รากฐานของเซมิริงที่เป็นอันดับได้บางส่วนบางชนิด

นางสาว จิราภา พยัฆกุล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2534

ISBN 974-578-475-3

FOUNDATIONS OF SOME PARTIALLY ORDERED SEMIRINGS

Miss Jirapha Phayakul

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1991

ISBN 974-578-475-3

Thesis Title	Foundations of Some Partially Ordered Semirings
By	Miss Jirapha Phayakul
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

Thavorn Vajrabhaya

.... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D.)

Thesis Committee

Yupaporn Kemprasit .... Chairman

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

Sidney S. Mitchell .... Thesis Advisor

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

Wanida Hemakul .... Member

(Associate Professor Wanida Hemakul Ph.D.)

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

จิราภา พยัฆกุล : รากฐานของเซมิริงที่เป็นอันดับได้บางส่วนบางชนิด (FOUNDATIONS OF SOME PARTIALLY ORDERED SEMIRINGS) : อ.ที่ปรึกษา : ดร.ซิดนีย์ เอส.มิทเชลล์, 124 หน้า. ISBN 974-578-475-3

เราจะเรียกสิ่งทั้งสี่ที่เป็นอันดับ $(S,+,\cdot,\leq)$ เมื่อ $(S,+,\cdot)$ เป็นเซมิเนียร์ริงแจกแจงได้ และ $\leq$ เป็นอันดับบางส่วนบน S ว่า เรโชเซมิเนียร์ริงแจกแจงได้ที่เป็นอันดับได้บางส่วน ถ้า $(S,\cdot)$ เป็นกรุป และสำหรับ $x,y,z \in S$ ถ้า $x < y$ แล้ว $x+z \leq y+z$, $z+x \leq z+y$, $xz \leq yz$ และ $zx \leq zy$, เนียร์ริงแจกแจงได้ที่เป็นอันดับได้บางส่วน ถ้า $(S,+)$ เป็นกรุปและสำหรับ $x,y,z \in S$, 1) ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x+z \leq y+z$ และ $z+x \leq z+y$ และ 2) ถ้า $x \leq y$ และ $z \geq 0$ แล้ว $xz \leq yz$ และ $zx \leq zy$, เซมิเนียร์ฟิลด์แจกแจงได้ที่เป็นอันดับชนิดศูนย์ ถ้า $(S,\cdot)$ เป็นกรุปที่มีศูนย์ 0 ซึ่งเป็นเอกลักษณ์ของการบวกด้วย และ $\leq$ เป็นอันดับโดยสิ้นเชิงซึ่งมีคุณสมบัติว่า สำหรับ $x,y,z \in S$ 1) ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x+z \leq y+z$ และ $z+x \leq z+y$ 2) ถ้า $x \leq y$ และ $z \geq 0$ แล้ว $xz < yz$ และ $zx < zy$ และ $0 < 1$ และเซมิเนียร์ฟิลด์แจกแจงได้ที่เป็นอันดับชนิดอนันต์ ถ้า $(S,\cdot)$ เป็นกรุปที่มีศูนย์ ∞ ซึ่งเป็นศูนย์ของการบวกด้วยและ $\leq$ เป็นอันดับโดยสิ้นเชิงซึ่งมีคุณสมบัติว่าสำหรับ $x,y,z \in S$, ถ้า $x \leq y$ และ $z \leq \infty$ แล้ว $x+z < y+z$, $z+x \leq z+y$, $xz < yz$ และ $zx < zy$ และ $1 < \infty$ เราจะเรียกอันดับบางส่วนซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติข้างต้นว่า อันดับบางส่วนที่เข้ากันได้ จะเรียกสับเซต A ของเรโชเซมิเนียร์ริงแจกแจงได้ D ว่า โอ-เซต ของ D ถ้า 1) $A \cap A^{-1} = \{1\}$ 2) $A^2 \subseteq A$ 3) $xAx^{-1} \subseteq A$ สำหรับทุก $x \in D$ 4) $(x+1)^{-1}(x+a),(1+x)^{-1}(a+x) \in A$ สำหรับทุก $x \in D$, $a \in A$ จะเรียกสับเซต A ของเนียร์ริงแจกแจงได้ R ว่า โอ-เซต ของ R ถ้า 1) $A \cap (-A) = \{0\}$ 2) $A+A \subseteq A$ 3) $A^2 \subseteq A$ 4) $-x+A+x \subseteq A$ สำหรับทุก $x \in R$

ทฤษฎีบท 1 สำหรับเรโชเซมิเนียร์ริงแจกแจงได้ [เนียร์ริงแจกแจงได้] D ใด ๆ เซตของอันดับบางส่วนที่เข้ากันได้ทั้งหมดของ D ไอโซมอร์ฟิคที่เป็นอันดับกับเซตของ โอ-เซต ทั้งหมดของ D ภายใต้อันดับการเป็นสับเซต

ทฤษฎีบท 2 สำหรับเซมิเนียร์ริงแจกแจงได้ P ใด ๆ ซึ่งมีเอกลักษณ์ของการคูณ 1 จะมีเรโชเซมิเนียร์ริงแจกแจงได้ที่เป็นอันดับได้บางส่วน $(D,\leq)$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $P \cong \{x \in D \mid x \geq 1\}$ เมื่อและต่อเมื่อ 1) P ตัดออกได้ภายใต้การคูณ 2) $Pa = aP$ สำหรับทุก $a \in P$ 3) สำหรับ $a,b \in P$ ถ้า $ab = 1$ แล้ว $a = b = 1$ 4) $(a+1)^{-1}(a+b),(1+a)^{-1}(b+a) \in P$ สำหรับทุก $a,b \in P$

ทฤษฎีบท 3 เรโชเซมิเนียร์ริงแจกแจงได้ที่เป็นอันดับบริบูรณ์ไอโซมอร์ฟิคที่เป็นอันดับกับอันใดอันหนึ่งต่อไปนี้
$(\{1\},+,\cdot,\leq)$, $(\mathbb{R}^+,+,\cdot,\leq)$, $(\mathbb{R}^+,+,\cdot,\leq_{opp})$, $(\mathbb{R}^+,\min,\cdot,\leq)$, $(\mathbb{R}^+,\max,\cdot,\leq)$, $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},\min,\cdot,\leq)$, $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},\max,\cdot,\leq)$, $(\mathbb{R}^+,+_\ell,\cdot,\leq)$ เมื่อ $x +_\ell y = x$, $(\mathbb{R}^+,+_r,\cdot,\leq)$ เมื่อ $x +_r y = y$, $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},+_\ell,\cdot,\leq)$, $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},+_r,\cdot,\leq)$

ทฤษฎีบท 4 สำหรับเซมิเนียร์ริงแจกแจงได้ P ใด ๆ ซึ่งมีเอกลักษณ์ของการบวก 0 จะมีเนียร์ริงแจกแจงได้ที่เป็นอันดับได้บางส่วน $(R,\leq)$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $P \cong \{x \in R \mid x \geq 0\}$ เมื่อและต่อเมื่อ 1) P ตัดออกได้ภายใต้การบวก 2) $P+a = a+P$ สำหรับทุก $a \in P$ 3) สำหรับ $a,b \in P$ ถ้า $a+b = 0$ แล้ว $a = b = 0$ 4) $ab+cd = cd+ab$ สำหรับทุก $a,b,c,d \in P$

ทฤษฎีบท 5 เซมิเนียร์ฟิลด์แจกแจงได้ที่เป็นอันดับบริบูรณ์ชนิดศูนย์ไม่สลับที่ได้ภายใต้การบวก ก็ไอโซมอร์ฟิคที่เป็นอันดับกับอันใดอันหนึ่งต่อไปนี้ 1) $(\mathbb{R},+_1,\cdot,\leq)$ เมื่อ $x +_1 y = x$ ถ้า $|y|<|x|$ และ $x +_1 y = y$ ถ้า $|x| \leq |y|$ 2) $(\mathbb{R},+_2,\cdot,\leq)$ เมื่อ $x +_2 y = x$ ถ้า $|y| \leq |x|$ และ $x +_2 y = y$ ถ้า $|x|<|y|$
3) $(\{-1,0,1\},+_1,\cdot,\leq)$ 4) $(\{-1,0,1\},+_2,\cdot,\leq)$
5) $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \cup \{-2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},+_1,\cdot,\leq)$
6) $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \cup \{-2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},+_2,\cdot,\leq)$ (ได้มีการจำแนกกลุ่มของเซมิเนียร์ฟิลด์แจกแจงได้ที่เป็นอันดับบริบูรณ์ชนิดศูนย์ซึ่งมีการสลับที่ได้ภายใต้การบวกไว้แล้วใน [3])

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต จิราภา พยัฆกุล

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2533 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Sidney S. Mitchell

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ....

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

JIRAPHA PHAYAKUL : FOUNDATIONS OF SOME PARTIALLY ORDERED SEMIRINGS. THESIS ADVISOR : DR.SIDNEY S.MITCHELL, PH.D. 124 pp. ISBN 974-578-475-3

A quadruple $(S,+,\cdot,\leq)$ where $(S,+,\cdot)$ is a distributive seminear-ring and $\leq$ is a partial order on S is called a partially ordered distributive ratio seminear-ring if $(S,\cdot)$ is a group and for any $x,y,z \in S$, $x \leq y$ implies $x+z \leq y+z$, $z+x \leq z+y$, $xz \leq yz$ and $zx \leq zy$, a partially ordered distributive near-ring if $(S,+)$ is a group and for any $x,y,z \in S$, 1) $x \leq y$ implies $x+z \leq y+z$ and $z+x \leq z+y$ 2) $x \leq y$ and $z > 0$ imply $xz \leq yz$ and $zx \leq zy$, an ordered distributive seminear-field of zero type if $(S,\cdot)$ is a group with zero 0 which is also an additive identity and $\leq$ is a total such that for any $x,y,z \in S$, 1) $x \leq y$ implies $x+z \leq y+z$ and $z+x \leq z+y$ 2) $x \leq y$ and $z \geq 0$ imply $xz \leq yz$ and $zx \leq zy$ and $0 < 1$ and an ordered distributive seminear-field of infinity type if $(S,\cdot)$ is a group with zero ∞ which is also an additive zero and $\leq$ is a total such that for any $x,y,z \in S$, $x < y$ and $z \leq \infty$ imply $x+z \leq y+z$, $z+x \leq z+y$, $xz \leq yz$ and $zx \leq zy$ and $1 < \infty$. We call partial order satisfying the above properties compatible partial order. A subset A of a distributive ratio seminear-ring D is called an O-set of D if 1) $A \cap A^{-1} = \{1\}$. 2) $A^2 \subseteq A$. 3) $xAx^{-1} \subseteq A$ for all $x \in D$. 4) $(x+1)^{-1}(x+a),(1+x)^{-1}(a+x) \in A$ for all $x \in D$, $a \in A$. A subset A of a distributive near-ring R is called an O-set of R if 1) $A \cap (-A) = \{0\}$ 2) $A+A \subseteq A$ 3) $A^2 \subseteq A$ 4) $-x+A+x \subseteq A$ for all $x \in R$.

Theorem 1. Let D be a distributive ratio seminear-ring [distributive near-ring]. Then the set of all compatible partial orders on D and the set of all O-sets of D are order isomorphic under set inclusion.

Theorem 2. Let P be a distributive seminear-ring with multiplicative identity 1. Then there exists a partially ordered distributive ratio seminear-ring $(D,\leq)$ such that $P \cong \{x \in D \mid x \geq 1\}$ iff 1) P is multiplicatively cancellative 2) $Pa = aP$ for all $a \in P$ 3) for any $a,b \in P$, $ab = 1$ implies $a = b = 1$ 4) $(a+1)^{-1}(a+b),(1+a)^{-1}(b+a) \in P$ for all $a,b \in P$.

Theorem 3. A complete ordered distributive ratio seminear-ring is either order isomorphic to $(\{1\},+,\cdot,\leq)$, $(\mathbb{R}^+,+,\cdot,\leq)$, $(\mathbb{R}^+,+,\cdot,\leq_{opp})$, $(\mathbb{R}^+,\min,\cdot,\leq)$, $(\mathbb{R}^+,\max,\cdot,\leq)$, $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},\min,\cdot,\leq)$, $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},\max,\cdot,\leq)$, $(\mathbb{R}^+,+_\ell,\cdot,\leq)$ where $x +_\ell y = x$, $(\mathbb{R}^+,+_r,\cdot,\leq)$ where $x +_r y = y$, $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},+_\ell,\cdot,\leq)$ or $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},+_r,\cdot,\leq)$.

Theorem 4. Let P be a distributive seminear-ring with additive identity 0. Then there exists a partially ordered distributive near-ring $(R,\leq)$ such that $P \cong \{x \in R \mid x \geq 0\}$ iff 1) P is additively cancellative 2) $P+a = a+P$ for all $a \in P$ 3) for any $a,b \in P$, $a+b = 0$ implies $a = b = 0$ 4) $ab+cd = cd+ab$ for all $a,b,c,d \in P$.

Theorem 5. A complete ordered distributive seminear-field of zero type is either additively commutative or order isomorphic to either 1) $(\mathbb{R},+_1,\cdot,\leq)$ where $x +_1 y = x$ if $|y|<|x|$ and $x +_1 y = y$ if $|x| \leq |y|$ 2) $(\mathbb{R},+_2,\cdot,\leq)$ where $x +_2 y = x$ $|y| \leq |x|$ and $x +_2 y = y$ if $|x|<|y|$ 3) $(\{-1,0,1\},+_1,\cdot,\leq)$ 4) $(\{-1,0,1\},+_2,\cdot,\leq)$ 5) $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \cup \{-2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},+_1,\cdot,\leq)$ or 6) $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \cup \{-2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},+_2,\cdot,\leq)$ (The additively commutative case has been classified in [3]).

ภาควิชา คณิตศาสตร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2533

ลายมือชื่อนิสิต จิราภา พยัคฆกุล

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Sidney S. Mitchell

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ....

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Dr. Sidney S. Mitchell, my thesis supervisor, for his untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also, I would like to thank all of the lectures for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my father, mother and sister for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS

page

ABSTRACT IN THAI iv

ABSTRACT IN ENGLISH v

ACKNOWLEDGEMENT vi

INTRODUCTION 1

CHAPTER

I PRELIMINARIES 3

II PARTIALLY ORDERED DISTRIBUTIVE RATIO SEMINEAR-RINGS 24

III PARTIALLY ORDERED DISTRIBUTIVE NEAR-RINGS 67

IV PARTIALLY ORDERED DISTRIBUTIVE SEMINEAR-FIELDS 83

REFERENCES 123

VITA 124