บทที่ 2

การคำนวณค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยวิธีวิเคราะห์เทนเซอร์

2.1 สมการพื้นฐาน

Fano et al[14] ได้ให้สมการของสนามไฟฟ้าผลรวมและสนามแม่เหล็กผลรวมที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาไว้เป็น (ภาคผนวก ก)

$$\vec{E}_t = \vec{E}_0+\vec{E}_1+\vec{E}_2+\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots(1a)$$

$$\vec{H}_t = \vec{H}_0+\vec{H}_1+\vec{H}_2+\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots(1b)$$

ในบริเวณที่ไม่มีแหล่งกำเนิดคลื่น (Source-free region) สนามอันดับศูนย์ทั้งสองคือ $\vec{E}_0$ และ $\vec{H}_0$ เป็นไปตามสมการ

$$\nabla \times \vec{E}_0 = \vec{0} \qquad \ldots\ldots(2a)$$

$$\nabla \times \vec{H}_0 = \vec{J}_0 = \overleftrightarrow{\sigma}\,\vec{E}_0 \qquad \ldots\ldots(2b)$$

ส่วนสนามที่มีอันดับสูง ๆ ขึ้นไปจะคล้องตามสมการของแมกซ์เวลล์ คือ

$$\nabla \times \vec{E}_n = -i\omega\mu_o\,\vec{H}_{n-1} \qquad \ldots\ldots(3a)$$

$$\nabla \times \vec{H}_n = \vec{J}_n+i\omega\varepsilon_o\,\vec{E}_{n-1} = \overleftrightarrow{\sigma}\,\vec{E}_n+i\omega\mu_o\,\vec{E}_{n-1} \qquad \ldots\ldots(3b)$$

โดยที่

n = 1 , 2 , 3 ,.....

$\vec{J}_n$ = ความหนาแน่นของกระแสอันดับ n

$\overleftrightarrow{\sigma}$ = เทนเซอร์ของสภาพนำไฟฟ้า (Conductivity tensor)

ในสมการ (1)-(3) นี้เราละฟังก์ชัน $e^{i\omega t}$ เอาไว้ในฐานที่เข้าใจ

ในที่นี้เราจะพิจารณากรณีเมื่อตัวกลางเอกพันธุ์ชนิดแอนไอโซโทรปิกมีเทนเซอร์ของสภาพนำไฟฟ้าเป็น (ภาคผนวก ข)

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 S & \sigma_2 C \\ -\sigma_2 S & (\sigma_1 S^2 + \sigma_0 C^2) & (\sigma_1 - \sigma_0) CS \\ -\sigma_2 C & (\sigma_1 - \sigma_0) CS & (\sigma_1 C^2 + \sigma_0 S^2) \end{bmatrix} \qquad \text{.....(4)}$$

ตัวกลางอันหนึ่งที่มีเทนเซอร์ของสภาพนำไฟฟ้าตามสมการ (4) ก็คือ ไอโอโนสเฟียร์ซึ่งเป็นชั้นบรรยากาศที่อยู่สูงขึ้นไปจากพื้นโลกประมาณ 70 กิโลเมตร และมีสนามแม่เหล็กโลก $\vec{B}_0$ ทำมุมเท (dip angle) I ในระนาบ yz ในระบบแกนประสานคาร์ทีเซียน ดังแสดงในรูป 2.1 ในกรณีนี้ σ_0 , σ_1 , และ σ_2 มีชื่อเรียกว่า สภาพนำไฟฟ้าจำเพาะ (Specific conductivity) สภาพนำไฟฟ้าพีเดอร์เซ็น (Pedersen conductivity) และสภาพนำไฟฟ้าฮอลล์ (Hall conductivity) ตามลำดับ ส่วน S และ C ก็คือ ค่าไซน์และโคไซน์ของมุมเท I ตามลำดับ

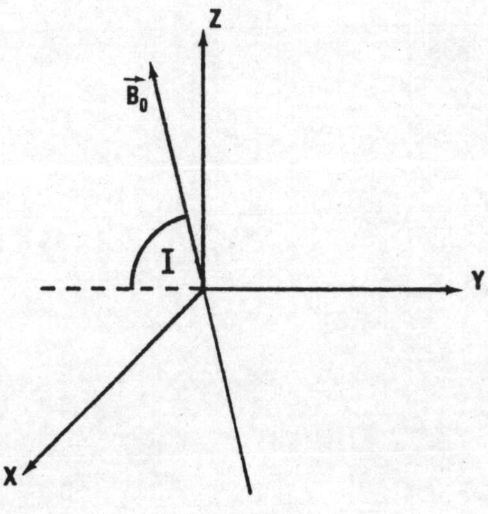
เพื่อให้การพิจารณารูปแบบสมการต่อไปง่ายขึ้น เราจะพิจารณาแบ่งตัวกลางแอนไอโซโทรปิกดังกล่าวออกเป็นชั้นบาง ๆ (thin slab) โดยให้มีความหนาชั้นละประมาณ 1 กิโลเมตร และถือว่าชั้นบาง ๆ ของตัวกลางดังกล่าวเป็นตัวกลางชนิดเอกพันธุ์ ซึ่งสภาพนำไฟฟ้าทั้งสาม (σ_0 , σ_1 และ σ_2 มีค่าคงตัวไม่ขึ้นกับระยะทาง [3] นั่นคือ

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} = 0 \qquad \text{.....(5a)}$$

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = 0 \qquad \text{.....(5b)}$$

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial z} = 0 \qquad \text{.....(5c)}$$

ในย่านความถี่ ULF และ ELF เราถือได้ว่า σ_0 , σ_1, และ σ_2 เป็นค่าคงตัวค่าจริงซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับความถี่เชิงมุม ω ของคลื่นเลยได้ [3]



รูปที่ 2.1 แสดงเส้นแรงสนามแม่เหล็กโลกทำมุมเท I ในระนาบ yz

2.2 การหาสูตรตามวิธีวิเคราะห์เทนเซอร์ (Tensor analysis)

ในตอนแรกนี้ เราจะตั้งสมการ $\vec{E}_0$ก่อน เมื่อหา $\vec{E}_0$ ได้แล้ว เราก็จะสามารถหา $\vec{H}_0$ และสนามที่มีอันดับสูง ๆ ขึ้นไปได้โดยใช้สมการ (2b) และ (3)

จากสมการ (2b) เราสามารถแสดงนิพจน์ของ $\vec{E}_0$ ได้เป็น

$$\vec{E}_0 = -\nabla V \qquad .....(6)$$

โดยที่ V เป็นศักย์ไฟฟ้าสถิต ถ้าหาไดเวอเจนซ์ (divergance = ∇.)ของพจน์ต่าง ๆ ในสมการ (2b) เราจะได้

$$\nabla.(\nabla \times \vec{H}_0) = \nabla.(\hat{\sigma}\,\vec{E}_0) = \nabla.\vec{J}_0 = 0 \qquad .....(7)$$

โดยการแทนค่า $\hat{\sigma}$ จากสมการ (4) และกระจายสมการ (7) ออกไปในระบบแกนประสานคาร์ทีเซียน ผลที่ได้จะเป็น [2]

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left[S^2 + (\sigma_0/\sigma_1)C^2\right]\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 2\left[1 - \sigma_0/\sigma_1\right]SC\,\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \left[(\sigma_0/\sigma_1)\,S^2 + C^2\right]\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$- (C/\sigma_1)\,\frac{\partial \sigma_2}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} + (SC/\sigma_1)\left[\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_1 - \sigma_0)\right]\frac{\partial V}{\partial y} + (1/\sigma_1)\left[S^2\frac{\partial \sigma_0}{\partial z} + C^2\frac{\partial \sigma_1}{\partial z}\right]\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$= 0 \qquad \text{.....(8)}$$

สำหรับกรณีที่พิจารณาคือตัวกลางเอกพันธุ์แอนไอโซโทรปิก ซึ่งได้จากการแบ่งชั้นตัวกลางเอนกพันธุ์แอนไอโซโทรปิกออกเป็นชั้นบาง ๆ เราจะนำสมการ (5) มาแทนในสมการ (8) **ทำให้ได้**

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left[S^2 + (\sigma_0/\sigma_1)C^2\right]\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 2\left[1 - \sigma_0/\sigma_1\right]SC\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \left[(\sigma_0/\sigma_1)\,S^2 + C^2\right]\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$= 0 \qquad \text{.....(9a)}$$

หรือ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (S^2 + a^2C^2)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 2\,(1 - a^2)\,SC\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + (a^2S^2 + C^2)\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$= 0 \qquad \text{.....(9b)}$$

เมื่อพิจารณาสมการ (9) เราจะพบว่ากรณีที่เราคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในบริเวณที่เส้นแรงสนามแม่เหล็กโลกทำมุมตั้งฉากกับผิวโลก (S=1 , C=0) จะเป็นกรณีที่เกิดสภาพสมมาตรตามมุมรอบแกน (azimuthal symmetry) ผู้วิจัยอื่น ๆ [3] , [4] , [5] , [6] ที่ทำวิจัยทางด้านนี้ได้แปลงตัวแปรจากระบบแกนประสานคาร์ทีเซียน ไปเป็นระบบแกนประสานทรงกระบอก ซึ่งสามารถทำให้ $\partial/\partial\phi = 0$ จึงสามารถลดตัวแปรลงได้ตัวหนึ่ง (ϕ) แต่ในบริเวณอื่น ๆ ซึ่งเส้นแรงสนามแม่เหล็กโลกทำมุมเอียงกับผิวโลก จะไม่เกิดสภาพสมมาตร ตามมุมรอบแกน เราจึงจำเป็นต้องใช้ระบบแกนประสานคาร์ทีเซียนอีกครั้งหนึ่ง พร้อมกันนี้ก็ใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติอย่างง่ายแทนฟังก์ชันเบสเซล และสามารถใช้หลักการวิเคราะห์เทนเซอร์ (tensor analysis) สำหรับ

แปลงตัวแปรที่มีอยู่เดิมเป็นตัวแปรใหม่ โดยเปลี่ยนสมการ (9) ซึ่งเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลบางส่วนแบบวงรี (Elliptic partial differential equation) ที่ค่อนข้างจะยุ่งยากซับซ้อนไปเป็นสมการใหม่ ซึ่งเราสามารถแก้ได้ง่ายกว่า

โดยผลจากการวิเคราะห์ในภาคผนวก ค เราจะให้ตัวแปร x , y และ z มีความสัมพันธ์กับตัวแปรใหม่ ζ , η และ ξ ตามสมการต่อไปนี้

$$\zeta = x \quad \text{.....(10a)}$$

$$\eta = y/b \quad \text{.....(10b)}$$

$$\xi = -\frac{b}{a}(cy - z) \quad \text{.....(10c)}$$

$$a = (\sigma_0/\sigma_1) \quad \text{.....(11a)}$$

$$b = (S^2 + a^2C^2) \quad \text{.....(11b)}$$

$$c = \frac{(1 - a^2)SC}{S^2 + a^2C^2} \quad \text{.....(11c)}$$

เมื่อพิจารณาสมการต่าง ๆ ใหม่โดยอาศัยหลักการวิเคราะห์เทนเซอร์ (tensor analysis) (ภาคผนวก ง) เราจะได้เทนเซอร์คอนทราวาเรียนต์ , เทนเซอร์โควาเรียนต์ , เทนเซอร์เมตริกซ์ , และ เทนเซอร์คอนจูเกต ตามลำดับดังนี้

เทนเซอร์คอนทราวาเรียนต์
$$\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & -bc/a & b/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}^1 \\ \bar{A}^2 \\ \bar{A}^3 \end{bmatrix} \quad \text{.....(12a)}$$

เทนเซอร์โควาเรียนต์
$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & bc & a/b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}^1 \\ \bar{A}^2 \\ \bar{A}^3 \end{bmatrix} \quad \text{.....(12b)}$$

เทนเซอร์เมตริกซ์ $g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2(1+c^2) & ac \\ 0 & ac & a^2/b^2 \end{bmatrix}$ .....(12c)

เทนเซอร์คอนจูเกต $g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & -\frac{c}{a} \\ 0 & -\frac{c}{a} & \frac{b^2}{a^2}(1+c^2) \end{bmatrix}$.(12d)

และค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ g คือ a^2 .....(12e)

ความสัมพันธ์ของเทนเซอร์คอนทราวาเรียนต์ และเทนเซอร์โควาเรียนต์คือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & -bc/a & b/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & bc & a/b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .(12f)$$

นั่นคือ เทนเซอร์คอนทราวาเรียนต์และเทนเซอร์โควาเรียนต์เป็นอินเวิร์สซึ่งกันและกัน

ความสัมพันธ์ของเทนเซอร์เมตริกซ์และเทนเซอร์คอนจูเกตคือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2(1+c^2) & ac \\ 0 & ac & a^2/b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & -\frac{c}{a} \\ 0 & -\frac{c}{a} & \frac{b^2}{a^2}(1+c^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .(12g)$$

นั่นคือ เทนเซอร์เมตริกซ์ และเทนเซอร์คอนจูเกตเป็นอินเวิร์สซึ่งกันและกัน

จากสมการ (6) และ (7) เราจะสามารถเขียนรูปสมการในรูปแบบเทนเซอร์คอนทราวาเรียนต์ได้

$$\begin{bmatrix} J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2\frac{S}{b} & \sigma_2 C\,\frac{a}{b} \\ -\sigma_2\frac{S}{b} & \sigma_1 b^2(1+c^2) & \sigma_1 ac \\ -\sigma_2 C\frac{a}{b} & \sigma_1 ac & \sigma_1\frac{a^2}{b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots(13)$$

$$\nabla.\vec{J} = \frac{\partial J^1}{\partial\zeta} + \frac{\partial J^2}{\partial\eta} + \frac{\partial J^3}{\partial\xi} \quad \ldots\ldots(14)$$

$$\vec{E} = -\nabla V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & -\frac{c}{a} \\ 0 & -\frac{c}{a} & \frac{b^2}{a^2}(1+c^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial V}{\partial\zeta} \\ -\frac{\partial V}{\partial\eta} \\ -\frac{\partial V}{\partial\xi} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots(15)$$

จากสมการ (13) , (14) ,และ (15) เราจะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2} = 0 \quad \ldots\ldots(16)$$

สมการ (16) มีคำเฉลยเป็น

$$\begin{aligned} V(\zeta,\eta,\xi) &= \left[A_1\cos(k_\zeta\zeta) + A_2\sin(k_\zeta\zeta)\right] \\ &\times\left[B_1\cos(k_\eta\eta) + B_2\sin(k_\eta\eta)\right] \\ &\times\left[C_1\exp(-k_\xi\xi) + C_2\exp(+k_\xi\xi)\right] \quad \ldots(17) \end{aligned}$$

โดยที่ $k_\zeta^{\ 2} + k_\eta^{\ 2} = k_\xi^{\ 2}$

เพื่อความสะดวกเราจะกำหนดสัญลักษณ์ขึ้นใหม่แทนดังนี้

$$[\zeta(+)] = A_1\cos(k_\zeta\zeta) + A_2\sin(k_\zeta\zeta) \quad \ldots\ldots(18a)$$

$$\left[\eta(+)\right] = B_1\cos(k_\eta \eta) + B_2\sin(k_\eta \eta) \qquad .....(18b)$$

$$\left[\zeta(-)\right] = A_1\sin(k_\zeta \zeta) - A_2\cos(k_\zeta \zeta) \qquad .....(18c)$$

$$\left[\eta(-)\right] = B_1\sin(k_\eta \eta) - B_2\cos(k_\eta \eta) \qquad .....(18d)$$

$$e(-) = \exp(-k_\xi \xi) \qquad .....(19c)$$

$$e(+) = \exp(k_\xi \xi) \qquad .....(18f)$$

เราจะเขียนรูปแบบของสมการ (17) เป็นแบบเมตริกซ์เฉพาะฟังก์ชันของ ξ เพื่อความสะดวกในการหาสูตรขึ้นต่อไปนี้

$$V(\zeta, \eta, \xi) = \left[\zeta(+)\right]\left[\eta(+)\right]\begin{bmatrix} e(-) \\ e(+) \end{bmatrix} \qquad .....(19)$$

จากสมการ (15) เราจะได้ส่วนประกอบ (conponents) ของ $\vec{E}_0$ เป็น

$$(E_0)^1 = \left[\zeta(-)\right]\left[\eta(+)\right]\begin{bmatrix} k_\zeta e(-) \\ k_\zeta e(+) \end{bmatrix} \qquad .....(20a)$$

$$(E_0)^2 = \left[\zeta(+)\right]\left[\eta(-)\right]\begin{bmatrix} (k_\eta/b^2)e(-) \\ (k_\eta/b^2)e(+) \end{bmatrix} - \left[\zeta(+)\right]\left[\eta(+)\right]\begin{bmatrix} +\frac{c}{a}k_\xi e(-) \\ -\frac{c}{a}k_\xi e(+) \end{bmatrix} \qquad .....(20b)$$

$$(E_0)^3 = \left[\zeta(+)\right]\left[\eta(-)\right]\begin{bmatrix} -\frac{c}{a}k_\eta e(-) \\ -\frac{c}{a}k_\eta e(+) \end{bmatrix} + \left[\zeta(+)\right]\left[\eta(+)\right]\begin{bmatrix} \frac{b^2}{a^2}(1+c^2)k_\xi e(-) \\ -\frac{b^2}{a^2}(1+c^2)k_\xi e(+) \end{bmatrix} \qquad ...(20c)$$

หรือจากสมการ (12b) เราจะได้องค์ประกอบในระบบแกนประสานคาร์ทีเซียนเป็น

$$E_{x0} = k_x \left[A_1\sin(k_x x) - A_2\cos(k_x x)\right]\left[B_1\cos(\frac{k_y y}{b}) + B_2\sin(\frac{k_y y}{b})\right]$$

$$\left[C_1\exp\{+k_z \frac{b}{a}(cy - z)\} + C_2\exp\{-k_z \frac{b}{z}(cy - z)\}\right] \text{..(21a)}$$

$$E_{y0} = \frac{k_y}{b}\left[A_1\cos(k_x x) + A_2\sin(k_x x)\right]\left[B_1\sin(\frac{k_y y}{b}) - B_2\cos(\frac{k_y y}{b})\right]$$

$$\left[C_1\exp\{+k_z \frac{b}{a}(cy - z)\} + C_2\exp\{-k_z \frac{b}{a}(cy - z)\}\right]$$

$$-k_z \frac{bc}{a}\left[A_1\cos(k_x x) + A_2\sin(k_x x)\right]\left[B_1\cos(\frac{k_y y}{b}) +\right.$$

$$\left. B_2\sin(\frac{k_y y}{b})\right]\left[C_1\exp\{+k_z \frac{b}{a}(cy - z)\} - \right.$$

$$\left. C_2\exp\{-k_z \frac{b}{a}(cy-z)\}\right] \quad \text{.....(21b)}$$

$$E_{z0} = k_z \frac{b}{a}\left[A_1 \quad (k_x x) + A_2\sin(k_x x)\right]\left[B_1\cos(\frac{k_y y}{b}) + B_2\sin\frac{k_y y}{b}\right]$$

$$\left[C_1\exp\{+k_z \frac{b}{a}(cy - z)\} - C_2\exp\{-k_z \frac{b}{a}(cy - z)\}\right]\text{.(21c)}$$

โดยที่
$$\left.\begin{aligned} k_x &= k_\zeta \\ k_y &= k_\eta \\ k_z &= k_\xi \end{aligned}\right\} \quad \text{.....(22)}$$

เมื่อเรานำค่าเฉลยของ $\vec{E}$ มาควบคู่กับสมการของแมกซ์เวลล์แล้ว เราจะสามารถค่าของ $\vec{H}_0$, $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$, และ ฯลฯ ได้ โดยวิธีการแบบเดียวกัน ในตอนแรกนี้เราจะพิจารณากระบวนการที่ใช้โดยสังเขปก่อน ต่อไปเราจะแสดงตัวอย่างหาสูตรสำหรับ $\vec{H}_0$ และ $\vec{E}_1$

$$\nabla \times \vec{E}_n = -i\omega\mu_o \vec{H}_{n-1} \qquad .....(23a)$$

$$\nabla \times \vec{H}_n = \vec{J}_n + i\omega\varepsilon_o \vec{E}_{n-1}$$

$$= \overleftrightarrow{\sigma} \vec{E}_n + i\omega\varepsilon_o \vec{E}_{n-1} \qquad .....(23b)$$

ในการหา $\vec{E}_n$ เราจะใช้สมการ (23a) ร่วมกับไดเวอร์เจนซ์ของสมการ (23b) คือ

$$\nabla \times \vec{E}_n = -i\omega\mu_o \vec{H}_{n-1} \qquad .....(24a)$$

$$\nabla.(\nabla \times \vec{H}_n) = \nabla.(\overleftrightarrow{\sigma} \vec{E}_n + i\omega\varepsilon_o\vec{E}_{n-1}) = 0 \qquad .....(24b)$$

ซึ่งแสดงว่าเราได้ $\nabla \times \vec{E}_n$ และ $\nabla.\vec{E}_n$ ในเทอมของปริมาณที่เรารู้ค่า เมื่อเรากระจายพจน์ทั้งสองนี้ออกไปในระบบการวิเคราะห์เทนเซอร์ เราจะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียลชุดหนึ่ง ซึ่งเราสามารถหาคำเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้ตามวิธีมาตรฐาน ในทำนองเดียวกัน ในการหา $\vec{H}_n$ เราจะใช้สมการ (23b) และไดเวอร์เจนซ์ของสมการ (23a) คือ

$$\nabla.(\nabla \times \vec{E}_{n-1}) = -i\omega\mu_o\nabla.\vec{H}_n = 0 \qquad .....(25a)$$

$$\nabla \times \vec{H}_n = \overleftrightarrow{\sigma} \vec{E}_n + i\omega\varepsilon_o\vec{E}_{n-1} \qquad .....(25b)$$

ในการหาคำตอบของ $\vec{H}_o$ เราจะใช้สมการ (2b) และสมการ (25a) กล่าวคือ

$$\nabla \times \vec{H}_o = \vec{J}_o = \overleftrightarrow{\sigma} \vec{E}_o \qquad .....(26a)$$

$$\nabla.\vec{H}_o = 0 \qquad .....(26b)$$

ในการหาคำตอบของ $\vec{E}_1$ เราจะใช้สมการ (24a) และ (24b) กล่าวคือ

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -i\omega\mu_o\vec{H}_o \qquad .....(27a)$$

$$\nabla.(\overleftrightarrow{\sigma}\vec{E}_1) = -i\omega\varepsilon_o(\nabla.\vec{E}_o) \qquad .....(27b)$$

จากสมการ (26a) และ (26b) เมื่อเรากระจายพจน์ออกไปในระบบการวิเคราะห์แบบเทนเซอร์ (ภาคผนวก จ) เราจะได้คำเฉลยของ $\vec{H}_o$ ซึ่งมีองค์ประกอบโควาเรียนต์ดังนี้

$$(H_0)_1 = [\zeta(-)][\eta(-)]\begin{bmatrix} K_1 e(-) \\ K_1' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix} L_1 e(-) \\ L_1' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(+)][\eta(-)]\begin{bmatrix} M_1 e(-) \\ M_1' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(+)][\eta(+)]\begin{bmatrix} N_1 e(-) \\ N_1' 3(+) \end{bmatrix} \quad \text{.....(28a)}$$

$$(H_0)_2 = [\zeta(-)][\eta(-)]\begin{bmatrix} K_2 e(-) \\ K_2' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix} L_2 e(-) \\ L_2' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(+)][\eta(-)]\begin{bmatrix} M_2 e(-) \\ M_2' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(+)][\eta(+)]\begin{bmatrix} N_2 e(-) \\ N_2' e(+) \end{bmatrix} \quad \text{.....(28b)}$$

$$(H_0)_3 = [\zeta(-)][\eta(-)]\begin{bmatrix} K_3 e(-) \\ K_3' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix} L_3 e(-) \\ L_3' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(+)][\eta(-)]\begin{bmatrix} M_3 e(-) \\ M_3' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix} N_3 e(-) \\ N_3' e(+) \end{bmatrix} \quad \text{.....(28c)}$$

โดยที่ค่าคงตัวต่าง ๆ เป็นไปตามตารางที่ 2.1 องค์ประกอบของ $\vec{H}_0$ ในระบบแกนประสานคาร์ทีเซียนก็คือ

$$H_{xo} = (H_0)_1 \quad \text{.....(29a)}$$

$$H_{yo} = (H_0)_2 \quad \text{.....(29b)}$$

$$H_{zo} = -\frac{bc}{a}(H_0)_2 + \frac{b}{a}(H_0)_3 \quad \text{.....(29c)}$$

หรือ

$$H_{xo} = [\zeta(-)][\eta(-)]\begin{bmatrix} K_1 e(-) \\ K_1' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix} L_1 e(-) \\ L_1' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(+)][\eta(-)]\begin{bmatrix} M_1 e(-) \\ M_1' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(+)][\eta(+)]\begin{bmatrix} N_1 e(-) \\ N_1' e(+) \end{bmatrix} \quad \text{.....(30a)}$$

$$H_{yo} = [\zeta(-)][\eta(-)]\begin{bmatrix}(K_2/b)e(-)\\(K'_2/b)e(+)\end{bmatrix} + [\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix}(L_2/b)e(-)\\(L'_2/b)e(+)\end{bmatrix}$$

$$+[\zeta(+)][\eta(-)]\begin{bmatrix}(M_2/b)e(-)\\(M'_2/b)e(+)\end{bmatrix} = [\zeta(+)][\eta(+)]\begin{bmatrix}(N_2/b)e(-)\\(N'_2/b)e(+)\end{bmatrix} \quad \text{.....(30b)}$$

$$H_{zo} = [\zeta(-)][\eta(-)]\begin{bmatrix}(-\frac{bc}{a}K_2 + \frac{b}{a}K_3)\ e(-)\\(-\frac{bc}{a}K'_2 + \frac{b}{a}K'_3)\ e(+)\end{bmatrix}$$

$$+ [\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix}(-\frac{bc}{a}L_2 + \frac{b}{a}L_3)\ e(-)\\(-\frac{bc}{a}L'_2 + \frac{b}{a}L'_3)\ e(+)\end{bmatrix}$$

$$+ [\zeta(+)][\eta(-)]\begin{bmatrix}(-\frac{bc}{a}M_2 + \frac{b}{a}M_3)\ e(-)\\(-\frac{bc}{a}M'_2 + \frac{b}{a}M'_3)\ e(+)\end{bmatrix}$$

$$+ [\zeta(+)][\eta(+)]\begin{bmatrix}(-\frac{bc}{a}N_2 + \frac{b}{a}N_3)\ e(-)\\(-\frac{bc}{a}N'_2 + \frac{b}{a}N'_3)\ e(+)\end{bmatrix} \quad \text{.....(30c)}$$

เมื่อเราได้คำเฉลยของ $\vec{E}_0$ และ $\vec{H}_0$ แล้ว โดยแทนค่าคำเฉลยดังกล่าวลงในสมการ (27a) และ (27b) เราก็จะได้ชุดสมการดิฟเฟอเรนเชียลอีกชุดหนึ่ง ซึ่งเราจะสามารถหาค่าของ $\vec{E}_1$ ได้ เราจะได้คำเฉลยของ $\vec{E}_1$ ซึ่งมีองค์ประกอบโควาเรียนต์ดังนี้

$$(E_1)_n = i\omega\Bigg\{[\zeta(-)][\eta(-)]\begin{bmatrix}P_n\xi\ e(-)\\P'_n\xi\ e(+)\end{bmatrix} + [\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix}Q_n\xi\ e(-)\\Q'_n\xi\ e(+)\end{bmatrix}$$

$$+ [\zeta(+)][\eta(-)]\begin{bmatrix}R_n\xi\ e(-)\\R'_n\xi\ e(+)\end{bmatrix} + [\zeta(+)][\eta(+)]\begin{bmatrix}O_n\xi\ e(-)\\O'_n\xi\ e(+)\end{bmatrix}\Bigg\} \quad \text{..(31)}$$

เมื่อ $n = 1,2,$ และ3

โดยที่ค่าคงตัวต่าง ๆ เป็นไปตามตารางที่ 2.2 องค์ประกอบของ $\vec{E}_1$ ในระบบแกนประสานคาร์ทีเซียนก็คือ

$$E_{x1} = (E_1)_1 \qquad .....(32a)$$

$$E_{y1} = \frac{1}{b}(E_1)_2 \qquad .....(32b)$$

$$E_{z1} = -\frac{bc}{a}(E_1)_2 + \frac{b}{a}(E_1)_3 \qquad .....(32c)$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้คำเฉลยของ $\vec{H}_1$ ซึ่งมีองค์ประกอบโควาเรียนต์ดังนี้

$$(H_1)_n = i\omega \left\{ [\zeta(-)][\eta(-)] \begin{bmatrix} (D_n + T_n\xi)\ e(-) \\ (D'_n + T'_n\xi)\ e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(-)][\eta(+)] \begin{bmatrix} (F_n + G_n\xi)\ e(-) \\ (F'_n + G'_n\xi)\ e(+) \end{bmatrix} \right.$$
$$\left. + [\zeta(+)][\eta(-)] \begin{bmatrix} (I_n + J_n\xi)\ e(-) \\ (I'_n + J'_n\xi)\ e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(+)][\eta(+)] \begin{bmatrix} (V_n + U_n\xi)\ e(-) \\ (V'_n + U'_n\xi)\ e(+) \end{bmatrix} \right\} \qquad .....(33)$$

เมื่อ n = 1,2, และ , 3

โดยที่ค่าคงตัวต่าง ๆ เป็นไปตามตารางที่ 3.3 องค์ประกอบของ $\vec{H}_1$ ในระบบแกนประสานคาร์ทีเซียนก็คือ

$$H_{x1} = (H_1)_1 \qquad .....(34a)$$

$$H_{y1} = \frac{1}{b}(H_1)_2 \qquad .....(34b)$$

$$H_{z1} = -\frac{bc}{a}(H_1)_2 + \frac{b}{a}(H_1)_3 \qquad .....(34c)$$

จากผลต่าง ๆ ที่เราได้นี้ เราจะได้ค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้ารวม ตามแนวของ Fano et al[14] คือ

$$\vec{E}_t = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 \qquad .....(35a)$$

$$\vec{H}_t = \vec{H}_0 + \vec{H}_1 \qquad .....(36b)$$

2.3 ค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ULF-ELF เมื่อสนามแม่เหล็กโลกทำมุม 90° กับพื้นโลก

สำหรับค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าขนาดคลื่นความถี่ ULF-ELF ตรงบริเวณขั้วโลก หรือใกล้ๆ กับขั้วโลกนั้น ได้มีผู้ค้นคว้าวิจัยมาก่อนแล้ว [(3),(4),(5),(6)] และได้นิพจน์ของสนามในเทอมของฟังก์ชันเบสเซล ในที่นี้เราจะเขียนนิพจน์ของสนามดังกล่าวเสียใหม่โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติอย่างง่ายแทนฟังก์ชันเบสเซลเพื่อให้ผลที่ได้มีรูปแบบใกล้เคียงและเป็นแบบเดียวกันกับค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีวิเคราะห์เทนเซอร์ในหัวข้อ 2.2 เราจะได้ค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าต่างๆ ดังนี้

2.3.1 ค่าสนามไฟฟ้าสถิต V

$$V = \left[x(+)\right]\left[y(+)\right]\begin{bmatrix}\exp(-)\\ \exp(+)\end{bmatrix}$$

2.3.2 ค่าสนามไฟฟ้าอันดับศูนย์ $\vec{E}_0$

$$E_{xo} = k_x \left[x(-)\right]\left[y(+)\right]\begin{bmatrix}\exp(-)\\ \exp(+)\end{bmatrix}$$

$$E_{yo} = k_y \left[x(+)\right]\left[y(-)\right]\begin{bmatrix}\exp(-)\\ \exp(+)\end{bmatrix}$$

$$E_{zo} = k_z\beta \left[x(+)\right]\left[y(+)\right]\begin{bmatrix}\exp(-)\\ \exp(+)\end{bmatrix}$$

2.3.3 ค่าสนามแม่เหล็กอันดับศูนย์ $\vec{H}_0$

$$H_{xo} = \left[x(-)\right]\left[y(+)\right]\begin{bmatrix}K_1 \exp(-)\\ K_1' \exp(+)\end{bmatrix} + \left[x(+)\right]\left[y(-)\right]\begin{bmatrix}L_1 \exp(-)\\ L_1' \exp(+)\end{bmatrix}$$

$$H_{yo} = \left[x(-)\right]\left[y(+)\right]\begin{bmatrix}K_2 \exp(-)\\ K_2' \exp(+)\end{bmatrix} + \left[x(+)\right]\left[y(-)\right]\begin{bmatrix}L_2 \exp(-)\\ L_2' \exp(+)\end{bmatrix}$$

$$H_{zo} = \left[x(+)\right]\left[y(+)\right]\begin{bmatrix} K_3 \exp(-) \\ K'_3 \exp(+) \end{bmatrix}$$

2.3.4 ค่าสนามไฟฟ้าอันดับหนึ่ง $\vec{E}_1$

$$E_{x1} = i\omega \left[x(-)\right]\left[y(+)\right]\begin{bmatrix} P_1 \, z \exp(-) \\ P'_1 \, z \exp(+) \end{bmatrix}$$

$$E_{y1} = i\omega \; x(+)\left.\right]\left[y(-)\right]\begin{bmatrix} P_2 \, z \exp(-) \\ P'_2 \, z \exp(+) \end{bmatrix}$$

$$E_{z1} = i\omega \left[x(+)\right]\left[y(+)\right]\begin{bmatrix} P_3 \, z \exp(-) \\ P'_3 \, z \exp(+) \end{bmatrix}$$

2.3.5 ค่าสนามแม่เหล็กอันดับหนึ่ง $\vec{H}_1$

$$H_{x1} = i\omega\left\{\left[x(-)\right]\left[y(+)\right]\begin{bmatrix} (D_1 + T_1 \, Z) \exp(-) \\ (D'_1 + T'_1 \, z) \exp(+) \end{bmatrix} + \left[x(+)\right]\left[y(-)\right]\begin{bmatrix} (F_1 + G_1 z) \exp(-) \\ (F'_1 + G'_1 z) \exp(+) \end{bmatrix}\right\}$$

$$H_{y1} = i\omega\left\{\left[x(-)\right]\left[y(+)\right]\begin{bmatrix} (D_2 + T_2 z) \exp(-) \\ (D'_2 + T'_2 z) \exp(+) \end{bmatrix} + \left[x(+)\right]\left[y(-)\right]\begin{bmatrix} (F_2 + G_2 z) \exp(-) \\ (F'_2 + G'_2 z) \exp(+) \end{bmatrix}\right\}$$

$$H_{z1} = i\omega \left[x(-)\right]\left[y(-)\right]\begin{bmatrix} (D_3 + T_3 z) \exp(-) \\ (D'_3 + T'_3 z) \exp(+) \end{bmatrix}$$

สำหรับค่าคงตัวและสัญลักษณ์ต่าง ๆ เป็นไปตามตารางที่ 2.4

ตารางที่ 2.1

แสดงค่าคงตัวต่าง ๆ ของสนามแม่เหล็ก $\vec{H}_0$

$$\alpha_0 = -k_\zeta^2 - k_\eta^2/b^2+(b^2/a^2)(1 + c^2)k_\xi^2$$

$$\beta_0 = (2c/a)k_\eta k_\xi$$

$$\Delta_0 = \alpha_0{}^2 + \beta_0{}^2$$

$$d_1 = (C/b)k_\zeta k_\eta$$

$$d_2 = (S/ab)k_\zeta k_\xi$$

$$d_3 = \left[a/b^2 -(b^2/a)(1 + c^2)\right] k_\eta k_\xi$$

$$d_4 = c\left[k_\eta^2 + k_\xi^2\right]$$

$$d_5 = c\, k_\zeta k_\eta$$

$$d_6 = \left[b^2/a\ (1 + c^2) - a\right]k_\zeta k_\xi$$

$$d_7 = \left[(bS/a)(1 - c^2) -(acC/b)\right] k_\eta k_\xi$$

$$d_8 = (-ca^2/b)k_\zeta^2 +(cS/b)k_\eta^2 + bc(1 + c^2)k_\xi^2$$

$$d_9 = \left[a - a/b^2\right]k_\zeta k_\eta$$

$$d_{10} = c\, k_\zeta k_\xi$$

$$d_{11} = \left[cS/b^2 - a^2C/b^3\right]k_\eta k_\xi$$

$$d_{12} = (aS/b)k_\zeta^2 +(aS/b^3)k_\eta^2 +(acC/b)k_\xi^2$$

ตารางที่ 2.1 (ต่อ)

$u_1 = \sigma_2 \alpha_0/\Delta_0$

$u_2 = \sigma_2 \beta_0/\Delta_0$

$u_3 = \sigma_1 \alpha_0/\Delta_0$

$u_4 = \sigma_1 \beta_0/\Delta_0$

$K_1 = -u_1d_1 + u_2d_2$

$K_1' = -u_1d_1 + u_2d_2$

$L_1 = +u_1d_2 + u_2d_1$

$L_1' = -u_1d_2 - u_2d_1$

$M_1 = +u_3d_3 - u_4d_4$

$M_1' = -u_3d_3 + u_4d_4$

$N_1 = -u_3d_4 - u_4d_3$

$N_1' = -u_3d_4 - u_4d_3$

$K_2 = -u_3d_5 + u_4d_6$

$K_2' = -u_3d_5 + u_4d_6$

$L_2 = +u_3d_6 + u_4d_5$

$L_2' = -u_3d_6 - u_4d_5$

ตารางที่ 2.1 (ต่อ)

M_2	=	$+u_1d_7 + u_2d_8$
M_2'	=	$-u_1d_7 - u_2d_8$
N_2	=	$+u_1d_8 - u_2d_7$
N_2'	=	$+u_1d_8 - u_2d_7$
K_3	=	$+u_3d_9 + u_4d_{10}$
K_3'	=	$+u_3d_9 + u_4d_{10}$
L_3	=	$+u_3d_{10} - u_4d_9$
L_3'	=	$-u_3d_{10} + u_4d_9$
N_3	=	$+u_1d_{11} + u_2d_{12}$
N_3'	=	$-u_1d_{11} - u_2d_{12}$
N_3	=	$+u_1d_{12} - u_2d_{11}$
N_3'	=	$+u_1d_{12} - u_2d_{11}$

ตารางที่ 2.2

แสดงค่าคงตัวต่าง ๆ ของสนามไฟฟ้า $\vec{E}_1$

$$f_0 = \frac{1}{2k_\xi}$$

$$f_1 = \varepsilon_0 k_\zeta \alpha_0/\sigma_1 \qquad f_2 = \varepsilon_0 k_\zeta \beta_0/\sigma_1$$

$$f_3 = \varepsilon_0 k_\eta \alpha_0/\sigma_1 \qquad f_4 = \varepsilon_0 k_\eta \beta_0/\sigma_1$$

$$f_5 = \varepsilon_0 k_\xi \alpha_0/\sigma_1 \qquad f_6 = \varepsilon_0 k_\xi \beta_0/\sigma_1$$

$$g_1 = \mu_0 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{c}{b} k_\zeta \qquad g_2 = \mu_0 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{S}{ab} k_\zeta$$

$$g_3 = \mu_0 c k_\eta \qquad g_4 = \mu_0 \frac{b^2}{a}(1 + c^2) k_\eta$$

$$g_5 = \mu_0 \frac{a}{b^2} k_\xi \qquad g_6 = \mu_0 c k_\xi$$

$$h_1 = \mu_0 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{c}{b} k_\eta \qquad h_2 = \mu_0 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{S}{ab} k_\eta$$

$$h_3 = \mu_0 c k_\zeta \qquad h_4 = \mu_0 \frac{b^2}{a}(1 + c^2) k_\zeta$$

$$h_5 = \mu_0 a k_\xi$$

$$l_1 = \mu_0 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{c}{b} k_\xi \qquad l_2 = \mu_0 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{S}{ab} k_\xi$$

$$l_3 = \mu_0 \frac{a}{b^2} k_\zeta \qquad l_4 = \mu_0 c k_\zeta$$

$$l_5 = \mu_0 a k_\eta$$

ตารางที่ 2.2 (ต่อ)

$$P_1 = f_0\left[-f_2 + \{-g_1M_2 + g_2M_3 - g_3L_2 + g_4L_3 - g_5K_2 + g_6K_3\}\right]$$

$$P_1' = f_0\left[-f_2 - \{-g_1M_2' + g_2M_3' - g_3L_2' + g_4L_3' + g_5K_2' - g_6K_3'\}\right]$$

$$Q_1 = f_0\left[f_1 + \{-g_1N_2 + g_2N_3 + g_3K_2 - g_4K_3 - g_5L_2 + g_6L_3\}\right]$$

$$Q_1' = f_0\left[-f_1 - \{-g_1N_2' + g_2N_3' + g_3K_2' - g_4K_3' + g_5L_2' - g_6L_3'\}\right]$$

$$R_1 = f_0\left[\quad + \{g_1K_2 - g_2K_3 - g_3N_2 + g_4N_3 - g_5M_2 + g_6M_3\}\right]$$

$$R_1' = f_0\left[\quad - \{g_1K_2' - g_2K_3' - g_3N_2' + g_4N_3' + g_5M_2' - g_6M_3'\}\right]$$

$$O_1 = f_0\left[\quad + \{g_1L_2 - g_2L_3 + g_3M_2 - g_4M_3 - g_5N_2 + g_6N_3\}\right]$$

$$O_1' = f_0\left[\quad - \{g_1L_2' - g_2L_3' + g_3M_2' - g_4M_3' + g_5N_2' - g_6N_3'\}\right]$$

$$P_2 = f_0\left[\quad + \{-h_1L_2 + h_2L_3 + h_3M_2 - h_2M_3 + h_5K_1\}\right]$$

$$P_2' = f_0\left[\quad - \{-h_1L_2' + h_2L_3' + h_3M_2' - h_4M_3' - h_5K_1'\}\right]$$

$$Q_2 = f_0\left[\quad + \{h_1K_2 - h_2K_3 + h_3N_2 - h_4N_3 + h_5L_1\}\right]$$

$$Q_2' = f_0\left[\quad - \{h_1K_2' - h_2K_3' + h_3N_2' - h_4N_3' - h_5L_1'\}\right]$$

$$R_2 = f_0\left[f_3 + \{-h_1N_2 + h_2N_3 - h_3K_2 + h_4K_3 + h_5M_1\}\right]$$

$$R_2' = f_0\left[-f_3 - \{-h_1N_2' + h_2N_3' - h_3K_2' + h_4K_3' - h_5M_1'\}\right]$$

$$O_2 = f_0\left[f_4 + \{h_1M_2 - h_2M_3 - h_3L_2 + h_4L_3 + h_5N_1\}\right]$$

$$O_2' = f_0\left[f_4 - \{h_1M_2' - h_2M_3' - h_3L_2' + h_4L_3' - h_5N_1'\}\right]$$

ตารางที่ 2.2 (ต่อ)

$$P_3 = f_0 \left[\quad + \{-l_1K_2 + l_2K_3 + l_3M_2 - l_4M_3 - l_5L_1\}\right]$$

$$P'_3 = f_0 \left[\quad - \{ l_1K'_2 - l_2K'_3 + l_3M'_2 - l_4M'_3 - l_5L'_1\}\right]$$

$$Q_3 = f_0 \left[\quad + \{-l_1L_2 + l_2L_2 + l_3N_2 - l_4N_3 + l_5K_1\}\right]$$

$$Q'_3 = f_0 \left[\quad - \{ l_1L'_2 - l_2L'_3 + l_3N'_2 - l_4N'_3 + l_5K'_1\}\right]$$

$$R_3 = f_0 \left[-f_6 + \{-l_1M_2 + l_2M_3 - l_3K_2 + l_4K_3 - l_5N_1\}\right]$$

$$R'_3 = f_0 \left[f_6 - \{ l_1M'_2 - l_2M'_3 - l_3K'_2 + l_4K'_3 - l_5N'_1\}\right]$$

$$O_3 = f_0 \left[f_5 + \{-l_1N_2 + l_2N_3 - l_3L_2 + l_4L_3 + l_5M_1\}\right]$$

$$O'_3 = f_0 \left[f_5 - \{ l_1N'_2 - l_2N'_3 - l_3L'_2 + l_4L'_3 + l_5M'_1\}\right]$$

ตารางที่ 2.3

แสดงค่าคงตัวต่าง ๆ ของสนามแม่เหล็ก $\vec{H}_1$

$$m_1 = \frac{\alpha_0}{\Delta_0} \qquad m_2 = \frac{\beta_0}{\Delta_0}$$

$$n_1 = \sigma_1 a \qquad n_2 = \sigma_2 \frac{aS}{b} \qquad n_3 = \sigma_2 \frac{a^2C}{b}$$

$$p_1 = n_1P_1+n_2P_2+n_3P_3 \qquad p_1' = n_1P_1'+n_2P_2'+n_3P_3'$$

$$p_2 = n_1Q_1+n_2Q_2+n_3Q_3 \qquad p_2' = n_1Q_1'+n_2Q_2'+n_3Q_3'$$

$$p_3 = n_1R_1+n_2R_2+n_3R_3 \qquad p_3' = n_1R_1'+n_2R_2'+n_3R_3'$$

$$p_4 = n_1O_1+n_2O_2+n_3O_3 \qquad p_4' = n_1O_1'+n_2O_2'+n_3O_3'$$

$$q_1 = -n_2P_1+n_1P_2 \qquad q_1' = -n_2P_1'+n_1P_2'$$

$$q_2 = -n_2Q_1+n_1Q_2 \qquad q_2' = -n_2Q_1'+n_1Q_2'$$

$$q_3 = -n_2R_1+n_1R_2 \qquad q_3' = -n_2R_1'+n_1R_2'$$

$$q_4 = -n_2O_1+n_1O_2 \qquad q_4' = -n_2O_1'+n_1O_2'$$

$$r_1 = -n_3P_1+n_1P_3 \qquad r_1' = -n_3P_1'+n_1P_3'$$

$$r_2 = -n_3Q_1+n_1Q_3 \qquad r_2' = -n_3Q_1'+n_1Q_3'$$

$$r_3 = -n_3R_1+n_1R_3 \qquad r_3' = -n_3R_1+n_1R_3$$

$$r_4 = -n_3O_1+n_1O_3 \qquad r_4' = -n_3O_1'+n_1O_3'$$

$$t_1 = \varepsilon_0 k_\zeta \qquad t_2 = \varepsilon_0 \frac{k_\eta}{b^2} \qquad t_3 = \varepsilon_0 \frac{c}{a} k_\xi$$

$$t_4 = \varepsilon_0 \frac{c}{a} k_\eta \qquad t_5 = \varepsilon_0 \frac{b^2}{a^2}(1+c^2)k_\xi$$

$$v_1 = k_\zeta \qquad v_2 = \frac{k_\eta}{b^2} \qquad v_3 = \frac{c}{a} k_\eta$$

$$v_4 = \frac{c}{a} k_\xi \qquad v_5 = \frac{b^2}{a^2}(1+c^2)\, k_\xi$$

ตารางที่ 2.3 (ต่อ)

$$w_1 = \frac{c}{a} \qquad w_2 = \frac{b^2}{a^2}(1+c^2)$$

$$p_5 = v_2r_2+v_3q_2-v_5q_1-v_4r_2 \qquad p'_5 = v_2r'_2+v_3q'_2+v_5q'_1+v_4r'_2$$

$$p_6 = -v_2r_1-v_3q_1-v_5q_2-v_4r_1 \qquad p'_6 = -v_2r'_1-v_3q'_1+v_5q'_2+v_4r'_1$$

$$p_7 = v_2r_4+v_3q_4-v_5q_3-v_4r_3 \qquad p'_7 = v_2r'_4+v\,q'_4+v_5q'_3+v_4r'_3$$

$$p_8 = -v_2r_3-v_3q_3-v_5q_4-v_4r_4 \qquad p'_8 = -v_2r'_3-v_3q'_3+v_5q'_4+v_4r'_4$$

$$p_9 = v_2t_5-v_3t_3-v_5t_2+v_4t_4+w_2q_3+w_1r_3 \qquad p'_9 = -v_2t_5+v_3t_3+v_5t_2-v_4t_4+w_1q'_3+w_1r'_3$$

$$p_{10} = v_2t_4-v_3t_2+v_5t_3-v_4t_5+w_2q_4+w_1r_4 \qquad p'_{10} = v_2t_4-v_3t_2+v_5t_3-v_4t_5+w_2q'_4+w_1r'_4$$

$$p_{11} = -w_2q_1+w_1r_2 \qquad p'_{11} = w_2q'_1+w_1r'_2$$

$$p_{12} = w_2q_2+w_1r_1 \qquad p'_{12} = w_2q'_2+w_1r'_1$$

$$q_5 = -v_1r_3-v_3p_2+v_5p_1 \qquad q'_5 = -v_1r'_3-v_3p'_2-v_5p'_1$$

$$q_6 = -v_1r_4+v_3p_1+v_5p_2 \qquad q'_6 = -v_1r'_4+v_3p'_1-v_5p'_2$$

$$q_7 = v_1r_1-v_3p_4+v_5p_3 \qquad q'_7 = v_1r'_1-v_3p'_4-v_5p'_3$$

$$q_8 = v_1r_2+v_3p_3+v_5p_4 \qquad q'_8 = v_1r'_2+v_3p'_3-v_5p'_4$$

$$q_9 = v_1t_4-v_3t_1-w_2p_1 \qquad q'_9 = v_1t_4-v_3t_1-w_2p'_1$$

$$q_{10} = -v_1t_5-v_5t_1-w_2p_2 \qquad q'_{10} = v_1t_5-v_5t_1-w_2p'_2$$

$$q_{11} = w_2p_3 \qquad q'_{11} = w_2p'_3$$

$$q_{12} = w_2p_4 \qquad q'_{12} = w_2p'_4$$

$$r_5 = -v_1q_3-v_2p_2+v_4p_1 \qquad r'_5 = -v_1q'_3-v_2p'_2-v_4p'_1$$

$$r_6 = -v_1q_4+v_2p_1+v_4p_2 \qquad r'_6 = -v_1q'_4+v_2p'_1-v_4p'_2$$

ตารางที่ 2.3 (ต่อ)

$$r_7 = v_1q_1-v_2p_4+v_4p_3 \qquad r'_7 = v_1q'_1-v_2p'_4-v_4p'_3$$

$$r_8 = v_1q_2+v_2p_3+v_4p_4 \qquad r'_8 = v_1q'_2+v_2p'_3-v_4p'_4$$

$$r_9 = -v_1t_2-w_1p_1 \qquad r'_9 = -v_1t_2-w_1p'_1$$

$$r_{10} = v_1t_3+v_4t_1-w_1p_2 \qquad r'_{10} = v_1t_3+v_4t_1-w_1p'_2$$

$$r_{11} = w_1p_3 \qquad r'_{11} = w_1p'_3$$

$$r_{12} = w_1p_4 \qquad r'_{12} = w_1p'_4$$

$$D_1 = m_1(p_{11}-2v_3G_1+2v_5T_1)+m_2(p_{12}+2v_3T_1+2v_5G_1)$$

$$D'_1 = m_1(p'_{11}-2v_3G'_1-2v_5T'_1)-m_2(p'_{12}+2v_3T'_1-2v_5G'_1)$$

$$T_1 = m_1p_5+m_2p_6$$

$$T'_1 = m_1p'_5-m_2p'_6$$

$$F_1 = m_1(p_{12}+2v_3T_1+2v_5G_1)-m_2(p_{11}-2v_3G_1+2v_5T_1)$$

$$F'_1 = m_1(p'_{12}+2v_3T'_1-2v_5G'_1)+m_2(p'_{11}-2v_3G'_1-2v_5T'_1)$$

$$G_1 = m_1p_6-m_2p_5$$

$$G'_1 = m_1p'_6+m_2p'_5$$

$$I_1 = m_1(p_9-2v_3U_1+2v_5J_1)+m_2(p_{10}+2v_3J_1+2v_5U_1)$$

$$I'_1 = m_1(p'_9-2v_3U'_1-2v_5J'_1)-m_2(p'_{10}+2v_3J'_1-2v_5U'_1)$$

$$J_1 = m_1p_7+m_2p_8$$

$$J'_1 = m_1p'_7-m_2p'_8$$

$$V_1 = m_1(p_{10}+2v_3J_1+2v_5U_1)-m_2(p_9-2v_3U_1+2v_5J_1)$$

$$V'_1 = m_1(p'_{10}+2v_3J'_1-2v_5U'_1)+m_2(p'_9-2v_3U'_1-2v_5J'_1)$$

ตารางที่ 2.3 (ต่อ)

$U_1 = m_1p_8-m_2p_7$

$U_1' = m_1p_8'+m_2p_7'$

$D_2 = m_1(q_9-2v_3G_2+2v_5T_2)+m_2(q_{10}+2v_3T_2+2v_5G_2)$

$D_2' = m_1(q_9'-2v_3G_2'-2v_5T_2')-m_2(q_{10}'+2v_3T_2'-2v_5G_2')$

$T_2 = m_1q_5+m_2q_6$

$T_2' = m_1q_5'-m_2q_6'$

$F_2 = m_1(q_{10}+2v_3T_2+2v_5G_2)-m_2(q_9-2v_3G_2+2v_5T_2)$

$F_2' = m_1(q_{10}'+2v_3T_2'-2v_5G_2')+m_2(q_9'-2v_3G_2'-2v_5T_2')$

$G_2 = m_1q_6-m_2q_5$

$G_2' = m_1q_6'+m_2q_5'$

$I_2 = m_1(q_{11}-2v_3U_2+2v_5J_2)+m_2(q_{12}+2v_3J_2+2v_5U_2)$

$I_2' = m_1(q_{11}'-2v_3U_2'-2v_5J_2')-m_2(q_{12}'+2v_3J_2'+2v_5U_2')$

$J_2 = m_1q_7+m_2q_8$

$J_2' = m_1q_7'-m_2q_8'$

$V_2 = m_1(q_{12}+2v_3J_2+2v_5U_2)-m_2(q_{11}-2v_3U_2+2v_5J_2)$

$V_2' = m_1(q_{12}'+2v_3J_2'-2v_5U_2')+m_2(q_{11}'-2v_3U_2'-2v_5J_2')$

$U_2 = m_1q_8-m_2q_7$

$U_2' = m_1q_8'+m_2q_7'$

$D_3 = m_1(r_9-2v_3G_3+2v_5T_3)+m_2(r_{10}+2v_3T_3+2v_5G_3)$

$D_3' = m_1(r_9'-2v_3G_3'-2v_5T_3')-m_2(r_{10}'+2v_3T_3'-2v_5G_3')$

ตารางที่ 2.3 (ต่อ)

$$T_3 = m_1r_5+m_2r_6$$

$$T_3' = m_1r_5'-m_2r_6'$$

$$F_3 = m_1(r_{10}+2v_3T_3+2v_5G_3)-m_2(r_9-2v_3G_3+2v_5T_3)$$

$$F_3' = m_1(r_{10}'+2v_3T_3'-2v_5G_3')+m_2(r_9'-2v_3G_3'-2v_5T_3')$$

$$G_3 = m_2r_6-m_2r_5$$

$$G_3' = m_1r_6'+m_2r_5'$$

$$I_3 = m_1(r_{11}-2v_3U_3+2v_5J_3)+m_2(r_{12}+2v_3J_3+2v_5U_3)$$

$$I_3' = m_1(r_{11}'-2v_3U_3'-2v_5J_3')-m_2(r_{12}'+2v_3J_3'+2v_5U_3')$$

$$J_3 = m_1r_7+m_2r_8$$

$$J_3' = m_1r_7'-m_2r_8'$$

$$V_3 = m_1(r_{12}+2v_3J_3+2v_5U_3)-m_2(r_{11}-2v_3U_3+2v_5J_3)$$

$$V_3' = m_1(r_{12}'+2v_3J_3'-2v_5U_3')+m_2(r_{11}'-2v_3U_3'-2v_5J_3')$$

$$U_3 = m_1r_8-m_2r_7$$

$$U_3' = m_1r_8'+m_2r_7'$$

ตารางที่ 2.4

แสดงค่าต่าง ๆ ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า เมื่อเส้นแรงแม่เหล็กโลกทำมุม 90° กับพื้นโลก

$$\beta = \frac{1}{a}$$

$$[x(+)] = A_1\cos(k_x x) + A_2\sin(k_x x) \qquad [x(-)] = A_1\sin(k_x x) - A_2\cos(k_x x)$$

$$[y(+)] = B_1\cos(k_y y) + B_2\sin(k_y y) \qquad [y(-)] = B_1\sin(k_y y) - B_2\cos(k_y y)$$

$$\exp(+) = \exp(+k_z\beta z) \qquad \exp(-) = \exp(-k_z\beta z)$$

$$\Delta = -k_x^2 - k_y^2 + k_z^2\beta^2$$

$$-k_x^2 - k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$$K_1 = \frac{1}{\Delta}\sigma_2\, k_x k_z\beta \qquad K_1' = -K_1$$

$$L_1 = -\frac{1}{\Delta}(\sigma_1 - \sigma_0)k_y k_z\beta \qquad L_1' = -L_1$$

$$K_2 = \frac{1}{\Delta}(\sigma_1 - \sigma_0)k_x k_z\beta \qquad K_2' = -K_2$$

$$L_2 = \frac{1}{\Delta}\sigma_2\, k_y k_z\beta \qquad L_2' = -L_2$$

$$K_3 = \frac{1}{\Delta}\sigma_2\, k_z^2 \qquad K_3' = K_3$$

$$P_1 = \frac{\varepsilon_0 k_x\Delta}{2k_z a\sigma_1} + \mu_o\frac{k_x k_z^2}{2k_z a\Delta}\left\{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} - (\sigma_1 - \sigma_0)\right\}$$

$$P_1' = -P_1$$

$$P_2 = \frac{\varepsilon_0 k_y\Delta}{2k_z a\sigma_1} + \mu_o\frac{k_y k_z^2}{2k_z a\Delta}\left\{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} - (\sigma_1 - \sigma_0)\right\}$$

$$P_2' = -P_2$$

ตารางที่ 2.4 (ต่อ)

P_3	=	$\frac{\varepsilon_0 k_z}{2k_z a\sigma_1} + \mu_o \frac{k_z \beta k_z^2}{2k_z a\Delta} \{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} - (\sigma_1 - \sigma_0)\}$	P_3'	=	P_3
D_1	=	$\frac{1}{\Delta}\{-\sigma_2 P_1 + 2k_z \beta T_1\}$	D_1'	=	$-D_1$
T_1	=	$\frac{1}{\Delta}\{\sigma_2 k_z \beta P_1\}$	T_1'	=	T_1
F_1	=	$\frac{1}{\Delta}\{\sigma_1 P_1 + 2k_z \beta G_1\}$	F_1'	=	$-F_1$
G_1	=	$\frac{1}{\Delta}\{\sigma_2 k_z \beta P_3 - \sigma_1 k_z \beta P_2\}$	G_1'	=	G_1
D_2	=	$\frac{1}{\Delta}\{-\sigma_1 P_1 + 2k_z \beta T_2\}$	D_2'	=	$-D_2$
T_2	=	$\frac{1}{\Delta}\{-\sigma_0 k_x P_3 + \sigma_1 k_z \beta P_1\}$	T_2'	=	T_2
F_2	=	$\frac{1}{\Delta}\{-\sigma_2 P_2 + 2k_z \beta G_2\}$	F_2'	=	$-F_2$
G_2	=	$\frac{1}{\Delta}\{\sigma_2 k_z \beta P_2\}$	G_2'	=	G_2
D_3	=	$\frac{1}{\Delta}\{2k_z \beta T_3\}$	D_3'	=	D_3
T_3	=	$\frac{1}{\Delta}\{k_x P_1 + k_y P_2\}$	T_3'	=	$-T_3$