

เซมิกรุปของการแปลงเชิงเส้นซึ่งมีเซมิกรุปย่อยแท้ที่หนาแน่นและ
เซมิกรุปของการแปลงเชิงเส้นที่ปิดในภาคขยายมาตรฐานบางชนิด



นางสาว กนกรัตน์ เศวตเศรณี

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2534

ISBN 974 - 578 - 458 - 3

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

017701

LINEAR TRANSFORMATION SEMIGROUPS WHICH HAVE PROPER
DENSE SUBSEMIGROUPS AND LINEAR TRANSFORMATION
SEMIGROUPS WHICH ARE CLOSED IN SOME STANDARD EXTENSIONS

Miss Knograt Savettaseranee

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkron University

1991

ISBN 974 - 578 - 458 - 3



Thesis Title LINEAR TRANSFORMATION SEMIGROUPS WHICH
 HAVE PROPER DENSE SUBSEMIGROUPS AND
 LINEAR TRANSFORMATION SEMIGROUPS WHICH
 ARE CLOSED IN SOME STANDARD EXTENSIONS

By Miss Knograt Savettaseranee

Department Mathematics

Thesis Advisor Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University
in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's degree.

Thavorn Vajrabhaya Dean of Graduate School
(Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D.)

Thesis Committee

Yati Krisnangkura Chairman
(Yati Krisnangkura Ph.D.)

Sidney S. Mitchell Member
(Sidney S. Mitchell Ph.D.)

Yupaporn Kemprasit Thesis Advisor
(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

กนกรัตน์ เศวศเศรณี : เซมิกรุปของการแปลงเชิงเส้น ซึ่งมีเซมิกรุปย่อยแท้ที่หนาแน่นและเซมิ-
กรุปของการแปลงเชิงเส้นที่ปิดในภาคขยายมาตรฐานบางชนิด (LINEAR TRANSFORMATION
SEMIGROUPS WHICH HAVE PROPER DENSE SUBSEMIGROUPS AND LINEAR TRANS-
FORMATION SEMIGROUPS WHICH ARE CLOSED IN SOME STANDARD EXTENSIONS)
อ.ที่ปรึกษา : รศ.ดร.ยุพภรณ์ เข้มประสิทธิ์, 41 หน้า. ISBN 974-578-458-3

สำหรับเซต X ใด ๆ ให้ $B_X =$ เซมิกรุปของความสัมพันธ์บนเซต X , $P_X =$ เซมิกรุปของ
การแปลงบางส่วนบนเซต X และ $T_X =$ เซมิกรุปของการแปลงเต็มบนเซต X

สำหรับปริภูมิเวกเตอร์ V ใด ๆ ให้ $LT_V =$ เซมิกรุปการคูณของการแปลงเชิงเส้นบน V
ทั้งหมด, $LG_V =$ กรุปการคูณของการแปลงเชิงเส้นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึงบน V ทั้งหมด, $LM_V =$
เซมิกรุปการคูณของการแปลงเชิงเส้นแบบหนึ่งต่อหนึ่งบน V ทั้งหมด และ $LE_V =$ เซมิกรุปการคูณของ
การแปลงเชิงเส้นแบบทั่วถึงบน V ทั้งหมด

สำหรับฟิลด์ F และจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ให้ $M_n(F) =$ เซมิกรุปการคูณของเมตริกซ์ขนาด
 $n \times n$ บนฟิลด์ F ทั้งหมด และ $G_n(F) =$ กรุปการคูณของเมตริกซ์ที่เป็นนอนซิงกูลาร์ขนาด $n \times n$ บนฟิลด์
 F ทั้งหมด

ผลสำคัญของการวิจัยมีดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟิลด์ F และ $S = LT_V, LG_V, LM_V$ หรือ LE_V แล้ว S มี
เซมิกรุปย่อยแท้ที่หนาแน่น เมื่อและต่อเมื่อ ข้อความหนึ่งในข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) มิติของ V เป็นอนันต์
- (2) F มีสมาชิกที่ไม่ใช่ 0 ซึ่งมีอันดับอนันต์ภายใต้การคูณ

บทแทรก 2 ถ้า F เป็นฟิลด์ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $S = M_n(F)$ หรือ $G_n(F)$ แล้ว S มีเซมิกรุป
ย่อยแท้ที่หนาแน่น เมื่อและต่อเมื่อ F มีสมาชิกที่ไม่ใช่ 0 ซึ่งมีอันดับอนันต์ภายใต้การคูณ

ทฤษฎีบท 3 สำหรับปริภูมิเวกเตอร์ V ใด ๆ แต่ละเซมิกรุป LT_V, LG_V, LM_V และ LE_V ปิดในเซมิกรุป
 T_V, P_V และ B_V ทั้งหมด



ภาควิชา คณิตศาสตร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2533

ลายมือชื่อนิติ กนกรัตน์ เศวศเศรณี

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ยุพภรณ์ เข้มประสิทธิ์

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

KNOGRAT SAVETASERANEE : LINEAR TRANSFORMATION SEMIGROUPS WHICH HAVE PROPER DENSE SUBSEMIGROUPS AND LINEAR TRANSFORMATION SEMIGROUPS WHICH ARE CLOSED IN SOME STANDARD EXTENSIONS. THESIS ADVISOR : ASSO. PROF. YUPAPORN KEMPRASIT, PH.D., 41 pp. ISBN 974-578-458-3

For any set X , let B_X = the semigroup of binary relations on X , P_X = the partial transformation semigroup on X and T_X = the full transformation semigroup on X .

For any vector space V , let LT_V = the multiplicative semigroup of all linear transformations of V , LG_V = the multiplicative group of all 1-1 onto linear transformations of V , LM_V = the multiplicative semigroup of all 1-1 linear transformations of V and LE_V = the multiplicative semigroup of all onto linear transformations of V .

For any field F and any positive integer n , let $M_n(F)$ = the multiplicative semigroup of all $n \times n$ matrices over F and $G_n(F)$ = the multiplicative group of all $n \times n$ nonsingular matrices over F .

The main results of this research are as follows :

Theorem 1. If V is a vector space over a field F and $S = LT_V, LG_V, LM_V$ or LE_V , then S has a proper dense subsemigroup if and only if one of the following statements holds :

- (i) $\dim V = \infty$.
- (ii) F has a nonzero element of infinite order under multiplication.

Corollary 2. If F is a field, n a positive integer and $S = M_n(F)$ or $G_n(F)$, then S has a proper dense subsemigroup if and only if F has a nonzero element of infinite order under multiplication.

Theorem 3. For any vector space V , each of LT_V, LG_V, LM_V and LE_V is closed in all of T_V, P_V and B_V .

ภาควิชา คณิตศาสตร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2533

ลายมือชื่อนิสิต ยุกกรรัตน์ เกษมทรัพย์

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ยุกกรรัตน์ เกษมทรัพย์

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม



ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Assoc. Prof. Dr. Yupaporn Kemprasit, my thesis advisor, for her untiring offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my father, mother, brother and friends for their encouragement throughout my graduate study.



CONTENTS

	page
ABSTRACT IN THAI	iv
ABSTRACT IN ENGLISH	v
ACKNOWLEDGEMENT	vi
INTRODUCTION	1
CHAPTER	
I PRELIMINARIES	4
II LINEAR TRANSFORMATION SEMIGROUPS WHICH HAVE PROPER DENSE SUBSEMIGROUPS	11
III LINEAR TRANSFORMATION SEMIGROUPS WHICH ARE CLOSED IN SOME STANDARD EXTENSIONS	34
REFERENCES	39
VITA	41