บทที่ 3

ทฤษฎีที่ใช้วัดนิวตรอนฟลักซ์

นิวตรอนฟลักซ์หมายถึง จำนวนนิวตรอนซึ่งเคลื่อนที่ในทิศทางต่างๆกันวิ่งผ่านพื้นที่ 1 ตารางเซนติเมตรในเวลา 1 วินาที

การหาค่านิวตรอนฟลักซ์ในที่นี้จะกล่าวถึง 2 วิธี

(1) Activation Method โดยเอาสารไปอาบนิวตรอนและวัดรังสีที่เกิดขึ้น แล้วคำนวนหานิวตรอนฟลักซ์

(2) Two Group Diffusion Theory ทฤษฎีการฟุ้งของนิวตรอนสองพวก

3.1 Activation Method

นิวตรอนฟลักซ์ที่จะวัดนั้น ตัวผลิตนิวตรอนแช่อยู่ในน้ำ เมื่อนิวตรอนวิ่งชนนิวเคลียสของไฮโดรเจน พลังงานของมันจะลดลง จนในที่สุดนิวตรอนมีพลังงานเฉลี่ยเท่ากับพลังงานของตัวกลาง เรียกนิวตรอนเหล่านี้ว่า เทอร์มาลนิวตรอน (Thermal Neutron) ดังนั้นจะเห็นว่าในน้ำมีนิวตรอนพลังงานต่างๆกัน ตั้งแต่เทอร์มาลนิวตรอนถึงนิวตรอนเร็ว (Fast Neutron)

ϕ = นิวตรอนฟลักซ์ทั้งหมดที่ทุกพลังงาน

$\phi(E)$= นิวตรอนฟลักซ์ที่มีพลังงาน E

$\phi = \int \phi(E)\, dE$

$\sigma_a(E)$= ภาคตัดขวางจุลภาคของการดูดกลืนที่พลังงานE (Microscopic absorption cross section)

σ_a = ภาคตัดขวางจุลภาคของการดูดกลืนเฉลี่ย

N = จำนวนอะตอมของวัตถุที่อาบรังสี

อัตราการเกิดปฏิกริยาการดูดกลืนที่ทุกพลังงาน = $N\int \phi(E)\sigma_a(E)\, dE$ .....(3.1)

$$\sigma_a = \frac{\int \phi(E)\,\sigma_a(E)\,dE}{\int \phi(E)\,dE}$$

$$\phi\sigma_a = \int \phi(E)\,\sigma_a(E)\,dE \qquad \text{.....(3.2)}$$

จาก (3.1) และ (3.2)

อัตราการเกิดปฏิกริยาการดูดกลืนที่ทุกพลังงาน $= N\phi\sigma_a = A_o$

นิวตรอนฟลักซ์ $\phi = \frac{A_o}{N\sigma_a}$

เวลาสารถูกนิวตรอนจะเกิดรังสี วัดได้และคิดกลับออกมาเป็นอัตราการเกิดปฏิกริยาได้

ถ้าแช่วัตถุไว้ในแหล่งกำเนิดนิวตรอนเป็นเวลานานๆ จะเกิดสมดุลย์ระหว่างการเกิดกัมมันตรังสีและการสลายตัวของกัมมันตรังสี ดังนั้น ถ้าแช่วัตถุในเวลาสั้นแล้วรังสีที่วัดได้ เมื่อเวลาสั้นๆก็จะหารังสีของวัตถุเมื่อแช่เวลานานๆได้

อัตราการแผ่รังสีของวัตถุเมื่อแช่นานจนอิ่มตัว $= A_o$

เวลาที่อาบนิวตรอน $= T$

ค่าคงที่การสลายตัวของวัตถุนั้น $= \lambda$

อัตราการแผ่รังสีที่แช่เมื่อเวลา T $= A_T$

หา A_o ได้จากสูตร $A_T = A_o(1 - e^{-\lambda T})$

ในระหว่างนำวัตถุออกจากการอาบนิวตรอนมายังเครื่องวัด รังสีบางส่วนจะสลายไป ดังนั้น ค่าที่วัดได้จะน้อยกว่าที่เป็นจริงจึงต้องแก้ด้วยเทอม $e^{-\lambda t}$

ระหว่างนำวัตถุออกจากการอาบนิวตรอนจนถึงเครื่องวัดใช้เวลา $= t$

$$A_T = A_o e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})$$

จาก $\phi = \frac{A_o}{N\sigma_a}$

$$\phi = \frac{A_T}{N\sigma_a e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda T})}$$

เครื่องมือที่วัดไม่สามารถวัดรังสีได้ทุกตัวที่ออกจากสารกัมมันตรังสี แต่จะวัดได้มากหรือน้อยขึ้นกับประสิทธิภาพของเครื่องมือ

E = ประสิทธิภาพของเครื่องมือ

$$E = \frac{\text{cps x 100}}{\text{dps}}$$

$$\text{dps} = \frac{\text{cps x 100}}{E}$$

$$\phi = \frac{\text{cps x 100}}{E\, N\sigma_a e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda T})}$$

ในธรรมชาติวัตถุแต่ละชนิดจะมีหลายไอโซโทป มีบางไอโซโทปเท่านั้นที่เกิดปฏิกริยากับนิวตรอน ดังนั้น น้ำหนักของวัตถุที่ชั่งได้ไม่ใช่น้ำหนักของไอโซโทปที่จะทำปฏิกริยากับนิวตรอน จึงหาน้ำหนักของไอโซโทปได้จาก Percent abundance (B)

$$\phi = \frac{\text{cps x 100 x 100}}{E\, N\, B\, \sigma_a e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda T})} \quad \text{.....(3.3)}$$

$$N = \frac{\text{น้ำหนักเป็นกรัม x อะโวกาโดรนัมเบอร์}}{\text{น้ำหนักอะตอม}}$$

3.1.1 เทอร์มาลนิวตรอนฟลักซ์ (Thermal Neutron Flux)

นิวตรอนที่มีพลังงาน 0 ถึง 1 eV ในช่วงนี้ปรากฏว่า

(ก) σ_a ของธาตุต่างๆส่วนมากเป็นปฏิภาคกลับกับความเร็วของนิวตรอนหรือ $\sqrt{\text{พลังงาน}}$ ของนิวตรอน

000369

$$\sigma_a(E) \propto 1 / E^{1/2}$$

$$\sigma_a(V) \propto \frac{1}{V}$$

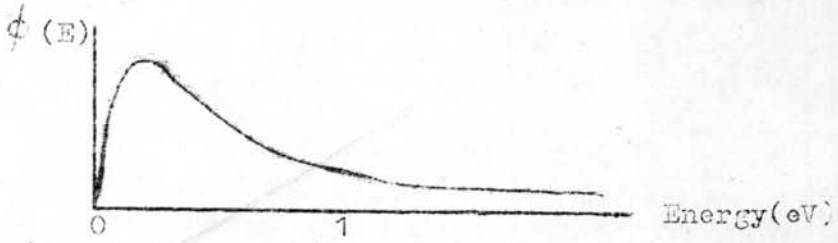
(ฑ) การกระจายของเทอร์มาลนิวตรอนฟลักซ์จะเป็นแบบ Maxwell Boltzman Distribution

$$\phi(E) \propto E^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-E}{KT}}$$

T = อุณหภูมิ(องศาสัมบูรณ์)

K = ค่าคงที่

รูปแสดงการกระจายของเทอร์มาลนิวตรอน



(ค) ชนิดของปฏิกริยา (Type of reaction)

ปฏิกริยาของเทอร์มาลนิวตรอนกับนิวเคลียส มักเป็นแบบ(n,γ) ดังตัวอย่าง

$$_{45}Rh^{103} + {}_{0}n^{1} \longrightarrow {}_{45}Rh^{104} + \gamma$$

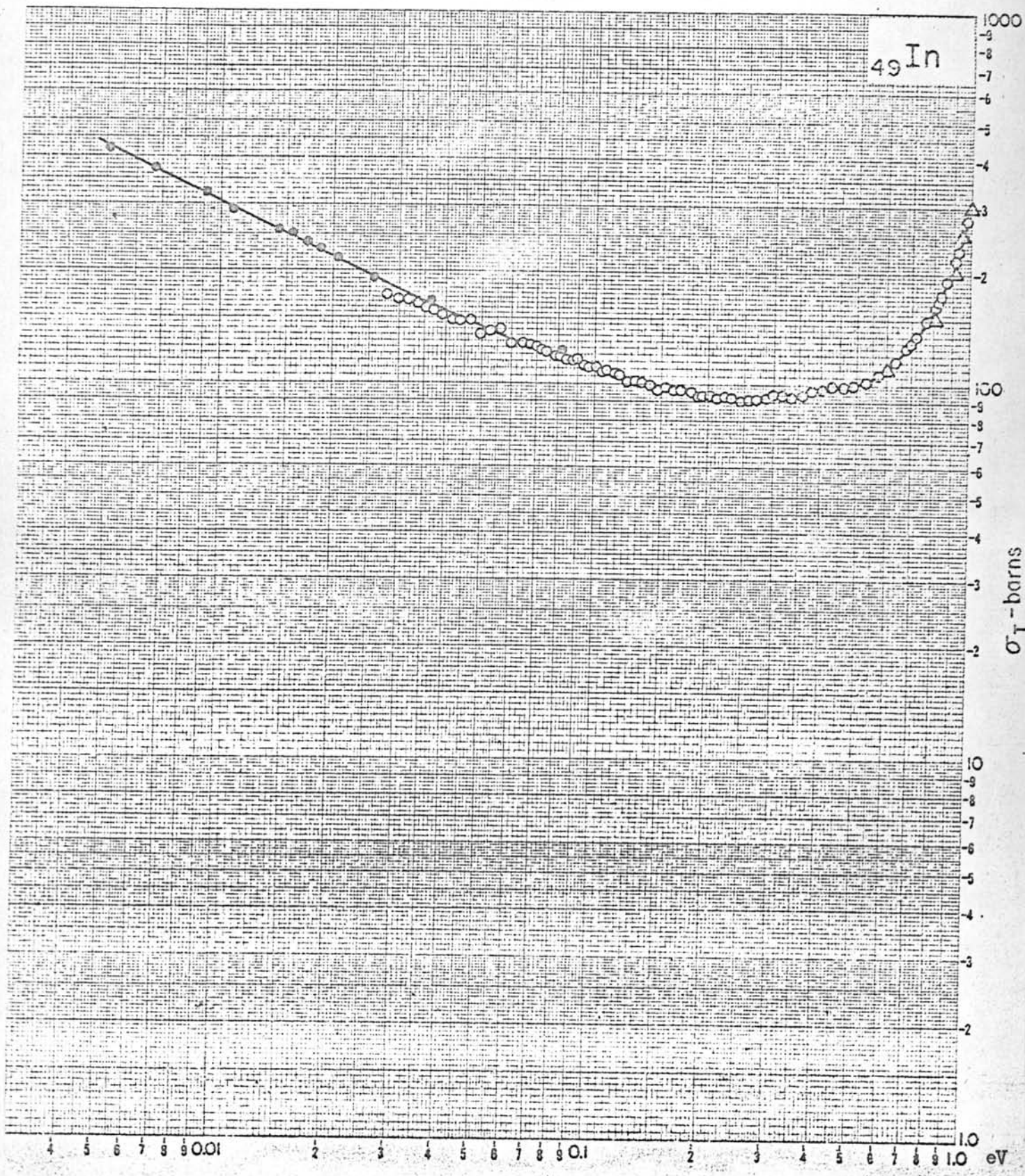
$$_{45}Rh^{104} \downarrow {}_{46}Pd^{104} + {}_{-1}e^{0}$$

$$_{49}In^{115} + {}_{0}n^{1} \longrightarrow {}_{49}In^{116} + \gamma$$

$$_{49}In^{116} \downarrow {}_{50}Sn^{116} + {}_{-1}e^{0}$$

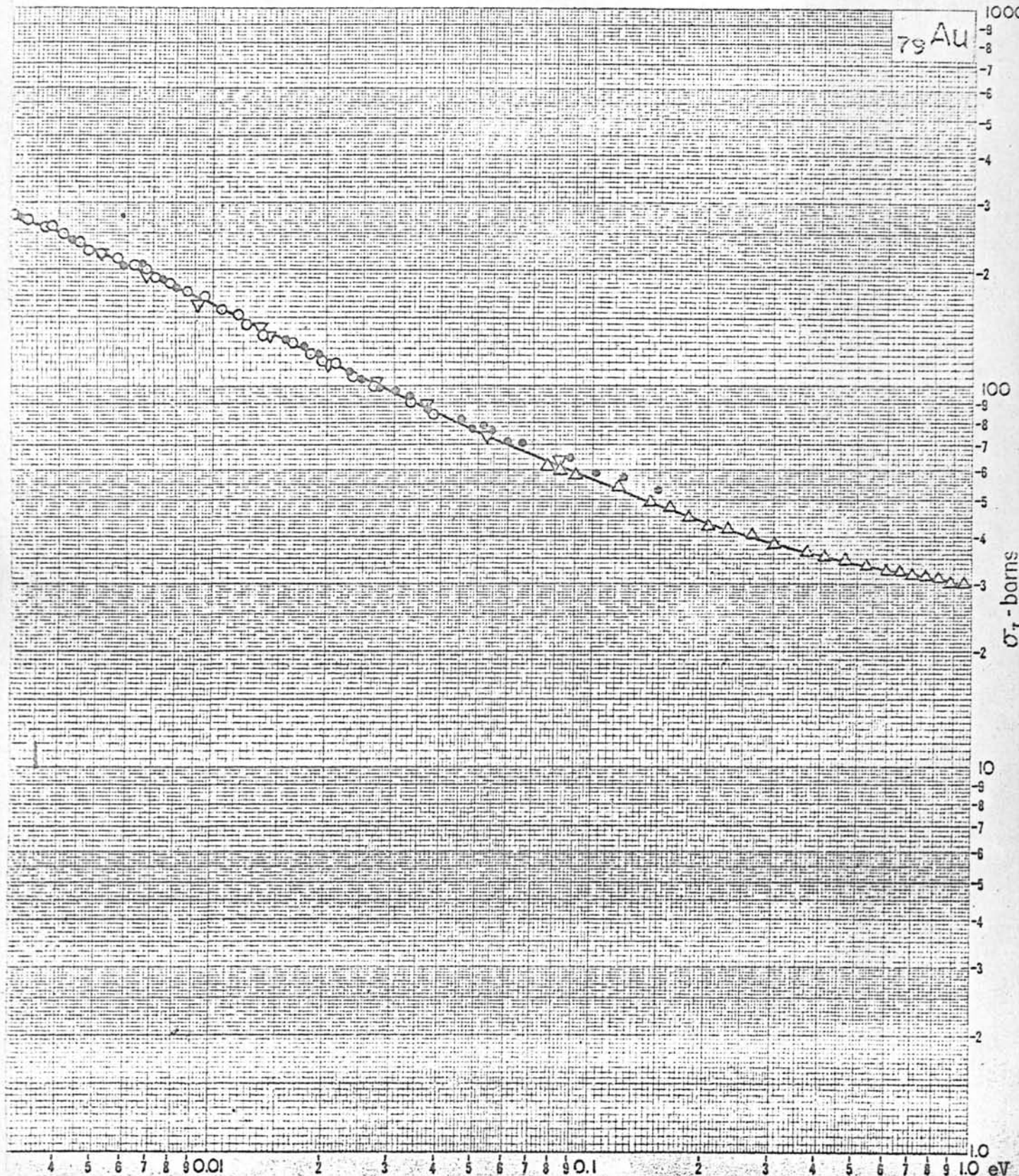
$$_{79}Au^{197} + {}_{0}n^{1} \longrightarrow {}_{79}Au^{198} + \gamma$$

$$_{79}Au^{198} \downarrow {}_{80}Hg^{198} + {}_{-1}e^{0}$$



รูป 3.1 แสดง Total Cross Section ของ ^{49}In

Donald J. Hughes and John A. Harvey. 1955 Neutron cross section.

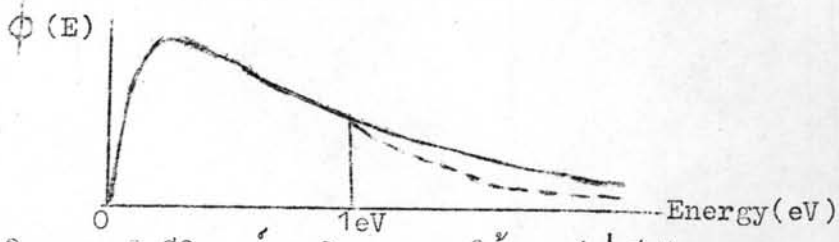


รูป 3.2 แสดง Total Cross Section ของ ^{79}Au

Donald J. Hughes and John A. Harvey. 1955. Neutron cross section.

(ง) การหาค่าเทอร์มาลนิวตรอนฟลักซ์

ในกรณีที่พลูโตเนียม-เบอริลเลียมแช่ในน้ำจะมีอีพิเทอร์มาลนิวตรอน ทำให้การหาค่าเทอร์มาลนิวตรอนฟลักซ์ผิดไป



จากกราฟจะเห็นว่านิวตรอนชนิดอีพิเทอร์มาลนิวตรอน ทำให้กราฟไม่เป็นไปตามสมการของแมกซ์เวลล์ ถ้าไม่คำนึงถึงอีพิเทอร์มาลนิวตรอน เวลานำแผ่นฟอยไปอาบนิวตรอน จะทำให้อัตราการแผ่รังสีที่หาจากสูตร $A_o = N\phi\sigma_a$ มากเกินไป เนื่องจากค่าที่วัดได้มิได้เกิดจากเทอร์มาลนิวตรอนเท่านั้น ยังเกิดจากอีพิเทอร์มาลนิวตรอนด้วย จึงแก้ไขได้โดยหุ้มแผ่นฟอยด้วยแคดเมี่ยม เพราะว่าแคดเมี่ยมจะดูดกลืนเทอร์มาลนิวตรอนไว้ เหลือเฉพาะอีพิเทอร์มาลนิวตรอนที่จะทำปฏิกริยากับแผ่นฟอย ดังนั้นวิธีที่จะได้ค่าเทอร์มาลนิวตรอนเท่านั้น ก็จะทำได้โดยวัดแผ่นฟอยสองครั้ง ครั้งแรกใช้แผ่นฟอยอาบนิวตรอน เสร็จแล้วนำไปวัดค่าและบันทึกไว้ ครั้งหลังใช้แผ่นฟอยซึ่งหุ้มด้วยแคดเมี่ยม เสร็จแล้วนำไปอาบนิวตรอน และแล้วจึงวัดค่าบันทึกไว้

อัตราการแผ่รังสีเนื่องจากเทอร์มาลนิวตรอน $= A_o - A_{Cd} = N\phi\sigma_a$

A_o= อัตราการแผ่รังสีของแผ่นฟอย

A_{Cd}= อัตราการแผ่รังสีของแผ่นฟอยหุ้มด้วยแคดเมี่ยม

ค่า $A_o - A_{Cd}$ คือ cps ในสมการ 3.3 เพราะฉะนั้นฟลักซ์ที่คำนวณได้เป็นเทอร์มาลฟลักซ์

$$\frac{A_o}{A_{Cd}} = \text{แคดเมี่ยมเรโช}$$

ถ้าเรโชสูง แสดงว่าบริเวณนั้นมีเทอร์มาลสูงกว่าอีพิเทอร์มาลนิวตรอนมาก

3.1.2 นิวตรอนเร็ว (Fast Neutrons) คือ นิวตรอนที่มีพลังงานตั้งแต่ 1 MeV ขึ้นไป ปฏิกริยาที่เกิดขึ้นจะเป็นปฏิกริยาการดูด (absorption reaction) และปฏิกริยาการชนแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic scattering) ดังนั้น จึงได้

Total cross section

σ_T หมายถึงผลรวมของภาคตัดขวางจุลภาคของการดูด σ_a กับภาคตัดขวางจุลภาคของการชนแบบอินอีลาสติก σ_{in}

$$\sigma_T = \sigma_a + \sigma_{in}$$

เมื่อพิจารณากราฟรูป 3.3 จะเห็นว่าในช่วงนิวตรอนเร็วค่า σ_T จะเปลี่ยนแปลงอย่างมากตามพลังงาน (ดูรูป 3.3 , 3.4)

limit of $\sigma_T = 2\pi R^2$

R = รัศมีของนิวเคลียส $\simeq 1.4 \times 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}$

A = แมสนัมเบอร์ของนิวเคลียส

$$\sigma_T = 1.25 \times 10^{-25} A^{\frac{2}{3}} \quad cm^2/nucleus$$

$$= 0.125\, A^{\frac{2}{3}} \quad barn$$

เช่น นิวเคลียสที่มีแมสนัมเบอร์ 125 limiting value of $\sigma_T \simeq 3$ barn

แต่ถ้าแมสนัมเบอร์ 216 limiting value of $\sigma_T \simeq 4.5$ barn

ปฏิกริยา

ปฏิกริยาการดูดของนิวตรอนเร็วกับนิวเคลียส มักจะเป็นแบบ (n,p) เช่น

$$_8O^{16} + {}_0n^1 \longrightarrow ({}_8O^{17})^* \longrightarrow {}_1H^1 + {}_7N^{16}$$

$_7N^{16}$ จะสลายตัวต่อไปให้รังสี β และ γ มีพลังงานสูงถึง 6 MeV

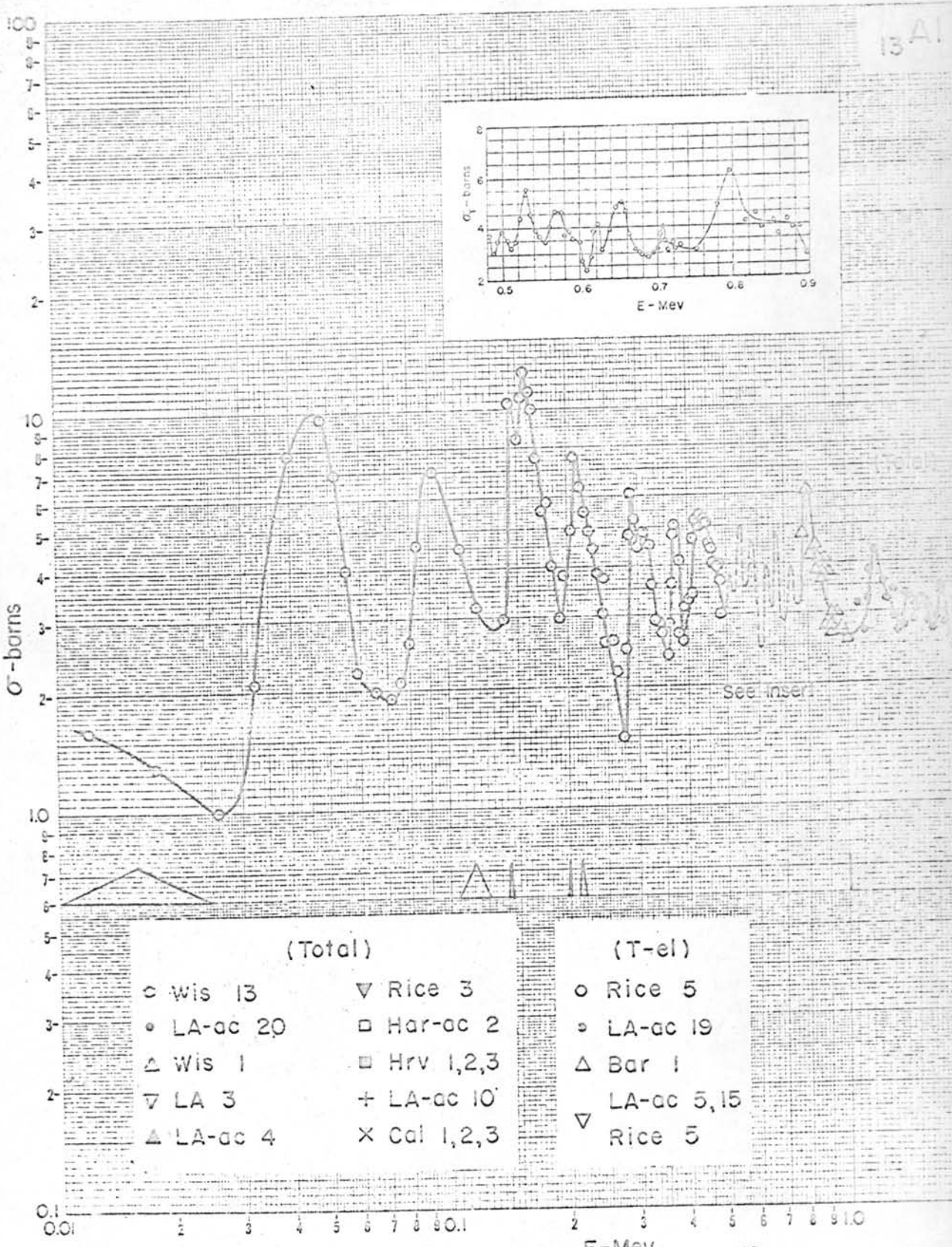
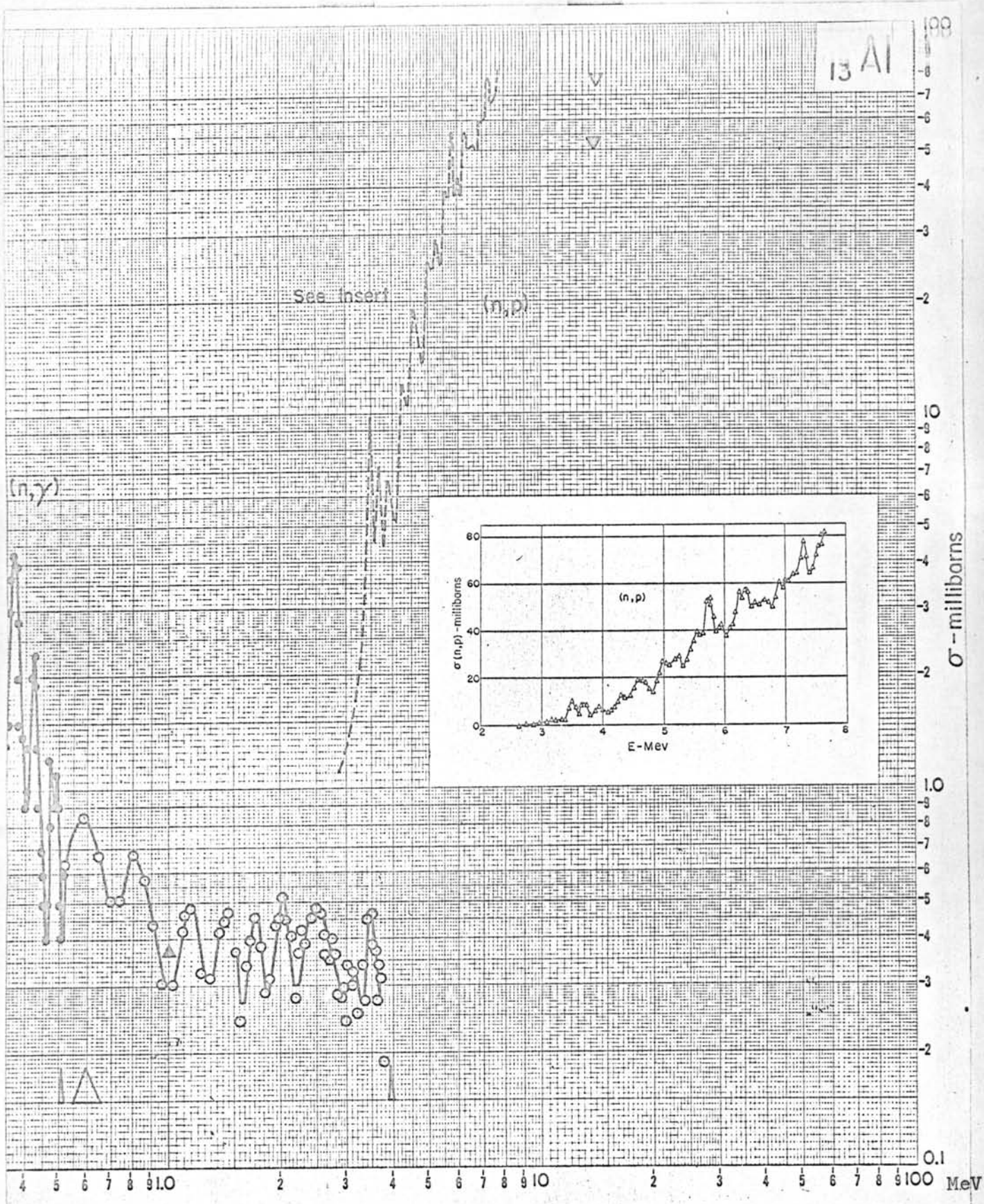


Fig 3.3 Total Cross Section ^{13}Al

Donald J. Hughes and John A. Harvey. 1955. Neutron cross section



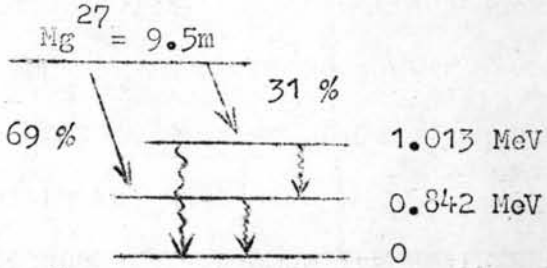
รูป 3.4 แสดง (n,p) Cross Section ของ $_{13}Al$

Donald J.Hughes and John A.Harvey.1955. Neutron cross section.

$$_{13}Al^{27} + {}_{0}n^{1} \longrightarrow (\,_{13}Al^{28})^{*} \longrightarrow {}_{1}H^{1} + {}_{12}Mg^{27}$$

$_{12}Mg^{27}$ จะสลายตัวต่อไปได้รังสี β และ γ มีพลังงาน 1.013MeV และ 0.842MeV

Half life= 9.5 นาที



จะเห็นว่าไม่ว่าจะเป็นปฏิกริยาของเทอร์มาลนิวตรอนหรือนิวตรอนเร็ว ต่างก็ให้รังสี β ซึ่งวัดได้โดยเครื่อง Geiger Muller Counter จากค่าที่วัดกิดกลับไปหาฟลักซ์ได้

3.2 ความไวของธาตุที่วิเคราะห์โดยวิธีนิวตรอนแอกติเวชั่น (Sensitivity of neutron activation)

ความไวของธาตุจะบอกถึงน้ำหนักของธาตุที่น้อยที่สุด จะวิเคราะห์ได้โดยวิธีนิวตรอนแอคติเวชั่น ธาตุต่างชนิดกัน จะมีความไวของธาตุต่างกัน ค่าความไวของธาตุจะขึ้นอยู่กับน้ำหนักอะตอม ปริมาณของไอโซโทปที่จะวัด(Isotopic abundance) และครึ่งชีวิตของนิวไคล์ที่แผ่รังสี ความไวของธาตุจะสูงเมื่อน้ำหนักอะตอมต่ำ ส่วนปริมาณของไอโซโทปที่จะแอคติเวทต้องสูง นอกจากนี้ยังขึ้นอยู่กับนิวตรอนฟลักซ์ ถ้านิวตรอนฟลักซ์สูง การวิเคราะห์ก็จะได้ผลดี และขึ้นอยู่กับภาคตัดขวางของการเกิดปฏิกริยา (ภาคตัดขวางของการเกิดปฏิกริยาจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับพลังงานของนิวตรอน ถ้าเป็นเทอร์มาลนิวตรอน ภาคตัดขวางของการเกิดปฏิกริยาจะสูงมาก จึงหาค่าความไวของธาตุโดยพิจารณาเฉพาะเทอร์มาลนิวตรอนฟลักซ์) ความไวของธาตุจะมากขึ้นเมื่ออาบนิวตรอนนาน และจะมากที่สุดเมื่ออาบนิวตรอนถึงจุดอิ่มตัว (saturate) ดังนั้น การพิจารณาความไวของธาตุ จึงพิจารณาที่เวลาอิ่มตัว นอกจากนี้ ความไว

Table 12.1—PARTIAL LIST OF MORE READILY ACTIVATED NUCLIDES

Target Nuclides	% Natural Abundance	Isotope Produced	Half-Life	Isotopic Cross Section (barns)	For $\phi = 10^5$ Approximate Sensitivity (mg nuclide)
^{45}Sc	100	^{46}Sc	84d	13	2.0
^{51}V	99.76	^{52}V	3.77m	4.5	
^{55}Mn	100	^{56}Mn	2.58h	13.3	0.6
^{59}Co	100	^{60m}Co	10.5m	18	
^{63}Cu	69.09	^{64}Cu	12.9h	4.5	7.0
^{65}Cu	30.09	^{66}Cu	5.1m	2.3	
^{75}As	100	^{76}As	26.5h	4.3	2.0
^{79}Br	50.54	^{80}Br	18m	8.5	
		^{80m}Br	4.5h	2.9	3.0
^{81}Br	49.46	^{82}Br	35.7h	3	
^{108}Pd	26.71	^{109}Pd	13.6h	12	5.0
^{107}Ag	51.82	^{108}Ag	2.4m	40	
^{109}Ag	48.18	^{110}Ag	249d	2.8	
		^{110}Ag	24s	82	
^{115}In	95.72	^{116m}In	54m	150	0.1
		^{116}In	14s	50	
^{121}Sb	57.25	^{122}Sb	2.8d	6	4.0
^{123}Sb	42.75	$^{124m_2}Sb$	21m	30	
		$^{124m_1}Sb$	1.3m	30	
^{127}I	100	^{128}I	25m	6.4	2.0
^{139}La	99.911	^{140}La	40.2h	8.9	2.0
^{141}Pr	100	^{142}Pr	19.2h	11	2.0
^{152}Sm	26.72	^{153}Sm	46.7h	220	0.6
^{151}Eu	47.82	^{152}Eu	9.3h	1700	0.03
^{159}Tb	100	^{160}Tb	73d	46	4.0
^{164}Dy	28.18	^{165}Dy	2.3h	800	0.03
		^{165m}Dy	75s	2000	
^{165}Ho	100	^{166}Ho	27.2h	64	0.4
^{169}Tm	100	^{170}Tm	127d	125	2.0
^{174}Yb	31.84	^{175}Yb	4.2d	60	2.0
^{175}Lu	97.41	^{176m}Lu	3.7h	18	1.0
^{186}W	28.41	^{187}W	24.0h	40	3.0
^{185}Re	37.07	^{186}Re	90h	110	0.7
^{187}Re	62.93	^{188}Re	17h	70	0.6
^{191}Ir	37.3	^{192}Ir	74d	750	0.4
		^{192m}Ir	1.4m	250	
^{193}Ir	62.7	^{194}Ir	19h	130	0.3
^{197}Au	100	^{198}Au	64.8h	96	3.0

ตาราง 3.1 แสดง Sensitivity ของธาตุต่างๆ

ของธาตุยังขึ้นอยู่กับประสิทธิภาพของเครื่องวัด จากสมการ จะได้

$$N = \frac{cps \times 100 \times 100}{B\,E\,\phi\,\sigma_a\, e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda T})}$$

$$N = \frac{\text{น้ำหนักที่เป็นกรัม (W)} \times \text{อะโวกาโดรนัมเบอร์ } (N_o)}{\text{น้ำหนักอะตอม (M)}}$$

$$W = \frac{N \times M}{N_o}$$

$$W = \frac{M \times dps \times 100 \times 100}{B\,E\,N_o\,\phi\,\sigma_a\, e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda T})}$$

W คือน้ำหนักของธาตุที่น้อยที่สุด วิเคราะห์ได้โดยวิธีนิวตรอนแอคติเวชั่น เป็นค่าที่บอกถึงความไวของธาตุ

3.3 <u>ทฤษฎีการฟุ้งของนิวตรอน 2 กลุ่ม(Two Group Diffusion Theory)</u>

ใช้อธิบายการกระจายของนิวตรอนที่แผ่ออกมาจากต้นกำเนิดนิวตรอนที่ล้อมรอบด้วยน้ำ โดยอาศัยวิธีดีฟิวชั่นเพื่อ คำนวณหาฟลักซ์ของนิวตรอนเร็ว และใช้ฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วตามจุดต่าง ๆ ที่คำนวณได้ เป็นต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอน การคำนวณหาเทอร์มาลฟลักซ์ก็อาศัยวิธีดีฟิวชั่นเช่นเดียวกัน

พิจารณาที่ 1 ลูกบาศ์กเซนติเมตรใด ๆ ของโมดูเรเตอร์ จะได้ว่าที่ Steady state

อัตราการเกิดของนิวตรอน = ผลบวกของอัตราการฟุ้งออกไปกับอัตราการดูดกลืนในลูกบาศ์กเซนติเมตรนั้น

อัตราการฟุ้งออกไป = $\nabla \vec{J}$

$\vec{J}$ = ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน (neutron current density) มีหน่วยเป็น นิวตรอน/เซนติเมตร^2-วินาที

Fick's law; $\vec{J} = - D \nabla \phi$

D = สัมประสิทธิ์การฟุ้งของนิวตรอน (Diffusion coefficient) หน่วยเป็นเซนติเมตร

ϕ = นิวตรอนฟลักซ์ หน่วยเป็น นิวตรอน/เซนติเมตร^2-วินาที

Σ_a = ภาคตัดขวางมหภาคของการดูดกลืน หน่วยเป็น เซนติเมตร$^{-1}$

S = อัตราการเกิดนิวตรอนในตัวกลาง 1 ลูกบาศก์เซนติเมตร

$$S = - D \nabla^2 \phi + \Sigma_a \phi \quad .....(3.4)$$

สมมุติว่าตัวกำเนิดนิวตรอนเป็นแบบจุดวางอยู่ในตัวกลางเอกพันธ์ที่มีขอบเขตอนันต์ ในการแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล เพื่อหาค่าฟลักซ์ จะต้องตั้งจุดกำเนิดของระบบ (Co-ordinate system) อยู่ตำแหน่งเดียวกับตัวกำเนิดนิวตรอน ดังนั้นการกระจายของนิวตรอนจากตัวกำเนิดจึงสมมาตรกับจุดกำเนิด (Spherical symmetry) ฟลักซ์ไม่ขึ้นกับมุม

Laplacian operator; $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2d}{rdr}$

3.3.1 ในกรณีของนิวตรอนเร็ว

เทอม S เท่ากับ ศูนย์ ในตัวกลาง ยกเว้นที่ตัวกำเนิดนิวตรอน

$$\nabla^2 \phi_f - \frac{\Sigma_{af}}{D_f} \phi_f = 0$$

$$\frac{\Sigma_{af}}{D_f} = K_f^2 = \frac{1}{L_f^2}$$

$$\nabla^2 \phi_f - K_f^2 \phi_f = 0 \quad .....(3.5)$$

L_f = ความยาวของการฟุ้งของนิวตรอนเร็ว(diffusion length of fast neutron)

ξ_{af} = ภาคตัดขวางมหภาค(slow down cross sections)

เงื่อนไขขอบเขต(boundary conditions)

สำหรับหาค่าฟลักซ์ในสมการ(3.5) มีดังนี้

(1) ฟลักซ์มีค่าไม่เป็นอนันต์ที่ทุก ๆ จุด

(2) จำนวนนิวตรอนทั้งหมดที่วิ่งผ่านพื้นที่ผิวทรงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วยในหนึ่งวินาที มีค่าเท่ากับจำนวนนิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนในหนึ่งวินาที เมื่อรัศมี r หน่วยของทรงกลมมีค่าเข้าใกล้ศูนย์

J = ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่ผิวของทรงกลม รัศมียาว r หน่วย

เงื่อนไขข้อที่ 2 เขียนได้เป็น

$$\lim_{r \to 0} \quad 4\pi r^2 J = a$$

a = จำนวนนิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวต้นกำเนิดนิวตรอนใน 1 วินาที

แทนค่า Laplacian operator ลงในสมการ 3.5

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2d}{rdr} - K^2\phi = 0$$

ให้ $\phi = u/r$

$$\frac{d^2u}{dr^2} - K^2u = 0$$

$$u = Ae^{-Kr} + Ce^{Kr}$$

$$= \frac{Ae^{-Kr}}{r} + \frac{Ce^{Kr}}{r}$$

ที่ r = ∞ ฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วเท่ากับ 0 ดังนั้น

C = 0 ;

$$\phi = \frac{Ae^{-Kr}}{r}$$

$$\text{จาก} \quad J = -D\frac{d\phi}{dr} = D\,Ae^{-Kr}\frac{(Kr+1)}{r^2}$$

$$\lim_{r\to 0} 4\pi r^2 J = \lim_{r\to 0} 4\pi D\,Ae^{-Kr}(Kr+1)$$

จากเงื่อนไขข้อที่ 2

$$\lim_{r\to 0} 4\pi D\,Ae^{-Kr}(Kr+1) = a$$

$$A = \frac{a}{4\pi D}$$

$$\phi_f = \frac{a\,e^{-Kr}}{4\pi D\,r} \qquad \text{.....(3.6)}$$

สมการนี้คือ ค่าฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วรอบ ๆ ตัวกำเนิดนิวตรอนที่ระยะห่างออกไปเท่ากับ r ในตัวกลางที่มีขนาดอนันต์ ซึ่งนำไปใช้ในกรณีที่ตัวกลางมีขนาดไม่เป็นอนันต์ได้

3.3.2 กรณีของเทอร์มาลนิวตรอน

ต้นกำเนิดนิวตรอนเร็วอย่างเดียว เมื่อนิวตรอนเร็ววิ่งมาชนตัวกลางที่เป็นน้ำ จะชนกับนิวเคลียสของไฮโดรเจน ทำให้มันสูญเสียพลังงานจลน์ จนในที่สุดกลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอน ดังนั้น ถ้าพิจารณาที่ 1 ลูกบาศก์เซนติเมตรใด ๆ ในน้ำจะพบว่า

(1) มีการเกิดเทอร์มาลนิวตรอนขึ้น เนื่องจากนิวตรอนเร็ว

(2) เทอร์มาลนิวตรอนจะฟุ้งออกไป

(3) เทอร์มาลนิวตรอนจะถูกดูด

เทอร์มาลนิวตรอนที่ถูกดูด $= \Sigma_{as}\phi_s$ (s หมายถึง slow)

เทอร์มาลนิวตรอนที่ฟุ้งออกไป $= D_s\nabla^2\phi_s$

$$D_s\nabla^2\phi_s - \Sigma_{as}\phi_s + \Sigma_{af}\phi_f = 0$$

$$\nabla^2\phi_s - \frac{\Sigma_{as}}{D_s}\phi_s + \frac{\Sigma_{af}}{D_s}\phi_f = 0$$

$$K_s^2 = \frac{1}{L_s^2} = \frac{\Sigma_{as}}{D_s}$$

$$\nabla^2 \phi_s - K_s^2 \phi_s + \frac{\Sigma_{af}}{D_s} \phi_f = 0 \quad \text{.....(3.7)}$$

L_s = ความยาวการพุ่งของเทอร์มาลนิวตรอน

เงื่อนไขขอบเขตสำหรับหาค่าเทอร์มาลฟลักซ์

(1) ฟลักซ์มีค่าไม่เป็นอนันต์ที่ทุก ๆ จุด

(2) จำนวนนิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดนิวตรอน ซึ่งวางอยู่ในตัวกลางที่มีวอบเซตอนันต์ มีค่าเท่ากับจำนวนนิวตรอนที่ถูกดูดกลืนอยู่ในตัวกลาง เงื่อนไขข้อที่ 2 เขียนได้เป็น $\int_0^\infty (\Sigma_{as} \phi_s) 4\pi r^2 dr = a$

นำค่า Laplacian operator และ ϕ_f จากสมการ 3.6 แทนในสมการ3.7จะได้

$$\phi_s(r) = \frac{aK_f^2(e^{-K_f r} - e^{-K_s r})}{4\pi D_s(K_s^2 - K_f^2)r} \quad \text{.....(3.8)}$$

เป็นสมการหาเทอร์มาลฟลักซ์ที่ระยะห่างจากตัวกำเนิดนิวตรอนเท่ากับ r