บทที่ 5

ตัวอย่างการทดสอบวิธีการกับระบบจำลอง

ในการทดสอบวิธีการกับระบบจำลอง จะเน้นผลที่จำเป็นในการใช้ออกแบบระบบควบคุม อันได้แก่

- ทรานสเฟอร์ฟังก์ชันในช่วงความถี่ใช้งานซึ่งในระบบเชิงกลโดยทั่วไปจะไม่เกินครึ่งหนึ่งของความถี่เรโซแนน (Resonane)
- ตำแหน่งที่เส้นแมกนิจูดตัดกับแกน 0 dB และเส้นเฟสตัดกับแกน -180 องศา ซึ่งใช้ในการหาเฟสมาร์จิน (Phase Margin) และเกนมาร์จิน (Gain Margin)
- ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างของระบบ ซึ่งจะกำหนดช่วงความถี่ใช้งานของระบบ

ตัวอย่างระบบจำลองที่จะนำมาทดสอบให้เห็นนั้น เป็นระบบเชิงกล 2 องศาอิสระ ประกอบด้วยมวล สปริงและแดมเปอร์ต่อกันอย่างอนุกรม โดยมีอินพุทเป็นแรงแบบแรนดอมกระทำที่มวล การทดสอบได้จำลองขึ้นบนไมโครคอมพิวเตอร์ขนาด 16 บิท อินพุทแบบแรนดอมสร้างจากฟังก์ชันแรนดอมเจนเนอร์เรเตอร์ (Random Generator) ในตัวแปลภาษาที่ใช้* ตัวระบบได้จำลองโดยสมการสภาวะซึ่งวิเคราะห์หาได้โดยอาศัยกฎของนิวตัน เอ้าพุทของระบบหาโดยวิธีนิวเมอริคอล แบบ Runge-Kutta โดยให้ช่วงก้าวแต่ละขั้นของเวลามีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับคาบการสุ่มข้อมูลสำหรับเปลี่ยนจากอนาลอกเป็นดิจิตอล**

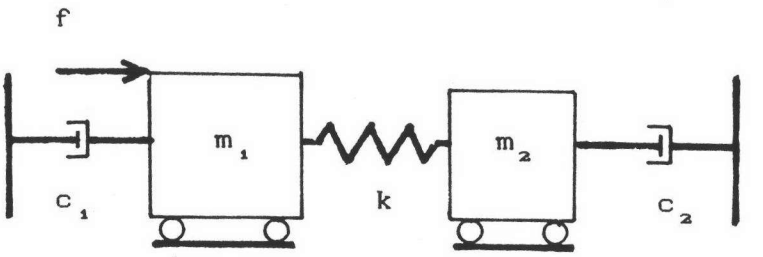
การหาข้อมูลผลตอบความถี่และค่าพารามิเตอร์ของทรานสเฟอร์ฟังก์ชันทำโดยใช้โปรแกรมวิเคราะห์เสปคตรัมและโปรแกรมประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ได้

---

* Optimizing C-86, Computer Innovation Inc.

** ดูบทที่ 3 หัวข้อ 3.3.2

เขียนขึ้น ผลการทดสอบวิธีการจะแสดงให้เห็นในรูปของแมกนิจูดและเฟส



รูป 5-1 ตัวอย่างระบบจำลอง 2 องศาอิสระ

ตัวอย่างระบบจำลอง 2 องศาอิสระ แสดงในรูป 5-1 ประกอบด้วยมวล สปริงและแดมเปอร์ m_1 m_2 k c_1 และ c_2 ตามลำดับ โดยมีอินพุทเป็นแรง f กระทำที่มวล m_1 ในแนวราบ และเอ้าพุทเป็นความเร็วของมวล m_2 โดยการใช้กฎของนิวตัน สามารถสร้างสมการสภาวะได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k/m_1 & -c_1/m_1 & k/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k/m_2 & 0 & -k/m_2 & -c_2/m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} f \qquad (5\text{-}1)$$

เมื่อให้ x_1 = ตำแหน่งของมวล m_1 $x_2 = \dot{x}_1$ x_3 = ตำแหน่งของมวล m_2 $x_4 = \dot{x}_3$ การทดสอบจะทำการหาทรานสเฟอร์ฟังก์ชันระหว่างความเร็วของมวล m_2 กับแรง f ซึ่งตามวิธีการในบทที่ 2 จะได้ทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน

$$X_4(s) / F(s) = b_o / (s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_o)$$

เมื่อ $b_o = k / m_1 m_2$

$a_o = (c_1 k + k c_2) / m_1 m_2$

$a_1 = (m_1 k + c_1 c_2 + k m_2) / m_1 m_2$

$a_2 = (m_1 c_2 + c_1 m_2)$

(5-2)

การทดสอบกรณีที่ 1 จะทดสอบในกรณีที่ความถี่เรโซแนนของระบบมีค่าค่อนข้างต่ำไม่เกิน 20 Hz โดยกำหนดให้ m_1= 1000 kg m_2= 200 kg $k = 1 \times 10^6$ N/m และ $c_1 = c_2$= 500 Ns/m อินพุท f ที่ใช้ทดสอบเป็นแบบแรนดอมมีค่าอยู่ในระหว่าง -100 ถึง 100 N ซึ่งจะได้ทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน

$$H_1(s) = 5.0 / (s^3 + 3.0 s^2 + 6.0 \times 10^3 s + 5 \times 10^3) \quad (5-3)$$

จากสมการสภาวะ (5-1) โดยใช้ข้อมูลการทดสอบกรณีที่ 1 นำมาหาข้อมูลอินพุทและเอ้าพุทโดยวิธี Runge-Kutta โดยให้ช่วงก้าวแต่ละก้าวเป็น 0.0125 วินาที จากข้อมูลอินพุทและเอ้าพุทนำมาหาผลตอบความถี่หรือทรานสเฟอร์ฟังก์ชันตามวิธีการในบทที่ 3 โดยโปรแกรมวิเคราะห์สเปคตรัมซึ่งกำหนดอินพุทดังนี้

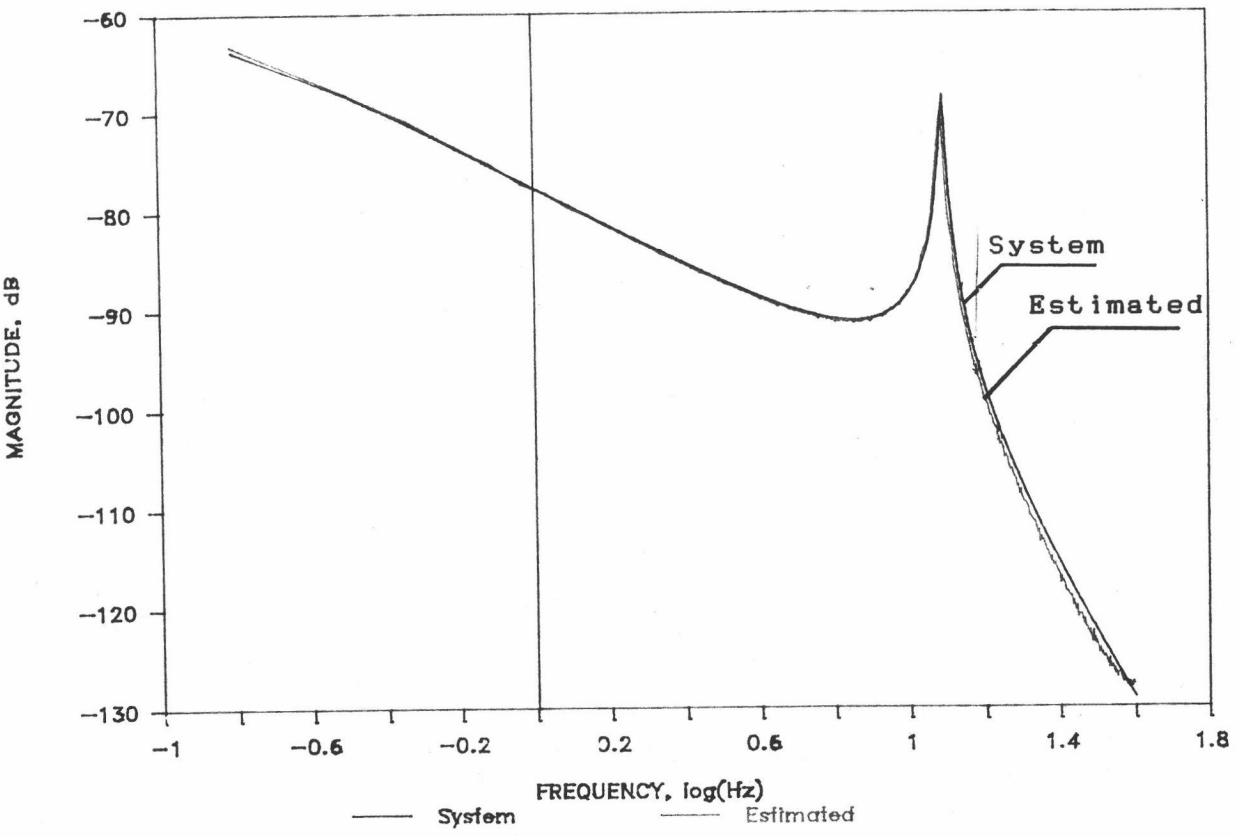
- จำนวนชุดข้อมูล (Number of Ensemble) 8
- จำนวนข้อมูลในแต่ละชุด 512
- ออเดอร์ของ FFT 9
- ความเร็วคาบการสุ่มข้อมูล 0.0125* sec (ความถี่การสุ่มข้อมูล 80 Hz)
- วินโดว์ Hanning

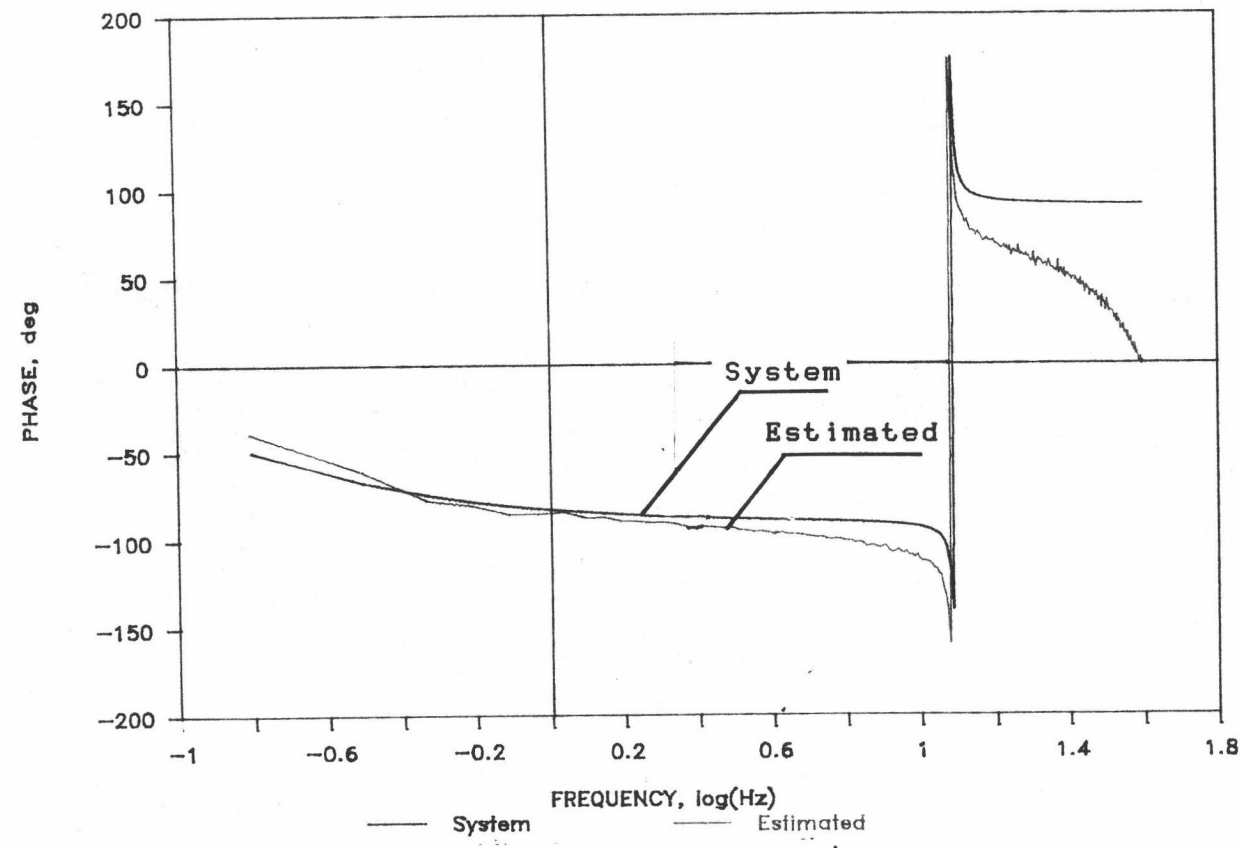
---

* ในการทดสอบนี้คือช่วงก้าวแต่ละขั้นของเวลาในวิธี Runge-Kutta

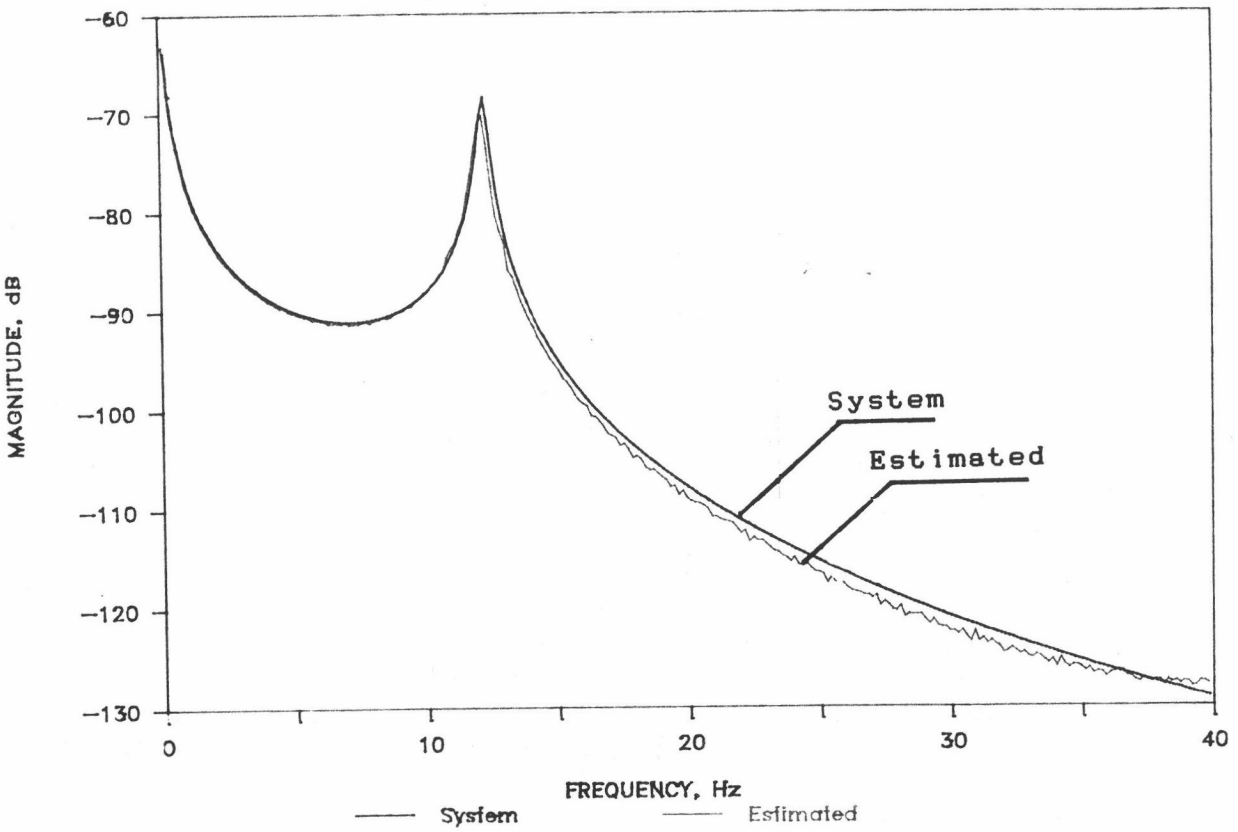
ได้ข้อมูลผลตอบความถี่จำนวน 256 จุดเริ่มตั้งแต่ความถี่ 0 Hz ถึง 40 Hz โดยมีความละเอียดเชิงความถี่ 0.156 Hz การตรวจสอบความมั่นใจในทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่ได้ ดูได้จากฟังก์ชัน COH^2 ฟังก์ชัน COH^2 ที่คำนวณได้ของข้อมูลเพียงชุดเดียว (1 Ensemble) นั้นไม่มีความหมาย เนื่องจาก COH^2 จะมีค่าเป็น 1 หมดทุกช่วงความถี่ [1] ค่า COH^2 ที่จะให้ผลได้จริงจะต้องเป็นค่าที่ได้จากการเฉลี่ยเสปคตรัมตั้งแต่ 2 ชุดขึ้นไป ซึ่งปกติการเฉลี่ยกระทำโดยการแบ่งข้อมูลทั้งหมดออกเป็นส่วนๆ แต่ในการทดสอบนี้ใช้วิธีการเปลี่ยนซีดนัมเบอร์ (Seed Number) ของอินพุทที่ฟังก์ชันแรนดอมเจนเนอร์เรเตอร์ในตัวแปรภาษาที่ใช้ ทั้งนี้เนื่องจากข้อจำกัดของหน่วยความจำของเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ รูป 5-2 แสดงทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน H_1 ที่ประมาณได้เมื่อเฉลี่ยด้วยข้อมูล 8 ชุด (8 Ensembles) เปรียบเทียบกับทรานสเฟอร์ฟังก์ชันจริงที่คำนวณได้จากสมการ (5-3) โดยตรง จากรูปแมกนิจูดจะเห็นว่าเส้นกราฟของการประมาณสามารถแทนระบบจริงได้ดี โดยเฉพาะในช่วงความถี่ต่ำกว่าเรโซแนนซึ่งเป็นช่วงความถี่ใช้งานในการออกแบบระบบควบคุม ส่วนค่าความถี่เรโซแนนอยู่ที่ประมาณ 12 Hz ใกล้เคียงกับทรานสเฟอร์ฟังก์ชันจริง ในรูปเฟส ตำแหน่งที่เส้นกราฟของการประมาณตัดกับแกน -180 องศา ใกล้เคียงกับทรานสเฟอร์ฟังก์ชันจริงเช่นกัน และจากรูปกราฟทั้งสองจะสังเกตุเห็นว่าที่ความถี่ช่วงหลังๆ ความแม่นยำของการประมาณได้ลดลง ทั้งนี้เป็นผลส่วนใหญ่จากการตัดทอนข้อมูล ที่ยังเหลืออยู่ถึงแม้ว่าได้ใช้เทคนิคการใส่วินโดว์แบบ Hanning เข้าช่วยก่อนทำ FFT แล้วก็ตาม

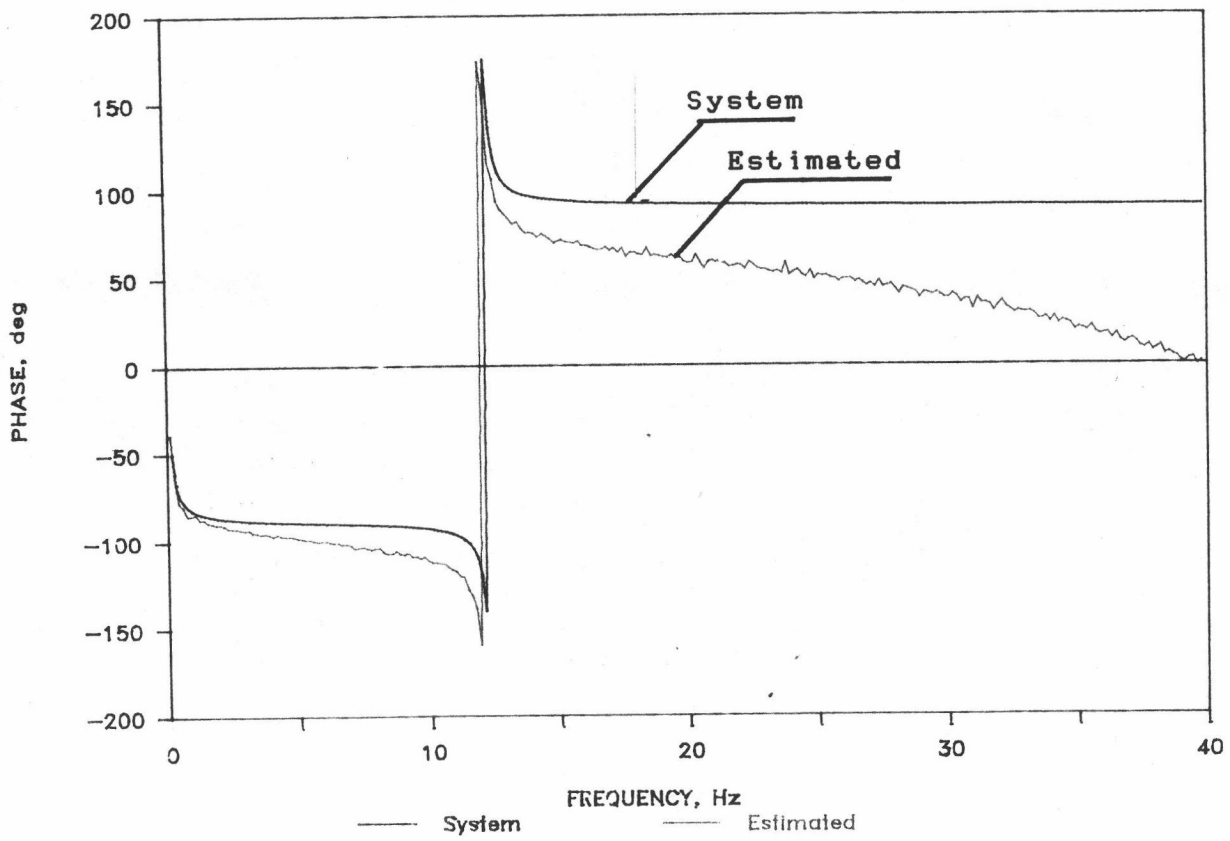
ในทางปฏิบัติการเลือกใช้ความยาวของข้อมูลจะจำกัดด้วยหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ และอัตราการสุ่มข้อมูล สิ่งที่ต้องการคือ ความละเอียดเชิงความถี่ของทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน ซึ่งทำได้โดยการเพิ่มระยะเวลาในการเก็บข้อมูลและการลดปัญหาอะเลียสซิง (Aliasing) ให้มากที่สุดซึ่งทำได้โดยการเพิ่มอัตราความถี่การสุ่มข้อมูล แต่ในเมื่อหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์มีจำกัดจึงต้องหาจุดที่เหมาะสมระหว่างความละเอียดเชิงความถี่ของข้อมูลกับการลดปัญหาอะเลียสซิงซึ่งประสพการณ์จะช่วยได้มาก โดยทั่วไปถ้ารู้ความถี่สูงสุดหรือรู้ช่วงกว้างความถี่ (Bandwidth) ของระบบซึ่งอาจทำได้โดยการใช้ฟิลเตอร์





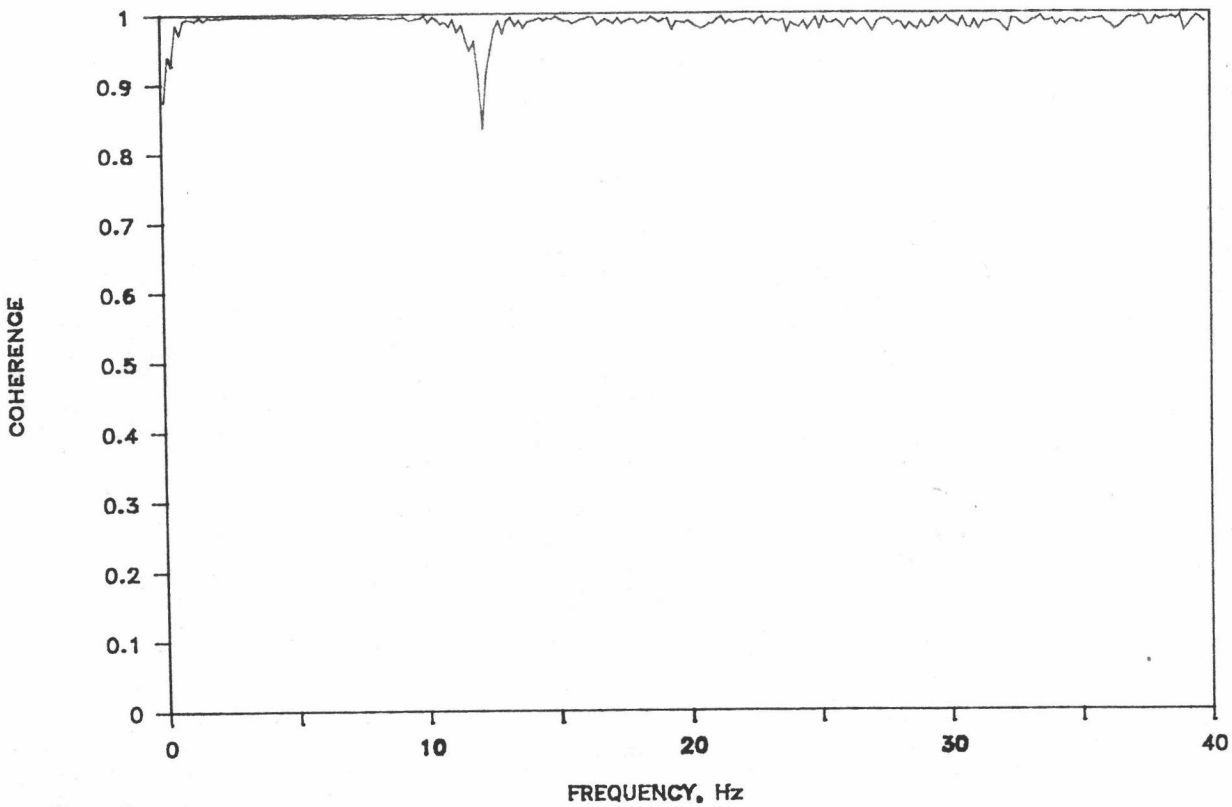
รูป 5-2 ทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน H_1 ที่ประมาณได้เมื่อใช้จำนวนชุดข้อมูล 8 ชุดเปรียบเทียบกับที่คำนวณได้ตามสมการ (5-3)





รูป 5-2 (ต่อ) เมื่อเสกลแกนนอนเป็นเชิงเส้นตรง

ใช้ฟิลเตอร์ (Filter) เข้าช่วยก็จะหาอัตราการสุ่มข้อมูลได้โดยอาศัยทฤษฎีการสุ่มข้อมูล (Sampling Theory) และเมื่อหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์มีจำกัด นั่นคือจำนวนข้อมูลที่เครื่องจะวิเคราะห์ได้มีจำกัด ก็จะได้ช่วงเวลาที่ต้องใช้ในการเก็บข้อมูลโดยอัตโนมัติ



รูป 5-3 ฟังก์ชันโคฮีเรน (Coherence Function) ของการประมาณทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน H_1 เมื่อใช้จำนวนชุดข้อมูล 8 ชุด

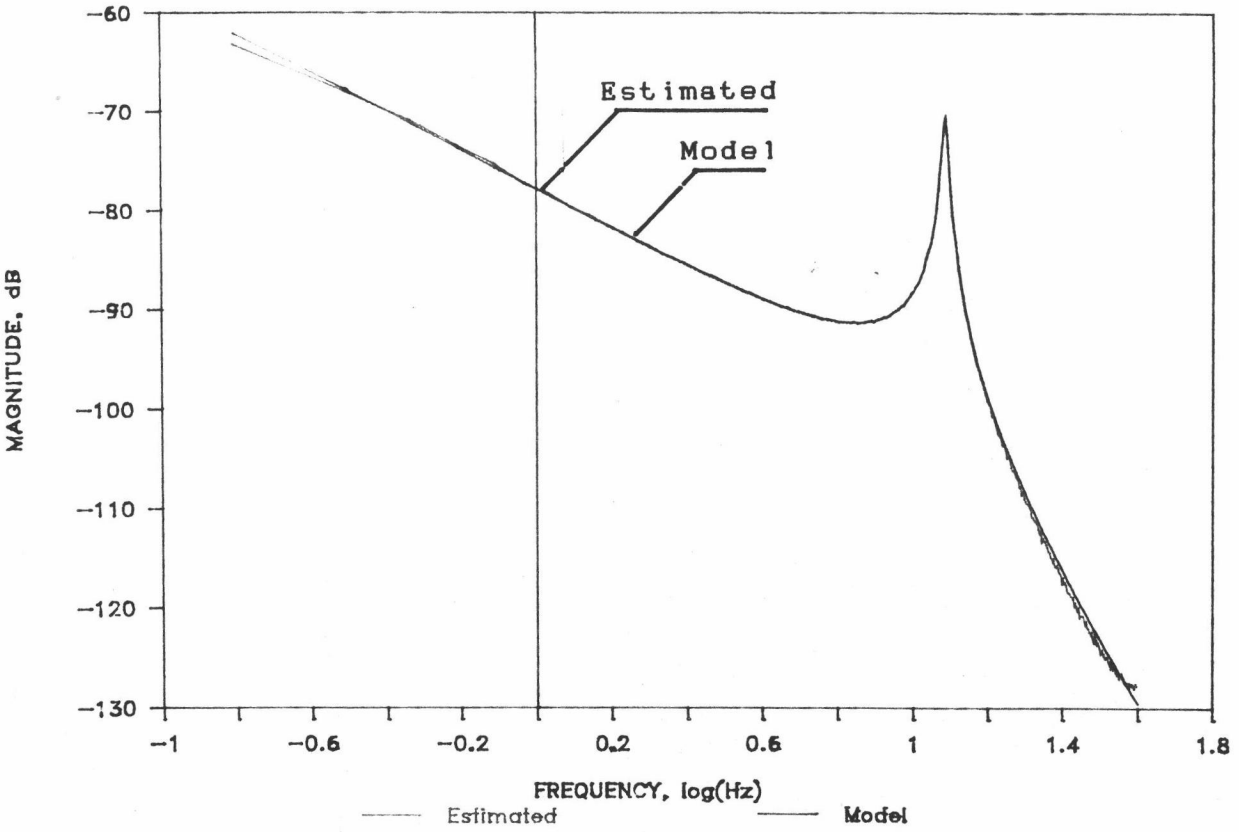
รูปที่ 5-3 แสดงฟังก์ชันโคฮีเรน (Coherence Function) ซึ่งมีค่าอยู่ในระดับที่ดี ทั้งนี้เนื่องจากระบบจำลองนี้ไม่มีการรบกวนจากการวัดข้อมูล (Measurement Noise) และไม่มีความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบเข้ามาปะปน จะมีเพียงแต่ความแปรปรวนเนื่องจากระบบเป็นกระบวนการความน่าจะเป็นเท่านั้น ที่ความถี่ 0 Hz และที่ความถี่เรโซแนนค่าฟังก์ชันโคฮีเรน มีค่าต่ำลงมาก

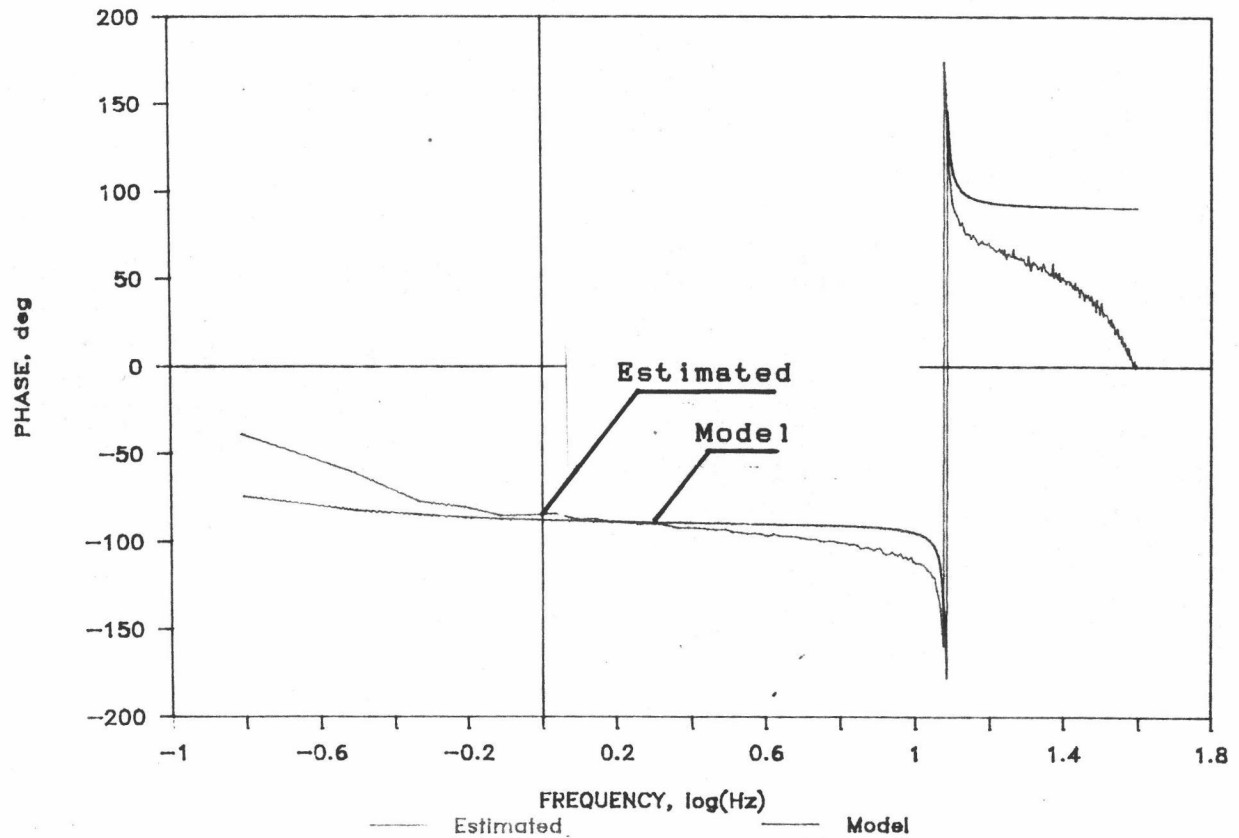
เป็นเพราะความแปรปรวนมีผลมากต่อการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วของแมกนิจูดและเฟส ดังได้กล่าวไว้ในบทที่ 3 หัวข้อ 3.2 ซึ่งไม่มีผลต่อความมั่นใจในทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่ได้แต่อย่างใด [1]

จากข้อมูลผลตอบความถี่ที่ได้ นำกลับมาหาค่าพารามิเตอร์ของทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน H_1 โดยวิธีการที่แสดงในบทที่ 4 และสมมติว่ารู้ออเดอร์ที่เหมาะสมแล้ว การใช้โปรแกรมประมาณค่าพารามิเตอร์ ได้ทดลองเปลี่ยนช่วงความถี่ที่จะใช้เป็นข้อมูลในการประมาณค่าไปหลายๆ ช่วง พบว่าการเลือกช่วงความถี่นี้มีผลต่อความแม่นยำของค่าพารามิเตอร์หรือรูปทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่ต้องการมาก นั่นคือเป็นการเลือกถ่วงน้ำหนักของการประมาณไปไว้ที่ใด การเพิ่มหรือลดจำนวนข้อมูลหรือช่วงความถี่ที่ใช้ในการประมาณ เพียงเล็กน้อยสามารถทำให้ความแม่นยำเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างมากได้ ทางปฏิบัติจำเป็นจะต้องทดลองเลือกช่วงความถี่หลายๆ ช่วงมาทดลองสร้างโมเดลใหม่แล้วเปรียบเทียบกับทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่หามาได้ จนกว่าจะได้โมเดลซึ่งจะแทนทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่ทดลองหามา ได้ดีที่สุด

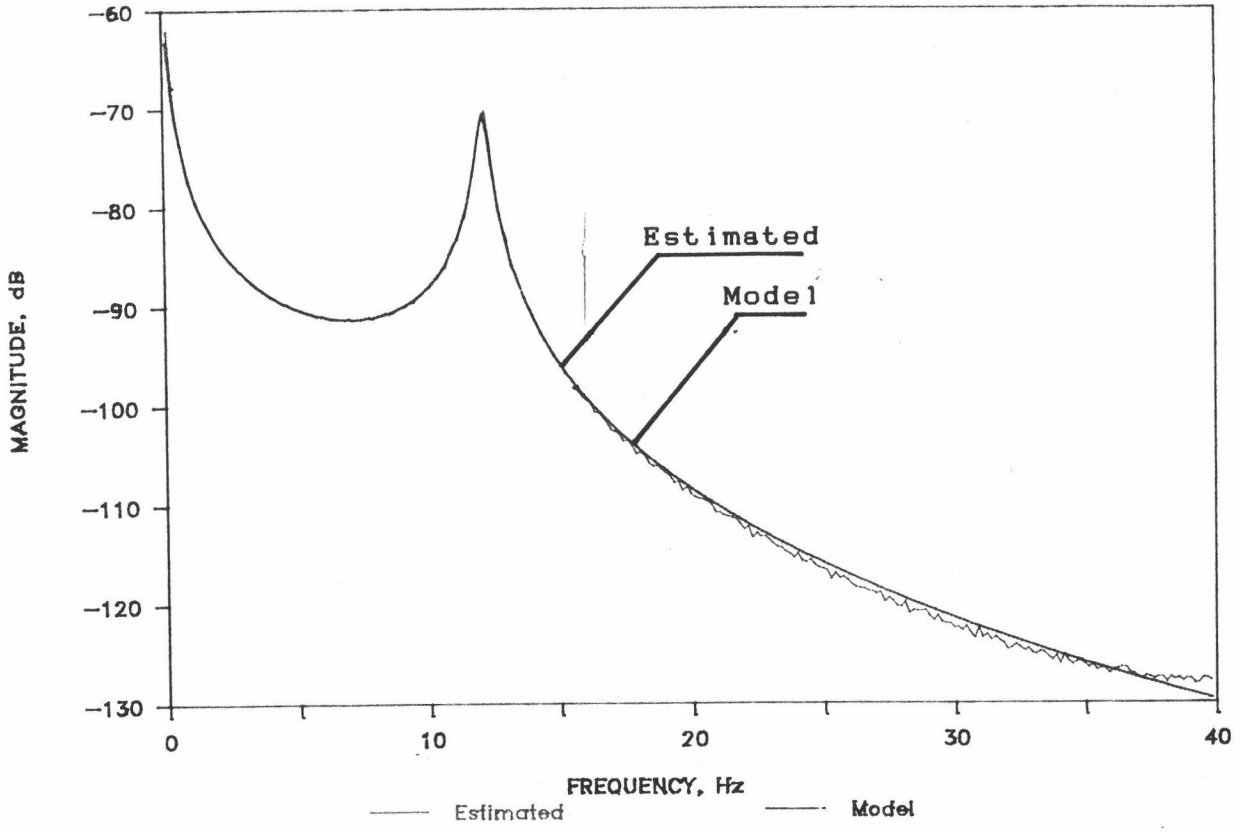
รูป 5-4 แสดงผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ของทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน H_1 โดยเลือกใช้ช่วงความถี่ตั้งแต่ 0 ถึงประมาณ 15 Hz หรือประมาณค่าที่ 1 ถึงค่าที่ 90 และใช้ค่าประมาณของลำดับขั้น (Iteration) ที่ 5 ของวิธีตัวแปรอินสทรูเมนทอล (Instrumental Variable Method) ที่ให้โมเดลที่ใกล้เคียงกับผลตอบความถี่มากที่สุด ซึ่งจากรูปแมกนิจูดจะเห็นว่าเส้นกราฟเกือบจะทับกันสนิท ส่วนในรูปเฟส กราฟของโมเดลพยายามจะกลับเข้าไปความถูกต้อง ดูได้จากรูป 5-5 เป็นการเปรียบเทียบระหว่างโมเดลที่สร้างขึ้นจากค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้ กับทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่คำนวณจากสมการ (5-3) โดยตรง และจากค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้ ได้โมเดลหรือทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่จะนำไปใช้ในการออกแบบระบบควบคุมดังนี้

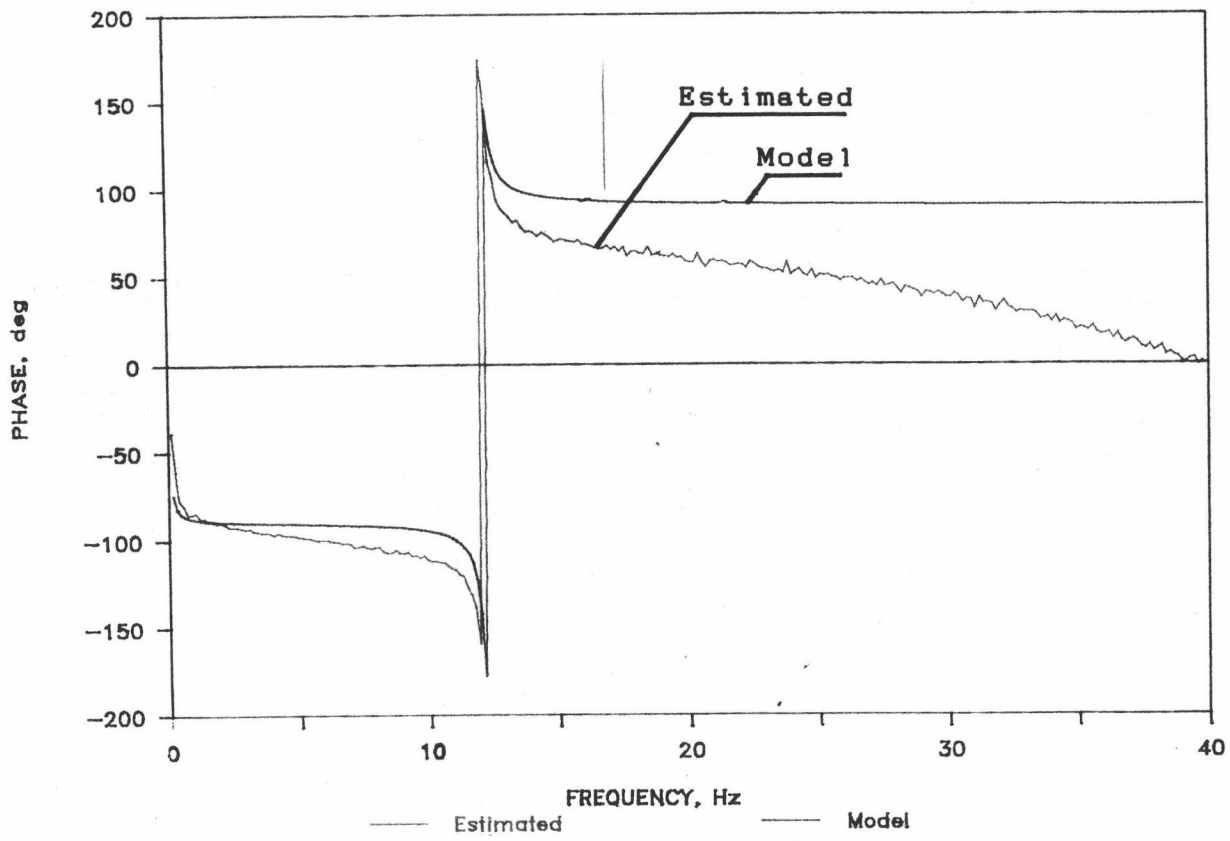
$$\hat{H}_1 = 4.74 \; / \; (s^3 + 2.99 \, s^2 + 5.87 \times 10^3 \, s + 1.63 \times 10^3) \qquad (5\text{-}4)$$



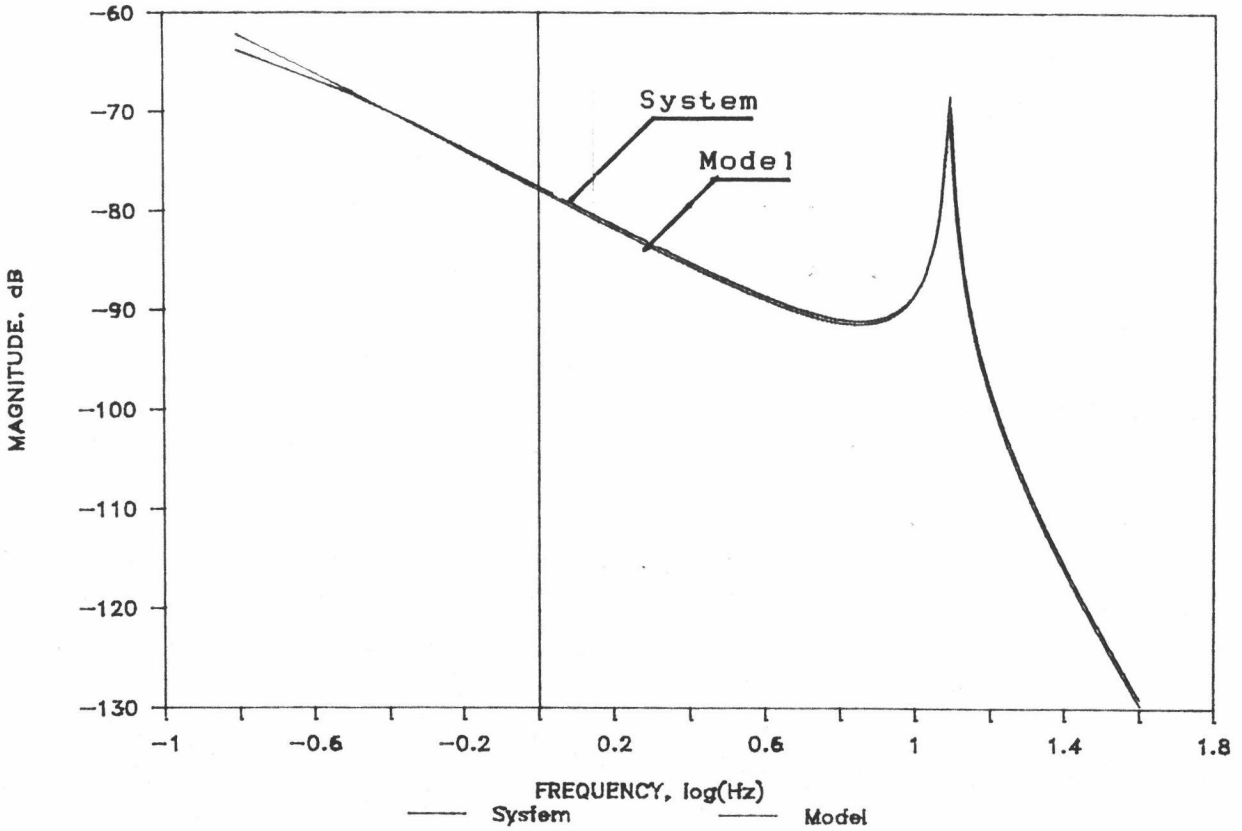


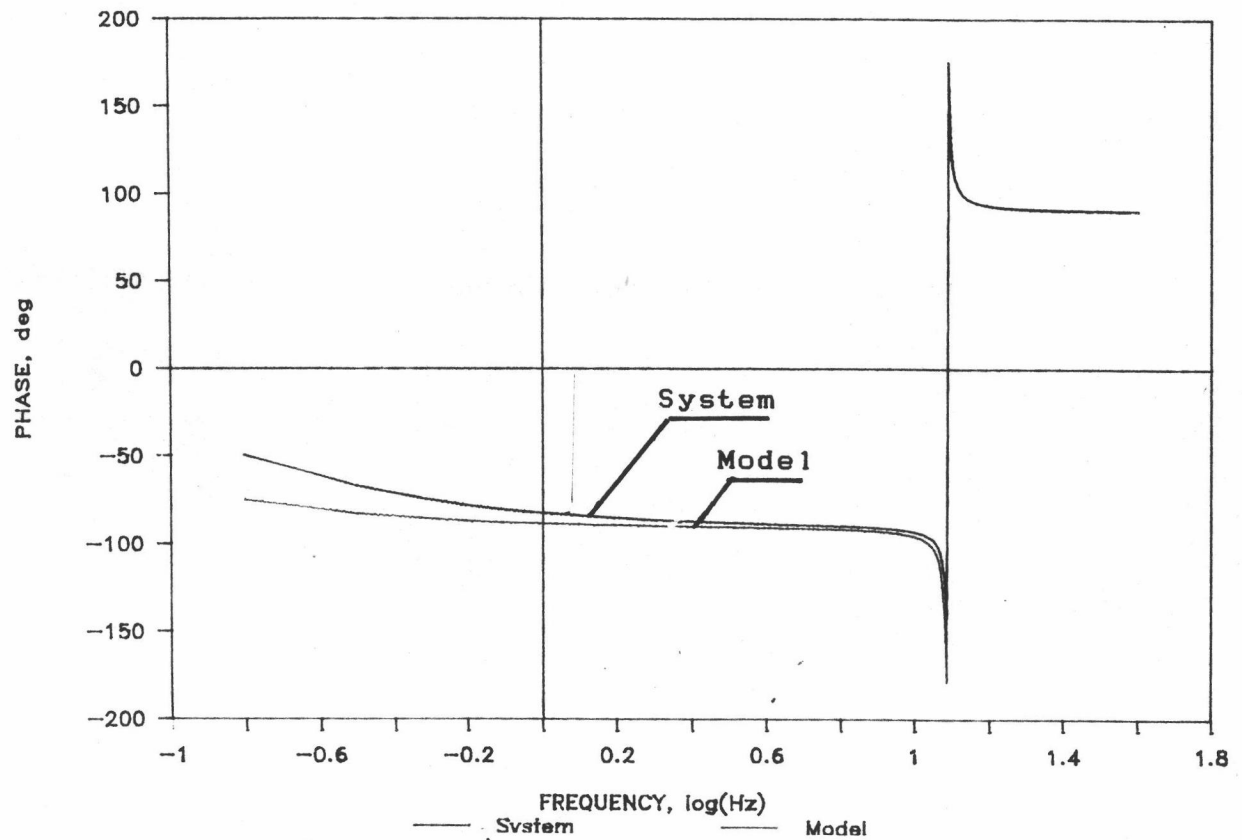
รูป 5-4 แสดงโมเดลที่สร้างจากค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้เทียบกับผลตอบความถี่ของทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน H_1 เมื่อใช้จำนวนชุดข้อมูล 8 ชุด



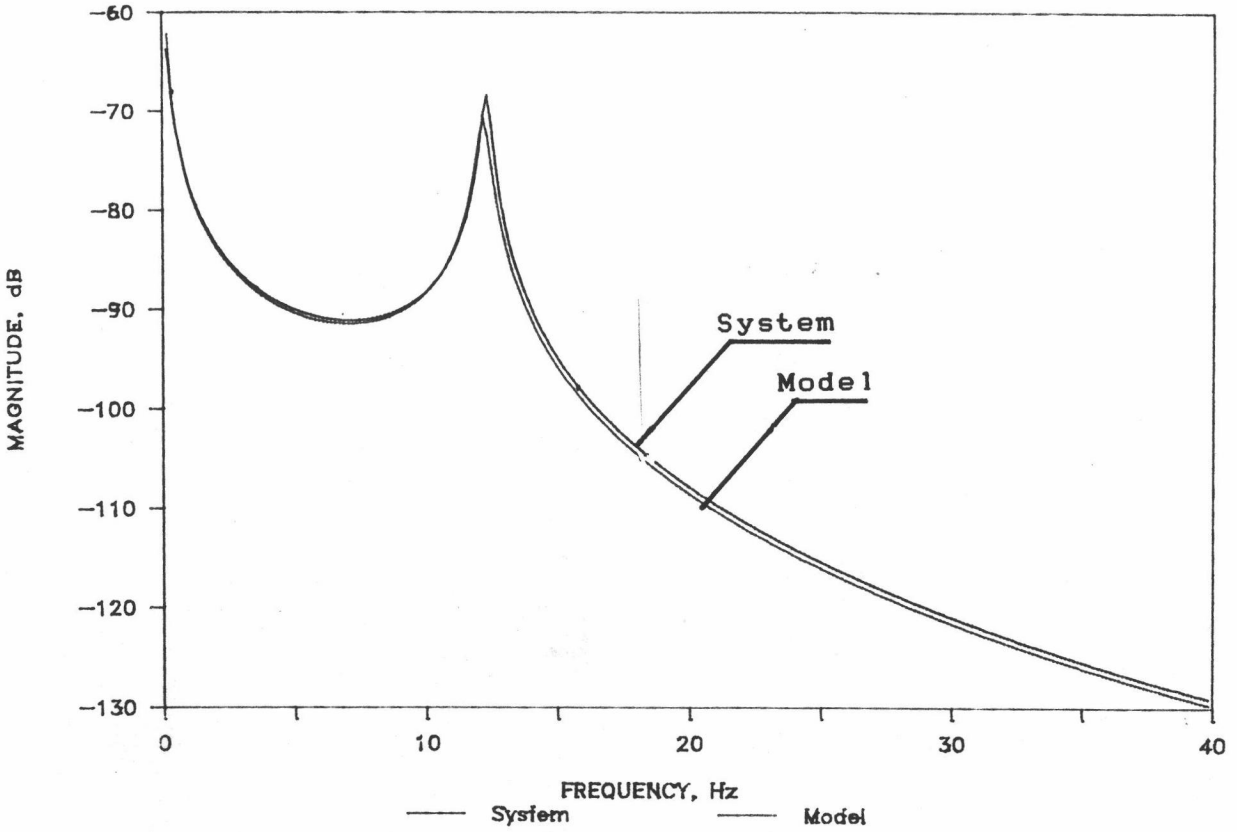


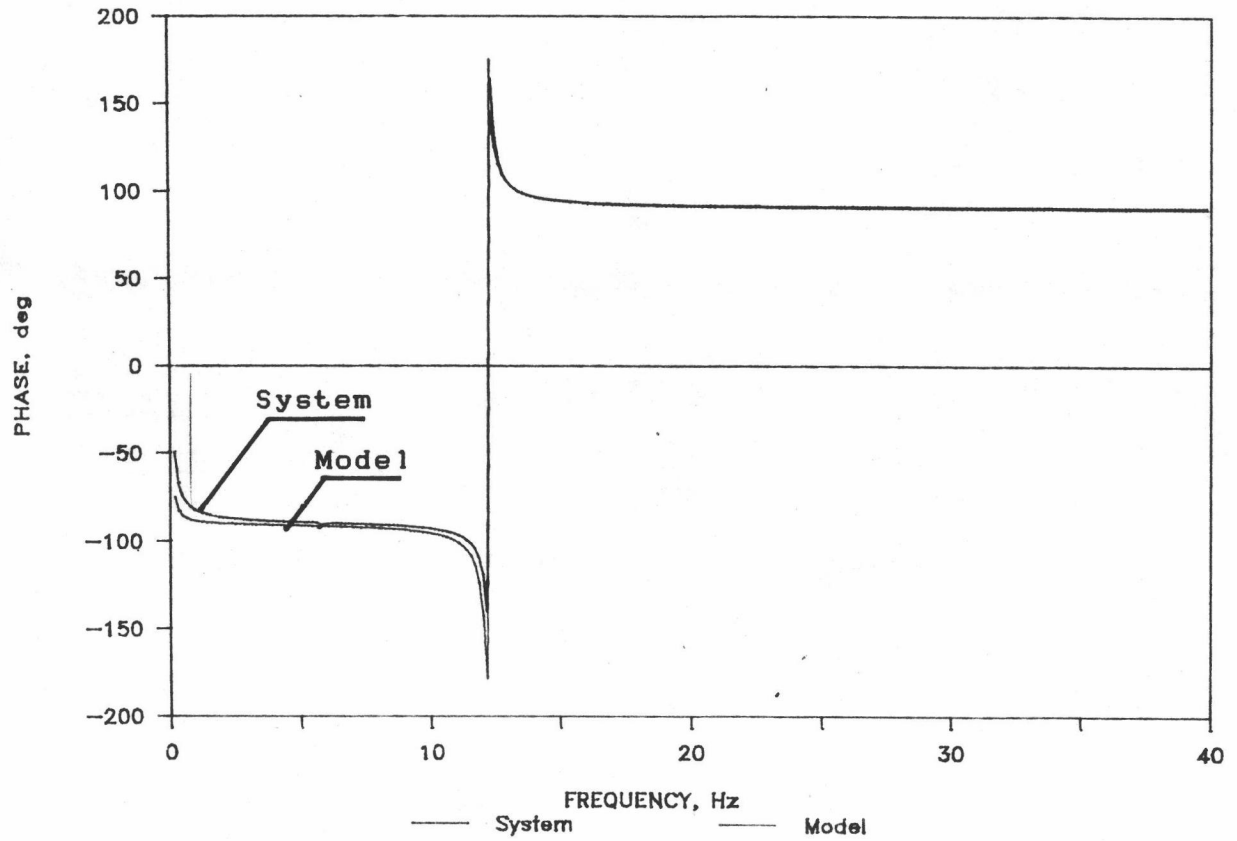
รูป 5-4 (ต่อ) เมื่อเสกลแกนนอนเป็นเชิงเส้นตรง





รูป 5-5 แสดงโมเดล H_1 ที่สร้างจากค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้เทียบกับทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน H_2 ที่คำนวณได้จากสมการ 5-3





รูป 5-6 (ต่อ) เมื่อเสกลแกนนอนเป็นเชิงเส้นตรง

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (5-4) กับสมการ (5-3) จะเห็นว่าค่าพารามิเตอร์ที่ได้ใกล้เคียงกัน ยกเว้นพารามิเตอร์ a_0 ซึ่งต่างไปมาก ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นนี้แบ่งออกเป็น 2 ขั้น ขั้นแรกเกิดจากการประมาณผลตอบความถี่ ส่วนขั้นที่สองเกิดจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อพิจารณาจากรูป 5-2 รูป 5-4 และรูป 5-5 ความคลาดเคลื่อนส่วนใหญ่น่าจะเกิดจากการประมาณผลตอบความถี่ และจากรูป 5-2 พอจะบอกได้ว่าการประมาณผลตอบความถี่ประมาณแดมปิง (Damping) ของระบบได้ไม่ดีนัก สังเกตุจากส่วนสูงของกราฟการประมาณสูงขึ้นไปไม่ถึงกับที่คำนวณได้จริง ซึ่งถ้าเป็นกราฟเสกลธรรมดาจะเห็นต่างกันมากกว่านี้ แต่อย่างไรกราฟในเสกลธรรมดาไม่ใช่ตัวบอกคุณลักษณะที่ดีในการออกแบบระบบควบคุมซึ่งใช้กราฟในเสกลเดซิเบลมากกว่า ส่วนสิ่งสำคัญที่จะนำไปใช้ในการออกแบบระบบควบคุมดังที่กล่าวไว้ที่ตอนต้นบทนั้น จากรูป 5-5 จะเห็นว่าโมเดลที่สร้างจากค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้สามารถแทนระบบได้เป็นอย่างดี

การทดสอบกรณีที่ 2 จะทดสอบในกรณีที่ความถี่เรโซแนนของระบบมีค่าสูงขึ้น โดยกำหนดให้ $m_1 = 100$ kg $m_2 = 20$ kg $k = 1\times10^{6}$ N/m และ $c_1 = c_2 = 400$ Ns/m อินพุท f_i ที่ใช้ทดสอบเป็นแบบแรนดอมมีค่าอยู่ในระหว่าง -100 ถึง 100 N ซึ่งจะได้ทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน

$$H_2 = 5.0\times10^{4} / (s^3 + 24.0\, s^2 + 6.0\times10^{6}\, s + 4.0\times10^{7}) \quad (5\text{-}5)$$

จากสมการสภาวะ (5-1) โดยใช้ข้อมูลการทดสอบกรณีที่ 1 นำมาหาอินพุทและเอ้าพุทโดยวิธี Runge-Kutta โดยให้ช่วงก้าวแต่ละก้าวเป็น 0.0004 วินาที จากข้อมูลอินพุทและเอ้าพุทนำมาหาผลตอบความถี่หรือทรานสเฟอร์ฟังก์ชันตามวิธีการในบทที่ 3 โดยโปรแกรมวิเคราะห์สเปคตรัมซึ่งกำหนดอินพุทดังนี้

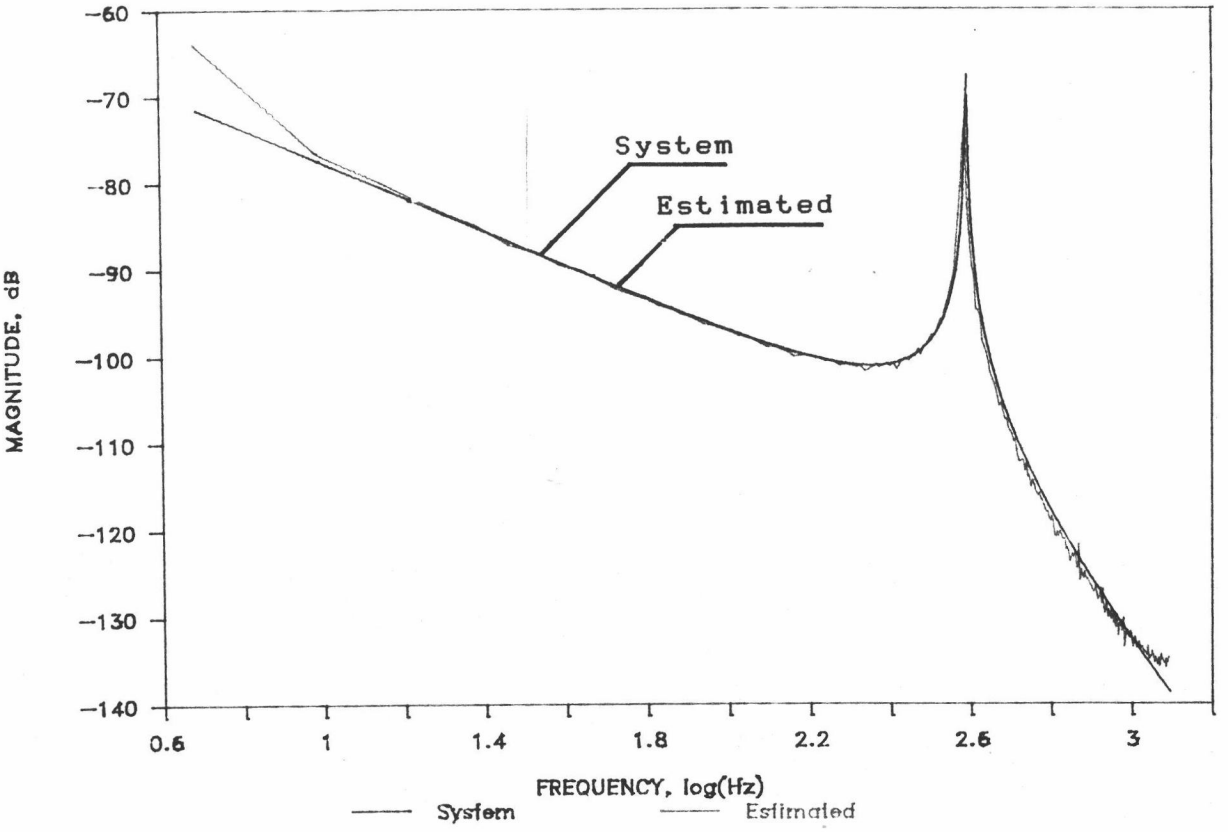
- จำนวนชุดข้อมูล (Number of Ensemble) 4
- จำนวนข้อมูลในแต่ละชุด 512
- ออเดอร์ของ FFT 9
- คาบการสุ่มข้อมูล 0.0004 วินาที (ความถี่การสุ่มข้อมูล 2500 Hz)
- วินโดว์ Hanning

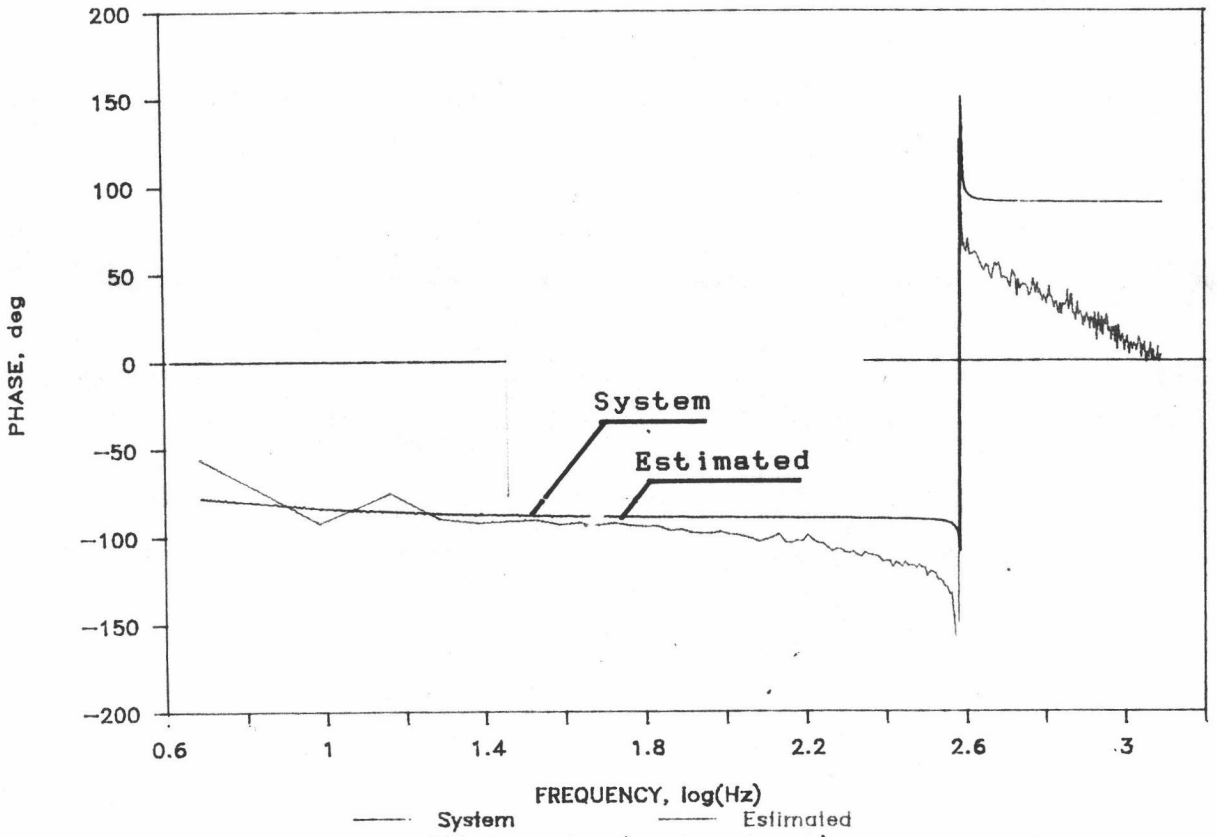
หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ได้ข้อมูลผลตอบความถี่จำนวน 256 จุดเริ่มตั้งแต่ความถี่ 0 Hz ถึง 1250 Hz โดยมีความละเอียดเชิงความถี่ 4.88 Hz รูป 5-6 แสดงทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน H_2 ที่ประมาณได้เมื่อเฉลี่ยด้วยข้อมูล 4 ชุด (4 Ensembles) เปรียบเทียบกับทรานสเฟอร์ฟังก์ชันจริงที่คำนวณได้จากสมการ (5-5) โดยตรง ผลที่ได้เมื่อเปรียบเทียบกับกรณีแรก จะเห็นว่าเส้นกราฟของการประมาณสามารถแทนระบบจริงได้ดีเช่นกัน โดยเฉพาะในช่วงความถี่ต่ำกว่าเรโซแนนซึ่งเป็นช่วงความถี่ใช้งานในการออกแบบระบบควบคุม ต่างกันเล็กน้อยที่ความแปรปรวนมีมากขึ้นทั้งนี้เนื่องจากการใช้จำนวนชุดข้อมูลเพื่อเฉลี่ยน้อยกว่านั่นเอง ค่าความถี่เรโซแนนอยู่ที่ประมาณ 390 Hz รูป 5-7 แสดงฟังก์ชันโคฮีเรนซึ่งแสดงให้เห็นชัดเจนว่ามีความแปรปรวนมากกว่า

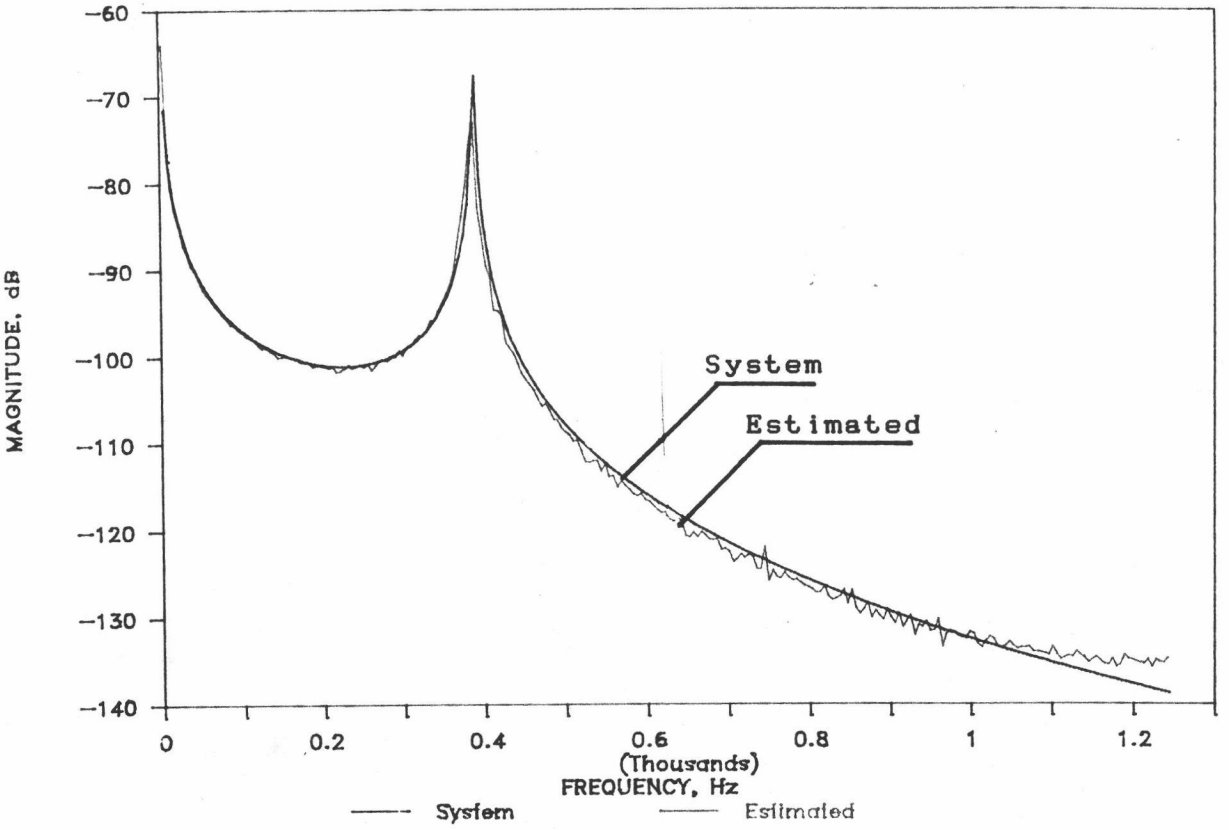
รูป 5-8 แสดงผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ของทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน H_2 โดยเลือกใช้ช่วงความถี่ตั้งแต่ 0 ถึงประมาณ 450 Hz หรือประมาณค่าที่ 1 ถึงค่าที่ 90 และใช้ค่าประมาณของลำดับขั้น (Iteration) ที่ 5 ของวิธีตัวแปรอินสทรูเมนทอล (Instrumental Variable Method) ที่ให้โมเดลที่ใกล้เคียงกับผลตอบความถี่มากที่สุด ซึ่งจากรูปแมกนิจูดจะเห็นว่าเส้นกราฟมีไบแอสเพิ่มขึ้นกว่ากรณีแรก เป็นเพราะข้อมูลผลตอบความถี่แปรปรวนมากขึ้น ซึ่งจะสังเกตุเห็นไบแอสชัดเจนขึ้นในรูป 5-9 ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบระหว่างโมเดลที่สร้างขึ้นจากค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้ กับทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่คำนวณจากสมการ (5-5) โดยตรง และจากค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้ ได้โมเดลหรือทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่จะนำไปใช้ในการออกแบบระบบควบคุมดังนี้

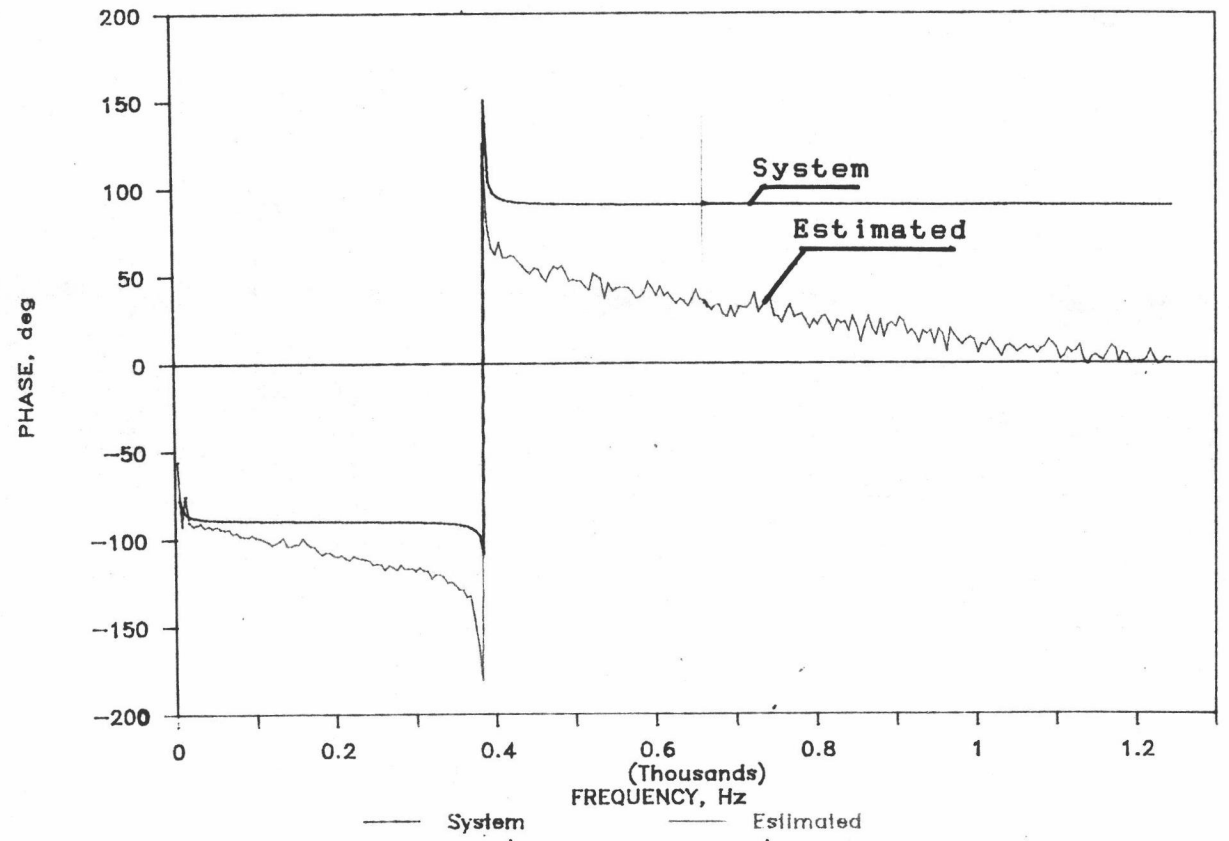
$$\hat{H}_2 = 4.57\times10^{4} \,/\, (s^{3} + 4.646\times10^{1}s^{2} + 5.894\times10^{6}\, s + 3.70\times10^{7}) \qquad (5\text{-}6)$$



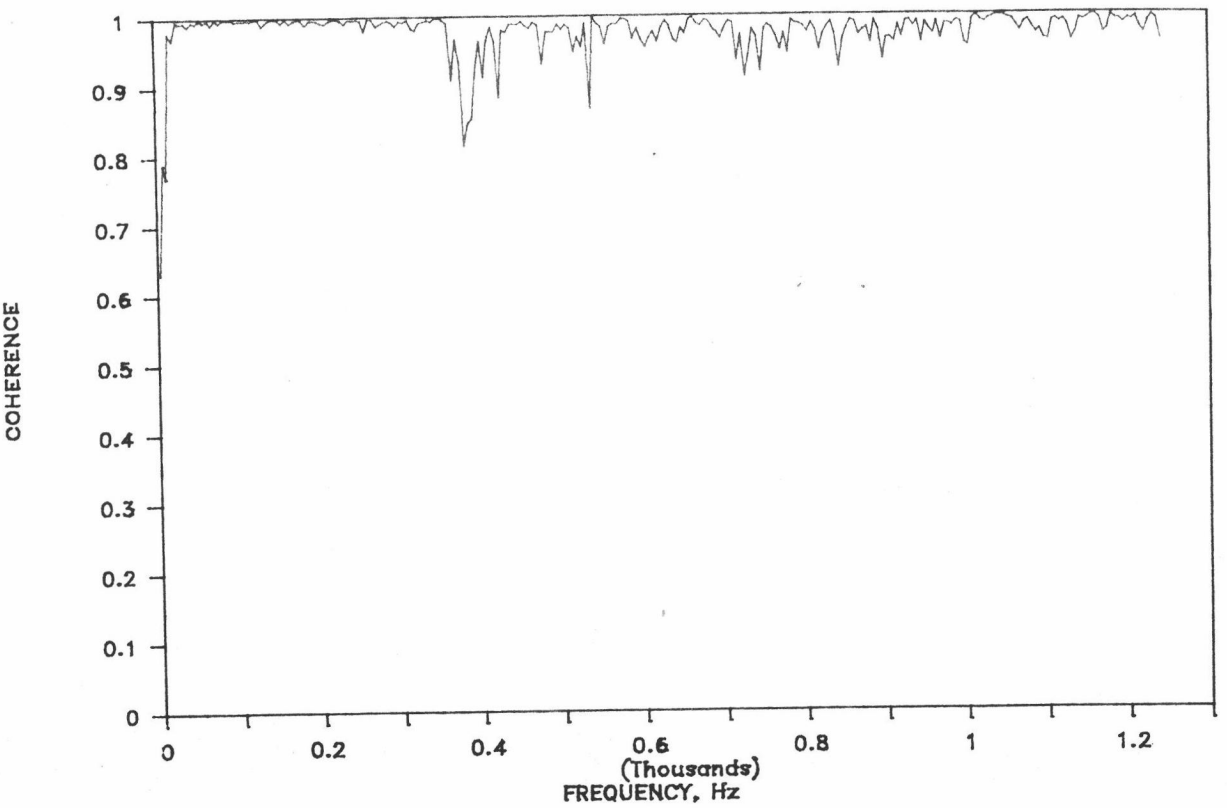


รูป 5-6 ทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน H_2 ที่ประมาณได้เมื่อใช้จำนวนชุดข้อมูล 4 ชุดเปรียบเทียบกับที่คำนวณได้ตามสมการ (5-5)

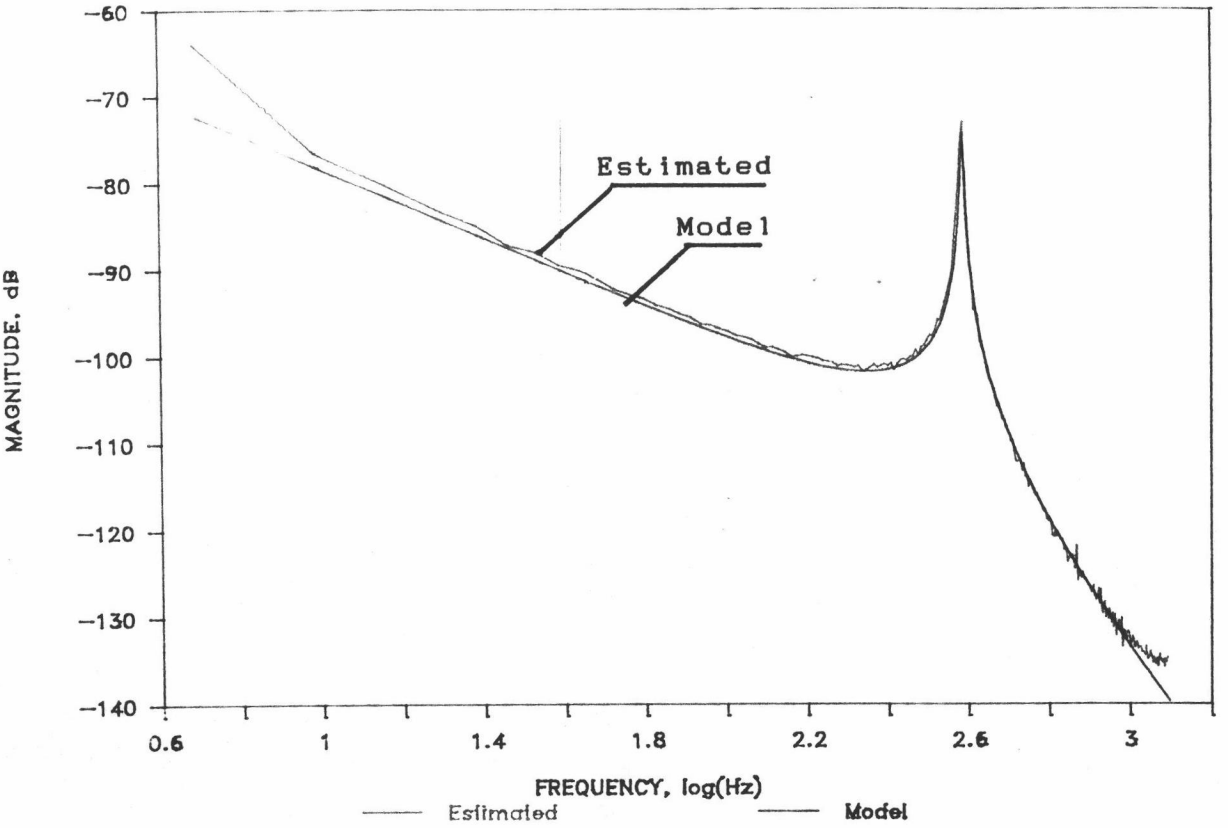


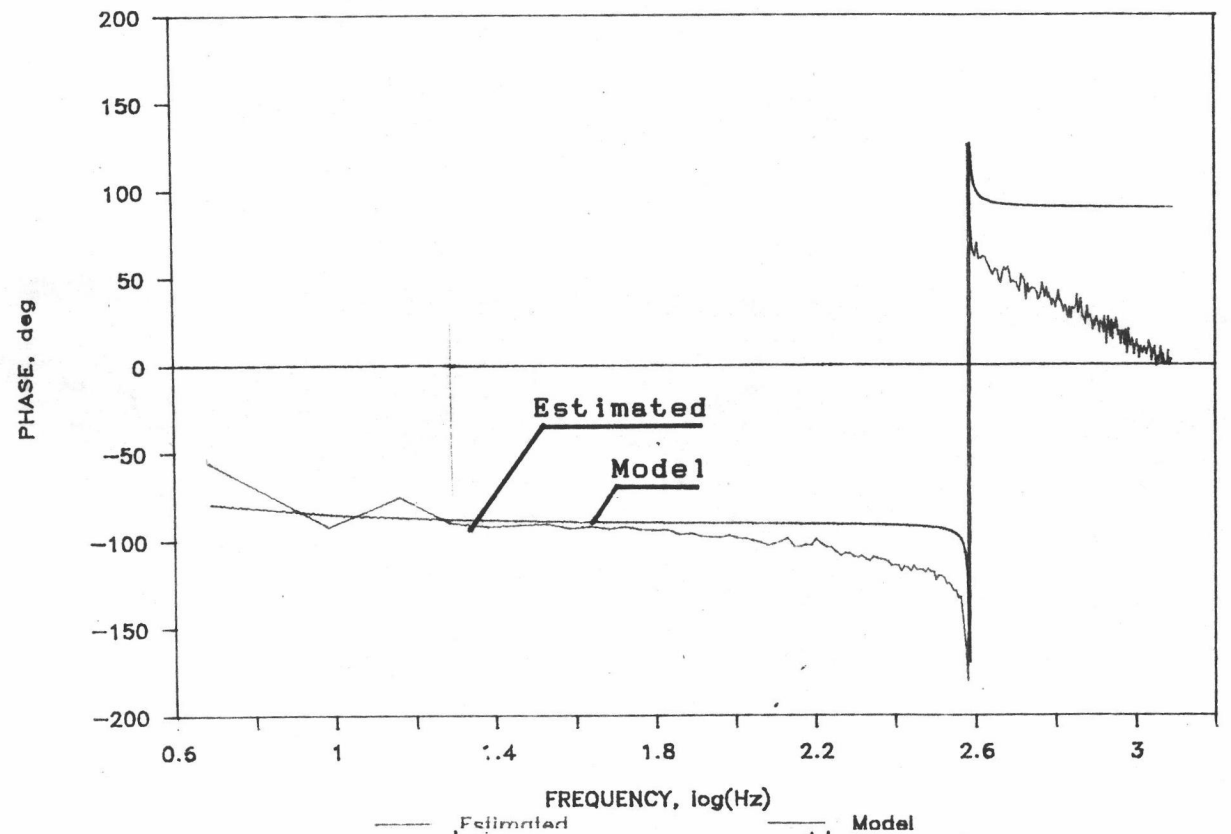


รูป 5-6 (ต่อ) เมื่อเสกลแกนนอนเป็นเชิงเส้นตรง

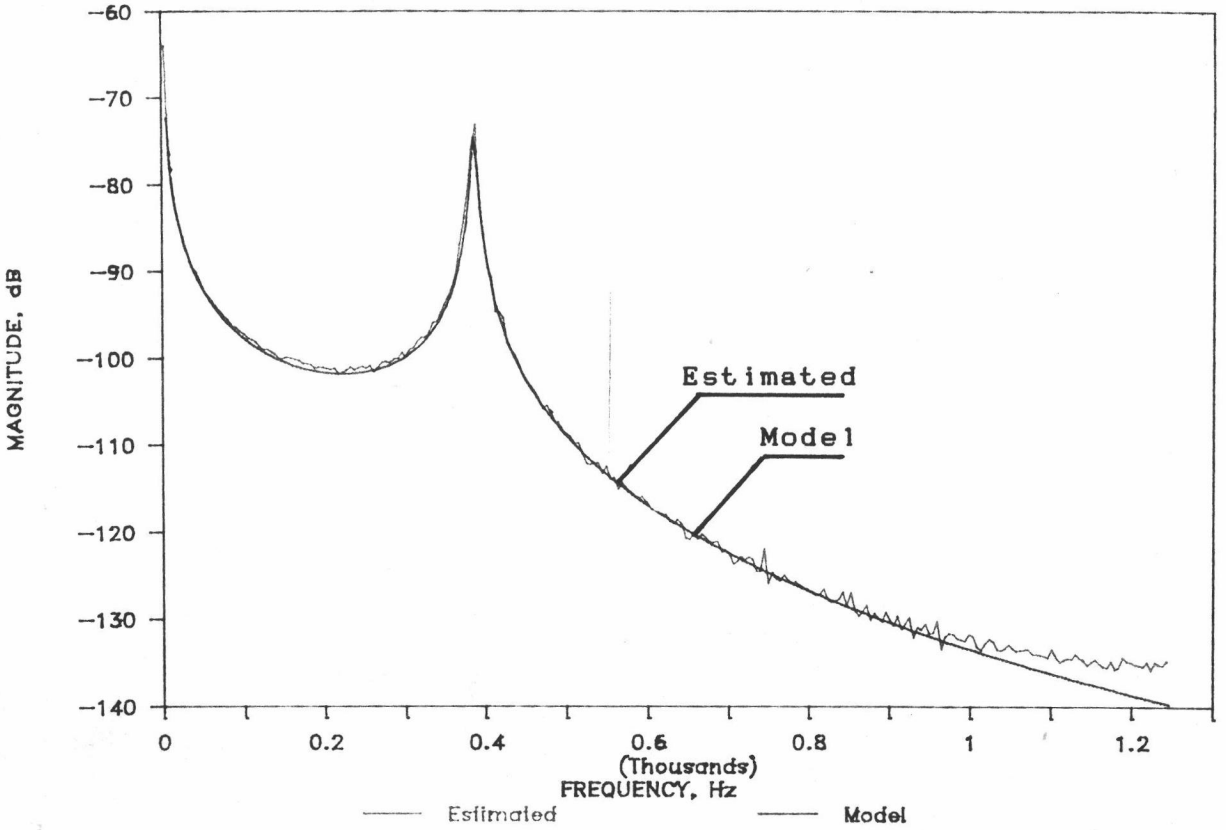


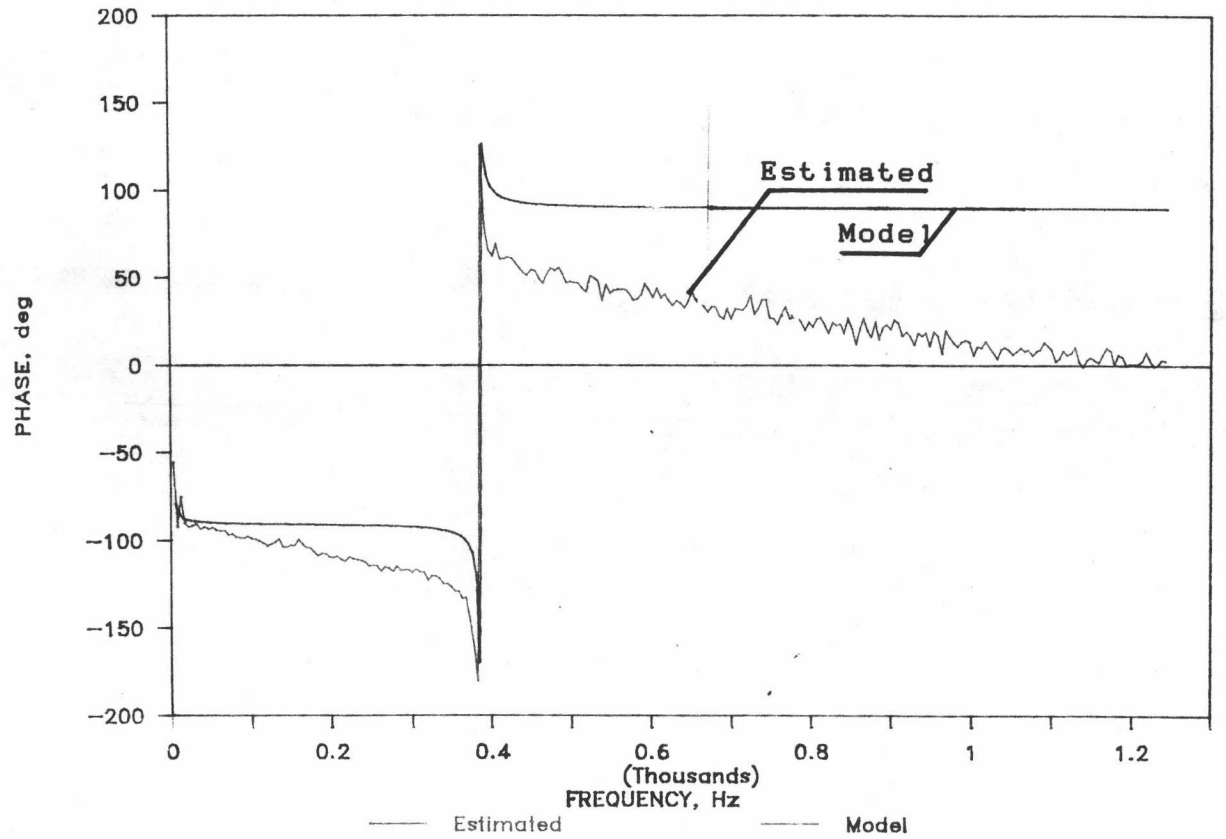
รูป 5-7 ฟังก์ชันโคฮีเรน (Coherence Function) ของการประมาณทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน H_2 เมื่อใช้จำนวนชุดข้อมูล 4 ชุด



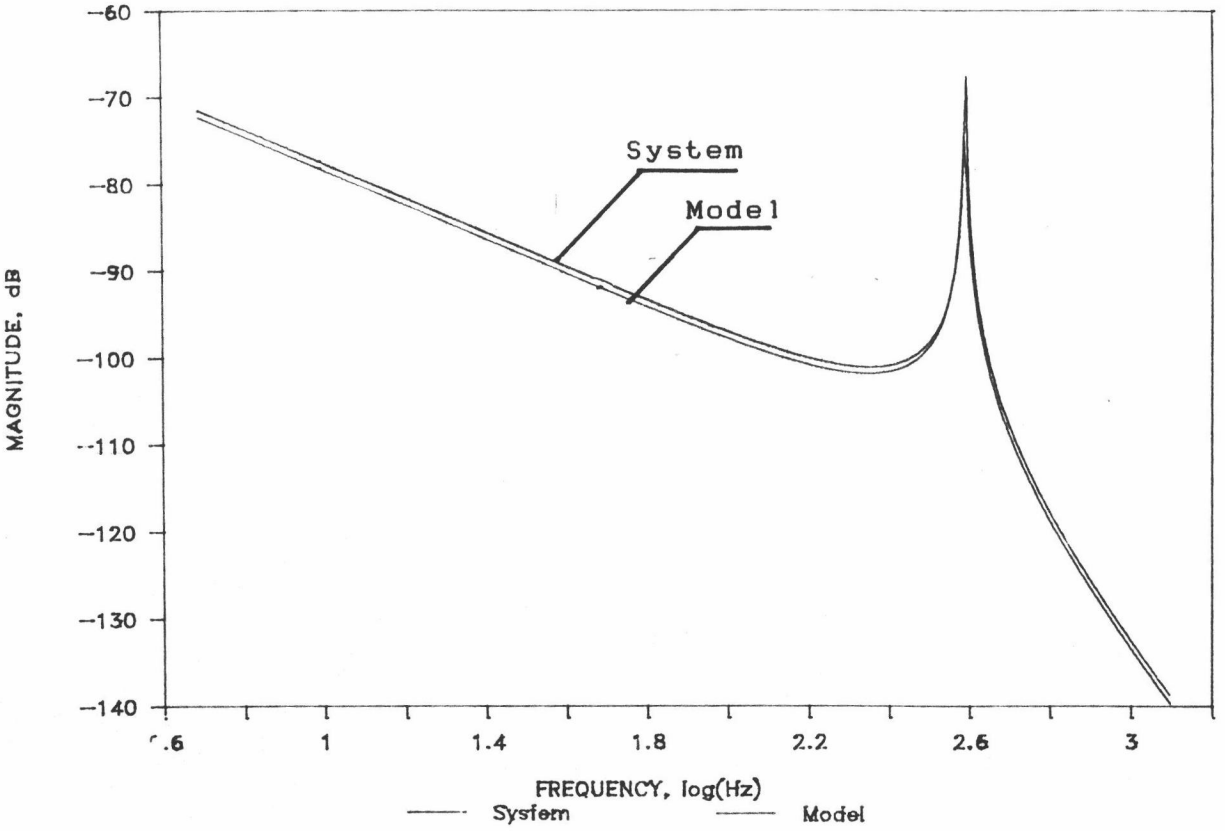


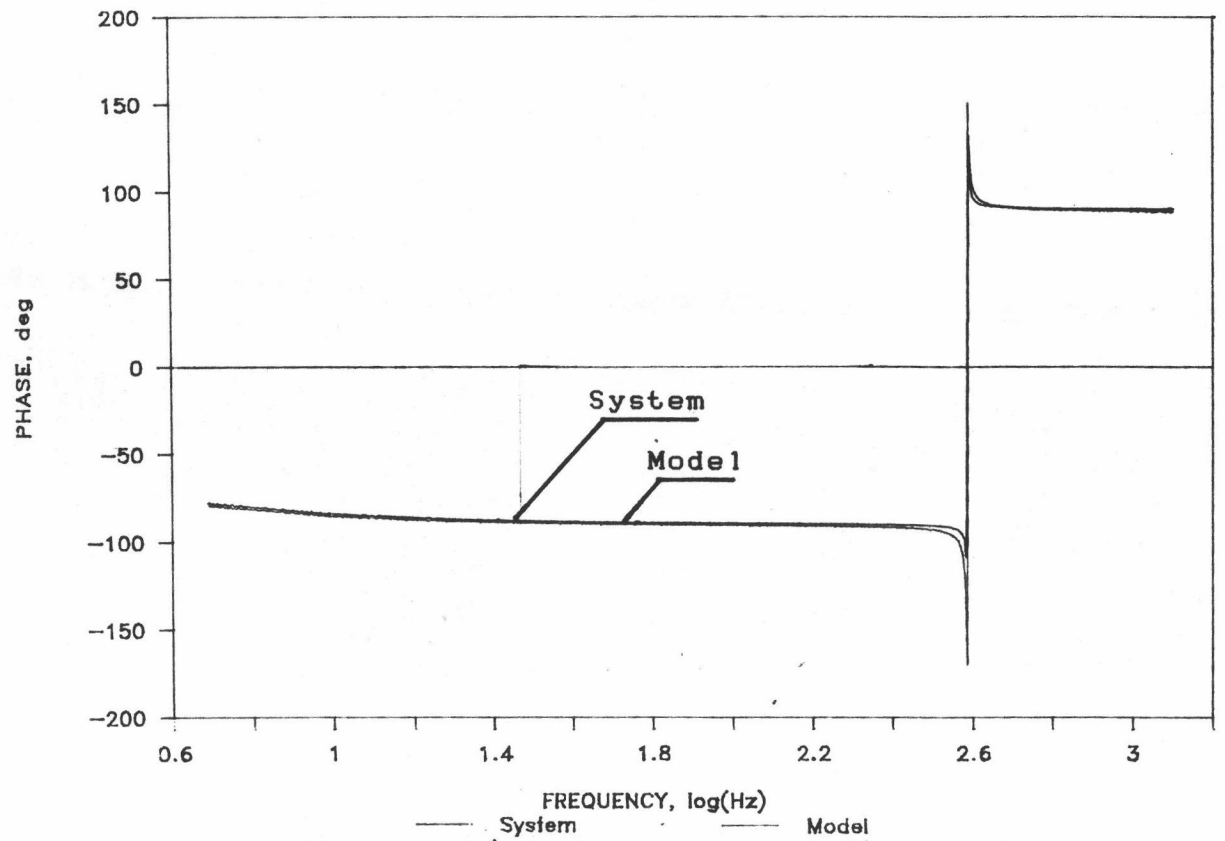
รูป 5-8 แสดงโมเดลที่สร้างจากค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้เทียบกับผลตอบความถี่ของทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน H_2 เมื่อใช้จำนวนชุดข้อมูล 4 ชุด



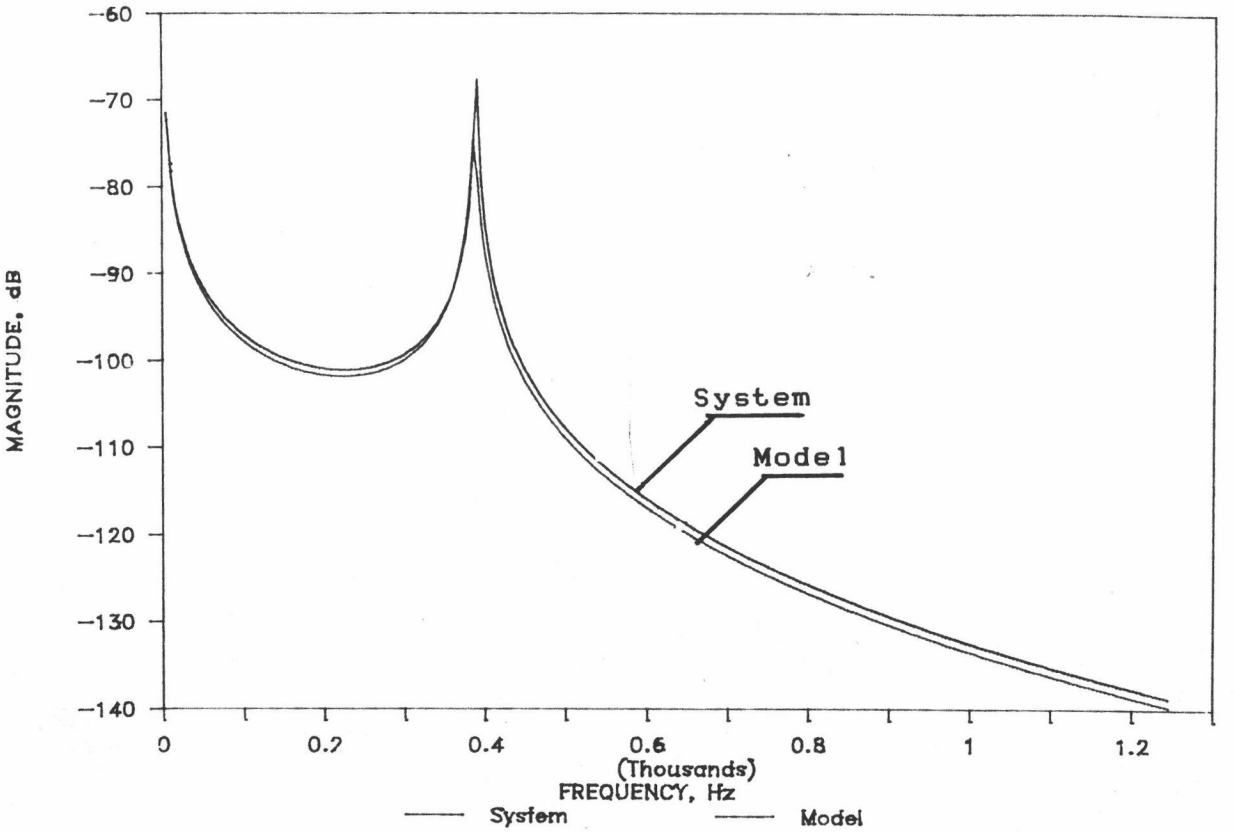


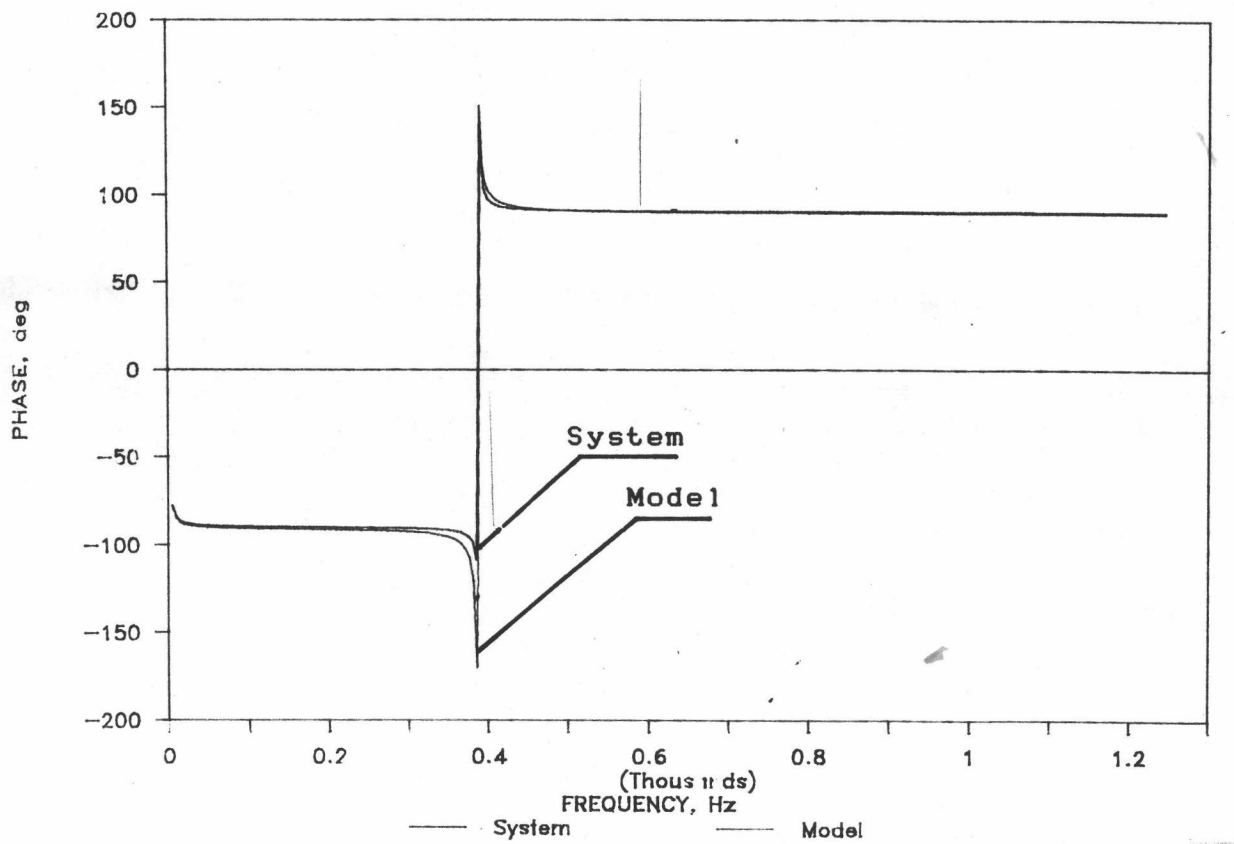
รูป 5-8 (ต่อ) เมื่อเสกลแกนนอนเป็นเชิงเส้นตรง





รูป 5-9 แสดงโมเดล H_2 ที่สร้างจากค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้เทียบกับทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน H_2 ที่คำนวณได้จากสมการ 5-6





รูป 5-9 (ต่อ) เมื่อเสกลแกนนอนเป็นเชิงเส้นตรง