สมการฟังก์ชันนัล

$$f(x,y) + f(x+y,z) = f(y,z) + f(x,y+z)$$

นางสาว กรรณิกา เกียนวัฒนา

วิทยานิพนธ์นี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2519

THE FUNCTIONAL EQUATION :

$$f(x,y) + f(x+y,z) = f(y,z) + f(x,y+z)$$

Miss Gunnigar Kienvatana

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1976

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial fulfilment of the requirements of the Degree of Master of Science .

Kisid Prachuabmoh

....

Dean of the Graduate School

Thesis Committee Subha Sutchritpongsa Chairman .

Mark Tamthai

Virool Boonyasombat

Thesis Supervisor Dr. Virool Boonyasombat

หัวข้อวิทยานิพนธ์ สมการฟังก์ชั่นนัล: $f(x,y)+f(x+y,z) = f(y,z) + f(x,y+z)$

ชื่อ นางสาว กรรณิกา เกียนวัฒนา แผนกวิชาคณิตศาสตร์

ปีการศึกษา ๒๕๑๘

บทคัดย่อ

ให้ G, G' เป็นกรุป ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เราสนใจถึงเงื่อนไขที่จะทำให้ฟังก์ชั่น f จาก $G \times G$ ไปยัง G' ซึ่งสอดคล้องสมการ

(A) $$f(x,y) + f(x+y,z) = f(y,z) + f(x,y+z)$$

สามารถเขียนแทนได้ในรูป

(B) $$f(x,y) = g(x) + g(y) - g(x+y)$$

โดยที่ g เป็นฟังก์ชั่นจาก G ไปยัง G' ผลลัพธ์ที่สำคัญของเราคือทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท</u> A ให้ $(G,+)$ และ $(G',+)$ เป็นอะบีเลี่ยนกรุป ให้ f เป็นฟังก์ชั่นที่สมมาตรจาก $G \times G$ ไปยัง G' และสอดคล้องสมการ(A) จะได้ว่ามีฟังก์ชั่น g จาก G ไปยัง G' ซึ่งทำให้สมการ (B) เป็นจริง

<u>ทฤษฎีบท</u> B ให้ $(G,+)$ เป็นอะบีเลี่ยนกรุปซึ่งมีอันดับของซิคลิกสับกรุปอนันต์ $\{S_i\}$ ซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้

i) $G = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i \supset \ldots \supset S_i \supset \ldots \supset S_0$.

ii) สำหรับ x ใด ๆ ใน S_i, $2x$ จะอยู่ใน S_{i-1} .

iii) สำหรับ x_i ใด ๆ ใน S_i และทุก ๆ j ที่มากกว่า i จะมี x_j ใน S_j ซึ่ง $2^{j-i}(x_j) = x_i$.

ถ้า f เป็นฟังก์ชั่นจาก $G \times G$ ไปยังอะบีเลี่ยนกรุ๊ป G' สอดคล้องสมการ (A) จะมีฟังก์ชั่น g จาก G ไปยัง G' ซึ่งทำให้สมการ (B) เป็นจริง

นิยาม 1 ให้ Γ เป็นลิมิตออดินัล จะเรียก โทโปโลจิคัล สเปซ X ว่ามีคุณสมบัติ (ΓN) ถ้าแต่ละจุดสะสม x ของสับเซ็ท A ใด ๆ ของ X มีเน็ทจาก Γ ไปยัง A ซึ่งลู่เข้าหาจุด x

นิยาม 2 เราจะกล่าวว่า โทโปโลจิคัล กรุ๊ป X เป็น σ^* - คอมแพ็ค ถ้าเราอาจเขียน X ได้ ในรูป $X = \bigcup_{n=o}^{\infty} k_n$ โดยที่แต่ละ K_n เป็นคอมแพ็ค เนเบอร์ฮูดของไอเด็นติตี้ของ X

ทฤษฎีบท C ให้ G เป็นโทโปโลจิคัล กรุ๊ปที่เป็น อะบีเลี่ยน n -ดิวิซิเบิ้ล ทอชั่นฟรี σ^* - คอมแพ็ค และเฮาสดอร์ฟ ซึ่งมีคุณสมบัติ (Γ N) สำหรับลิมิตออดินัล Γ บางตัว ให้ f เป็นฟังก์ชั่นสมมาตรแบบต่อเนื่องจาก $G \times G$ ไปยัง $\mathbb{R}^{(k)}$ และสอดคล้องสมการ (A) จะได้ว่ามีฟังก์ชั่นแบบต่อเนื่อง g จาก G ไปยัง $\mathbb{R}^{(k)}$ ที่ทำให้สมการ (B) เป็นจริง

ทฤษฎีบท D ให้ V เป็นโทโปโลจิคัล เว็คเตอร์ สเปซ ซึ่งเป็น σ^*- คอมแพ็ค เฮาสดอร์ฟ และมีคุณสมบัติ (Γ N) สำหรับ ลิมิตออดินัล Γ บางตัว ให้ $\mathcal{B}$ เป็นฐานของ V ให้ f เป็นฟังก์ชั่นสมมาตรแบบต่อเนื่อง จาก $V \times V$ ไปยัง $\mathbb{R}^{(k)}$ และสอดคล้องสมการ (A) จะได้ว่า มีฟังก์ชั่น แบบต่อเนื่อง g เพียงฟังก์ชั่นเดียวเท่านั้น จาก V ไปยังเซ็ท $\mathbb{R}^{(k)}$ ซึ่ง $g(v) = \underline{0}$ สำหรับทุก ๆ v ใน $\mathcal{B}$ และทำให้สมการ (B) เป็นจริง

Thesis Title THE FUNCTIONAL EQUATION :

$f(x,y) + f(x+y,z) = f(y,z) + f(x,y+z)$

Name Miss Gunnigar Kienvatana. Department Mathematics.

Acadamic Year 1975

Abstract

Let G, G' be groups. In this work we are interested in the conditions under which a function $f : G \times G \longrightarrow G'$ satisfying

(A) $$f(x,y) + f(x+y,z) = f(y,z) + f(x,y+z)$$

can be represented in the form

(B) $$f(x,y) = g(x) + g(y) - g(x+y)$$

where $g : G \longrightarrow G'$. Our main results are given in the followings :

Theorem A. Let $(G, +)$ and $(G', +)$ be abelian groups. Let a symmetric function $f: G \times G \longrightarrow G'$ satisfy (A). Then there exists a function $g : G \longrightarrow G'$ such that (B) holds.

Theorem B Let $(G, +)$ be an abelian group such that there exist a sequence of infinite cyclic subgroups $\{S_i\}$ with the following properties :

i) $G = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i \supset \ldots \supset S_i \supset \ldots \supset S_0$.

ii) For any $x \in S_i$, $2x \in S_{i-1}$.

iii) For any $x_i \in S_i$ and all $j > i$, there exists $x_j \in S_j$ such that $2^{j-i}(x_j) = x_i$.

If a function $f : G \times G \longrightarrow G'$, where G' is an abelian group, satisfies (A), then there exists a function $g : G \rightarrow G'$ such that (B) holds.

Definition 1 Let Γ be a limit ordinal. A topological space X will be said to have property (ΓN), if for each accumulation point x of any subset A of X, there exists a Γ - net in A, i.e. a net from Γ into A, which converges to x.

Definition 2. A topological group X will be said to be σ^* - compact if $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} k_n$ for some sequence $\{K_n\}$ of compact neighborhoods of the identity of X .

Theorem C Let G be an abelian n - divisible torsion free σ^* - compact Hausdorff topological group which has the property (Γ N) for some limit ordinal Γ. Let f be a symmetric continuous function on $G \times G$ into $\mathbb{R}^{(k)}$ satisfying (A). Then there exists a continuous function g on G into $\mathbb{R}^{(k)}$ such that (B) holds.

Theorem D Let V be a σ^* - compact Hausdorff topological vector space which has the property(Γ N) for some limit ordinal Γ. Let $\mathcal{B}$ be a basis of V. Let f be a symmetric continuous function on $V \times V$ into $\mathbb{R}^{(k)}$ satisfying (A). Then there exists a unique continuous function g on V into $\mathbb{R}^{(k)}$ such that $g(v) = \underline{0}$ for all $v \in \mathcal{B}$ and (B) holds.

ACKNOWLEDGEMENT

I wish to sincerely thank Dr. Virool Boonyasombat, my thesis supervisor, for introducing this thesis title to me and for his valuable guidance and significant language assistance in the entire preparation of my thesis for which it has been a success .

TABLE OF CONTENTS