บทที่ 3

ทฤษฎีพื้นฐานสำหรับวิธีรีแล็กเซชันแบบลากรองจ์

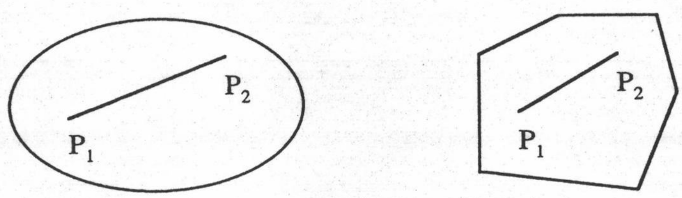
3.1 การวิเคราะห์คอนเว็ก (Convex Analysis) [17,20]

แนวความคิดของคอนเว็ก(Convex) เป็นสิ่งที่สำคัญมากในการศึกษาปัญหาออปติไมเซชัน ในหัวข้อนี้จะพิจารณาเกี่ยวกับลักษณะความเป็นคอนเว็กของปัญหา ซึ่งจะกำหนดอยู่ในเทอมของเซตคอนเว็กและฟังก์ชันคอนเว็ก

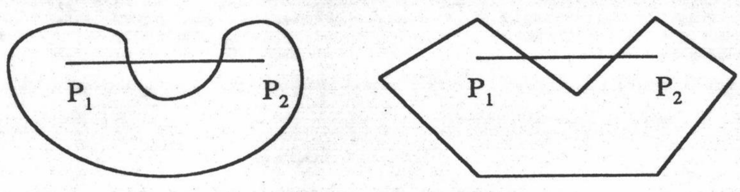
3.1.1 เซตคอนเว็ก (Convex sets)

เซตคอนเว็ก S เป็นที่ซึ่งเก็บรวบรวมจุดต่างๆ (เวกเตอร์ x) และมีคุณสมบัติดังนี้คือ ถ้า P_1 และ P_2 เป็นจุดใดๆในเซต S แล้ว ส่วนของเส้นตรง P_1 - P_2 ทั้งหมดอยู่ในเซต S แสดงตัวอย่างของเซตคอนเว็กและเซตไม่คอนเว็ก (nonconvex sets) ในรูปที่ 3.1

ก. คอนเว็ก



ข. ไม่คอนเว็ก



รูปที่ 3.1 ลักษณะของเซตคอนเว็ก

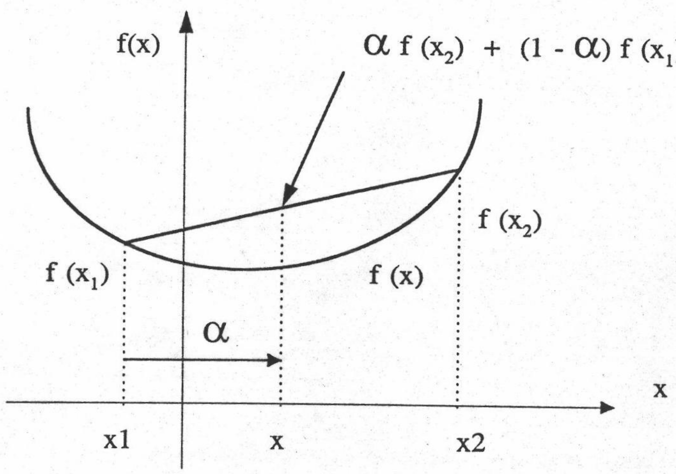
โดยทั่วไปสำหรับพื้นที่ n มิติแล้ว ส่วนของเส้นตรงระหว่างสองจุดใดๆของเวกเตอร์ $x^{(1)}$ และ $x^{(2)}$ สามารถกำหนดได้ด้วยความสัมพันธ์ดังนี้

$$x = \alpha x^{(2)} + (1 - \alpha) x^{(1)} \qquad (3.1.1)$$

โดยที่ $0 \leq \alpha \leq 1$ และถ้าส่วนของเส้นตรงทั้งหมดดังแสดงในสมการ (3.1.1) อยู่ภายในเซต S แล้ว S เป็นเซตคอนเว็ก

3.1.2 ฟังก์ชันคอนเว็ก (Convex functions)

ฟังก์ชันคอนเว็ก f(x) ต้องกำหนดภายในเซตคอนเว็ก นั่นคือ ตัวแปรอิสระ x ต้องอยู่ในเซตคอนเว็ก ฟังก์ชัน f(x) เรียกว่ามีคุณสมบัติคอนเว็กภายในเซตคอนเว็ก S ถ้าฟังก์ชันมีส่วนที่อยู่ข้างล่างเส้นตรงซึ่งเป็นเส้นระหว่างสองจุดบนส่วนโค้ง f(x) โดยรูปที่ 3.2 จะแสดงให้เห็นถึงลักษณะทางเรขาคณิตของฟังก์ชันคอนเว็ก



รูปที่ 3.2 ลักษณะของฟังก์ชันคอนเว็ก

ด้วยการใช้หลักเรขาคณิต ดังนั้นจากรูปที่ 3.2 จะได้ว่านิยามของฟังก์ชันคอนเว็กสามารถระบุได้ด้วยอสมการ $f(x) \leq \alpha f(x_2) + (1 - \alpha) f(x_1)$ และเนื่องจาก $x = \alpha x_2 + (1 - \alpha) x_1$ ดังนั้นจะได้อสมการดังนี้

$$f(\alpha x_2 + (1 - \alpha) x_1) \leq \alpha f(x_2) + (1 - \alpha) f(x_1) \qquad (3.1.2)$$

โดยที่ $0 \leq \alpha \leq 1$ ซึ่งนิยามสามารถกำหนดให้ใช้ได้ทั่วไปสำหรับฟังก์ชันของ n ตัวแปรดังนี้ ฟังก์ชัน f(x) ซึ่งกำหนดภายในเซตคอนเว็ก S จะมีลักษณะคอนเว็ก ถ้าฟังก์ชันสอดคล้องกับอสมการ ดังต่อไปนี้

$$f(\alpha x^{(2)} + (1-\alpha) x^{(1)}) \leq \alpha f(x^{(2)}) + (1-\alpha) f(x^{(1)}) \qquad (3.1.3)$$

โดยที่ $0 \leq \alpha \leq 1$ และสองจุดใดๆของเวกเตอร์ $x^{(1)}$ และ $x^{(2)}$ อยู่ในเซต S

สมการ (3.1.2) หรือ (3.1.3) จะให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับลักษณะคอนเว็กของฟังก์ชัน อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติแล้วยังยากที่จะนำไปใช้ เพราะว่าจะต้องตรวจสอบคู่ของจุดต่างๆจำนวนมาก แต่ทฤษฏีต่อไปนี้จะให้แนวทางที่ง่ายกว่าในการที่จะตรวจสอบลักษณะคอนเว็กของฟังก์ชัน

ทฤษฏีตรวจสอบลักษณะคอนเว็กของฟังก์ชัน ฟังก์ชันของ n ตัวแปร $f(x_1, x_2, .., x_n)$ ซึ่งกำหนดในเซตคอนเว็ก S จะเป็นฟังก์ชันคอนเว็ก ถ้าและเพียงแต่ถ้า Hessian matrix ของฟังก์ชันเป็น positive semidefinite หรือ positive definite ที่ทุกจุดในเซต S โดยที่ถ้าเป็น positive definite สำหรับทุกจุดในเซตแล้ว f เรียกว่าเป็นฟังก์ชันคอนเว็กแบบ strict ทฤษฏีนี้สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้การขยายของเทย์เลอร์สำหรับฟังก์ชัน f(x) แล้วใช้นิยามของสมการ(3.1.2) และ (3.1.3)

3.2 ปัญหาดูอัลแบบลากรองจ์ (Lagrangian Dual Problem) [17]

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงรูปแบบของปัญหาทั่วไปและวิธีการกำหนดเป็นปัญหาดูอัล

3.2.1 การกำหนดปัญหาและนิยามเบื้องต้น

พิจารณาปัญหาการโปรแกรมไม่เชิงเส้น P ดังต่อไปนี้ ซึ่งเรียกว่า ปัญหาพรีมัล (Primal problem)

ปัญหาพรีมัล P

ค่าน้อยที่สุด $f(x)$

ภายใต้เงื่อนไข $g_i(x) \leq 0$ สำหรับ $i = 1,\ldots,m$

$h_i(x) = 0$ สำหรับ $i = 1,\ldots,l$

$x \in X$

โดยที่ $f(x)$, $g_i(x)$, $h_i(x)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนด และ x เป็นเวกเตอร์ขนาด n ปัญหาที่กำหนดนี้ต้องการหาผลลัพธ์ของค่าตัวแปร $x_1,...,x_n$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดและขณะเดียวกันทำให้ $f(x)$ มีค่าน้อยที่สุด

ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย (objective function) $g(x)$ เป็นฟังก์ชันเงื่อนไขแบบอสมการ (inequality constraint) และ $h(x)$ เป็นฟังก์ชันเงื่อนไขแบบสมการ (equality constraint) และเวกเตอร์ x ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดเรียกว่าผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (feasible solution) ถ้าได้ค่า $\underline{x}$ ซึ่งทำให้ $f(x) \geq f(\underline{x})$ สำหรับแต่ละค่า x ที่เป็นไปได้ ค่า $\underline{x}$ เรียกว่าค่าที่เหมาะสม (optimum) ซึ่งเป็นผลลัพธ์ของปัญหาที่ต้องการ

ปัญหาการโปรแกรมไม่เชิงเส้นยังสามารถกำหนดเป็น ปัญหาการหาค่ามากที่สุด และเงื่อนไขบังคับแบบอสมการอยู่ในรูปแบบ $g_i(x) \geq 0$ ในกรณีที่ฟังก์ชันเป้าหมายเป็นแบบเชิงเส้นและทุกเงื่อนไขบังคับเป็นสมการหรืออสมการเชิงเส้น ปัญหาข้างต้นเรียกว่าเป็นปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น

ปัญหาพรีมัลข้างต้นอาจสามารถทำการคำนวณผ่านรูปแบบปัญหาที่มีความสัมพันธ์กันซึ่งเรียกว่าปัญหาดูอัล (Dual problem) ในวิธีการกำหนดดูอัลแบบต่างๆนั้น ดูเหมือนว่าปัญหาดูอัลแบบลากรองจ์เพื่อแก้ปัญหายูนิตคอมมิตเมนต์จะได้รับความสนใจมากที่สุด ทำให้มีกระบวนวิธีการคำนวณ (Algorithm) หลายแบบ

3.2.2 <u>การกำหนดปัญหาดูอัล</u>

สำหรับการหาผลลัพธ์ของปัญหาเชิงเส้นขนาดใหญ่ (Large scale linear problem) และปัญหาไม่เชิงเส้นทั้งแบบคอนเว็กและไม่คอนเว็ก เราอาจอาศัยวิธีการแก้ปัญหาดูอัลแบบลากรองจ์ D (Lagrangian dual problem D) ซึ่งเป็นคู่ของปัญหาพรีมัลข้างต้นแทนได้ ดังต่อไปนี้

ปัญหาดูอัล แบบลากรองจ์ D

ค่ามากที่สุด $\theta(u,v)$

ภายใต้เงื่อนไข $u \geq 0$

โดยที่

$$\theta(u,v) = \inf \{ f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{l} v_i h_i(x) \} \quad , \quad x \in X$$

ในสมการ $\theta(u,v)$ นั้น **เงื่อนไข** $g_i(x)$ และ $h_i(x)$ ถูกรวมเข้ากับฟังก์ชันเป้าหมาย (Objective function) โดยใช้ตัวคูณแบบลากรองจ์ (Lagrangian multiplier) u_i และ v_i ทั้งนี้ตัวคูณ u_i ซึ่งเกี่ยวข้องกับเงื่อนไข $g_i(x) \leq 0$ จะไม่เป็นค่าลบ ในขณะที่เครื่องหมายของตัวคูณ v_i ซึ่งเกี่ยวข้องกับสมการเงื่อนไข $h_i(x) = 0$ ไม่มีข้อจำกัด

เนื่องจากปัญหาดูอัลเป็นการหาค่ามากที่สุดของค่าอินฟีมัม (Infimum) โดยที่ค่าอินฟีมัมเป็นค่าสูงที่สุดของขอบเขตล่าง (greatest lower bound) บางครั้งจึงเรียกเป็น ปัญหาดูอัลแบบ max-min (max-min dual problem)

ปัญหาพรีมัลและปัญหาดูอัลแบบลากรองจ์ จะเขียนในรูปแบบของเวกเตอร์ เพื่อความสะดวกในการอธิบายและพิสูจน์ทฤษฎีในหัวข้อต่อไป โดยที่ $g(x)$, $h(x)$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันซึ่งมี สมาชิกที่ i เป็น $g_i(x)$, $h_i(x)$ จะได้รูปแบบดังนี้

ปัญหาพรีมัล P

ค่าน้อยที่สุด $f(x)$

ภายใต้เงื่อนไข $g(x) \leq 0$

$h(x) = 0$

$x \in X$

ปัญหาดูอัล แบบลากรองจ์ D

ค่ามากที่สุด $\theta(u, v)$

ภายใต้เงื่อนไข $u \geq 0$

โดยที่ $\theta(u,v) = \inf \{ f(x) + u^t g(x) + v^t h(x) \}$

$x \in X$

จากปัญหาการโปรแกรมไม่เชิงเส้นที่กำหนดให้ สามารถสร้างปัญหาดูอัลแบบลากรองจ์ได้หลายแบบ ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขบังคับ ซึ่งถูกจัดรูปแบบเป็น $g(x) \leq 0$ และ $h(x) = 0$ และเงื่อนไขบังคับที่กำหนดด้วยเซต X ซึ่งการเลือกสิ่งเหล่านี้จะมีผลในการคำนวณและการปรับค่าของฟังก์ชันดูอัล θ ในระหว่างการแก้ปัญหาดูอัล อย่างไรก็ตามการเลือกเซต X ที่เหมาะสมจะขึ้นอยู่กับโครงสร้างของปัญหานั้น

3.3 ทฤษฎีดูอัล (Duality Theorems) [17]

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่าง ปัญหาพรีมัลและปัญหาดูอัล โดยสัญลักษณ์สำคัญที่ใช้ในทฤษฎีดูอัลต่อไปนี้ ประกอบด้วย

1) ค่ามากที่สุดของขอบเขตล่าง (greatest lower bound) หรือ อินฟีมัม (infimum) กำหนดด้วย $\inf \{ x : x \in S \}$
2) ค่าน้อยที่สุดของขอบเขตบน (least upper bound) หรือ ซัพพรีมัม (supremum) กำหนดด้วย $\sup \{ x : x \in S \}$

3.3.1 ทฤษฎีดูอัล แบบอ่อนแอ (Weak Duality Theorem)

ให้ x เป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (feasible solution) ของปัญหา P โดยที่ $x \in X$, $g(x) \leq 0$ และ $h(x) = 0$ ในทำนองเดียวกันให้ (u,v) เป็นค่าผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ ของปัญหาดูอัล D โดยที่ $u \geq 0$ แล้ว

$$f(x) \geq \theta(u,v) \tag{3.3.1}$$

พิสูจน์

ด้วยนิยามของ θ และ เนื่องจาก $x \in X$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \theta(u,v) &= \inf \{ f(y) + u^t g(y) + v^t h(y) : y \in X \} \\ &\leq f(x) + u^t g(x) + v^t h(x) \leq f(x) \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

เนื่องจาก $u \geq 0$, $g(x) \leq 0$ และ $h(x) = 0$

การพิสูจน์ทฤษฎีนี้ จึงสมบูรณ์

จากทฤษฎีดูอัลแบบอ่อนแอ และบทพิสูจน์แสดงให้เห็นว่า ค่าเป้าหมาย (objective value) ของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ใดๆ จากปัญหาดูอัล จะเป็นขอบเขตล่าง (lower bound) ของค่าเป้าหมายของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ใดๆ จากปัญหาพรีมัล

ช่องว่างของดูอัล (Duality Gap)

จากผลของทฤษฎีดูอัลแบบอ่อนแอ ค่าที่เหมาะสม (optimum) ของปัญหาพรีมัลจะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าที่เหมาะสมของปัญหาดูอัล ซึ่งถ้าเงื่อนไขบังคับแบบอสมการ (inequality constraint) เป็นจริงแล้ว จะมีช่องว่างของดูอัล

3.3.2 <u>ทฤษฎีดูอัลแบบแข็งแรง (Strong Duality Theorem)</u>

ให้ X เป็นเซตคอนเว็กที่ไม่ว่าง ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันคอนเว็ก และให้ h มีความเกี่ยวเนื่องกัน นั้นคือ h อยู่ในฟอร์ม $h(x) = Ax - b$ ถ้าคุณสมบัติของเงื่อนไขบังคับ ต่อไปนี้เป็นจริง คือมี $\hat{x} \in X$ ที่ซึ่ง $g(\hat{x}) < 0$ และ $h(\hat{x}) = 0$ และ $0 \in \text{int } h(X)$ โดยที่ $h(X) = \{ h(x) : x \in X \}$ แล้ว

$$\inf \{ f(x) : x \in X , g(x) \leq 0 , h(x) = 0 \} = \sup \{ \theta(u,v) : u \geq 0 \} \quad (3.3.3)$$

นั้นคือ ถ้า inf มีค่าจำกัดแล้วค่า $\sup \{ \theta(u,v) : u \geq 0 \}$ ได้รับค่าที่ $(\underline{u},\underline{v})$ โดย $\underline{u} > 0$ ถ้า inf ได้รับค่าที่ $\underline{x}$ แล้ว $\underline{u}^t g(\underline{x}) = 0$

พิสูจน์

ให้ $\gamma = \inf \{ f(x) : x \in X , g(x) \leq 0 , h(x) = 0 \}$ ซึ่งถ้า $\gamma = -\infty$ แล้วจากผลของทฤษฎีดูอัลแบบอ่อนแอจะได้ว่า $\sup \{ \theta(u,v) : u \geq 0 \} = -\infty$ ดังนั้นสมการ (3.3.3) จึงเป็นจริงในกรณีดังกล่าว ต่อไปสมมุติว่า γ มีค่าจำกัด และพิจารณาสมการต่อไปนี้

$$f(x) - \gamma < 0 , g(x) \leq 0 , h(x) = 0 , x \in X$$

ด้วยนิยามของ γ สมการนี้ไม่มีคำตอบ (no solution) มีเวกเตอร์ซึ่งไม่เป็นศูนย์ (u_0,u,v) โดยมี $(u_0,u) \geq 0$ ดังนั้น

$$u_0 [f(x) - \gamma] + u^t g(x) + v^t h(x) \geq 0 \quad \text{สำหรับทุกค่า } x \in X \quad (3.3.4)$$

จะแสดงให้เห็นว่า $u_0 > 0$ ด้วยการกำหนดสิ่งที่ขัดแย้งกัน คือ สมมุติ $u_0 = 0$ และมีค่า $\hat{x} \in X$ ซึ่ง $g(\hat{x}) < 0$ และ $h(\hat{x}) = 0$ แทนที่ค่าเหล่านี้ในสมการ (3.3.4) จะได้ว่า $u^t g(\hat{x}) \geq 0$ เนื่องจาก $g(\hat{x}) < 0$ และ $u \geq 0$ ดังนั้น $u^t g(\hat{x}) \geq 0$ จะเป็นไปได้เพียงแต่ค่า $u = 0$ แต่จากสมการ (3.3.4) เมื่อ $u_0 = 0$ และ $u = 0$ จะได้ว่า $v^t h(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่า $x \in X$ แต่เนื่องจาก $0 \in \text{int } h(X)$ เราสามารถนำค่า $x \in X$ ซึ่ง $h(x) = -\lambda v$ โดย $\lambda > 0$ ดังนั้น $0 \leq v^t h(x) = -\lambda \| v \|^2$ จะได้ว่า $v = 0$ ฉะนั้นเมื่อเรากำหนดให้มีค่า $u_0 = 0$ จะได้ว่า $(u_0, u, v) = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $u_0 > 0$ เมื่อหารสมการ (3.3.4) ด้วย u_0 และกำหนดค่า u/u_0 และ v/u_0 ด้วย $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ ตามลำดับ จะได้สมการต่อไปนี้

$$f(x) + \underline{u}^t g(x) + \underline{v}^t h(x) \geq \gamma \quad \text{สำหรับทุกค่า } x \in X \quad (3.3.5)$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า $\theta(\underline{u},\underline{v}) = \inf \{ f(x) + \underline{u}^t g(x) + \underline{v}^t h(x) : x \in X \} \geq \gamma$

เพื่อให้การพิสูจน์นี้สมบูรณ์ สมมุติว่า $\underline{x}$ เป็นคำตอบที่เหมาะสมของปัญหาพรีมัล นั้นคือ $\underline{x} \in X$, $g(\underline{x}) \leq 0$, $h(\underline{x}) = 0$ และ $f(\underline{x}) = \gamma$ จากสมการ (3.3.5) ให้ค่า $x = \underline{x}$

เมื่อแทนค่าแล้วจะได้ว่า $\underline{u}^t g(\underline{x}) \geq 0$ แต่เนื่องจาก $\underline{u} \geq 0$ และ $g(\underline{x}) \leq 0$ ดังนั้น $\underline{u}^t g(\underline{x}) = 0$ การพิสูจน์ทฤษฎีนี้จึงสมบูรณ์

จากทฤษฎีดูอัลแบบแข็งแรง แสดงให้เห็นว่า ภายใต้การสมมุติความเป็นคอนเว็กอย่างเหมาะสมและภายใต้คุณสมบัติของเงื่อนไขบังคับ (constraint) จะได้ว่าค่าฟังก์ชันเป้าหมายที่เหมาะสมของปัญหาพรีมัลและปัญหาดูอัลมีค่าเท่ากัน

3.3.3 ทฤษฎีจุดแซดเดิล (Saddle Point Theorem)

ให้ X เป็นเซตที่ไม่ว่าง (nonempty set) และให้ f, g, h เป็นฟังก์ชัน สมมุติว่ามี $\underline{x} \in X$ และ $(\underline{u},\underline{v})$ ซึ่งค่า $\underline{u} \geq 0$ ดังนั้น

$$\varnothing(\underline{x},u,v) \leq \varnothing(\underline{x},\underline{u},\underline{v}) \leq \varnothing(x,\underline{u},\underline{v}) \qquad (3.3.6)$$

สำหรับทุกค่า $x \in X$ และทุกค่า (u,v) ซึ่งค่า $u \geq 0$ โดยที่ $\varnothing(x,u,v) = f(x) + u^t g(x) + v^t h(x)$ ทั้งนี้ $\underline{x}$ และ $(\underline{u},\underline{v})$ เป็นคำตอบของปัญหาพรีมัล P และปัญหาดูอัล D ตามลำดับ ในทางกลับกันสมมุติว่า x, f, g เป็นฟังก์ชันคอนเว็ก และ h อยู่ในรูปแบบ $h(x) = Ax - b$ และสมมุติว่า $0 \in \text{int}\, h(x)$ และมี $\hat{x} \in X$ โดยที่ $g(\hat{x}) < 0$ และ $h(\hat{x}) = 0$ ถ้า $\underline{x}$ เป็นคำตอบที่เหมาะสมของปัญหาเดิม P และจะมี $(\underline{u},\underline{v})$ โดยที่ $\underline{u} \geq 0$ ดังนั้นสมการ (3.3.6) เป็นจริง

3.4 คุณสมบัติของฟังก์ชันดูอัล (Properties of Dual Function) [17]

ในหัวข้อที่แล้ว ได้ศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่าง ปัญหาพรีมัลและปัญหาดูอัล โดยภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดในทฤษฎีดูอัล แสดงให้เห็นว่า ค่าที่เหมาะสมของปัญหาพรีมัลและปัญหาดูอัลมีค่าเท่ากัน ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่จะหาผลลัพธ์ของปัญหาพรีมัลทางอ้อม โดยเป็นการหาผลลัพธ์จากปัญหาดูอัล ในหัวข้อนี้จึงจะอธิบายคุณสมบัติของฟังก์ชันดูอัลเพื่อที่จะใช้ช่วยในการหาผลลัพธ์

จะสมมุติว่า เซต X เป็น Compact set ซึ่งจะทำให้การพิสูจน์ของหลายทฤษฎีง่ายขึ้น การสมมุตินี้เป็นการจำกัดค่าอย่างถูกต้อง โดยเหตุผลที่ว่า ถ้า X ไม่มีขอบเขต ย่อมสามารถเพิ่มขอบเขตล่าง (Lower bounds) และขอบเขตบน (Upper bounds) ที่เหมาะสมกับตัวแปร ซึ่งจะไม่มีผลกระทบต่อขอบข่ายที่เป็นไปได้ (feasible region) เพื่อความสะดวกจะรวมเวกเตอร์ u และ v เป็น w และรวมฟังก์ชัน g และ h เป็น β

3.4.1 <u>ทฤษฎี</u>

ให้ X เป็น nonempty compact set ใน E_n และให้ $f : E_n \rightarrow E_1$ และ $\beta : E_n \rightarrow E_{m+1}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว θ ถูกกำหนดด้วย

$$\theta(w) = \inf \{ f(x) + w^t \beta(x) \ : \ x \in X \}$$

จะได้ว่า θ (w) เป็นฟังก์ชัน concave บน E_{m+1}

พิสูจน์

เนื่องจาก f และ β เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ X เป็น Compact set θ มีค่าจำกัดบน E_{m+1} ให้ $w_1, w_2 \in E_{m+1}$ และให้ $\lambda \in (0,1)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\theta[\lambda w_1 + (1-\lambda) w_2] &= \inf \{ f(x) + [\lambda w_1 + (1-\lambda) w_2]^t \beta(x) \ : \ x \in X \} \\
&= \inf \{ \lambda [f(x) + w_1^t \beta(x)] + (1-\lambda)[f(x) + w_2^t \beta(x)] \ : \ x \in X \} \\
&\geq \lambda \inf \{ f(x) + w_1^t \beta(x) : \ x \in X \} + \\
&\quad (1-\lambda) \inf \{ f(x) + w_2^t \beta(x) : \ x \in X \} \\
&= \lambda \theta(w_1) + (1-\lambda) \theta(w_2)
\end{aligned}$$

นั้นคือ θ เป็นฟังก์ชัน concave และการพิสูจน์นี้สมบูรณ์

เนื่องจาก θ เป็นฟังก์ชัน concave จะได้ว่า local optimum ของ θ เป็น global optimum ด้วย ความยุ่งยากหลักในการหาผลลัพธ์ของปัญหาดูอัลก็คือ ฟังก์ชันดูอัลไม่ใช่จะคำนวณหาได้ง่ายนัก เนื่องจากจะคำนวณหา θ เพียงแต่หลังจากการหาผลลัพธ์ของค่าน้อยสุดของปัญหาย่อย (minimization subproblem) เท่านั้น