บทที่ 2

ระบบควบคุมแบบดิจิตอล

ประเภทของสัญญาณ

ในการควบคุมทางวิศวกรรม จะมีเป้าหมายที่ระบบหรือกระบวนการ อาจจะเป็นระบบหรือกระบวนการทางกายภาพ หรือ กระบวนการที่ไม่ใช่ทางกายภาพ เช่น กระบวนการทางเศรษฐศาสตร์ ระบบส่วนมากจะเกี่ยวข้องกับสัญญาณแบบต่อเนื่อง หากจะนำตัวควบคุมแบบดิจิตอลมาใช้ในระบบควบคุม จำเป็นต้องมีการเปลี่ยนแปลงสัญญาณ (อนาลอกเป็นดิจิตอล และดิจิตอลเป็นอนาลอก) เพื่อให้เหมาะสมกับอุปกรณ์ที่เกี่ยวข้อง ลักษณะของสัญญาณในระบบควบคุมโดยทั่วไปเป็นดังนี้

1. สัญญาณแบบอนาลอก (Analog signal) เป็นสัญญาณที่มีขนาดต่อเนื่องตลอดช่วงเวลาที่ต่อเนื่อง

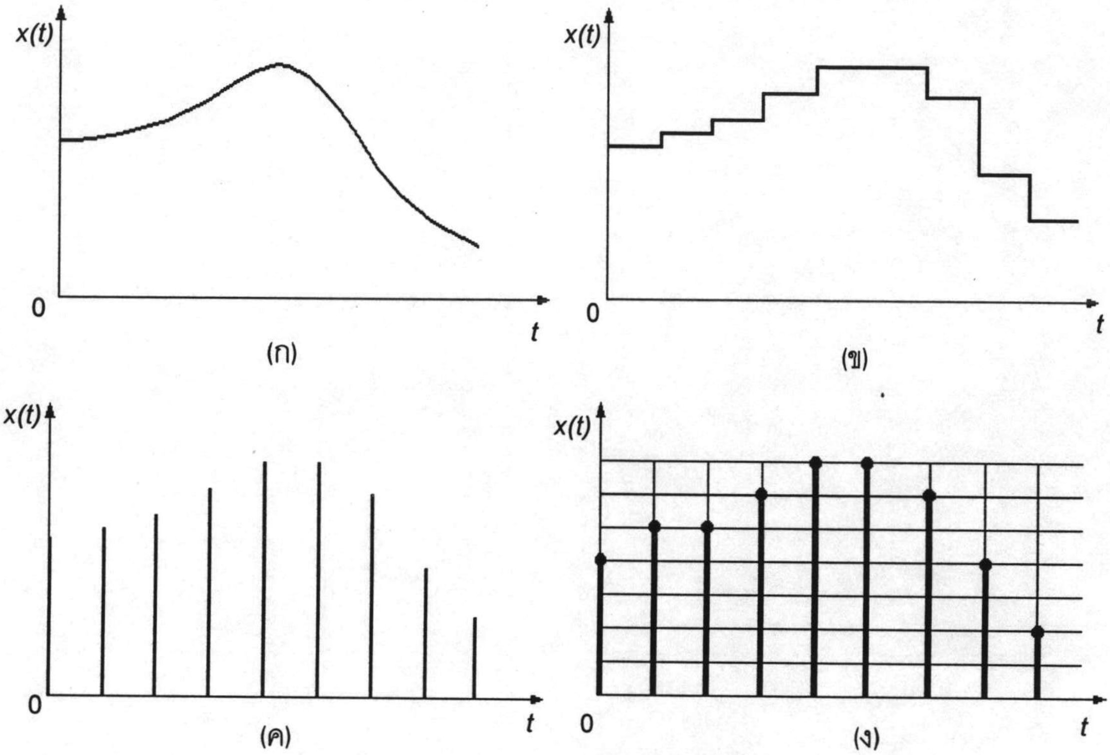
2. สัญญาณแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete time signal) เป็นสัญญาณที่กำหนดเฉพาะที่เวลาไม่ต่อเนื่องใด ๆ ในกรณีที่สัญญาณแบบเวลาไม่ต่อเนื่องมีขนาดใด ๆ ในลักษณะต่อเนื่องจะถูกเรียกว่า สัญญาณข้อมูลสุ่ม (Sampled data signal) ซึ่งสร้างได้โดยการสุ่มสัญญาณแบบอนาลอกที่เวลาไม่ต่อเนื่องใด ๆ

3. สัญญาณแบบดิจิตอล (Digital signal) เป็นสัญญาณแบบเวลาไม่ต่อเนื่องที่ถูกจัด (quantize) ขนาดแล้ว แต่ละสัญญาณสามารถแทนได้ด้วยหมายเลขตามลำดับ

สัญญาณแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง สามารถอ้างถึง สัญญาณแบบดิจิตอล หรือ สัญญาณข้อมูลสุ่มก็ได้ ลักษณะแบบเวลาไม่ต่อเนื่องจะใช้ในทางทฤษฎีมากกว่า ขณะที่ลักษณะแบบดิจิตอลจะใช้ติดต่อกับอุปกรณ์หรือชุดคำสั่งที่เกี่ยวข้อง เนื่องจากอุปกรณ์ที่ใช้เป็นตัวควบคุมจะประมวลผลข้อมูลแบบดิจิตอล

การสุ่มของสัญญาณแบบต่อเนื่องจะใช้วิธีการแทนสัญญาณเดิมที่มีลักษณะต่อเนื่องด้วยลำดับของค่าตรงจุดเวลาที่ไม่ต่อเนื่อง และใช้วิธีการสุ่มเมื่อตัวควบคุมในระบบควบคุมเป็นแบบดิจิตอล เนื่องจากต้องใช้การสุ่มและการจัดข้อมูลป้อนให้กับตัวควบคุม ข้อดีอย่างหนึ่งของการสุ่มคือ ลดค่าใช้จ่ายของตัวควบคุม ในกรณีที่ต้องการควบคุมระบบหลาย ๆ ระบบด้วยตัวควบคุม

ตัวเดียว โดยอาศัยการสุ่มค่า และส่งสัญญาณไปยังระบบแต่ละระบบตามลำดับ ก็จะสามารถควบคุมระบบทั้งหมดได้โดยไม่ต้องใช้ตัวควบคุมมาควบคุมให้เท่ากับจำนวนของระบบ



รูปที่ 2.1 (ก) แสดงสัญญาณแบบอนาลอก

(ข) แสดงสัญญาณแบบอนาลอกที่ถูกจัดขนาดแล้ว

(ค) แสดงสัญญาณข้อมูลสุ่ม

(ง) แสดงสัญญาณแบบดิจิตอล

ระบบควบคุมแบบดิจิตอล

ปัจจุบันระบบควบคุมแบบดิจิตอลถูกใช้อย่างแพร่หลายและมีประสิทธิภาพสูง ระบบควบคุมแบบดิจิตอลจะมีข้อดีเมื่อเปรียบเทียบกับระบบควบคุมแบบอนาลอกดังนี้

1. การจัดการข้อมูลทำได้โดยตรงในตัวควบคุมแบบดิจิตอล สามารถคำนวณค่าต่าง ๆ ในการควบคุมที่ซับซ้อนได้โดยง่าย

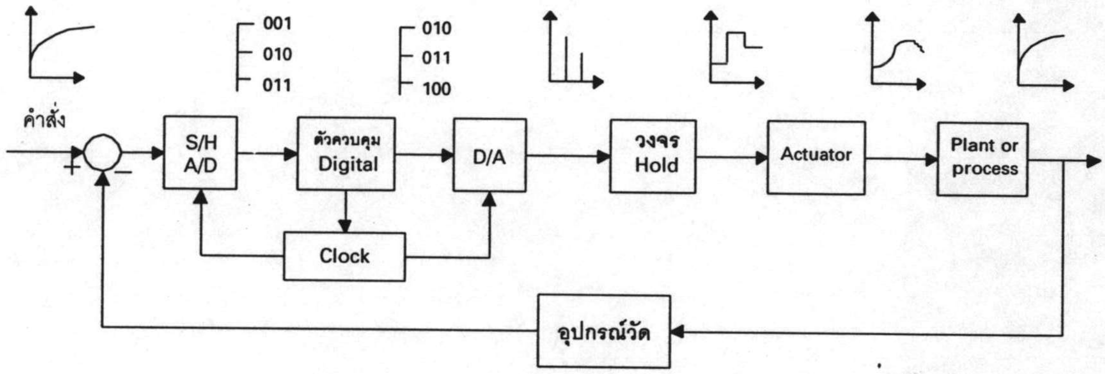
2. สามารถเปลี่ยนชุดคำสั่งควบคุมได้โดยง่ายตามความต้องการ ซึ่งแบบอนาลอกจะยุ่งยากกว่าและหาจุดที่ผิดพลาดได้ยาก

3. ตัวควบคุมแบบดิจิตอลจะเกิดปัญหาเรื่องสัญญาณรบกวนภายใน และผลจากการเลื่อนจุด เนื่องจากอุณหภูมิหรือการใช้งานนาน ๆ (Drift effect) ได้น้อยกว่าแบบอนาลอก

ข้อเสียบางประการของระบบควบคุมแบบดิจิตอล เมื่อเปรียบเทียบกับระบบควบคุมแบบอนาลอก

1. การสุ่มและการจัดสัญญาณมีผลทำให้เกิดค่าผิดพลาดมาก ซึ่งทำให้ประสิทธิภาพของระบบลดลง

2. การชดเชยในระบบควบคุมแบบดิจิตอลจะยุ่งยากมากกว่าแบบอนาลอก เมื่อเปรียบเทียบที่ประสิทธิภาพระดับเดียวกัน



รูปที่ 2.2 แผนภูมิของระบบควบคุม

พิจารณารูปที่ 2.2 ถ้าสัญญาณออกที่ได้จากระบบเป็นสัญญาณแบบต่อเนื่อง ค่าผิดพลาดของสัญญาณจะถูกแปลงเป็นรูปแบบดิจิตอลด้วยตัวแปลงจากอนาลอกเป็นดิจิตอล (Analog to digital converter) ซึ่งการแปลงจะกระทำที่เวลาการสุ่ม เครื่องคอมพิวเตอร์ซึ่งเป็นตัวควบคุมแบบดิจิตอลจะจัดการลำดับของตัวเลข และคำนวณตามเงื่อนไขการทำงาน แล้วส่งค่าตัวเลขชุดใหม่ออกมาทุก ๆ การสุ่ม ตัวเลขที่ได้จะถูกแปลงเป็นสัญญาณควบคุมทางกายภาพ ซึ่งเป็นสัญญาณแบบต่อเนื่องหรือสัญญาณอนาลอกด้วยตัวแปลงแบบดิจิตอลเป็นอนาลอก (Digital to analog converter) และวงจรรักษาระดับ (Hold circuit) ซึ่งจะรักษาระดับสัญญาณไว้จนกว่าจะถึงการสุ่มครั้งต่อไป สัญญาณที่ออกจากตัวควบคุมนี้จะส่งต่อไปยังระบบซึ่งอาจจะผ่านอุปกรณ์ขับอย่างใดอย่างหนึ่งในการควบคุมการเคลื่อนที่

ส่วนที่ยากมากที่สุดในการออกแบบระบบควบคุมคือการจำลองระบบที่ถูกควบคุมให้ถูกต้องมากที่สุด ถึงแม้จะมีวิธีจำลองระบบที่ถูกควบคุมหลายวิธีก็ตาม

อุปกรณ์วัด เป็นอุปกรณ์ที่เปลี่ยนสัญญาณเข้าให้เป็นสัญญาณออกอีกรูปแบบหนึ่ง เช่น เปลี่ยนสัญญาณความดันเป็นแรงดันไฟฟ้า ซึ่งสัญญาณออกจะขึ้นอยู่กับสัญญาณเข้า อุปกรณ์วัดมีหลายแบบ อาจจะเป็นแบบอนาลอกแบบข้อมูลสุ่มหรือแบบดิจิตอล แบบอนาลอกจะเป็นอุปกรณ์

วัดที่มีสัญญาณเข้าและสัญญาณออกเป็นแบบต่อเนื่องไปตามเวลา ค่าของสัญญาณอาจจะเป็นค่าใดก็ได้ภายในข้อจำกัดทางกายภาพของระบบ แบบข้อมูลสุ่มเป็นแบบหนึ่งที่สัญญาณเข้าและออกเกิดขึ้นที่เวลาไม่ต่อเนื่องเท่านั้น และขนาดของสัญญาณจะถูกจัดใหม่ให้มีค่าตามระดับที่ไม่ต่อเนื่องสัญญาณที่ได้จะมีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงเพียงใดขึ้นอยู่กับความละเอียดของอุปกรณ์วัดนั้นๆ

ความสัมพันธ์ระหว่าง s กับ z

ในการวิเคราะห์ออกแบบระบบควบคุม เราจะพบว่า สมการที่ใช้แทนฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบจะอยู่ในรูป s (s-domain) ซึ่งถูกแปลงมาจากฟังก์ชันของเวลา (time-domain) เพื่อลดความยุ่งยากในการวิเคราะห์และการคำนวณ เมื่อจะนำไปใช้ จำเป็นต้องแปลงรูปแบบสมการจาก s ให้เป็นฟังก์ชันของเวลาตามเดิม ถ้าสมการมีความซับซ้อนมากก็จะทำให้เกิดความยุ่งยากในการแปลงสมการมาก เมื่อต้องการทราบว่าระบบมีเสถียรภาพดีหรือไม่ จะใช้วิธีนำรากของสมการคุณสมบัติ (Characteristic equation) มาวาดลงกราฟระหว่างค่าของจำนวนจริง (แกนนอน) กับจำนวนจินตภาพ (แกนตั้ง) ถ้าจุดที่รากของสมการอยู่ มีค่าเป็นบวก แสดงว่าระบบไม่เสถียร ต้องออกแบบระบบควบคุมเพื่อให้เกิดเสถียรภาพที่ดีและเป็นไปตามต้องการต่อไป กรณีของสมการในรูป z ก็จะคล้ายกัน ฟังก์ชันต่าง ๆ ในรูป s สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูป z แล้วพิจารณาความเป็นไปของระบบได้เช่นเดียวกัน แต่ในกรณีของ z ถ้าระบบมีเสถียรภาพดี ค่าของรากสมการต้องอยู่ภายในวงกลมหนึ่งหน่วย ถ้ามีค่าของรากสมการตัวใดอยู่นอกวงกลม แสดงว่าระบบนั้นไม่เสถียร ความสัมพันธ์ของ s กับ z คือ

$$z = e^{sT} \tag{2.1}$$

ฟังก์ชันของเวลา $f(t)$ สามารถแปลงให้อยู่ในรูป s และ z ได้จากสมการต่อไปนี้

$$F(s) = \mathrm{L}[f(t)]$$

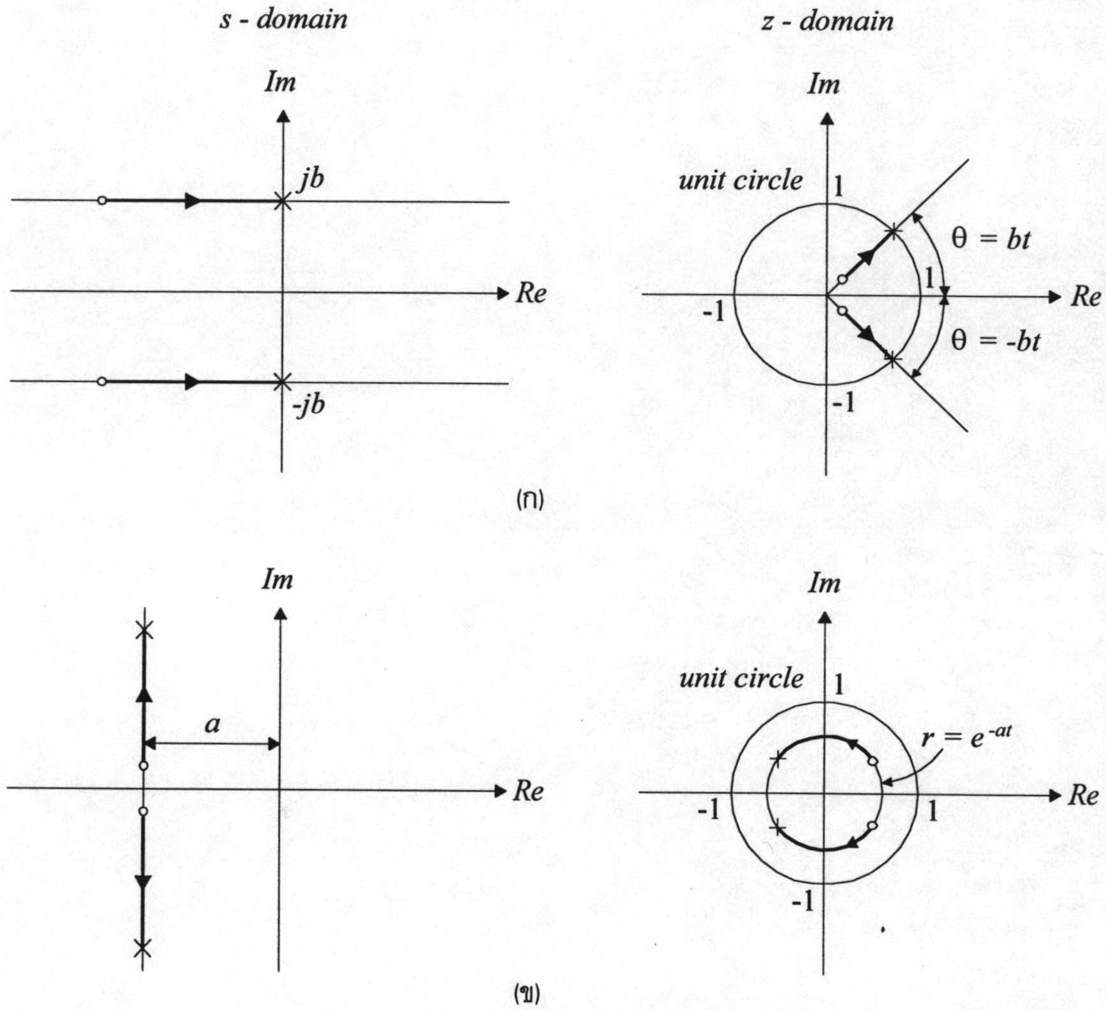
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-sT}dt \tag{2.2}$$

$$F(z) = \mathrm{Z}[f(t)]$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kt)z^{-k} \tag{2.3}$$

$$F(z) = \begin{cases} [\text{Laplace Transform of } f^*(t)]\big|_{s=(\ln z)/T} \\ \left[F^*(s)\right]_{s=(\ln z)/T} \end{cases} \tag{2.4}$$

รูปที่ 2.3 แสดงตำแหน่งของรากของสมการคุณสมบัติของระบบในรูป *s* และ *z* จากรูปจะเห็นว่า เมื่อรากของสมการมีค่าเป็นบวกในรูปของ *s* ค่าในรูปของ *z* จะมีค่าอยู่นอกวงกลม รัศมี 1 หน่วย



รูปที่ 2.3 (ก) รากสมการที่ความถี่เดียวกัน

(ข) รากสมการที่เวลาคงที่ 1/*a*

เสถียรภาพ (Stability)

เสถียรภาพของระบบเป็นสิ่งที่บอกให้ทราบว่าระบบปลอดภัยจากความเสียหายหรือไม่ ถ้าระบบไม่เสถียรแสดงว่าระบบนั้นอาจเกิดความเสียหายขึ้นขณะทำงานที่สภาวะอิสระ จำเป็นต้องออกแบบตัวควบคุมมาควบคุมให้ระบบมีเสถียรภาพที่ดี ในแบบจำลองของระบบที่ผ่านการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) หรือระบบที่อยู่ในรูป s เราสามารถทราบว่า ระบบที่พิจารณามีเสถียรภาพที่ดีหรือไม่ ได้จาก ส่วนจำนวนจริง (Real part) ของรากสมการส่วนหารของฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งระบบจะเสถียรจะต้องมีค่ารากน้อยกว่าศูนย์ หรือมีค่าเป็นลบ จำนวนเชิงซ้อนในรูป s เขียนได้เป็น

$$s = a + jb \qquad (2.5)$$

ถ้ารากของสมการคุณสมบัติ (Characteristic equation) มีจำนวน i ตัว ระบบจะเสถียรได้ เมื่อค่าของรากของสมการนี้ ทั้งหมดน้อยกว่าศูนย์

$$a_i < 0 \qquad (2.6)$$

เมื่อเปรียบเทียบคุณสมบัตินี้กับสมการในรูป z (2.1) สามารถเขียนได้เป็น

$$z = e^{(a+jb)T} \qquad (2.7)$$

$$z = e^{aT}e^{jbT} \qquad (2.8)$$

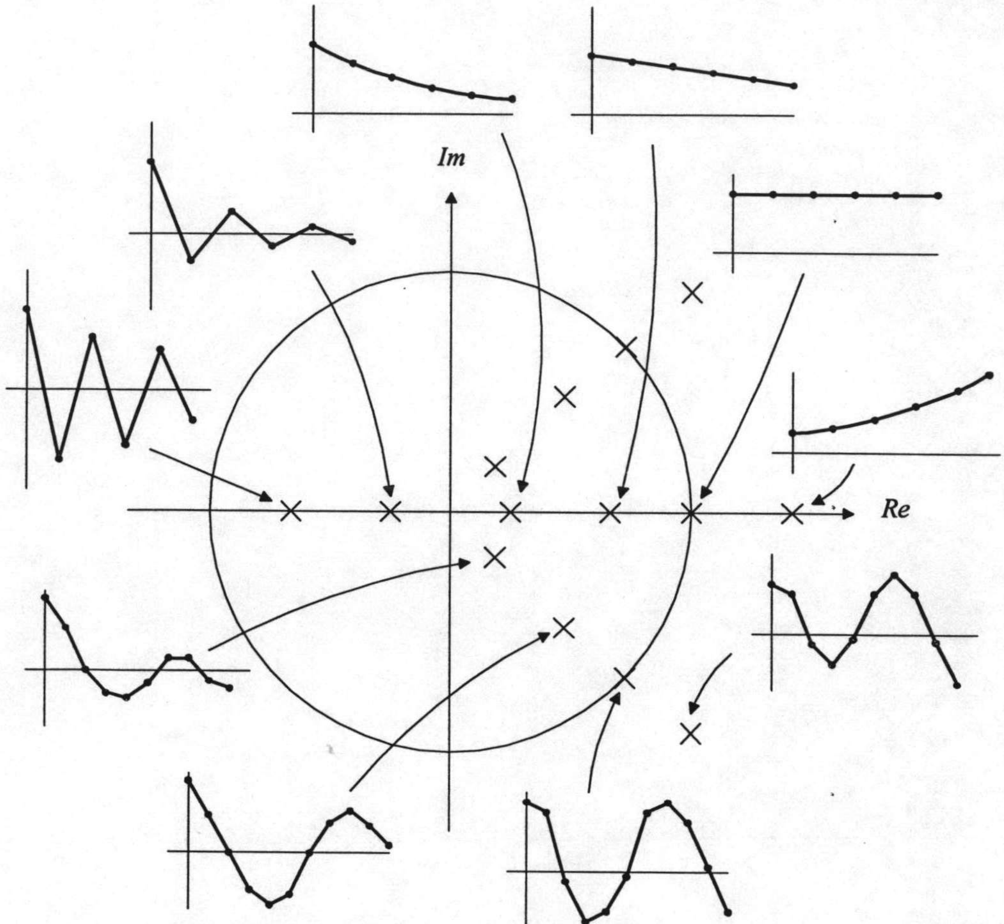
ดังนั้น

$$|z| = e^{aT} \qquad (2.9)$$

เมื่อค่า a น้อยกว่าศูนย์

$$|z| < 1 \qquad (2.10)$$

ระบบจะมีเสถียรภาพที่ดี เมื่อค่ารากของสมการในรูป z มีค่าน้อยกว่า 1 และมากกว่า -1 แสดงว่า ค่าของรากที่เสถียรจะอยู่ภายในวงกลม 1 หน่วย เมื่อนำมาเขียนกราฟของรากสมการจำนวนเชิงซ้อน ดังรูปที่ 2.4 แสดงผลตอบสนองอิสระ (Free response) ของระบบ ที่ค่ารากของสมการคุณสมบัติอยู่ที่ตำแหน่งต่าง ๆ



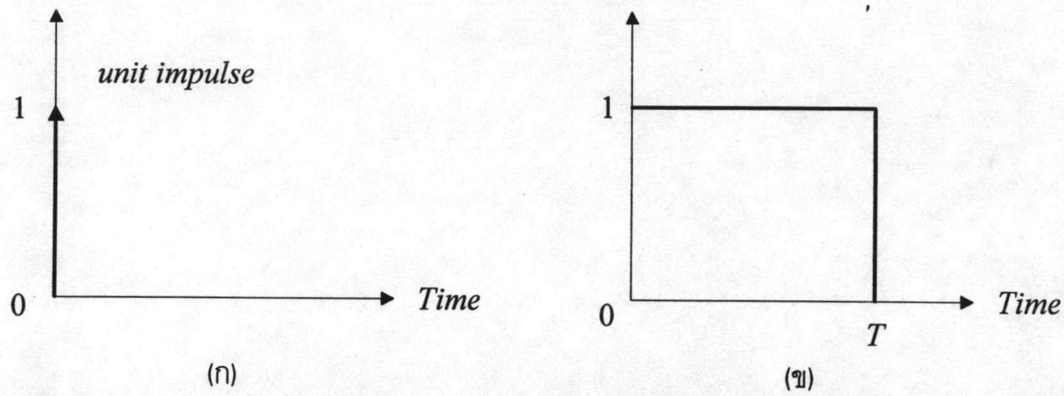
รูปที่ 2.4 ผลตอบสนองอิสระของรากสมการที่ตำแหน่งต่าง ๆ ในวงกลม 1 หน่วย

การกรองสัญญาณและสร้างข้อมูลของสัญญาณสุ่ม (Data reconstruction and filtering of sampled signals)

ระบบควบคุมส่วนใหญ่ที่เป็นอยู่ จะต้องมีอุปกรณ์ที่รับหรือให้สัญญาณแบบอนาลอก เช่น มอเตอร์ ซึ่งเป็นอุปกรณ์ต้นกำลังส่วนสำคัญที่ใช้กันมาก เมื่อนำระบบควบคุมแบบดิจิตอลมาใช้ การส่งสัญญาณที่มีลักษณะแบบพัลส์จึงไม่สามารถขับอุปกรณ์ขับเคลื่อนได้ เพราะไม่มีกำลังมากพอในเวลาจำกัด จำเป็นต้องมีการเปลี่ยนให้สัญญาณมีความต่อเนื่องในลักษณะแบบอนาลอกในระหว่างการสุ่ม และเปลี่ยนแปลงเมื่อมีค่าใหม่เกิดขึ้น คุณสมบัติอีกประการหนึ่งของอุปกรณ์ที่ทำหน้าที่นี้คือ ต้องกำจัดสัญญาณความถี่สูงที่เกิดขึ้นจากการสุ่มก่อนที่จะถูกป้อนเข้าอุปกรณ์แบบอนาลอกต่อไป

วิธีที่ง่ายที่สุดในการเปลี่ยนสัญญาณแบบพัลส์ เป็นสัญญาณแบบต่อเนื่อง คือ รักษาระดับของสัญญาณพัลส์ไว้จนถึงสัญญาณต่อไป อุปกรณ์นี้เรียกว่า ตัวคงสัญญาณกำลังศูนย์

(Zero-order hold, zoh) คำว่า กำลังศูนย์ มาจาก สมการโพลิโนเมียลกำลังศูนย์ ที่ใช้ในการขยายสัญญาณในช่วงการสุ่ม ซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายและนิยมใช้มากที่สุด



รูปที่ 2.5 (ก) สัญญาณพัลส์ขนาดหนึ่งหน่วยที่ป้อนให้ zoh

(ข) สัญญาณตอบสนองของ zoh

จากรูปที่ 2.5 เมื่อป้อนสัญญาณเข้าดังรูป 2.5 (ก) ให้กับ zoh จะได้สัญญาณตอบสนองออกมาดังรูปที่ 2.5 (ข) ซึ่งแทนสัญญาณได้ด้วยสมการดังนี้

$$g_{h0}(t) = u_s(t) - u_s(t-T) \tag{2.11}$$

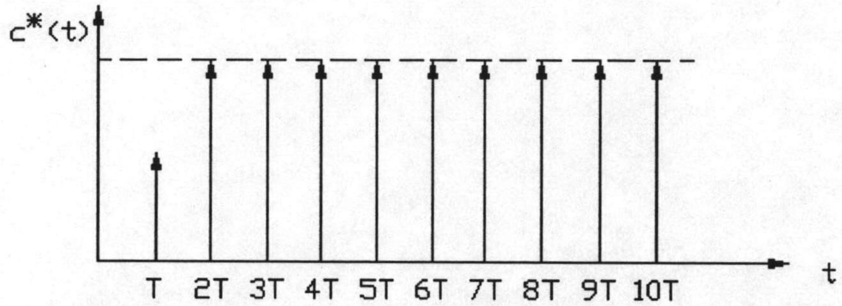
โดยที่ $u_s(t)$ เป็นฟังก์ชัน 1 หน่วย แปลงลาปลาซ ของฟังก์ชัน zoh ได้ฟังก์ชันถ่ายโอน

$$G_{h0}(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s}$$

$$= \frac{1-e^{-Ts}}{s} \tag{2.12}$$

ในทางปฏิบัติ ตัวคงสัญญาณมักจะถูกรวมอยู่ในแผ่นวงจรที่ใช้ติดต่อรับส่งสัญญาณระหว่างตัวควบคุมกับอุปกรณ์ภายนอก การแปลงฟังก์ชันถ่ายโอนจากรูปแบบ s เป็น z ทำได้โดยการนำ zoh ไปรวมกับฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกควบคุมก่อน แล้วจึงเปลี่ยนให้อยู่ในรูป z

การออกแบบระบบควบคุมแบบดิจิตอลกับผลตอบสนองแบบเดดบีท



รูปที่ 2.6 ผลตอบสนองแบบเดดบีทกับสัญญาณเข้าแบบยูนิตสเตป

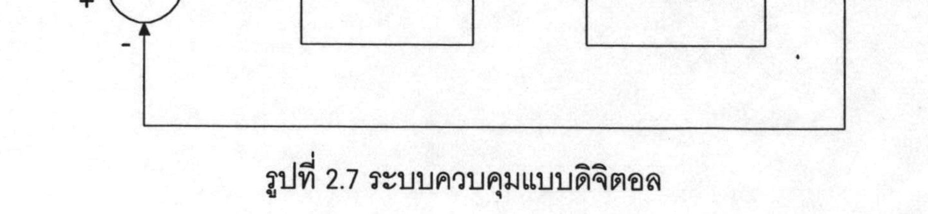
จุดประสงค์ของการออกแบบระบบควบคุม ต้องการให้ผลตอบสนองของระบบเข้าสู่ค่าอ้างอิงที่ต้องการโดยเร็วที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้โดยไม่เกิดโอเวอร์ชู้ท (Overshoot) ผลตอบสนองแบบนี้มักจะกล่าวถึงลักษณะแบบเดดบีท ซึ่งระบบจะสามารถเข้าสู่ค่าอ้างอิงได้อย่างรวดเร็วโดยมีค่าผิดพลาดน้อย รูปที่ 2.6 แสดงผลตอบสนองแบบเดดบีทกับสัญญาณป้อนเข้าแบบยูนิตสเตป (Unit step) ที่เป็นฟังก์ชั่นของเวลา t ผลที่ได้จะเป็นไปตามสัญญาณป้อนเข้าแบบยูนิตสเตปหลังจากการสุ่ม 2 ครั้ง สำหรับระบบข้อมูลแบบไม่ต่อเนื่องที่แสดงผลตอบสนองแบบเดดบีทตรงจุดที่ทำการสุ่ม ฟังก์ชั่นถ่ายโอนจะมีรูปแบบดังนี้

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{1}{z^N} \tag{2.13}$$

โดยที่ N เป็นเลขจำนวนเต็มบวก ดังนั้นสำหรับสัญญาณป้อนเข้าแบบยูนิทสเตป จะได้ผลดังนี้

$$C(z) = z^{-N} + z^{-N-1} + z^{-N-2} + \dots \tag{2.14}$$

ซึ่งมีลักษณะเดียวกับผลตอบสนองดังรูปที่ 2.6 เมื่อ $N = 2$



รูปที่ 2.7 ระบบควบคุมแบบดิจิตอล

หลักการของตัวควบคุมที่ได้ผลตอบสนองแบบเดดบีทสำหรับระบบควบคุมแบบดิจิตอล พิจารณาระบบที่มีสมการดังนี้

$$G_P(z) = \frac{z+0.5}{z^2-z-1} \tag{2.15}$$

จากรูปที่ 2.7 ให้ฟังก์ชั่นถ่ายโอนของระบบควบคุมเป็นดังนี้

$$D(z) = \frac{z^2-z-1}{(z-1)(z+0.5)} \tag{2.16}$$

จะได้ฟังก์ชั่นถ่ายโอนแบบเปิดลูป (Open-loop transfer function) ของระบบดังนี้

$$G(z) = D(z)G_P(z) = \frac{1}{z-1} \tag{2.17}$$

ฟังก์ชั่นถ่ายโอนแบบปิดลูป (Closed-loop transfer function) คือ

$$M(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{1}{z} \tag{2.18}$$

สำหรับสัญญาณป้อนเข้าแบบยูนิทสเตป (Unit-step input)จะได้สัญญาณออก

$$C(z) = \frac{1}{z}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1} = z^{-1} + z^{-2} + \ldots \tag{2.19}$$

ดังนั้นผลตอบสนองที่ได้ $c(k)$ จะเข้าสู่ค่าที่ต้องการในช่วงเวลาการสุ่มเพียงครั้งเดียวโดยไม่เกิดโอเวอร์ชู้ทและคงอยู่ที่ค่านั้นต่อไป ผลตอบสนอง $c(k)$ เรียกว่าผลตอบสนองแบบเดดบีท แต่ถ้า $G_p(z)$ เป็นผลจากการสุ่มของกระบวนการข้อมูลแบบต่อเนื่อง ตัวควบคุมแบบดิจิตอล $D(z)$ ที่ได้จะไม่ประกันได้ว่า ไม่เกิดการกระเพื่อม (Ripple) ระหว่างช่วงของการสุ่มในสัญญาณออกของข้อมูลต่อเนื่อง $c(t)$

จะเห็นว่า หลักการออกแบบผลตอบสนองแบบเดดบีทจะใช้การนำเอาค่า โพลและซีโร่ของ $D(z)$ มากำจัด ค่าซีโร่และโพลของระบบ $G_p(z)$ แต่อย่างไรก็ตามวิธีนี้จะใช้ได้เฉพาะระบบที่มีโพล และซีโร่ของ $G_p(z)$ อยู่ภายในวงกลมหนึ่งหน่วยเท่านั้น

1. โพลและซีโร่ของ $G_P(z)$ ทั้งหมดอยู่ในวงกลมหนึ่งหน่วย

พิจารณาเมื่อค่าโพลและซีโร่ของ $G_p(z)$ ทั้งหมดอยู่ในวงกลมหนึ่งหน่วย ผลตอบสนองแบบเดดบีทจะมีคุณสมบัติตามนี้

1. ระบบต้องมีค่าผิดพลาดที่สภาวะคงที่ (steady state error) เป็นศูนย์ตรงจุดที่ทำการสุ่ม สำหรับสัญญาณป้อนเข้าที่กำหนด

2. เวลาที่สัญญาณออก เข้าสู่ค่าที่สภาวะคงที่ต้องมีค่าน้อย และสามารถทราบเวลาที่สัญญาณเข้าสู่ค่าที่สภาวะคงที่ได้

3. ตัวควบคุมแบบดิจิตอล $D(z)$ ต้องสามารถเป็นไปได้ เช่น ต้องไม่มีจำนวนซีโร่มากกว่าจำนวนโพล

จากรูปที่ 2.7 ฟังก์ชั่นถ่ายโอนแบบปิดลูปคือ

$$M(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G_P(z)}{1 + D(z)G_P(z)} \tag{2.20}$$

เราจะได้

$$D(z) = \frac{1}{G_P(z)} \frac{M(z)}{1 - M(z)} \tag{2.21}$$

ค่าผิดพลาดจะเขียนได้เป็น

$$E(z) = R(z) - C(z)$$

$$= R(z)[1 - M(z)] = \frac{R(z)}{1 + D(z)G_P(z)} \tag{2.22}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนแบบปิดลูป $M(z)$ จะมีรูปแบบตามชนิดของสัญญาณป้อนเข้าดังนี้

สัญญาณแบบสเตป (Step)

$$R(z) = \frac{z}{z-1} \qquad\qquad M(z) = \frac{1}{z^n} \tag{2.23}$$

สัญญาณแบบแรมพ์ (Ramp)

$$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \qquad\qquad M(z) = \frac{2z-1}{z^{n+1}} \tag{2.24}$$

สัญญาณแบบพาราโบลิก (Parabolic)

$$R(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3} \qquad\qquad M(z) = \frac{3z^2 - 3z + 1}{z^{n+2}} \tag{2.25}$$

เมื่อ n คือค่าของจำนวนโพลลบด้วยจำนวนซีโร่ของ $G_p(z)$

2. โพลและซีโร่ของระบบอยู่บนหรืออยู่นอกวงกลมหนึ่งหน่วย

ในกรณีนี้การนำเอาวิธีข้างต้น คือ การกำจัดค่าโพลและซีโร่ของ $G_p(z)$ ด้วยซีโร่และโพลของตัวควบคุม $D(z)$ เมื่อ $G_p(z)$ มีค่าโพลและซีโร่อยู่บนหรือนอกวงกลมหนึ่งหน่วย จะไม่สามารถกำจัดได้โดยสมบูรณ์ ซึ่งเกิดขึ้นในทางปฏิบัติ และทำให้เกิดระบบปิดลูปที่ไม่เสถียรขึ้นได้

กำหนดให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่ถูกควบคุมเขียนได้ดังนี้

$$G_P(z) = \frac{\prod_{i=1}^{K}\left(1 - z_i z^{-1}\right)}{\prod_{j=1}^{L}\left(1 - p_j z^{-1}\right)} A(z) \tag{2.26}$$

โดยที่ z_i, $i=1,2,\ldots,K$ และ p_j, $j=1,2,\ldots,L$ เป็นซีโร่และโพลของ $G_p(z)$ ที่อยู่นอกวงกลมหนึ่งหน่วย และ $A(z)$ เป็นเศษส่วนของฟังก์ชัน z^{-1} ที่โพลและซีโร่อยู่ในวงกลมหนึ่งหน่วย สมการของตัวควบคุมคือ

$$D(z) = \frac{\prod_{j=1}^{L}\left(1-p_j z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{K}\left(1-z_i z^{-1}\right)} \frac{M(z)}{A(z)[1-M(z)]} \tag{2.27}$$

จะเห็นว่า $M(z)$ ต้องประกอบด้วย $\prod_{i=1}^{K}\left(1-z_i z^{-1}\right)$

และ $-M(z)$ ต้องประกอบด้วย $\prod_{j=1}^{L}\left(1-p_j z^{-1}\right)$

โดยทั่วไป $M(z)$ และ $-M(z)$ มีรูปแบบดังนี้

$$M(z) = \left(1-z_i z^{-1}\right)\left(M_k z^{-k} + M_{k+1} z^{-k-1} + \ldots\right) \tag{2.28}$$

$$-M(z) = \left(1-p_j z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)^P\left(1+a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots\right) \tag{2.29}$$

ค่า k จะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ n โดยที่ n คือ จำนวนโพลที่มากกว่าจำนวนซีโร่ของระบบ $G_p(z)$ กำลังของพจน์ $(1 - z^{-1})$, P มีค่าเท่ากับ กำลังของโพลของฟังก์ชันที่ป้อนเข้า ($R(z)$) หรือเท่ากับ กำลังของโพลของระบบ ($G_p(z)$) ที่ $z = 1$ แล้วแต่ว่าค่าใดจะมากกว่ากัน

การเลือกจำนวนตัวที่ไม่ทราบค่ามีข้อกำหนดดังนี้

1. กำลัง(Order)ของโพลของ $M(z)$ และ $-M(z)$ ต้องเท่ากัน
2. จำนวนตัวที่ไม่ทราบค่าโดยรวมใน $M_k, M_{k+1}, \ldots$ และ $a_1, a_2, \ldots$ ต้องเท่ากับกำลังของ $M(z)$ ดังนั้น ค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้สามารถหาได้โดยไม่ขึ้นแก่กัน