข้า โปรแกรม FEMESH เพื่อคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ โดยใช้ค่าความหนาแน่นเป็นบ่งชี้ในการหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่จะเห็นได้ว่า เริ่มมีเอลิเมนต์ขนาดเล็กกวาดตามแนวคลื่นช็อกทั้งสอง แต่คลื่นช็อกที่ได้ยังไม่คมชัดมากนัก จึงทำกระบวนการนี้ซ้ำอีก พบว่าคลื่นช็อกที่ได้มีความคมชัดมากยิ่งขึ้น โดยรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้มีการปรับขนาดครั้งต่างๆ และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ได้แสดงในรูปที่ 6.24

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่เพิ่มขึ้นหลังจากปรับขนาดเอลิเมนต์ ในรูปที่ 6.25 และ 6.26 แสดงการเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น และความดัน ตามลำดับ ของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการปรับขนาดตำแหน่ง $y = 0.25$ ซึ่งจะเห็นว่า ผลลัพธ์ที่มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำมากขึ้น

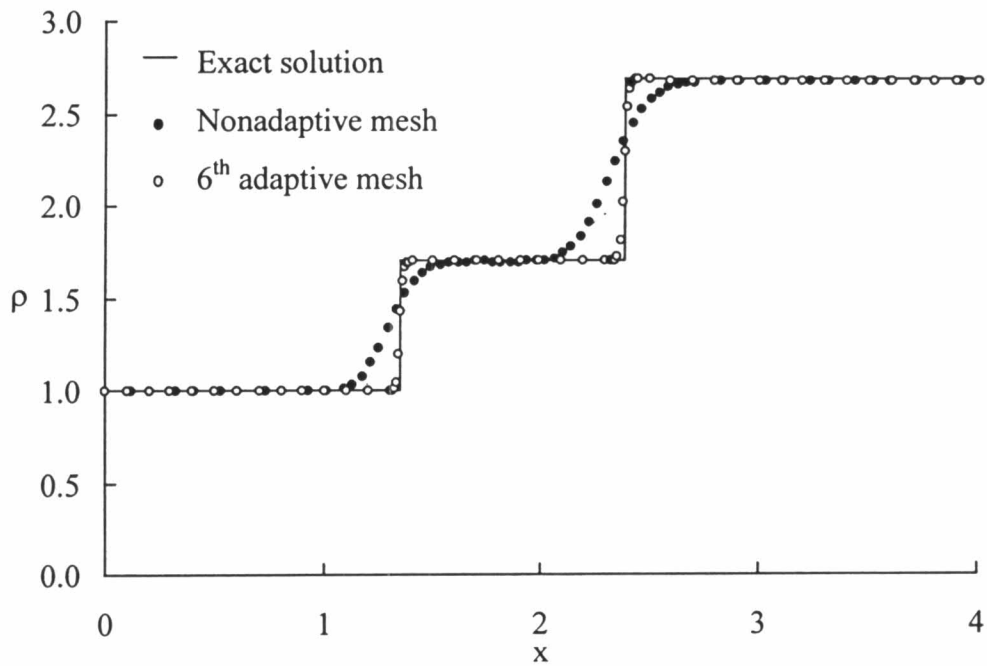
การประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติกับ โปรแกรม CBSHIFLOW เพื่อการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบ ไร้ความหนืด ได้ก่อให้เกิดผลการคำนวณที่มีความแม่นยำมากขึ้น และได้คลื่นช็อกที่บางลงมาก โดยไม่จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กทั้งหมด ทั่วทั้งโดเมนการคำนวณ จากประสิทธิภาพที่ได้แสดงให้เห็นแล้วจากปัญหาการไหลความเร็วสูงพื้นฐานที่ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม ทำให้สามารถนำโปรแกรม CBSHIFLOW ร่วมกับ เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติไปใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงที่มีความซับซ้อนมากขึ้น ดังที่จะได้แสดงในบทต่อไป



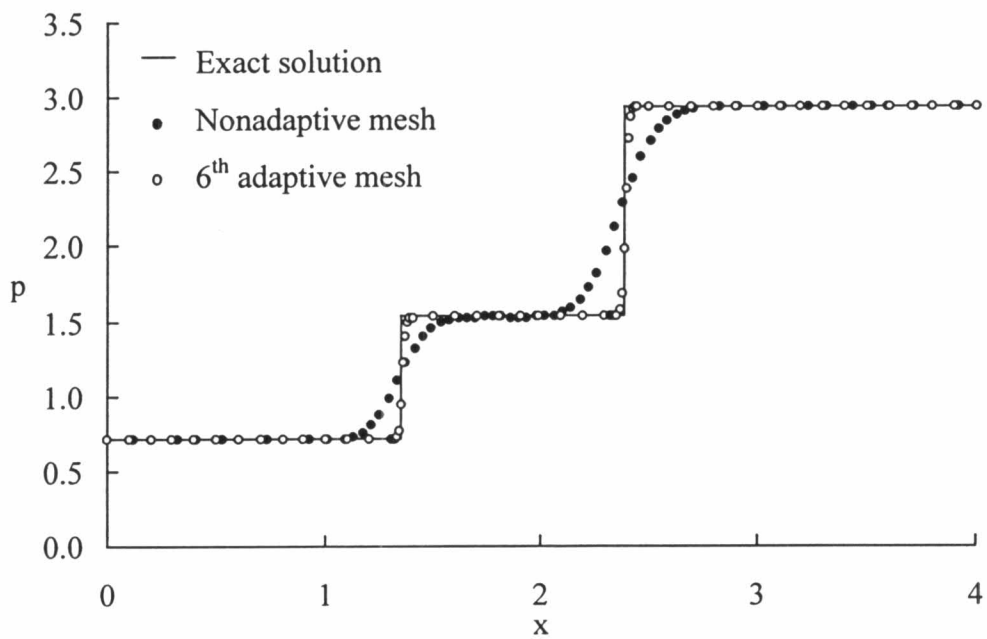
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

รูปที่ 6.24 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นสำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ



รูปที่ 6.25 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นเมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับ ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบที่ตำแหน่ง $y = 0.25$



รูปที่ 6.26 การเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันเมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับ ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบที่ตำแหน่ง $y = 0.25$