

บทที่ 4

จลศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทสามมิติ

หุ่นยนต์โคบอทสามมิติถูกควบคุมการทำงานโดยมนุษย์เคลื่อนที่ปลายแขนกล การเคลื่อนที่ดังกล่าวสามารถอธิบายได้ด้วยจลศาสตร์ (Kinematics) ของการเคลื่อนที่ทั่วไป ประกอบไปด้วย ตำแหน่ง (Position, \bar{R}) ความเร็ว (Velocity, $d\bar{R}/dt$) และความเร่ง (Acceleration, $d^2\bar{R}/dt^2$) แต่เนื่องจากข้อต่อของหุ่นยนต์โคบอทถูกต่อดังด้วยอุปกรณ์ที่สามารถปรับอัตราส่วนความเร็วระหว่างข้อต่อ ทำให้ในส่วนของความเร็วของจลศาสตร์ที่ใช้ในหุ่นยนต์โคบอท จะใช้เพียงทิศทางของการเคลื่อนที่หรือก็คือเวกเตอร์สัมผัสการเคลื่อนที่ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย (unit tangent vector, $\hat{T} = d\bar{R}/ds$) ซึ่งเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเวกเตอร์การเคลื่อนที่เทียบกับระยะทาง มาใช้หาอัตราส่วนความเร็วเพื่อนำไปควบคุมชุดซีวี่ที่ทั้งสามชุด ในงานวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาโทนี้ จะใช้เพียง ตำแหน่ง และเวกเตอร์สัมผัสการเคลื่อนที่ขนาดหนึ่งหน่วยมาใช้ในการทดลองเบื้องต้น ในความเป็นจริงในการควบคุมที่ให้ผลดี ต้องมีสมการอนุพันธ์อันดับสองของเวกเตอร์การเคลื่อนที่ มาใช้ในการควบคุมด้วย

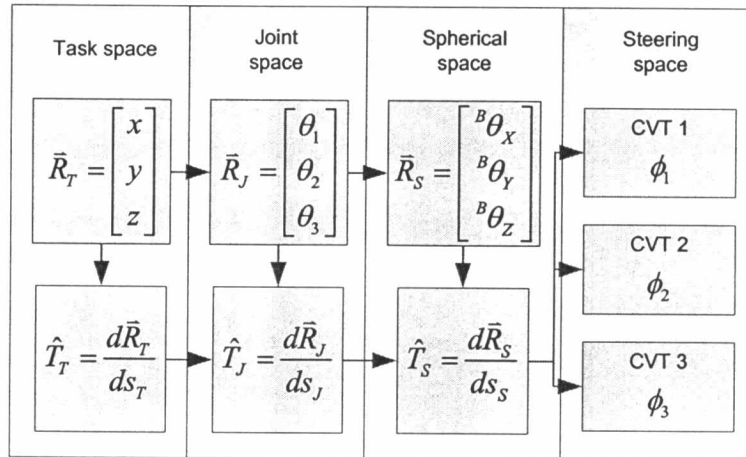
ในบทที่แล้วได้กล่าวถึงการออกแบบระบบส่งกำลังต่างๆ ของหุ่นยนต์โคบอทสามมิติ ตั้งแต่ปลายแขนกล (Task space) ข้อต่อทั้งสามของชุดกลไกแขนกล (Joint space) การเคลื่อนที่ของทรงกลม (Spherical space) มีสามองศาอิสระที่อยู่บนอยู่บนเฟรมฐานของหุ่นยนต์โคบอท¹ และสุดท้ายที่ชุดซีวี่ที่ทั้งสาม (Steering space) ดังนั้นจลศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทสามมิติจะถูกแบ่งเป็นจลศาสตร์บนสเปซต่างๆได้ 4 สเปซ ซึ่งสเปซทั้ง 4 จะมีจลศาสตร์ที่สัมพันธ์กัน สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.1

สเปซพื้นที่การใช้งาน (Task space) หรือสเปซของปลายแขนกล จลศาสตร์เบื้องต้นที่สำคัญประกอบด้วย ตำแหน่งปลายแขนกล ($\bar{R}_T = [x \ y \ z]^T$) ที่อ้างอิงบนเฟรมฐาน และเวกเตอร์สัมผัสการเคลื่อนที่ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยของสเปซพื้นที่การใช้งาน (\hat{T}_T) บนสเปซนี้เวกเตอร์สัมผัสจะเป็นเวกเตอร์คงที่ เนื่องจากการทดลองการทำงานโดยให้ปลายแขนกลเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง

จลศาสตร์เบื้องต้นของสเปซข้อต่อแขนกล (Joint space) ประกอบด้วย ตำแหน่งข้อต่อของแขนกล ($\bar{R}_J = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$) ข้อต่อแขนกลแต่ละข้อจะถูกกำหนดตามหัวข้อ 4.1 และ

¹ เหตุผลที่ให้สเปซทรงกลมอ้างอิงอยู่บนเฟรมฐานเนื่องจากจุดศูนย์กลางของเฟรมฐานและจุดศูนย์กลางของทรงกลมเป็นตำแหน่งเดียวกัน

เวกเตอร์สัมพัทธ์การเคลื่อนที่ของข้อต่อแขนกลที่มีขนาดหนึ่งหน่วย ($\hat{T}_J = d\bar{R}_J/ds_J$) สามารถหาได้จากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเวกเตอร์การเคลื่อนที่เทียบกับระยะทางของสเปซข้อต่อแขนกล



รูปที่ 4.1 ลักษณะจลศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทสามมิติ

สเปซทรงกลม (Spherical space) จะมีจลศาสตร์เบื้องต้นลักษณะคล้ายกับสเปซข้อต่อแขนกล นั่นก็คือ ตำแหน่งของทรงกลม ($\bar{R}_S = [{}^B\theta_x \quad {}^B\theta_y \quad {}^B\theta_z]$) ที่อ้างอิงการเคลื่อนที่แบบหมุนบนเฟรมฐาน และเวกเตอร์สัมพัทธ์การเคลื่อนที่ของทรงกลมที่มีขนาดหนึ่งหน่วย ($\hat{T}_S = d\bar{R}_S/ds_S$) สามารถหาได้จากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเวกเตอร์การเคลื่อนที่เทียบกับระยะทางของสเปซทรงกลม

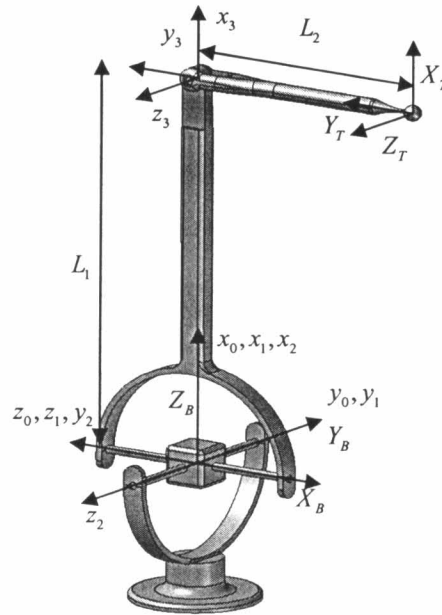
สเปซที่สี่ สเปซการปรับอัตราระหว่างข้อต่อ (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) จลศาสตร์ของสเปซนี้จะเป็นการหาความสัมพันธ์ของอัตราส่วนความเร็วเชิงมุมของทรงกลม กับมุมแกนล้อของแต่ละชุดซีวีที

ในบทนี้จะแสดงจลศาสตร์เบื้องต้นที่เพียงพอต่อการทดลองหุ่นยนต์โคบอท (Cobot kinematics) สามมิติประกอบด้วย จลศาสตร์แบบไปข้างหน้า, จลศาสตร์แบบย้อนกลับ, เมตริกซ์จาโคเบียน, จลศาสตร์แบบหุ่นยนต์โคบอทในสเปซการเคลื่อนที่ของทรงกลม, จลศาสตร์ของชุดซีวีทีที่เชิงเส้นที่ต่อกับทรงกลม

4.1 จลศาสตร์แบบไปข้างหน้า (Forward kinematics)

การหาตำแหน่งของปลายแขนกลของหุ่นยนต์โคบอทสามมิติ จะอาศัยอุปกรณ์เอ็นโคเดเดอร์ที่ใช้สำหรับวัดตำแหน่งแบบเชิงมุม โดยจะวัดตำแหน่งจากแต่ละข้อต่อของกลไก แล้วจึงนำไปแทนในสมการจลศาสตร์แบบไปข้างหน้า เพื่อให้ได้ตำแหน่งที่ปลายแขนกล

จลศาสตร์แบบไปข้างหน้าเราจะหาโดยอาศัยทฤษฎี Denavit-Hartenberg notation [22] ดังนั้นจากในบทที่ผ่านมาที่ได้กล่าวถึงรายละเอียดกลไกของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ ทำให้เราสามารถที่กำหนดเฟรมให้กับหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติได้ดังแสดงในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 การกำหนดเฟรมให้กับหุ่นยนต์โคบอลทสามมิติ

เมื่อทำการกำหนดเฟรมต่างๆ ให้กับหุ่นยนต์โคบอลทสามมิติแล้ว จากนั้นจะสามารถกำหนดตัวแปรของข้อต่อ (Link parameters) ตามการกำหนดเฟรมๆ ได้ดังตารางต่อไปนี้

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	0	θ_2
3	0	L_1	0	θ_3

ตารางที่ 4.1 ตัวแปรของข้อต่อของหุ่นยนต์โคบอลทสามมิติ

เมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ (Transformations matrix) แบบทั่วไป ของเฟรม i เทียบกับเฟรม $i-1$ สามารถเขียนได้เป็น

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

เมื่อ $c\theta_i = \cos\theta_i$, $s\theta_i = \sin\theta_i$, $c\alpha_{i-1} = \cos\alpha_{i-1}$ และ $s\alpha_{i-1} = \sin\alpha_{i-1}$

จากนั้นจะสามารถหาเมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์โคบอทสามมิติได้ โดยนำตัวแปรของข้อต่อที่ได้กำหนดขึ้นในตารางที่ 4.1 ไปแทนในเมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่แบบทั่วไปสมการ (4.1) จะได้

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_1 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

เราสามารถหาเมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ของเฟรม 3 เทียบกับเฟรม 0 ได้จากสมการ ${}^0_3\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T}{}^1_2\mathbf{T}{}^2_3\mathbf{T}$ ซึ่งหาตามลำดับได้ดังนี้

$${}^0_2\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T}{}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & 0 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$${}^0_3\mathbf{T} = {}^0_2\mathbf{T}{}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - c_1s_2s_3 & -c_1c_2s_3 - c_1s_2c_3 & s_1 & L_1c_1c_2 \\ s_1c_2c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1c_2s_3 - s_1s_2c_3 & -c_1 & L_1s_1c_2 \\ s_2c_3 + c_2s_3 & -s_2s_3 + c_2c_3 & 0 & L_1s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$${}^0_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1(c_2c_3 - s_2s_3) & -c_1(c_2s_3 + s_2c_3) & s_1 & L_1c_1c_2 \\ s_1(c_2c_3 - s_2s_3) & -s_1(c_2s_3 + s_2c_3) & -c_1 & L_1s_1c_2 \\ s_2c_3 + c_2s_3 & -s_2s_3 + c_2c_3 & 0 & L_1s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

เมื่อ $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$, $i=1,2,3$

จัดรูปสมการ (4.7) ใหม่ได้ดังนี้

$${}^0_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & L_1c_1c_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & L_1s_1c_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & L_1s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

เมื่อ $c_{23} = c_2c_3 - s_2s_3$, $s_{23} = c_2s_3 + s_2c_3$

ในที่สุดแล้วเราต้องการหาคือ เมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ของทูลเฟรม (Tool frame, $\{T\}$) เทียบกับเฟรมฐาน (Base frame, $\{B\}$) ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ ${}^B_T\mathbf{T} = {}^B_0\mathbf{T} {}^0_3\mathbf{T} {}^3_T\mathbf{T}$ โดยที่ ${}^B_0\mathbf{T}$, ${}^3_T\mathbf{T}$ จะหาได้จากการกำหนดเฟรมในรูปที่ 4.2 สามารถแสดงได้ดังนี้

$${}^3_T\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$${}^B_0\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

จากสมการ (4.9) และ (4.10) สามารถที่จะหา ${}^B_T\mathbf{T}$ ได้ดังนี้

$${}^B_T\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & L_1 c_1 c_2 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & L_1 s_1 c_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & L_1 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$${}^B_T\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -s_{23} & -c_{23} & 0 & -L_1 s_2 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & L_1 s_1 c_2 \\ c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & L_1 c_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

เพราะฉะนั้นจะได้

$${}^B_T\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -s_{23} & -c_{23} & 0 & L_2 c_{23} - L_1 s_2 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & L_2 s_1 s_{23} + L_1 s_1 c_2 \\ c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & L_2 c_1 s_{23} + L_1 c_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

สมการ (4.13) คือ เมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ของทูลเฟรมเทียบกับเฟรมฐาน ทำให้ได้จลศาสตร์แบบไปข้างหน้า (Forward kinematics) ดังนี้

$$\bar{\mathbf{R}}_T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) - L_1 \sin \theta_2 \\ L_2 \sin \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ L_2 \cos \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

เมื่อ $\bar{\mathbf{R}}_T$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งปลายแขนของหุ่นยนต์เทียบกับเฟรมฐาน

x, y, z คือ ตำแหน่งที่ปลายแขนของหุ่นยนต์เทียบกับเฟรมฐาน

L_1, L_2 คือ คือขนาดความยาวของก้านที่ 1 (Link 1) และก้านที่ 2 (Link 2) ตามลำดับ

θ_1, θ_2 คือ มุมของข้อต่อที่มีลักษณะแบบข้อต่อทรงกลม (roll and pitch)

θ_3 คือ มุมของข้อต่อที่มีลักษณะแบบข้อศอก (elbow joint)

4.2 จลศาสตร์แบบย้อนกลับ (Inverse kinematics)

จากลักษณะการทำงานของหุ่นยนต์โคบอทสามมิติที่จะต้องถูกนำไปใช้งานร่วมกับมนุษย์ โดยให้มนุษย์ทำการขยับปลายแขนกล ดังนั้นจำเป็นต้องเปลี่ยนตำแหน่งปลายแขนกลมาเป็นตำแหน่งข้อต่อแขนกล ทำให้ในการควบคุมหุ่นยนต์โคบอทจำเป็นต้องใช้สมการจลศาสตร์แบบย้อนกลับ (Inverse kinematics)

สมการจลศาสตร์แบบย้อนกลับ (Inverse kinematics) ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติ จะสามารถหาได้โดยการแก้สมการจลศาสตร์แบบไปข้างหน้าในสมการที่ (4.14) ในอันดับแรก จะสามารถหา θ_1 โดยการนำ y และ z มาหารกันจะได้

$$\frac{y}{z} = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \tan \theta_1 \quad (4.15)$$

ซึ่งก็คือ

$$\theta_1 = A \tan 2(y, z) \quad (4.16)$$

นำสมการ x และ y มาจัดรูปใหม่จะได้

$$L_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) = x + L_1 \sin \theta_2 \quad (4.17)$$

$$L_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) = \frac{y}{\sin \theta_1} - L_1 \cos \theta_2 \quad (4.18)$$

จากสมการ (4.15) จะได้

$$\sin \theta_1 = \frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}} \quad (4.19)$$

จากนั้นนำสมการ (4.19) ไปแทนในสมการ (4.18)

$$L_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) = \sqrt{z^2 + y^2} - L_1 \cos \theta_2 \quad (4.20)$$

นำสมการ (4.17) และสมการ (4.20) มายกกำลังสองแล้วนำมาบวกกันจะได้

$$L_2^2 = (x + L_1 \sin \theta_2)^2 + (\sqrt{z^2 + y^2} - L_1 \cos \theta_2)^2 \quad (4.21)$$

ซึ่ง

$$(x + L_1 \sin \theta_2)^2 = x^2 + 2xL_1 \sin \theta_2 + L_1^2 \sin^2 \theta_2 \quad (4.22)$$

$$(\sqrt{z^2 + y^2} - L_1 \cos \theta_2)^2 = (z^2 + y^2) - 2L_1 \sqrt{z^2 + y^2} \cos \theta_2 + L_1^2 \cos^2 \theta_2 \quad (4.23)$$

ทำให้สมการ (4.21) สามารถจัดใหม่ได้ดังนี้

$$L_2^2 - L_1^2 = (z^2 + y^2 + x^2) + 2L_1 x \sin \theta_2 - 2L_1 \sqrt{z^2 + y^2} \cos \theta_2 \quad (4.24)$$

นำมาจัดสมการใหม่จะได้

$$\sqrt{y^2 + z^2} \cos \theta_2 - x \sin \theta_2 = \frac{1}{2L_1} (x^2 + y^2 + z^2 + L_1^2 - L_2^2) \quad (4.25)$$

นำสมการ (4.25) มาเขียนใหม่ให้ง่ายดังนี้

$$a \cos \theta_2 + b \sin \theta_2 = c \quad (4.26)$$

เมื่อ $a = \sqrt{y^2 + z^2}$, $b = -x$, $c = \frac{1}{2L_1} (x^2 + y^2 + z^2 + L_1^2 - L_2^2)$

เราสามารถแปลง $\cos \theta_2$, $\sin \theta_2$ ให้อยู่ในรูปของ $\tan \frac{\theta_2}{2}$ ได้จาก

$$u = \tan \frac{\theta}{2} \quad (4.27)$$

$$\cos \theta = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \sin \theta = \frac{2u}{1 + u^2} \quad (4.28)$$

จะได้

$$a(1-u^2)+b(2u)=c(1+u^2) \quad (4.29)$$

$$(a-au^2)+(2bu)=(c+cu^2) \quad (4.30)$$

$$a=c+cu^2+au^2-2bu \quad (4.31)$$

$$(a+c)u^2-2bu+(c-a)=0 \quad (4.32)$$

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - (a+c)(c-a)}}{(a+c)} \quad (4.33)$$

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - (c^2 - a^2)}}{(a+c)} \quad (4.34)$$

$$\tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a+c} \quad (4.35)$$

ดังนั้นจะได้

$$\theta_2 = 2 \cdot A \tan 2 \left(b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, a+c \right) \quad (4.36)$$

เมื่อ $a = \sqrt{y^2 + z^2}$, $b = -x$, $c = \frac{1}{2L_1}(x^2 + y^2 + z^2 + L_1^2 - L_2^2)$

จากสมการ (4.17) และสมการ (4.20) สามารถที่จะนำมาเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$x = L_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) - L_1 \sin \theta_2 \quad (4.37)$$

$$\sqrt{z^2 + y^2} = L_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_1 \cos \theta_2 \quad (4.38)$$

นำสมการ (4.37) และสมการ (4.38) มายกกำลังสองแล้วนำมาบวกกันจะได้

$$x^2 + y^2 + z^2 = (L_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) - L_1 \sin \theta_2)^2 + (L_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_1 \cos \theta_2)^2 \quad (4.39)$$

$$(L_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) - L_1 \sin \theta_2)^2 = L_1^2 \sin^2 \theta_2 - 2L_1 L_2 \sin \theta_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) + L_2^2 \cos^2(\theta_2 + \theta_3) \quad (4.40)$$

$$(L_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_1 \cos \theta_2)^2 = L_1^2 \cos^2 \theta_2 + 2L_1 L_2 \cos \theta_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_2^2 \sin^2(\theta_2 + \theta_3) \quad (4.41)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 (\cos \theta_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) - \sin \theta_2 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \quad (4.42)$$

และจาก $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ จะได้

$$x^2 + y^2 + z^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \sin \theta_3 \quad (4.43)$$

เมื่อ $\sin \theta = \frac{2u}{1+u^2}$, $u = \tan \frac{\theta}{2}$ จะได้

$$x^2 + y^2 + z^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \frac{2u}{1+u^2} \quad (4.44)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - L_1^2 - L_2^2)(1+u^2) = 4L_1 L_2 u \quad (4.45)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - L_1^2 - L_2^2)u^2 - 4L_1 L_2 u + (x^2 + y^2 + z^2 - L_1^2 - L_2^2) = 0 \quad (4.46)$$

เพราะฉะนั้น

$$u = \frac{4L_1 L_2 \pm \sqrt{(4L_1 L_2)^2 - 4(x^2 + y^2 + z^2 - L_1^2 - L_2^2)^2}}{2(x^2 + y^2 + z^2 - L_1^2 - L_2^2)} \quad (4.47)$$

$$u = \tan \frac{\theta_3}{2} = \frac{2L_1 L_2 \pm \sqrt{4L_1^2 L_2^2 - (x^2 + y^2 + z^2 - L_1^2 - L_2^2)^2}}{(x^2 + y^2 + z^2 - L_1^2 - L_2^2)} \quad (4.48)$$

$$\tan \frac{\theta_3}{2} = \frac{L_2 \pm \sqrt{L_2^2 - \frac{1}{4L_1^2} (x^2 + y^2 + z^2 - L_1^2 - L_2^2)^2}}{\frac{1}{2L_1} (x^2 + y^2 + z^2 - L_1^2 - L_2^2)} \quad (4.49)$$

ดังนั้นจะได้

$$\theta_3 = 2 \cdot A \tan 2 \left(L_2 \pm \sqrt{L_2^2 - d^2}, d \right) \quad (4.50)$$

$$\text{เมื่อ } d = \frac{1}{2L_1} (x^2 + y^2 + z^2 - L_1^2 - L_2^2)$$

ดังนั้นจากสมการ (4.16) สมการ (4.36) และสมการ (4.50) ทำให้ได้สมการจลศาสตร์แบบย้อนกลับ (Inverse kinematics) ดังนี้

$$\bar{R}_J = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \tan 2(y, z) \\ 2 \cdot A \tan 2 \left(b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, a + c \right) \\ 2 \cdot A \tan 2 \left(L_2 \pm \sqrt{L_2^2 - d^2}, d \right) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

เมื่อ \bar{R}_J คือ เวกเตอร์บนสเปซของข้อต่อ (Joint space)

$$a = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad b = -x, \quad c = \frac{1}{2L_1} (x^2 + y^2 + z^2 + L_1^2 - L_2^2),$$

$$d = \frac{1}{2L_1} (x^2 + y^2 + z^2 - L_1^2 - L_2^2)$$

4.3 เมตริกซ์จาโคเบียน (Jacobian)

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่าปลายแขนกลจะเป็นส่วนที่รับสัญญาณเข้าจากมนุษย์ ซึ่งได้แสดงการหาตำแหน่งแบบย้อนกลับมาแล้วนั้น ในการควบคุมมีความจำเป็นต้องเปลี่ยนเวกเตอร์สัมผัสการเคลื่อนที่ของข้อต่อแขนกล (\hat{T}_J) แปลงเป็นเวกเตอร์สัมผัสการเคลื่อนที่ของปลายแขนกล (\hat{T}_T) เมตริกซ์จาโคเบียน (Jacobian) จึงมีความจำเป็นสำหรับความสัมพันธ์ของเวกเตอร์สัมผัสทั้งสอง

จากสมการจลศาสตร์แบบย้อนกลับสามารถที่จะหาความเร็วที่ปลายแขนของหุ่นยนต์ โคบอลต์ได้จากสมการ $\frac{d\vec{R}_T}{dt} = \mathbf{J}_R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \frac{d\vec{R}_J}{dt}$ ซึ่ง \mathbf{J}_R ก็คือเมตริกซ์จาโคเบียน (Jacobian) ของจลศาสตร์แบบหุ่นยนต์ทั่วไป สามารถเขียนสมการนี้ใหม่ดังนี้

$$\dot{\vec{R}}_T = \mathbf{J}_R \dot{\vec{R}}_J \quad (4.52)$$

จะได้

$$\dot{x} = -L_2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\sin(\theta_2 + \theta_3) - L_1(\dot{\theta}_2)\cos\theta_2 \quad (4.53)$$

$$\dot{y} = -L_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_2 + \theta_3) - L_2\dot{\theta}_3\sin(\theta_2 + \theta_3) - L_1(\dot{\theta}_2)\cos\theta_2 \quad (4.54)$$

$$\dot{z} = -\dot{\theta}_2(L_2\sin(\theta_2 + \theta_3) + L_1\cos\theta_2) - \dot{\theta}_3L_2\sin(\theta_2 + \theta_3) \quad (4.55)$$

และ

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{\theta}_1(L_2\cos\theta_1\sin(\theta_2 + \theta_3) + L_1\cos\theta_1\cos\theta_2) \\ &+ \dot{\theta}_2(L_2\sin\theta_1\cos(\theta_2 + \theta_3) - L_1\sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &+ \dot{\theta}_3(L_2\sin\theta_1\cos(\theta_2 + \theta_3)) \end{aligned} \quad (4.56)$$

และ

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\dot{\theta}_1(L_2\sin\theta_1\sin(\theta_2 + \theta_3) + L_1\sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &+ \dot{\theta}_2(L_2\cos\theta_1\cos(\theta_2 + \theta_3) - L_1\cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &+ \dot{\theta}_3(L_2\cos\theta_1\cos(\theta_2 + \theta_3)) \end{aligned} \quad (4.57)$$

จากนั้นนำสมการข้างต้นมาจัดให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -L_2s_{23} - L_1c_2 & -L_2s_{23} \\ L_2c_1s_{23} + L_1c_1c_2 & L_2s_1c_{23} - L_1s_1s_2 & L_2s_1c_{23} \\ -L_2s_1s_{23} - L_1s_1c_2 & L_2c_1c_{23} - L_1c_1s_2 & L_2c_1c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

เมตริกซ์แรกด้านขวาของสมการที่ 4.58 ก็คือเมตริกซ์จาโคเบียน (Jacobian) ที่ใช้สำหรับแปลงความเร็วของข้อต่อให้เป็นความเร็วที่ปลายแขนกล และจากความเร็วของสเปซทั้งสองสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปเวกเตอร์สัมผัสการเคลื่อนที่ได้จากความสัมพันธ์

$$\hat{T} = \dot{R} / |\dot{R}|$$

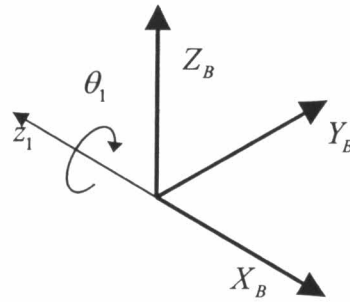
4.4 จลศาสตร์แบบหุ่นยนต์โคบอทในสเปซการเคลื่อนที่ของทรงกลม

จลศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติจะมีลักษณะที่แตกต่างจากจลศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอททั่วไป เนื่องจากมีระบบส่งกำลังที่มีลักษณะพิเศษเพิ่มขึ้นมาดังที่ได้แสดงรายละเอียดมาแล้ว ทำให้จลศาสตร์ของหุ่นยนต์โคบอทแขนกลสามมิติจึงต้องมีสเปซทรงกลม ซึ่งมีลักษณะการเคลื่อนที่แบบหมุนจำนวน 3 ข้อต่อ (Joint) ยึดติดกับแกนต่างๆบนเฟรมฐาน ในสเปซการเคลื่อนที่ของทรงกลมที่ได้ถูกกำหนดให้การเคลื่อนที่ของทรงกลมอยู่บนเฟรมที่หยุดนิ่งที่เทียบกับโลก เนื่องจากในสเปซถัดไปซึ่งเป็นสเปซของชุดซีวี่ที่นั้นจะอยู่บนเฟรมที่หยุดนิ่งเช่นเดียวกัน

ในสเปซทรงกลมจะสมมุติให้จุดศูนย์กลางของทรงกลมจะไม่มี การเคลื่อนที่ และอยู่ที่ตำแหน่งจุดเริ่มต้นของเฟรมฐาน ทรงกลมจะเคลื่อนที่แบบหมุนเท่านั้น ตำแหน่งของทรงกลม (\bar{R}_S) สามารถเขียนอ้างอิงบนแกน x, y, z ของเฟรมฐาน ที่อ้างอิงบนแกน x คือ ${}^B\theta_x$, ที่อ้างอิงบนแกน y คือ ${}^B\theta_y$, และที่อ้างอิงบนแกน z คือ ${}^B\theta_z$

ลักษณะความสัมพันธ์การเคลื่อนที่ของทรงกลมและการเคลื่อนที่ของข้อต่อ ถ้าเราพิจารณาลักษณะการเคลื่อนที่ของข้อต่อแขนกล แกนหมุนของข้อต่อแขนกลแรกและแกนหมุนของข้อต่อแขนกลสอง ซึ่งอ้างอิงบนเฟรมที่แสดงดังรูปที่ 4.2 เฟรมของแกนหมุนทั้งสองมีลักษณะเคลื่อนที่สัมพันธ์กัน (relative) แต่จุดหมุนทั้งสองจะติดกันที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของทรงกลม ส่วนในข้อต่อที่สามของแขนกลจะถูกต่อผ่านชุดส่งกำลังที่มีอัตราทดเท่ากับ ρ ซึ่งเห็นได้ว่าความสัมพันธ์การเคลื่อนที่ของข้อต่อแขนกลและการเคลื่อนที่ของทรงกลม เป็นความสัมพันธ์ที่มีลักษณะไม่ซับซ้อน ดังนั้นเพื่อความสะดวกจะทำการแทนความสัมพันธ์ดังกล่าวไว้ในการหาการเปลี่ยนรูประหว่างสเปซเลย

การหาความสัมพันธ์ของสเปซของข้อต่อแขนกลกับสเปซการเคลื่อนที่ของทรงกลม ในอันดับแรก พิจารณาการเคลื่อนที่ของข้อต่อแขนกลแรก (θ_1) ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่เทียบกับเฟรมของข้อต่อแขนกล 1 (x_1, y_1, z_1) จากนั้นเปลี่ยนให้การเคลื่อนที่ให้เทียบบนเฟรมฐาน (${}^B\theta_x, {}^B\theta_y, {}^B\theta_z$) สามารถแสดงรายละเอียดดังรูปที่ 4.3

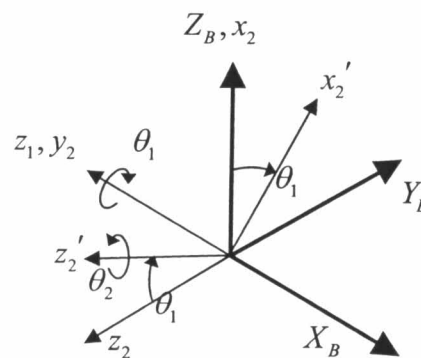


รูปที่ 4.3 การเคลื่อนที่ θ_1 ที่อ้างอิงบนเฟรมฐาน

จากรูปที่ 4.3 จะได้

$${}^B\theta_X = -\theta_1 \quad (4.59)$$

เมื่อ ${}^B\theta_X$ คือ การเคลื่อนที่บนแกน X ของสเปซการเคลื่อนที่ของทรงกลม
พิจารณาการเคลื่อนที่ข้อต่อแกนที่สอง (θ_2) จะมีลักษณะดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 การเคลื่อนที่ θ_2 ที่อ้างอิงบนเฟรมฐาน

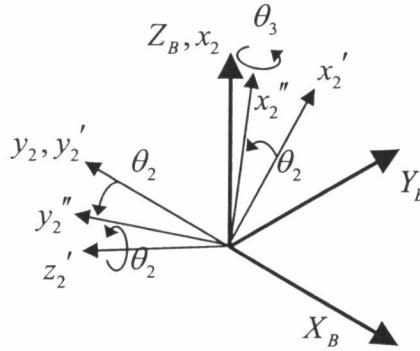
จากรูปที่ 4.4 จะได้

$${}^B\theta_Y = (-\cos\theta_1)\theta_2 \quad (4.60)$$

$${}^B\theta_Z = (\sin\theta_1)\theta_2 \quad (4.61)$$

เมื่อ ${}^B\theta_Y$ คือ การเคลื่อนที่บนแกน Y ของสเปซการเคลื่อนที่ของทรงกลม
 ${}^B\theta_Z$ คือ การเคลื่อนที่บนแกน Z ของสเปซการเคลื่อนที่ของทรงกลม

พิจารณาการเคลื่อนที่ข้อต่อแกนกลที่สาม (θ_3) มีลักษณะที่อ้างอิงแกนหมุนข้อต่อแกนกล 3 (x_3, y_3, z_3) การหมุนของข้อต่อแกนกลนี้ถูกเปลี่ยนการหมุนโดยระบบส่งกำลังมาที่แกน x_2 ของเฟรมข้อต่อแกนกล 2 (x_2, y_2, z_2) โดยมีอัตราทดเท่ากับ ρ ดังนั้นการเคลื่อนที่ θ_3 จะถูกเปลี่ยนการเคลื่อนที่ให้อยู่บนเฟรมฐาน (${}^B\theta_x, {}^B\theta_y, {}^B\theta_z$) สามารถแสดงรายละเอียดดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 การเคลื่อนที่ θ_3 ที่อ้างอิงบนเฟรมฐาน

จากรูปที่ 4.5 จะได้

$${}^B\theta_x = (-\sin \theta_2) \rho \theta_3 \quad (4.62)$$

$${}^B\theta_y = (\cos \theta_2) (\sin \theta_1) \rho \theta_3 \quad (4.63)$$

$${}^B\theta_z = (\cos \theta_2) (\cos \theta_1) \rho \theta_3 \quad (4.64)$$

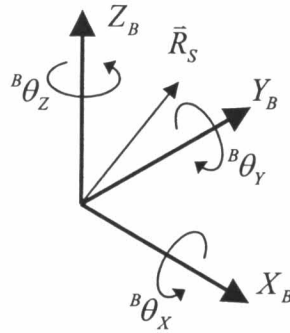
จากสมการ (4.59) ถึงสมการ (4.64) จะได้เวกเตอร์บอกตำแหน่งบนสเปซการเคลื่อนที่ของทรงกลม (\bar{R}_S) ดังนี้

$$\bar{R}_S = \begin{bmatrix} {}^B\theta_x \\ {}^B\theta_y \\ {}^B\theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(\sin \theta_2) \\ 0 & -\cos \theta_1 & (\cos \theta_2) (\sin \theta_1) \\ 0 & \sin \theta_1 & (\cos \theta_2) (\cos \theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\theta_1 \\ \theta_2 \\ \rho \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

หรือจะสามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\bar{R}_S = \begin{bmatrix} {}^B\theta_X \\ {}^B\theta_Y \\ {}^B\theta_Z \end{bmatrix} = L_S(\bar{R}_J) = \begin{bmatrix} -\theta_1 - \rho(\sin\theta_2)\theta_3 \\ (-\cos\theta_1)\theta_2 + \rho(\cos\theta_2)(\sin\theta_1)\theta_3 \\ (\sin\theta_1)\theta_2 + \rho(\cos\theta_2)(\cos\theta_1)\theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

เวกเตอร์บอกตำแหน่งบนสเปซการเคลื่อนที่ของลูกทรงกลม (\bar{R}_S) เราสามารถแสดงลักษณะและส่วนประกอบบนเฟรมฐานได้ดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 เวกเตอร์บอกตำแหน่ง \bar{R}_S ของทรงกลมบนเฟรมฐาน

ในสเปซการเคลื่อนที่ของลูกทรงกลมจะสามารถหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยของการเคลื่อนที่ได้จากสมการ

$$\hat{T}_S = \frac{\mathbf{J}_S \hat{T}_J}{|\mathbf{J}_S \hat{T}_J|} \quad (4.67)$$

เมื่อ \hat{T}_S คือ เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยบนสเปซการเคลื่อนที่ของทรงกลม

\hat{T}_J คือ เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยบนสเปซการเคลื่อนที่ของข้อต่อสามารถหาได้จากความเร็วการเคลื่อนที่ในสเปซข้อต่อ

$\mathbf{J}_S = \frac{\partial L_S}{\partial \bar{R}_J}$ คือ สมการจาโคเบียนเมตริกซ์บนสเปซการเคลื่อนที่ของลูกทรงกลม จะได้

$$\mathbf{J}_S = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^B\theta_X}{\partial \theta_1} & \frac{\partial {}^B\theta_X}{\partial \theta_2} & \frac{\partial {}^B\theta_X}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial {}^B\theta_Y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial {}^B\theta_Y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial {}^B\theta_Y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial {}^B\theta_Z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial {}^B\theta_Z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial {}^B\theta_Z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

สามารถแสดงการหาส่วนประกอบต่างๆของสมการ (4.68) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^B \theta_x}{\partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} (-\theta_1 - \rho(\sin \theta_2) \theta_3) = -1 \quad (4.69)$$

$$\frac{\partial^B \theta_x}{\partial \theta_2} = -\rho(\cos \theta_2) \theta_3 \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial^B \theta_x}{\partial \theta_3} = -\rho(\sin \theta_2) \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial^B \theta_y}{\partial \theta_1} = (\sin \theta_1) \theta_2 + \rho(\cos \theta_2)(\cos \theta_1) \theta_3 \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial^B \theta_y}{\partial \theta_2} = (-\cos \theta_1) - \rho(\sin \theta_2)(\sin \theta_1) \theta_3 \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial^B \theta_y}{\partial \theta_3} = \rho(\cos \theta_2)(\sin \theta_1) \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial^B \theta_z}{\partial \theta_1} = (\cos \theta_1) \theta_2 - \rho(\cos \theta_2)(\sin \theta_1) \theta_3 \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial^B \theta_z}{\partial \theta_2} = (\sin \theta_1) - \rho(\sin \theta_2)(\cos \theta_1) \theta_3 \quad (4.76)$$

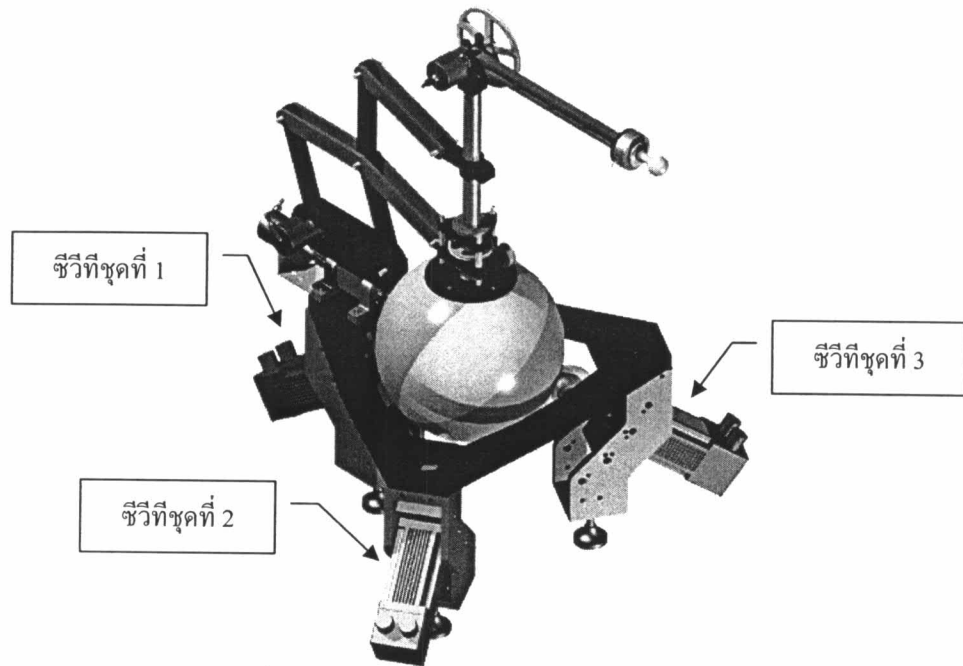
$$\frac{\partial^B \theta_z}{\partial \theta_3} = \rho(\cos \theta_2)(\cos \theta_1) \quad (4.77)$$

4.5 จลศาสตร์ของชุดซีวีทีเชิงเส้นที่ต่อกับทรงกลม

การปรับอัตราส่วนความเร็วของแต่ละชุดซีวีที ทำให้ต้องนิยามเวกเตอร์บอกตำแหน่งของแต่ละชุดซีวีที (\vec{r}_w) จึงมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งจำนวน 3 ชุด แสดงได้ดังนี้

$$\vec{r}_{wi} = \begin{bmatrix} w\theta_{xi} \\ w\theta_{yi} \end{bmatrix}, \quad i=1,2,3 \quad (4.78)$$

เมื่อ $w\theta_{xi}$, $w\theta_{yi}$ คือ การเคลื่อนที่บนแกน X และ Y ของสเปซการปรับอัตราทด และตัวห้อย i (ตัวยก w หมายถึง ตัวแปรอ้างอิงเทียบกับเฟรมของชุดซีวีที) คือการแสดงผลการอ้างอิงถึงเฟรมของชุดซีวีทีแต่ละชุด ซึ่งสามารถนิยามตำแหน่งของชุดซีวีทีทั้ง 3 ชุดได้ดังรูป 4.7

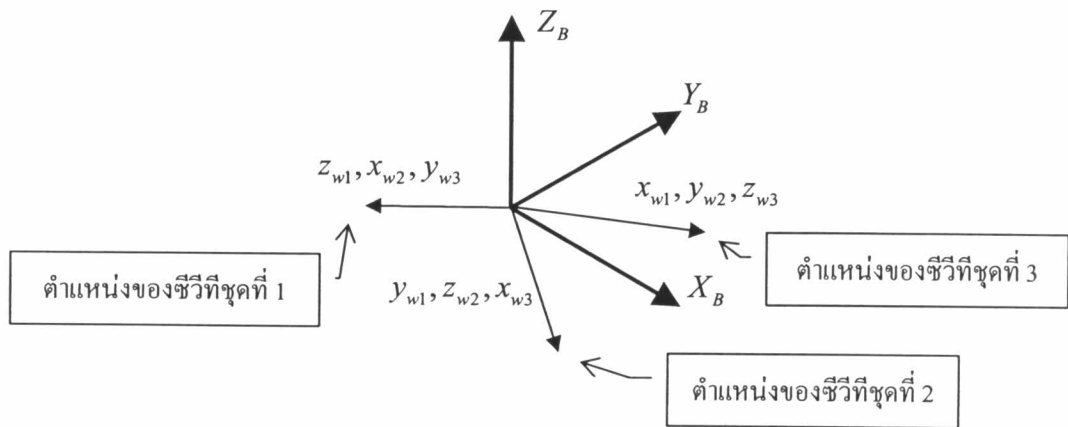


รูปที่ 4.7 การนิยามตำแหน่งของชุดซีวีทีทั้งสาม

ความสัมพันธ์ของสเปซการเคลื่อนที่ของทรงกลมกับสเปซการปรับอัตราทด จะอาศัยเมตริกซ์การหมุนเฟรมจาก

$${}^A_B\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \hat{x}_B \cdot \hat{x}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{x}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{x}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{y}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{y}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{y}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{z}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{z}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{z}_A \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

สมการ (4.79) คือ เมตริกซ์การหมุนเฟรมการเคลื่อนที่ (Rotation matrix) แบบทั่วไป ของเฟรม B เทียบกับเฟรม A ทำให้สามารถหา ${}^B\mathbf{R}_i$, $i=1,2,3$ หรือก็คือเมตริกซ์การหมุนเฟรมจากเฟรมฐานเทียบกับเฟรมของแต่ละชุดซีวีที จากรูปที่ 4.7 การวางตำแหน่งของแต่ละชุดซีวีทีเราสามารถแสดงผลของชุดซีวีทีทั้งสามกับเฟรมฐานได้ดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 เฟรมของแต่ละจุดชีวิตเทียบกับเฟรมฐาน

ทำให้เราจะได้

$${}^w_B \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

$${}^w_B \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

$${}^w_B \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

เราสามารถหาความสัมพันธ์เวกเตอร์บอกตำแหน่งบนสเปซการปรับอัตราทด กับเวกเตอร์บอกตำแหน่งบนสเปซการเคลื่อนที่ของทรงกลมได้จาก

$$\bar{r}_{wi} = \begin{bmatrix} {}^w\theta_{xi} \\ {}^w\theta_{yi} \end{bmatrix} = L_{wi}(\bar{R}_S) \quad , i = 1, 2, 3 \quad (4.83)$$

จากเมตริกซ์การหมุนเฟรมจากเฟรมฐานเทียบกับเฟรมของแต่ละชุดซีวีที และจากสมการ (4.83) จะได้

$$\bar{r}_{w1} = \begin{bmatrix} {}^w\theta_{x1} \\ {}^w\theta_{y1} \end{bmatrix} = L_{w1}(\bar{R}_S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B\theta_X \\ {}^B\theta_Y \\ {}^B\theta_Z \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$$\bar{r}_{w2} = \begin{bmatrix} {}^w\theta_{x2} \\ {}^w\theta_{y2} \end{bmatrix} = L_{w2}(\bar{R}_S) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B\theta_X \\ {}^B\theta_Y \\ {}^B\theta_Z \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

$$\bar{r}_{w3} = \begin{bmatrix} {}^w\theta_{x3} \\ {}^w\theta_{y3} \end{bmatrix} = L_{w3}(\bar{R}_S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B\theta_X \\ {}^B\theta_Y \\ {}^B\theta_Z \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

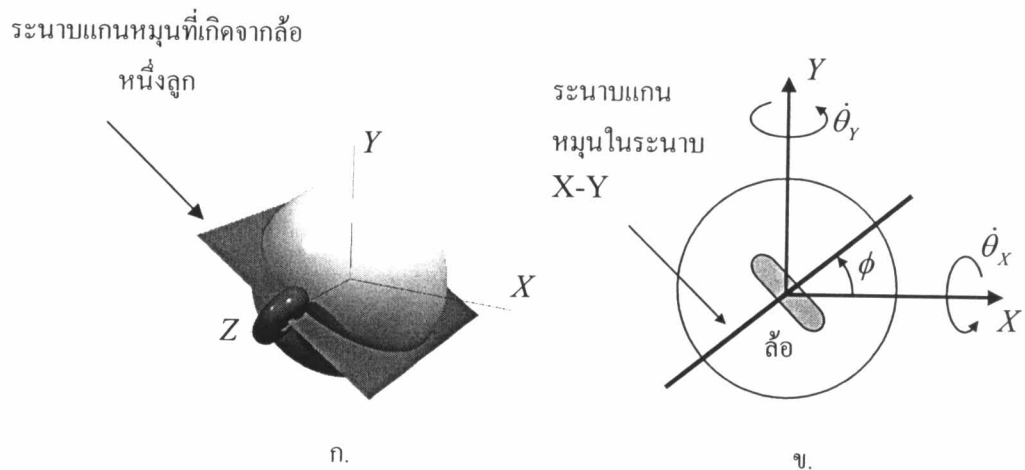
จากสมการ (4.84) (4.85) และ (4.86) ทำให้สามารถหาอัตราส่วนความเร็วแกน Y ต่อแกน X ของสเปซการปรับอัตราทดได้ดังนี้

$$\frac{{}^w\dot{\theta}_{y1}}{{}^w\dot{\theta}_{x1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot {}^B\dot{\theta}_X + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot {}^B\dot{\theta}_Y - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot {}^B\dot{\theta}_Z}{\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot {}^B\dot{\theta}_X - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot {}^B\dot{\theta}_Y - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot {}^B\dot{\theta}_Z} \quad (4.87)$$

$$\frac{{}^w\dot{\theta}_{y2}}{{}^w\dot{\theta}_{x2}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot {}^B\dot{\theta}_X - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot {}^B\dot{\theta}_Z}{\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot {}^B\dot{\theta}_X + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot {}^B\dot{\theta}_Y - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot {}^B\dot{\theta}_Z} \quad (4.88)$$

$$\frac{w\dot{\theta}_{y3}}{w\dot{\theta}_{x3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot {}^B\dot{\theta}_x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot {}^B\dot{\theta}_y - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot {}^B\dot{\theta}_z}{-\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot {}^B\dot{\theta}_x - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot {}^B\dot{\theta}_z} \quad (4.89)$$

จากลักษณะของความสมพันธ์ทั้งสามข้างต้น จะสามารถนำไปใช้ในชุดปรับอัตราทดระหว่างข้อต่อได้



รูปที่ 4.9 ก. ระนาบแกนหมุนของล้อบนเฟรมสามมิติ

ข. ระนาบแกนหมุนบนระนาบ X-Y

และจากรูปที่ 4.9 ก. จะเห็นว่าล้อ ณ ตำแหน่งในรูปนี้ จะสามารถสร้างระนาบได้ 1 ระนาบ และเมื่อมาพิจารณาบนระนาบ X-Y จะเห็นว่าภาพฉายของระนาบแกนหมุนนี้จะมีลักษณะเป็นเส้นตรงหนึ่งเส้น ซึ่งแสดงให้เห็นว่าล้อลูกนี้จะสามารถสร้างความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ของทรงกลมได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\tan \phi = \frac{\dot{\theta}_y}{\dot{\theta}_x} \quad (4.90)$$

เมื่อ $\dot{\theta}_x$ คือ ความเร็วเชิงมุมในแนวแกน X
 $\dot{\theta}_y$ คือ ความเร็วเชิงมุมในแนวแกน Y
 ϕ คือ มุมที่แกนล้อที่บิดไป

ดังนั้นเมื่อเราพิจารณาความสัมพันธ์บนสเปซการปรับอัตราต่อรองข้อต่อทำให้จะ
ได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\tan \phi_i = \frac{w \dot{\theta}_{yi}}{w \dot{\theta}_{xi}} \quad (4.91)$$

เมื่อ $w \dot{\theta}_{xi}$ คือ ความเร็วเชิงมุมในแนวแกน X เฟรมของแต่ละชุดซีวีที

$w \dot{\theta}_{yi}$ คือ ความเร็วเชิงมุมในแนวแกน Y เฟรมของแต่ละชุดซีวีที

ϕ_i คือ มุมที่แกนล้อที่บิดของแต่ละชุดซีวีที