ควอซี-ไฮเพอร์ไอเดียลในคราสเนอร์ไฮเพอร์ริง

นางสาวศันสนีย์ เณรเทียน

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2545

ISBN 974-17-1576-5

QUASI-HYPERIDEALS IN KRASNER HYPERRINGS

Miss Sansanee Nenthein

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Mathematics
Department of Mathematics
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2002
ISBN 974-17-1576-5

Thesis Title	Quasi-hyperideals in Krasner hyperrings
By	Miss Sansanee Nenthein
Field of study	Mathematics
Thesis Advisor	Sajee Pianskool, Ph.D.
Thesis Co-advisor	Assoc. Prof. Yupaporn Kemprasit, Ph.D.

Accepted by the Faculty of Science, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master 's Degree

.... Dean of Faculty of Science

(Associate Professor Wanchai Phothiphichitr, Ph.D.)

Thesis Committee

...Amorn Wasanawichit............ Chairman

(Assistant Professor Amorn Wasanawichit, Ph.D.)

...Sajee Pianskool.................... Thesis Advisor

(Sajee Pianskool, Ph.D.)

..Yupaporn Kemprasit.......... Thesis Co-advisor

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit, Ph.D.)

...Phichet Chaoha.......... Member

(Phichet Chaoha, Ph.D.)

ศันสนีย์ เณรเทียน : ควอซี-ไฮเพอร์ไอเดียลในคราสเนอร์ไฮเพอร์ริง
(QUASI-HYPERIDEALS IN KRASNER HYPERRINGS)
อ. ที่ปรึกษา : อ. ดร. ศจี เพียรสกุล, อ. ที่ปรึกษาร่วม : รศ. ดร. ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์ 53 หน้า.
ISBN 974-17-1576-5

เราจะกล่าวว่าริงย่อย Q ของริง A เป็น *ควอซี-ไอดีล* ของ A ถ้า $AQ \cap QA \subseteq Q$ โดยที่ AQ [QA] หมายถึง เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในรูปผลบวกจำกัด $\sum a_i q_i$ [$\sum q_i a_i$] เมื่อ $a_i \in A$ และ $q_i \in Q$ ควอซี-ไอดีลเป็นนัยทั่วไปของไอดีลซ้ายและไอดีลขวา ได้มีการศึกษาควอซี-ไอดีลในริงกันมาเป็นเวลานานมากแล้ว อีกทั้งได้มีทฤษฎีบทที่มีนัยสำคัญและเกี่ยวข้องกับควอซี-ไอดีลในริงเกิดขึ้นจำนวนมากเช่นกัน

การดำเนินการไฮเพอร์ บนเซตไม่ว่าง H คือฟังก์ชัน $\circ : H \times H \to P^*(H)$ โดยที่ $P(H)$ หมายถึงเซตกำลังของ H และ $P^*(H)$ หมายถึง $P(H) \setminus \{\varnothing\}$ ในกรณีนี้ สำหรับเซตย่อยไม่ว่าง X, Y ของ H ให้ $X \circ Y$ แทนส่วนรวมของเซตในรูปแบบ $x \circ y$ ทั้งหมด โดย $x \in X$ และ $y \in Y$ *ไฮเพอร์กรุป* คือระบบ $(H, \circ)$ ซึ่งประกอบด้วยเซตไม่ว่าง H และการดำเนินการไฮเพอร์ $\circ$ บน H ซึ่ง $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ และ $x \circ H = H = H \circ x$ สำหรับ $x, y, z \in H$ ใดๆ เราจะกล่าวว่าไฮเพอร์กรุป $(H, \circ)$ เป็น *ไฮเพอร์กรุปแบบบัญญัติ* ถ้า $(H, \circ)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

(i) $x \circ y = y \circ x$ สำหรับ $x, y \in H$ ใดๆ

(ii) มีสมาชิก $e \in H$ ซึ่ง $e \circ x = x \circ e = \{x\}$ สำหรับทุก $x \in H$ และเราเรียก e ว่า *เอกลักษณ์สเกลาร์*ของ $(H, \circ)$

(iii) สำหรับแต่ละ $x \in H$ จะมีสมาชิก x^{-1} เพียงตัวเดียวใน H ที่ทำให้ $e \in x \circ x^{-1}$

(iv) สำหรับ $x, y, z \in H$ ใดๆ ถ้า $x \in y \circ z$ แล้ว $y \in x \circ z^{-1}$

คราสเนอร์ไฮเพอร์ริง หมายถึง ระบบ $(A, +, \cdot)$ ซึ่ง $(A, +)$ เป็นไฮเพอร์กรุปแบบบัญญัติ $(A, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีศูนย์ 0 โดย 0 เป็นเอกลักษณ์สเกลาร์ของ $(A, +)$ และการดำเนินการ $\cdot$ มีการแจกแจงบนการดำเนินการไฮเพอร์ $+$ สำหรับบทนิยามของ ไฮเพอร์ริงย่อย ไฮเพอร์ไอดีลซ้าย ไฮเพอร์ไอดีลขวา และควอซี-ไฮเพอร์ไอดีลในคราสเนอร์ไฮเพอร์ริงนั้นจะเป็นเช่นเดียวกับในริง เราได้ด้วยว่า ควอซี-ไฮเพอร์ไอดีลเป็นนัยทั่วไปของไฮเพอร์ไอดีลซ้ายและไฮเพอร์ไอดีลขวา โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ควอซี-ไฮเพอร์ไอดีลในคราสเนอร์ไฮเพอร์ริงเป็นนัยทั่วไปของควอซี-ไอดีลในริง

ในการวิจัยนี้ เราให้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับควอซี-ไฮเพอร์ไอดีลในคราสเนอร์ไฮเพอร์ริงต่างๆ ซึ่งทำให้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับควอซี-ไอดีลในริงที่รู้จักกันดีหลายทฤษฎีบทกลายเป็นกรณีเฉพาะของทฤษฎีบทของเรา

ภาควิชา **คณิตศาสตร์** ลายมือชื่อนิสิต ศันสนีย์ เณรเทียน

สาขาวิชา **คณิตศาสตร์** ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ศจี เพียรสกุล

ปีการศึกษา **2545** ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์

4372425323 : MAJOR MATHEMATICS
KEY WORDS : KRASNER HYPERRING / QUASI-HYPERIDEAL

SANSANEE NENTHEIN : QUASI-HYPERIDEALS IN KRASNER HYPERRINGS.
THESIS ADVISOR : SAJEE PIANSKOOL Ph.D., THESIS COADVISOR : ASSO. PROF. YUPAPORN KEMPRASIT Ph.D., 53 pp. ISBN 974-17-1576-5

A subring Q of a ring A is called a *quasi-ideal* of A if $AQ \cap QA \subseteq Q$ where AQ [QA] denotes the set of all finite sums of the form $\sum a_i q_i$ [$\sum q_i a_i$] where $a_i \in A$ and $q_i \in Q$. Quasi-ideals are a generalization of left ideals and right ideals. Quasi-ideals in rings have long been studied and a lot of significant theorems relating to quasi-ideals in rings have been provided.

A *hyperoperation* on a nonempty set H is a function $\circ : H \times H \to P^*(H)$ where $P(H)$ is the power set of H and $P^*(H) = P(H) \setminus \{\varnothing\}$. In this case, for nonempty subsets X, Y of H, let $X \circ Y$ denote the union of all sets $x \circ y$ where x and y run over X and Y, respectively. A *hypergroup* is a system $(H, \circ)$ consisting of a nonempty set H and a hyperoperation $\circ$ on H such that $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ and $x \circ H = H = H \circ x$ for all $x, y, z \in H$. A *canonical hypergroup* is a hypergroup $(H, \circ)$ satisfying the following properties :

(i) $x \circ y = y \circ x$ for all $x, y \in H$,

(ii) there exists an element $e \in H$ such that $x \circ e = e \circ x = \{x\}$ for all $x \in H$, and e is called the *scalar identity* of $(H, \circ)$,

(iii) for every $x \in H$, there exists a unique element $x^{-1} \in H$ such that $e \in x \circ x^{-1}$,

(iv) for $x, y, z \in H$, $x \in y \circ z$ implies $y \in x \circ z^{-1}$.

A *Krasner hyperring* is a system $(A, +, \cdot)$ such that $(A, +)$ is a canonical hypergroup, $(A, \cdot)$ is a semigroup with zero 0 where 0 is the scalar identity of $(A, +)$ and $\cdot$ is distributive over $+$. Subhyperrings, left hyperideals, right hyperideals and quasi-hyperideals in Krasner hyperrings are defined accordingly as in rings. We also have that quasi-hyperideals generalize left hyperideals and right hyperideals. Especially, quasi-hyperideals in Krasner hyperrings generalize quasi-ideals in rings.

In this research, many well-known theorems on quasi-ideals in rings are generalized to theorems on quasi-hyperideals in Krasner hyperrings. Then those well-known facts become our special cases.

Department **Mathematics**	Student's signature....Sansanee Nenthein..........
Field of study **Mathematics**	Advisor's signature....Sajee Pianskool..........
Academic year **2002**	Co-advisor's signature Yupaporn Kemprasit

ACKNOWLEDGMENTS

I am very grateful to Assoc. Prof. Dr. Yupaporn Kemprasit who helpfully induced me to an interesting area of research, algebraic hyperstructure. I am greatly indebted to both my advisor, Dr. Sajee Pianskool, and my co-advisor, Assoc. Prof. Dr. Yupaporn Kemprasit, for their untiring advice in preparing and writing this thesis. Moreover, I would like to thank Assist. Prof. Dr. Amorn Wasanawichit and Dr. Phichet Chaoha, the chairman and member of the committee of this thesis. Besides, I feel thankful to all of my teachers who have taught me for my knowledge and skills.

In particular, I would like to express my appreciation to my beloved parents for their encouragement throughout my study.

CONTENTS

page

ABSTRACT IN THAI iv
ABSTRACT IN ENGLISH v
ACKNOWLEDGMENTS vi
CONTENTS vii
CHAPTER
I INTRODUCTION AND PRELIMINARIES 1
II GENERAL PROPERTIES AND EXAMPLES 17
III HYPERRINGS HAVING THE INTERSECTION PROPERTY
OF QUASI-HYPERIDEALS 36
IV HYPERRINGS WHOSE BI-HYPERIDEALS AND
QUASI-HYPERIDEALS COINCIDE 42
V MINIMAL QUASI-HYPERIDEALS 46
REFERENCES 51
VITA 53