บทที่ 5

วิธีดำเนินการเลขจำนวน

(Numerical Procedures)

5.1) <u>ปัญหาการแก้สมการคลื่นตามแนวรัศมีสำหรับอะตอมโซเดียม</u>

จากสมการคลื่นตามแนวรัศมีของโชรดิงเงอร์

$$\frac{d^2R_{nl}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR_{nl}}{dr} + \frac{2m}{h^2}\left[E_{nl} - V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_{nl} = 0 \qquad (5.1.1)$$

เมื่อ $V(r)$ คือพลังงานศักย์

E_{nl} คือพลังงานทั้งหมดของอิเลกตรอนแต่ละวงโคจร nl

แปลงค่าสมการ (5.1.1) ให้อยู่ในหน่วยของริดเบอร์กส์และให้ $r = a_o\rho$ และ $P_{nl} = \rho R_{nl}$ ดังนั้นเขียนสมการ (5.1.1) ใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2P_{nl}}{d\rho^2} - \left\{\epsilon_{nl} - \frac{2Q(\rho)}{\rho^2} + \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right\}P_{nl} = 0$$

หรือ

$$\frac{d^2P_{nl}}{d\rho^2} + \left\{2\alpha - \epsilon_{nl} + \frac{2\beta}{\rho} + \frac{2\gamma - l(l+1)}{\rho^2}\right\}P_{nl} = 0 \qquad (5.1.2)$$

เมื่อ α, β, γ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ตามตาราง 1,3,4 ปัญหาการแก้อะซิมปโตติกของสมการคลื่นตามแนวรัศมีจำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต

$$P(0) = 0 \quad , \quad P(\rho) \longrightarrow 0 \text{ เมื่อ } \rho \longrightarrow \infty$$

และเงื่อนไขการทำให้ปกติ

$$\int_0^\infty P^2(\rho)\, d\rho = 1 \qquad (5.1.3)$$

เริ่มต้นพิจารณาพฤติกรรมของเวฟฟังก์ชันที่ระยะ ρ มีค่าเล็กๆ เทอม $1/\rho^2$ ในสมการ (5.1.2) มีค่ามากเมื่อเทียบกับเทอมอื่นๆ และสัมประสิทธิ์ $\gamma = 0$ ที่ $\rho \longrightarrow 0$ ดังนั้นจะได้

$$\frac{d^2P(\rho)}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} P(\rho) = 0 \qquad (5.1.4)$$

สมการนี้มีสองปัญหาการแก้ที่เป็นอิสระต่อกันคือ

$$P(\rho) = \rho^{l+1} \quad \text{และ} \quad \rho^{-l} \qquad (5.1.5)$$

เนื่องจากว่าที่ $\rho = 0$ เทอม ρ^{-l} มีค่าเป็นอนันต์ซึ่งไม่ถูกต้องดังนั้น

$$P(\rho) = \rho^{l+1} \quad \text{เมื่อ} \quad \rho \longrightarrow 0 \qquad (5.1.6)$$

จากสมการ (5.1.2) เราให้ $\chi = 2\sqrt{\epsilon - 2\alpha}$ จะได้

$$\frac{d^2P_{nl}}{d\chi^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{\chi} + \frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{\chi^2} \right) P_{nl} = 0 \qquad (5.1.7)$$

ในที่นี้ $k = \frac{\beta}{\sqrt{\epsilon-2\alpha}}$ และ $\mu^2 = \frac{1}{4} - \left[2\gamma - l(l+1) \right]$

สมการ (5.1.7) ให้ผลปัญหาการแก้ที่สามารถเขียนได้ในเทอมของฟังก์ชันกอนฟลูเอนท์ไฮเปอร์ยีโอเมตริก (confluent hypergeometric function) $M_{k\pm}$ และ

$$P_{nl} = C_1 M_{k,+\mu} + C_2 M_{k,-\mu} \qquad (5.1.8)$$

โดยที่ $M_{k\pm\mu} = e^{-\frac{1}{2}\chi} \chi^{\frac{1}{2}\pm\mu} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{2}\pm\mu-k}{1!(1\pm2\mu)} + \frac{(\frac{1}{2}\pm-k)(3/2\pm\mu-k)}{2!(1\pm2\mu)(2\pm2\mu)} \chi^2 + \cdots\cdots \right\}$ (5.1.9)

เมื่อ 2μ มีค่าไม่เป็นจำนวนเต็ม

สำหรับค่าของ $|\chi|$ ใหญ่ๆ เราจะได้อะซิมปโตติค สองค่าในรูปของวิทเทกเกอร์[1] (Whittaker's) คือ

$$W_{k,\mu}(\chi) \sim e^{-\frac{1}{2}\chi} \chi^{l+1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{\mu^2-(k-\frac{1}{2})^2\}\{\mu^2-(k-3/2)^2\}\ldots\{\mu^2-(k-n-\frac{1}{2})^2\}}{n!\chi^n} \right] \qquad (5.1.10)$$

---

[1] E.T. Whittaker, and G.N. Watson, "Modern Analysis,"(4th ed. Cambridge University Press, 1958) p.337.

โดยที่ความสัมพันธ์ระหว่าง $W_{k\mu}(\chi)$ และ $M_{k\pm\mu}(\chi)$ เป็น

$$W_{k,\mu}(\chi) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-k)} M_{k,\mu}(\chi) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-k)} M_{k,-\mu}(\chi) \quad (5.1.21)$$

และ $$W_{-k,\mu}(-\chi) = e^{\frac{1}{2}\chi}(-\chi)^{-(l+1)} \left\{ 1 + O(\chi^{-1}) \right\} \quad (5.1.22)$$

เราไม่สามารถใช้สมการ (5.1.22) ได้ เพราะว่าที่จุดอนันต์มันมีค่าเป็นอนันต์ซึ่งจะไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของเราดังนั้น อะซิมปโตติคเวฟฟังก์ชันเป็น

$$P_{nl} = (-1)^{n-l-1} e^{-\frac{1}{2}\chi} \chi^{l+1} \left[1 + \frac{\mu^2-(k-\frac{1}{2})^2}{\chi} + \frac{\{\mu^2-(k-\frac{1}{2})^2\}\{\mu^2-(k-3/2)^2\}}{2!\chi^2} + \ldots \right] \quad (5.1.23)$$

5.2) <u>การอินติเกรทเลขจำนวนของสมการตามแนวรัศมี</u>

(Numerical Integration of the Radial Equation)

จากสมการตามแนวรัศมีถ้าเราทราบพลังงานศักย์อย่างประมาณ เราสามารถหาค่าไอเกนและไอเกนฟังก์ชันได้โดยวิธีอินติเกรทเลขจำนวนหรือวิธีวิเคราะห์ สำหรับสมการเวฟฟังก์ชันตามแนวรัศมีที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสองไม่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งอยู่สามารถเขียนได้ในรูปของ

$$\frac{d^2P}{d\rho^2} = f(P,\rho) \quad (5.2.1)$$

เราจะใช้ผลต่างอันตะ (finite difference) ตามที่ฮาร์ตรี ใช้คือ

$$\delta^2 P_i = (\delta\rho)^2 \left[P_i'' + \frac{1}{12}\delta^2 P_i'' - \frac{1}{240}\delta^4 P_i'' \right] + O(\delta\rho)^8 \quad (5.2.2)$$

เมื่อ $\delta\rho = \rho_i - \rho_{i-1}$ และเนื่องจากเทอม $\frac{1}{240}\delta^4 P_i''$ มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับเทอมอื่นๆ สามารถละทิ้งเทอมนี้ได้ ดังนั้นสูตรการอินติเกรท (5.2.2) เป็น

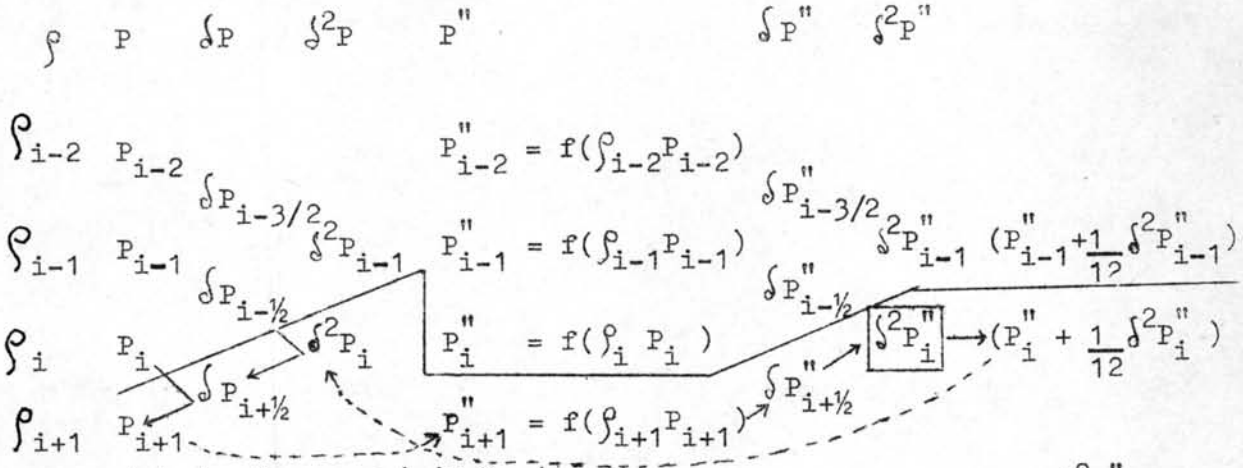
$$\delta^2 P_i = (\delta\rho)^2 \left[P_i'' + \frac{1}{12}\delta^2 P_i'' \right] \quad (5.2.3)$$

สมมติว่าการอินติเกรทถึงจุด $\rho = \rho_i$ และได้อินติเกรทผ่านช่วง $\delta\rho$ ถึง $\rho = \rho_{i+1}$ ตอนนี้เราได้ P_i และ $P_i'' = f(\rho, P_i)$ วิธีดำเนินการหาค่าฟังก์ชันของจุดต่อไปกระทำดังนี้คือ ก่อนอื่นต้องสมมติก่า $\delta^2 P_i''$ เสียก่อนจากสมการ (5.2.3) จะได้ $\delta^2 P_i$

บวกเข้ากับ $\delta P_{i-\frac{1}{2}}$ จะได้ค่า $\delta P_{i+\frac{1}{2}}$ และบวกเข้ากับ P_i ก็จะได้ค่าประมาณ P_{i+1} จากนี้คำนวณหาค่า P''_{i+1} ได้และรู้ค่า $\delta^2 P_i$ ใหม่อีกครั้งจาก

$$\delta^2 P''_i = P''_{i+1} - 2P''_i + P''_{i-1} \qquad (5.2.4)$$

ถ้าค่า $\delta^2 P''_i$ ที่ได้ใหม่ตรงกับค่าที่เราสมมตินับว่า P_{i+1} เป็นค่าถูกต้อง ถ้าไม่ตรงกันเราต้องกระทำซ้ำอีกโดยเริ่มจาก $\delta^2 P''_i$ ที่ได้ใหม่นี้แทนในสมการ (5.2.3) ต่อไปจนได้ค่าสุดท้าย $\delta^2 P''_i$ ที่ได้ตรงกันดังนี้



ปริมาณค่าที่อยู่บนเส้นหนักเป็นค่าที่รู้แล้วเมื่อการอินติเกรทถึงจุด $\rho = \rho_i$ และ $\delta^2 P''_i$ ที่อยู่ในกรอบสี่เหลี่ยมเป็นค่าที่เราสมมติเข้าไปก่อน ขั้นตอนการคำนวณเป็นไปตามลูกศรชี้

5.3) <u>การเริ่มต้นการอินติเกรทออกข้างนอก</u>

(Starting the Outward Integrations)

การเริ่มต้นอินติเกรทเราจำเป็นต้องใช้ค่าเวฟฟังก์ชันซึ่งคำนวณจากสมการ (5.1.5) อย่างน้อยสองค่าเพื่อที่ต้องการหาค่า P'' จากสมการดิฟเฟอเรนเชียล หลังจากนี้จึงเริ่มทำวิธีดำเนินการหาฟังก์ชัน $P(\rho)$ ของจุดต่อไปตามที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น และเวฟฟังก์ชันตามแนวรัศมีจะต้องเป็นศูนย์ที่ $\rho = 0$ และ $\rho = \infty$ ในช่วง $0 < \rho < \infty$

$P_{nl}(\rho)$ ต้องมีจำนวนโนด[1] (nodes) เท่ากับ (n-l-1) ซึ่งเป็นจุดที่เวฟฟังก์ชันผ่านศูนย์ จากสมการ (5.2.1) ในที่นี้

$$f(P_{nl},\rho) = \left[\epsilon_{nl} - 2\alpha - \frac{2\beta}{\rho} + \frac{l(l+1) - 2\gamma}{\rho^2}\right] P_{nl} \qquad (5.3.1)$$

เรากำหนดให้

$$\xi = (\delta\rho)^2 f(P_{nl},\rho) \qquad (5.3.2)$$

ดังนั้นสมการ (5.2.3) จะเป็น

$$\delta^2 P_i = \xi_i + \frac{1}{12}\delta^2\xi_i \qquad (5.3.3)$$

โดยการเลือกค่า ϵ_{nl} ในสมการ (5.3.1) และจากสมการ (5.1.5) สามารถหาค่า P_{nl} และ ξ ที่จุดต่างๆซึ่งเราจะเริ่มต้นด้วยสามจุด

ตัวอย่างเช่น สำหรับสถานะต่ำสุดของอะตอมโซเดียม(3s) $l = 0$ จากสมการ (5.1.5) ได้ $P_{nl} = \rho$ เมื่อ $\rho \longrightarrow 0$ เราเลือก $\epsilon = 0.381775$ และใช้ค่า $Q(\rho)$ ในตารางที่ 2 และให้ $\delta\rho = 0.005$ จะได้

$P(0.01) = 0.01$ $\quad P(0.015) = 0.015$ $\quad$ และ $\quad P(0.02) = 0.02$

$\xi_{0.01} = -0.0005499$ $\quad \xi_{0.015} = -0.0005478$ $\quad \xi_{0.02} = -0.0005433$

ρ	P	δP	$\delta^2 P$	ξ	$\delta\xi$	$\delta^2\xi$
0.010	100000			− 5499		
		50000			21	
0.015	150000		000	− 5478		24
		50000			45	
0.020	200000		−5423	− 5433		125
		44577			170	
0.025	244577		−5258	− 5263		57
		39319			227	
0.030	288896			− 5036		

} คูณด้วย 10^{-7}

---

[1] F. Herman, and S. Skillman, "Atomic Structure Calculations", (New Jersey, Prentice-Hall, Inc. 1963) p.14–11.

เริ่มต้นด้วยที่ ρ = 0 P มีค่าเป็นศูนย์ ให้เวฟฟังก์ชันมีค่าขึ้นมาจนถึง ρ = 0.02 หลังจากนั้นจึง ใช้วิธีผลต่างอันตะต่อไป ช่วงห่าง $\delta\rho$ ครั้งแรกให้เท่ากับ 0.005 สำหรับ ρ มีค่าน้อยๆ แต่เมื่อ ρ มีค่ามากขึ้นสามารถให้ $\delta\rho$ ใหญ่ขึ้นได้โดยให้เพิ่มขึ้นเป็นจำนวนสองเท่าจนถึง $\delta\rho$ ใหญ่ที่สุดเท่ากับ 0.32 เมื่อ $\rho > 3.6$ ระหว่างการอินติเกรทออกข้างนอกนี้จะได้เวฟฟังก์ชันตามแนวรัศมีที่ละจุดไปเรื่อยๆ จำนวนครั้งที่เวฟฟังก์ชันผ่านศูนย์จะเท่ากับ n-l-1 ครั้ง นั่นหมายความว่าพลังงาน $\in$ ที่เราสมมติมีค่าใกล้เคียงกับค่าพลังงานแท้จริง อินติเกรทไปจนกระทั่งถึงระยะแน่นอนจุดหนึ่งเรียกว่า รัศมีต่อเนื่อง (matching radius) ระยะนี้จะอยู่ที่จุดสูงสุดหรือต่ำสุดสุดท้ายของเส้นโค้งและเป็นระยะที่การอินติเกรทออกข้างนอกและการอินติเกรทเข้าข้างในมาเชื่อมต่อกันพอดี

5.4) <u>การเริ่มต้นการอินติเกรทเข้าข้างใน</u>

(Starting the Inward Integrations)

เราต้องเลือกจุดเริ่มต้นของการอินติเกรทเข้าสู่ข้างในที่เหมาะสม สมมติว่าที่ ρ = R ทางปฏิบัติจะใช้เท่ากับ (1+5) เท่าของระยะรัศมีต่อเนื่องตามที่เฮอร์แมน–สกิลล์แมน[1] (Herman-Skillman) ใช้ สำหรับเวฟฟังก์ชัน P(R) เมื่อ ρ มีค่ามากๆ เราใช้สมการ (5.1.9) ซึ่งเป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นอย่างเอกซ์โปเนนท์เมื่อ ρ มีค่าลดลงตามที่เราต้องการ สมมติว่าที่ระยะ ρ = (R+ $\delta\rho$),R และ (R- $\delta\rho$) เวฟฟังก์ชันมีค่าเป็น P(ρ) = A/(1 + x), A และ A(1+x) ตามลำดับ เราจะได้

$$\delta^2 P(R) = A(1 + x) - 2A + A / (1 + x)$$

$$= A x^2/ (1 + x) \qquad (5.4.1)$$

และจากสมการ (5.2.1) $P''(R) = F(R) P(R) = A F(R)$

ดังนั้น $$\delta^2 P(\rho) = A (\delta\rho)^2 F(R) + 0 (\delta\rho)^4 \qquad (5.4.2)$$

---

[1] <u>Ibid.</u>, p. 14–14.

เปรียบเทียบสมการ (5.4.1) และ (5.4.2) โดยละทิ้งเทอม $O(\delta\rho)^4$ ใน สมการ (5.4.2) จะได้

$$x^2/(1+x) = (\delta\rho)^2 F(R)$$

หรือ
$$x = \left[(1+x)(\delta\rho)^2 F(R)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (5.4.3)$$

สมการ (5.4.3) เป็นสมการกำลังสองสำหรับ $F(R)$ และสามารถแก้สมการได้โดยใช้วิธีการประมาณค่าหลายๆครั้งเป็นการสะดวกที่สุด

ตัวอย่างเช่น สำหรับสถานะต่ำสุดของอะตอมโซเดียม ($3s$) เลือก $\epsilon = 0.381775$ ฟังก์ชัน $Q(\rho)$ ใช้ตารางที่ 2 และที่ $\rho = 13.84$ เป็นจุดเริ่มต้น ส่วนกลับของ $P(13.84)$ หาได้จากสมการ (5.1.23) $A = 0.0031106$ และจากสมการ (5.3.1) $F(R) = 0.2372725$ และเราให้ $\delta\rho = 0.32$ ดังนั้น

$$\delta^2 P = 0.0242967\, A$$

$$x^2 = (0.0242967)(1+x)$$

การประมาณครั้งแรก $x = (0.0242967)^{\frac{1}{2}} = 0.1558740$

การประมาณครั้งสอง $x = (0.0242967 \cdot 1.1558740)^{\frac{1}{2}} = 0.1675826$

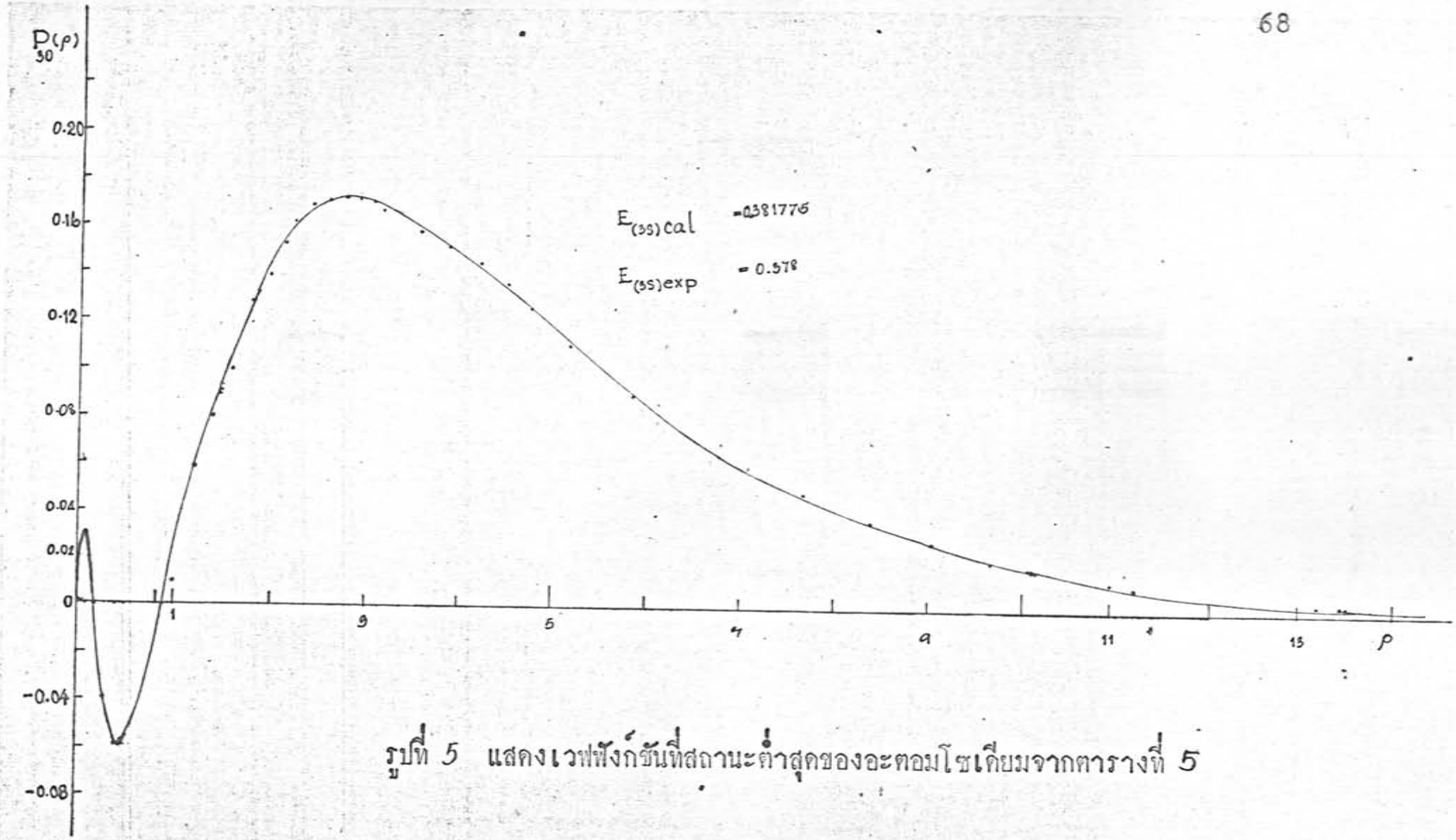
การประมาณครั้งสาม $x = (0.0242967 \cdot 1.1675826)^{\frac{1}{2}} = 0.1684292$

ดังนั้นเราจะได้ $P(14.16) = 0.0026622$, $P(13.84) = 0.0031106$ และ $P(13.52) = 0.0036345$ $\xi_{14.16} = 0.0000656$ $\xi_{13.84} = 0.0000756$ และ $\xi_{13.52} = 0.0000870$ การอินติเกรทเข้าข้างในสามารถเริ่มได้ดังนี้

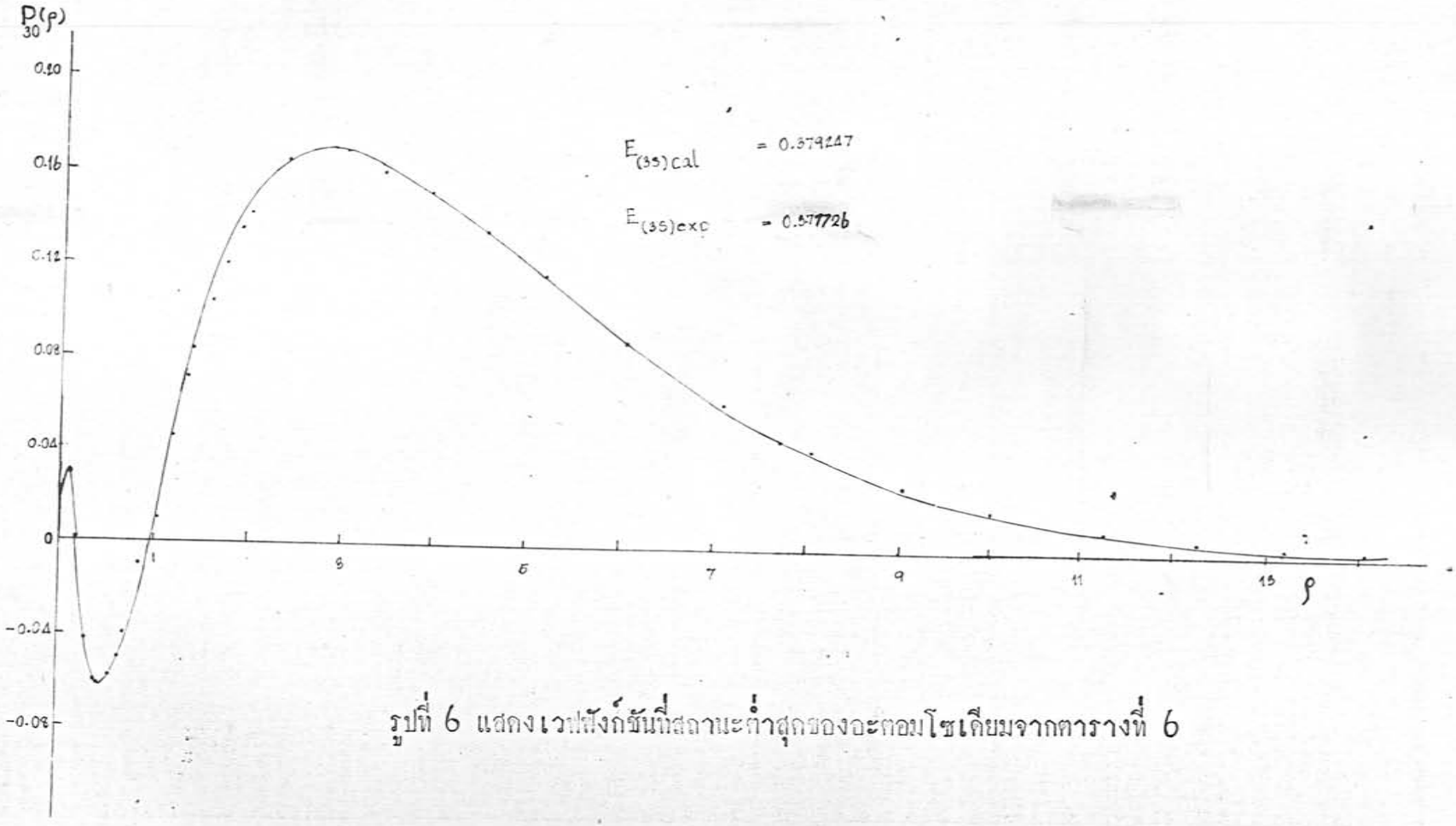
ρ	P	δP	$\delta^2 P$	ξ	$\delta\xi$	$\delta^2\xi$	
14.16	26622			656			
		4484			100		
13.84	31106		755	756		14	คูณด้วย 10^{-7}
		5239			114		
13.52	36345			870			

เมื่ออินทิเกรทเข้าสู่ข้างในไปจนถึงระยะรัศมีต่อเนื่อง ถ้าหากว่าสามารถต่อกับการอินทิเกรทออกข้างนอกได้อย่างสนิท แสดงว่าค่า ϵ ที่เราเลือกนั้นเป็นค่าไอเกนแท้จริง และถ้าไม่ต่อกันแสดงว่าค่า ϵ ไม่ถูกต้องเราต้องสมมติค่า ϵ ใหม่โดยเลือกค่า $\Delta\epsilon \approx P_{ออก} - P_{เข้า}$ บวกเข้ากับ ϵ เป็น $\epsilon + \Delta\epsilon$ ส่วนเครื่องหมาย $\Delta\epsilon$ ดูจาก $P_{ออก}$ และ $P_{เข้า}$ ถ้า $P_{ออก} > P_{เข้า}$ เครื่องหมาย $\Delta\epsilon$ เป็นบวก และถ้า $P_{ออก} < P_{เข้า}$ เครื่องหมาย $\Delta\epsilon$ เป็นลบ เราก็จะได้พลังงานอย่างประมาณและต้องปรับค่า ϵ จนกระทั่งการอินทิเกรทเข้าข้างในและการอินทิเกรทออกข้างนอกต่อกันอย่างสนิท

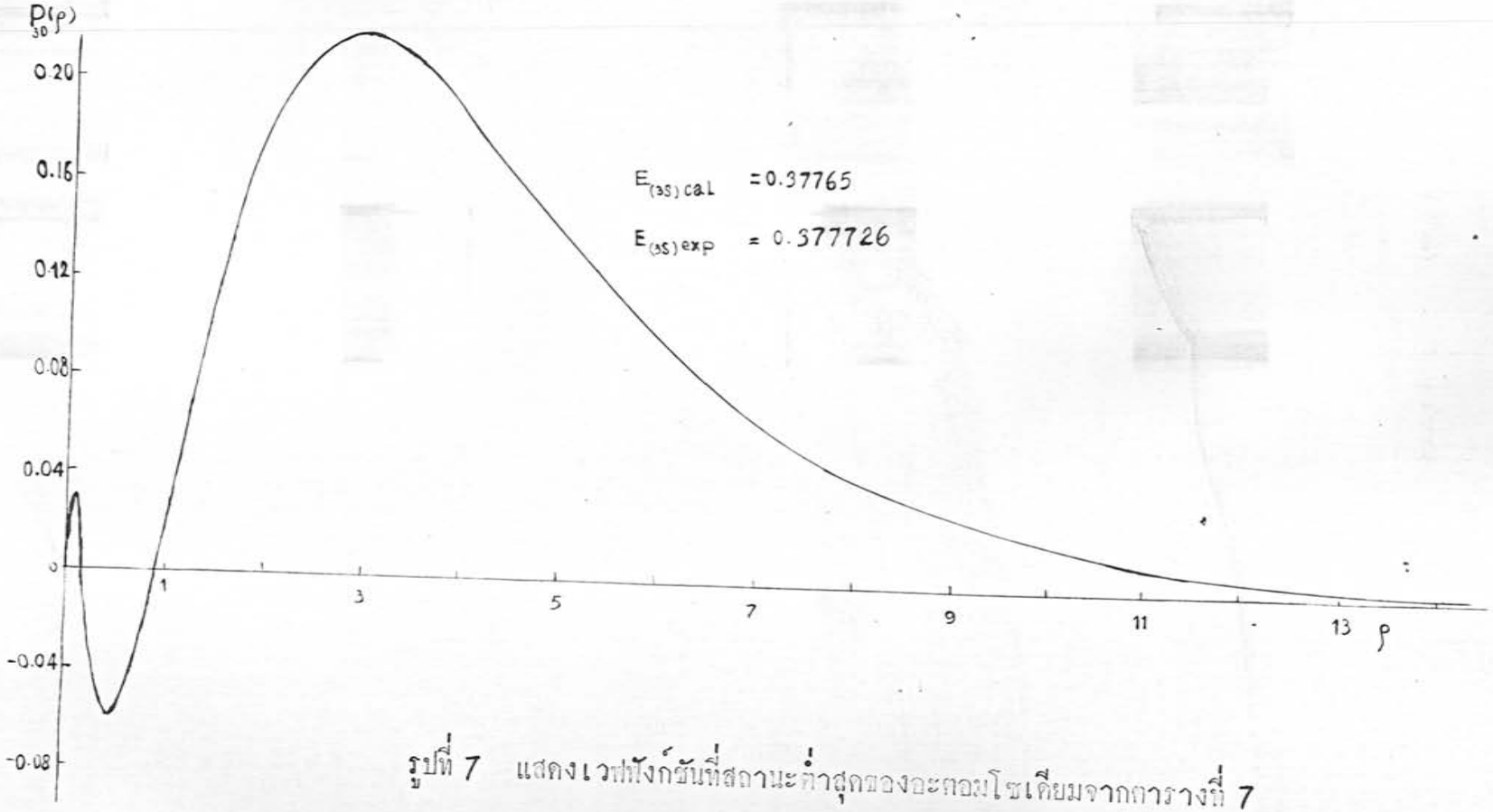
คำนวณเวฟฟังก์ชันโดยใช้พลังงานศักย์ในตารางที่ 1 และเลือก $\epsilon = 0.381775$ ได้ตารางเลขจำนวนของเวฟฟังก์ชันของการอินทิเกรทออกข้างนอกที่สถานะ 3s ตามตารางที่ 5ก มีรัศมีต่อเนื่องที่ $\rho = 2.8$ และเวฟฟังก์ชันของการอินทิเกรทเข้าข้างในเมื่อ $A = 0.0031106$ และ $x = 0.1684292$ ตามตารางที่ 5ข และได้ทดสอบพลังงานศักย์ในตารางที่ 3 และ 4 ได้เวฟฟังก์ชันและค่าไอเกนตามตารางที่ 6 และ 7 ตามลำดับ



รูปที่ 5 แสดงเวฟฟังก์ชันที่สถานะต่ำสุดของอะตอมโซเดียมจากตารางที่ 5



รูปที่ 6 แสดงเวฟฟังก์ชันที่สถานะต่ำสุดของอะตอมโซเดียมจากตารางที่ 6



รูปที่ 7 แสดงเวฟฟังก์ชันที่สถานะต่ำสุดของอะตอมโซเดียมจากตารางที่ 7

ตารางที่ 5ก แสดงการอินทิเกรทออกข้างนอก

ϵ = 0.381775 รัศมีก่อเนื่องที่ ρ = 2.8

ρ	P_{30}	δP	$\delta^2 P$	ξ	$\delta\xi$	$\delta^2\xi$
0.010	0.0100000			-0.0005499		
		0.0050000			0.0000021	
0.015	0.0150000		0.0000000	-0.0005478		0.0000024
		0.0050000			0.0000045	
0.020	0.0200000		-0.0005423	-0.0005433		0.0000125
		0.0044577			0.0000170	
0.025	0.0244577		-0.0005258	-0.0005258		0.0000057
		0.0039319			0.0000227	
0.030	0.0283896		-0.0006010	-0.0005036		-0.0011686
		0.0033309			-0.0011459	
0.04	0.0317205		-0.0015300	-0.0016495		0.0014347
		0.0018009			0.0002888	
0.05	0.0335214		-0.0013646	-0.0013607		-0.0000477
		0.0004363			0.0002411	
0.06	0.0339577		-0.0013047	-0.0011195		-0.0022223
		-0.0008684			-0.0019809	
0.08	0.0330893		-0.0028501	-0.0031004		0.0030031
		-0.0037185			0.0010222	
0.10	0.0293708		-0.0020990	-0.0020782		-0.0002500
		-0.0058175			0.0007722	
0.12	0.0235533		-0.0013224	-0.0013060		-0.0001967
		-0.0071399			0.0005755	
0.14	0.0164132		-0.0007434	-0.0007305		-0.0001549
		-0.0078833			0.0004206	
0.16	0.0085299		-0.0003199	-0.0003099		-0.0001207
		-0.0082032			0.0002999	
0.18	0.0003267		-0.0000170	-0.0000099		-0.0000850
		-0.0082202			0.0002149	
0.20	-0.0078935		0.0001998	0.0002050		-0.0000616
		-0.0080204			0.0001533	
0.22	-0.0159139		0.0003545	0.0003583		-0.0000454
		-0.0076659			0.0001079	
0.24	-0.0235798		0.0004633	0.0004661		-0.0000340
		-0.0072026			0.0000738	
0.26	-0.0307824		0.0005378	0.0005400		-0.0000258
		-0.0066648			0.0000480	
0.28	-0.0374472		0.0005863	0.0005880		-0.0000197
		-0.0060786			0.0000283	
0.30	-0.0435258		0.0006150	0.0006162		-0.0000151
		-0.0054636			0.0000131	
0.32	-0.0489894		0.0006284	0.0006293		-0.0000116
		-0.0048352			0.0000015	
0.34	-0.0538246		0.0006301	0.0006308		-0.0000089
		-0.0042051			-0.0000074	
0.36	-0.0580297		0.0007592	0.0006234		0.0016298
		-0.0034459			0.0016224	
0.40	-0.0614756		0.0020882	0.0022458		-0.0018916
		-0.0013577			-0.0002692	
0.44	-0.0628333		0.0019761	0.0019765		-0.0000050
		0.0006184			-0.0002742	
0.48	-0.0622150		0.0020038	0.0017023		0.0036181
		0.0026222			0.0033439	
0.56	-0.0595928		0.0046388	0.0050462		-0.0048891

ρ	P_{30}	δP	$\delta^2 P$	ξ	$\delta\xi$	$\delta^2\xi$
0.48	-0.0622150					
		0.0026222	0.0020038	0.0017023		
0.56	-0.0595928				0.0033439	0.0036181
		0.0072610	0.0046388	0.0050462		
0.64	-0.0523319				-0.0015452	-0.0048891
		0.0107837	0.0035228	0.0035004		
0.72	-0.0415482				-0.0012768	-0.0002684
		0.0130309	0.0022472	0.0022236		
0.80	-0.0285173				-0.0009941	0.0002827
		0.0142821	0.0012512	0.0012295		
0.88	-0.0142352				-0.0007342	0.0002599
		0.0147960	0.0005139	0.0004953		
0.96	0.0005608				-0.0005110	0.0002231
		0.0147955	-0.0000005	-0.0000157		
1.04	0.0153559				-0.0003280	0.0001830
		0.0144825	-0.0003330	-0.0003437		
1.12	0.0298188				-0.0001991	0.0001290
		0.0139268	-0.0005357	-0.0005428		
1.20	0.0437456				-0.0001142	0.0000849
		0.0132743	-0.0006525	-0.0006569		
1.28	0.0570199				-0.0000611	0.0000531
		0.0125590	-0.0007153	-0.0007180		
1.36	0.0695789				-0.0000289	0.0000322
		0.0118136	-0.0007454	-0.0007469		
1.44	0.0813925				-0.0000104	0.0001185
		0.0110571	-0.0007565	-0.0007573		
1.52	0.0924496				-0.0000009	0.0000095
		0.0102992	-0.0007595	-0.0007582		
1.60	0.1027488				+0.0000033	0.0000042
		0.0095448	-0.0007544	-0.0007549		
1.68	0.1122936				0.0000083	0.0000050
		0.0087988	-0.0007460	-0.0007465		
1.76	0.1210924				0.0000145	0.0000062
		0.0080672	-0.0007316	-0.0007320		
1.84	0.1291596				0.0000196	0.0000050
		0.0073551	-0.0007121	-0.0007124		
1.92	0.1365147				0.0000232	0.0000036
		0.0066661	-0.0006890	-0.0006892		
2.00	0.1431808				0.0000257	0.0000025
		0.0060027	-0.0006634	-0.0006636		
2.08	0.1491835				0.0000273	0.0000016
		0.0053665	-0.0006362	-0.0006363		
2.16	0.1545500				0.0000283	0.0000010
		0.0047585	-0.0006080	-0.0006080		
2.24	0.1593085				0.0000287	0.0000004
		0.0041792	-0.0005793	-0.0005793		
2.32	0.1634877				0.0000288	0.0000001
		0.0036287	-0.0005505	-0.0005505		
2.40	0.1671164				0.0000285	-0.0000003
		0.0031066	-0.0005221	-0.0005220		
2.48	0.1702230				0.0000280	-0.0000005
		0.0025067	-0.0005999	-0.0004940		
2.64	0.1727297				-0.0012434	-0.0012714
		0.0008910	-0.0016156	-0.0017374		
2.80	0.1736208				0.0002177	0.0014611
		-0.0006301	-0.0015213	-0.0015197		
2.96	0.1729907			-0.0015197	0.0001977	-0.0000200

ตารางที่ 5ข แสดงการอินทิเกรทเข้าข้างใน

ϵ = 0.381775 A = 0.0031106 x = 0.1684292

ρ	P_{30}	δP	$\delta^2 P$	ξ	$\delta\xi$	$\delta^2\xi$
14.16	0.0026622			0.0000656		
		0.0004484			0.0000100	
13.84	0.0031106		0.0000755	0.0000756		0.0000014
		0.0005239			0.0000114	
13.52	0.0036345		0.0000872	0.0000870		0.0000017
		0.0006111			0.0000131	
13.20	0.0042455		0.0001003	0.0001001		0.0000018
		0.0007114			0.0000149	
12.88	0.0049568		0.0001151	0.0001150		0.0000020
		0.0008264			0.0000168	
12.56	0.0057832		0.0001320	0.0001318		0.0000021
		0.0009584			0.0000190	
12.24	0.0067416		0.0001510	0.0001508		0.0000023
		0.0011094			0.0000213	
11.92	0.0078519		0.0001722	0.0001720		0.0000025
		0.0012816			0.0000238	
11.60	0.0091326		0.0001960	0.0001958		0.0000026
		0.0014776			0.0000264	
11.28	0.0106102		0.0002224	0.0002222		0.0000027
		0.0017000			0.0000291	
10.96	0.0123102		0.0002515	0.0002512		0.0000027
		0.0019515			0.0000318	
10.64	0.0142617		0.0002833	0.0002830		0.0000027
		0.0022347			0.0000345	
10.32	0.0164964		0.0003178	0.0003175		0.0000025
		0.0025525			0.0000370	
10.00	0.0190489		0.0003548	0.0003546		0.0000022
		0.0029072			0.0000392	
9.68	0.0219561		0.0003940	0.0003938		0.0000017
		0.0033012			0.0000410	
9.36	0.0252573		0.0004348	0.0004348		0.0000009
		0.0037361			0.0000418	
9.04	0.0289934		0.0004766	0.0004766		-0.0000002
		0.0042127			0.0000416	
8.72	0.0332061		0.0005181	0.0005183		-0.0000017
		0.0047308			0.0000399	
8.40	0.0379369		0.0005578	0.0005582		-0.0000038
		0.0052887			0.0000361	
8.08	0.0432256		0.0005937	0.0005942		-0.0000065
		0.0058824			0.0000295	
7.76	0.0491080		0.0006230	0.0006238		-0.0000100
		0.0065053			0.0000195	
7.44	0.0556133		0.0006421	0.0006433		-0.0000145
		0.0071474			0.0000050	
7.12	0.0627607		0.0006467	0.0006483		-0.0000200
		0.0077941			-0.0000150	
6.80	0.0705548		0.0006311	0.0006334		-0.0000268
		0.0084252			-0.0000418	
6.48	0.0789800		0.0005886	0.0005916		-0.0000352
		0.0090138			-0.0000770	
6.16	0.0879938		0.0005108	0.0005145		-0.0000451
		0.0095246			-0.0001221	
5.84	0.0975184		0.0003877	0.0003925		-0.0000567

ρ	P_{30}	δP	$\delta^2 P$	ξ	$\delta\xi$	$\delta^2\xi$
6.16	0.0879938		0.0005108	0.0005145		-0.0000451
		0.0095246			- 0.0001221	
5,84	0.0975184		0.0003877	0.0003925		-0.0000567
		0.0099123			-0.0001788	
5.52	0.1074307		0.0002079	0.0002137		-0.0000699
		0.0101202			-0.0002487	
5.20	0.1175509		- 0.0000420	- 0.0000350		- 0.0000846
		0.0100782			-0.0003333	
4.88	0.1276291		- 0.0003766	- 0.0003683		- 0.0001002
		0.0097016			-0.0004335	
4.56	0.1373307		- 0.0008115	- 0.0008018		-0.0001157
		0.0088901			-0.0005492	
4.24	0.1462208		- 0.0013618	- 0.0013510		-0.0001291
		0.0075283			-0.0006784	
3.92	0.1537491		- 0.0018631	- 0.0020294		0.0019957
		0.0056652			0.0013173	
3.60	0.1594143		- 0.0008328	- 0.0007121		-0.0014482
		0.0048324			-0.0001309	
3,44	0.1642467		- 0.0008440	- 0.0008430		-0.0000123
		0.0039884			-0.0001432	
3.28	0.1682351		- 0.0009875	- 0.0009861		-0.0000159
		0.0030009			-0.0001591	
3.12	0.1712360		- 0.0011467	- 0.0011452		-0.0000185
		0.0018542			-0.0001775	
2.96	0.1730902		- 0.0013244	- 0.0013228		-0.0000194
		0.0005298			-0.0001969	
2.80	0.1736200		- 0.0015213	- 0.0015197		-0.0000198
		-0.0009915			-0.0002167.	
2.64	0.1726285			- 0.0017363		

ได้ ϵ = 0.381775

r_m = 2.8

$\int_0^\infty P_{30}^2 \, d\rho$ = 0.105019

แฟคเตอร์ถูกทำให้ปกติ (normalized factor) = 3.0857878

ตารางที่ 6ก แสดงการอินทิเกรทออกด้านนอก

$\epsilon = 0.378891$ รัศมีต่อเนื่องที่ $\zeta = 2.8$

ζ	P_{30}	δP	$\delta^2 P$	ξ	$\delta\xi$	$\delta^2\xi$
0.010	0.0100000			-0.0005499		
		0.0050000			0.0000022	
0.015	0.0150000		0.0000000	-0.0005477		0.0000022
		0.0050000			0.0000044	
0.020	0.0200000		-0.0005423	-0.0005433		0.0000125
		0.0044577			0.0000169	
0.025	0.0244577		-0.0005259	-0.0005264		0.0000057
		0.0039318			0.0000226	
0.03	0.0283895		-0.0006013	-0.0005038		-0.0011695
		0.0033305			-0.0011469	
0.04	0.0317200		-0.0015311	-0.0016507		0.0014355
		0.0017994			-0.0002886	
0.05	0.0335194		-0.0013661	-0.0013622		-0.0000476
		0.0004333			0.0002410	
0.06	0.0339527		-0.0013068	-0.0011212		-0.0022273
		-0.0008735			-0.0019863	
0.08	0.0330792		-0.0028567	-0.0031074		0.0030094
		-0.0037302			0.0010232	
0.10	0.0293490		-0.0021050	-0.0020843		-0.0002491
		-0.0058352			0.0007741	
0.12	0.0235138		-0.0013265	-0.0013102		-0.0001962
		-0.0071618			0.0005778	
0.14	0.0163520		-0.0007452	-0.0007324		-0.0001544
		-0.0079070			0.0004234	
0.16	0.0084450		-0.0003190	-0.0003089		-0.0001212
		-0.0082260			0.0003022	
0.18	0.0002190		-0.0000138	-0.0000067		-0.0000850
		-0.0082398			0.0002173	
0.20	-0.0080208		0.0002054	0.0002105		-0.0000620
		-0.0080345			0.0001553	
0.22	-0.0160552		0.0003620	0.0003658		-0.0000458
		-0.0076724			0.0001095	
0.24	-0.0237277		0.0004724	0.0004753		-0.0000345
		-0.0072000			0.0000750	
0.26	-0.0309277		0.0005481	0.0005503		-0.0000262
		-0.0066519			0.0000488	
0.28	-0.0375796		0.0005974	0.0005991		-0.0000201
		-0.0060545			0.0000288	
0.30	-0.0436341		0.0006266	0.0006279		-0.0000154
		-0.0054279			0.0000133	
0.32	-0.0490620		0.0006402	0.0006412		-0.0000119
		-0.0047874			0.0000014	
0.34	-0.0538496		0.0006419	0.0006426		-0.0000091
		-0.0041458			-0.0000077	
0.36	-0.0579955		0.0007734	0.0006349		-0.0016614
		-0.0033724			0.0016537	
0.40	-0.0613679		0.0021280	0.0022886		-0.0019283
		-0.0012445			-0.0002746	
0.44	-0.0626124		0.0020135	0.0020141		-0.0000063
		0.0007690			-0.0002809	
0.48	-0.0618433		0.0020403	0.0017332		0.0036855
		0.0028094			0.0034047	
0.56	-0.0590340		0.0047221	0.0051379		-0.0049888
		0.0075315			-0.0015842	
0.64	-0.0515025		0.0035762	0.0035537		0.0002697

ρ	P_{30}	δP	$\delta^2 P$	ξ	$\delta\xi$	$\delta^2\xi$
0.56	-0.0590340		0.0047221	0.0051379		-0.0049888
		0.0075315			-0.0015842	
0.64	-0.0515025		0.0035762	0.0035537		0.0002697
		0.0111077			-0.0013145	
0.72	-0.0403948		0.0022632	0.0022392		0.0002878
		0.0133709			-0.0010267	
0.80	-0.0270239		0.0012347	0.0012125		0.0002664
		0.0146056			-0.0007603	
0.88	-0.0124183		0.0004713	0.0004522		0.0002297
		0.0150769			-0.0005306	
0.96	0.0026585		-0.0000627	-0.0000784		0.0001882
		0.0150141			-0.0003424	
1.04	0.0176727		-0.0004096	-0.0004209		0.0001356
		0.0146046			-0.0002069	
1.12	0.0322773		-0.0006202	-0.0006277		0.0000899
		0.0139843			-0.0001170	
1.20	0.0462616		-0.0007398	-0.0007447		0.0000586
		0.0132445			-0.0000584	
1.28	0.0595061		-0.0008001	-0.0008032		0.0000372
		0.0124444			-0.0000213	
1.36	0.0719506		-0.0008225	-0.0008244		0.0000227
		0.0116219			0.0000015	
1.44	0.0835725		-0.0008219	-0.0008229		0.0000130
		0.0108000			0.0000145	
1.52	0.0943725		-0.0008079	-0.0008084		0.0000066
		0.0099922			0.0000211	
1.60	0.1043647		-0.0007871	-0.0007873		0.0000025
		0.0092051			0.0000236	
1.68	0.1135697		-0.0007637	-0.0007637		-0.0000002
		0.0084414			0.0000235	
1.76	0.1220111		-0.0007403	-0.0007402		-0.0000010
		0.0077011			0.0000225	
1.84	0.1297122		-0.0007175	-0.0007177		0.0000025
		0.0069835			0.0000250	
1.92	0.1366957		-0.0006926	-0.0006928		0.0000022
		0.0062910			0.0000272	
2.00	0.1429867		-0.0006655	-0.0006656		0.0000014
		0.0056255			0.0000286	
2.08	0.1486122		-0.0006369	-0.0006370		0.0000008
		0.0049886			0.0000293	
2.16	0.1536008		-0.0006076	-0.0006076		0.0000003
		0.0043810			0.0000296	
2.24	0.1579818		-0.0005780	-0.0005780		-0.0000001
		0.0038029			0.0000295	
2.32	0.1617847		-0.0005485	-0.0005485		-0.0000004
		0.0032544			0.0000292	
2.40	0.1650391		-0.0005194	-0.0005193		-0.0000006
		0.0027350			0.0000286	
2.48	0.1677742		-0.0005960	-0.0004908		-0.0012626
		0.0021390			0.0012340	
2.64	0.1699132		-0.0016039	-0.0017248		0.0014512
		0.0005352			0.0002172	
2.80	0.1704484		-0.0015093	-0.0015076		-0.0000201
		-0.0009741			0.0001971	
2.96	0.1694743			-0.0013105		

ตารางที่ 6ข แสดงการอินทิเกรทเข้าข้างใน

$\epsilon = 0.379247$ $A = 0.0031972$ $x = 0.1673220$

ρ	P_{30}	δP	$\delta^2 P$	ξ	$\delta\xi$	$\delta^2\xi$
14.16	0.0027389			0.0000667		
		0.0004583			0.0000100	
13.84	0.0031972		0.0000768	0.0000767		0.0000016
		0.0005351			0.0000116	
13.52	0.0037323		0.0000884	0.0000883		0.0000015
		0.0006235			0.0000131	
13.20	0.0043558		0.0001016	0.0001014		0.0000018
		0.0007251			0.0000149	
12.88	0.0050809		0.0001165	0.0001163		0.0000019
		0.0008416			0.0000169	
12.56	0.0059225		0.0001334	0.0001332		0.0000021
		0.0009750			0.0000190	
12.24	0.0068975		0.0001524	0.0001522		0.0000023
		0.0011274			0.0000213	
11.92	0.0080249		0.0001737	0.0001735		0.0000024
		0.0013011			0.0000237	
11.60	0.0093260		0.0001974	0.0001972		0.0000026
		0.0014985			0.0000263	
11.28	0.0108244		0.0002237	0.0002234		0.0000026
		0.0017221			0.0000289	
10.96	0.0125465		0.0002526	0.0002523		0.0000027
		0.0019747			0.0000316	
10.64	0.0145212		0.0002841	0.0002839		0.0000026
		0.0022588			0.0000341	
10.32	0.0167800		0.0003182	0.0003180		0.0000024
		0.0025770			0.0000365	
10.00	0.0193570		0.0003548	0.0003546		0.0000021
		0.0029318			0.0000386	
9.86	0.0222888		0.0003933	0.0003932		0.0000015
		0.0033252			0.0000401	
9.36	0.0256140		0.0004334	0.0004333		0.0000007
		0.0037586			0.0000408	
9.04	0.0293725		0.0004741	0.0004742		-0.0000004
		0.0042327			0.0000404	
8.72	0.0336052		0.0005144	0.0005146		-0.0000020
		0.0047471			0.0000384	
8.40	0.0383523		0.0005526	0.0005529		-0.0000041
		0.0052997			0.0000343	
8.08	0.0436520		0.0005866	0.0005872		-0.0000069
		0.0058863			0.0000274	
7.76	0.0495383		0.0006137	0.0006146		-0.0000104
		0.0065001			0.0000170	
7.44	0.0560384		0.0006304	0.0006316		-0.0000148
		0.0071305			0.0000022	
7.12	0.0631689		0.0006322	0.0006339		-0.0000203
		0.0077626			-0.0000181	
6.80	0.0709315		0.0006135	0.0006157		-0.0000271
		0.0083761			-0.0000452	
6.48	0.0793077		0.0005676	0.0005705		-0.0000354
		0.0089437			-0.0000806	
6.16	0.0882514		0.0004862	0.0004899		-0.0000452
		0.0094299			-0.0001258	
5.84	0.0976813		0.0003594	0.0003642		-0.0000566

ρ	P_{30}	ΔP	$\Delta^2 P$	ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$
6.16	0.0882514		0.0004862	0.0004899		-0.0000452
		0.0094299			-0.0001258	
5.84	0.0976813		0.0003594	0.0003642		-0.0000566
		0.0097893			-0.0001824	
5.52	0.1074705		0.0001760	0.0001818		-0.0000695
		0.0099653			-0.0002519	
5.20	0.1174358		-0.0000771	-0.0000701		-0.0000838
		0.0098881			-0.0003357	
4.88	0.1273239		-0.0004140	-0.0004059		-0.0000989
		0.0094740			-0.0004347	
4.56	0.1367980		-0.0008500	-0.0008405		-0.0001137
		0.0086240			-0.0005483	
4.24	0.1454220		-0.0013994	-0.0013888		-0.0001262
		0.0072247			-0.0006745	
3.92	0.1526467		-0.0018951	-0.0020634		0.0020193
		0.0053296			0.0013448	
3.60	0.1579763		-0.0008414	-0.0007186		-0.0014735
		0.0044882			-0.0001288	
3.44	0.1624644		-0.0008484	-0.0008474		-0.0000119
		0.0036398			-0.0001407	
3.28	0.1661042		-0.0009893	-0.0009881		-0.0000148
		0.0026505			-0.0001555	
3.12	0.1687547		-0.0011451	-0.0011436		-0.0000175
		0.0015054			-0.0001730	
2.96	0.1702601		-0.0013181	-0.0013166		-0.0000181
		0.0001873			-0.0001910	
2.80	0.1704474		-0.0015091	-0.0015076		-0.0000182
		-0.0013218			-0.0002092	
2.64	0.1691256			-0.0017168		

ได้ $\epsilon = 0.379247$

$r_m = 2.8$

$$\int_0^\infty P_{30}^2 \, d\rho = 0.1039634$$

แฟคเตอร์ถูกทำให้ปกติ $N = 3.1014148$

ตารางที่ 7ก แสดงการอินทิเกรทออกข้างนอก

$\epsilon = 0.37765$ รัศมีต่อเนื่องที่ $\rho = 2.9$

ρ	P_{30}	δP	$\delta^2 P$	ξ	$\delta\xi$	$\delta^2\xi$
0.010	0.0100000			-0.0005499		
		0.0050000			0.0000023	
0.015	0.0150000		0.0000000	-0.0005422		0.0000020
		0.0050000			0.0000043	
0.020	0.0200000		-0.0005422	-0.0005433		0.0000126
		0.0044578			0.0000169	
0.025	0.0244578		-0.0005259	-0.0005264		0.0000057
		0.0039318			0.0000226	
0.030	0.0283896		-0.0006013	-0.0005038		-0.0011696
		0.0033305			-0.0011471	
0.04	0.0317201		-0.0015313	-0.0016509		0.0014355
		0.0017992			0.0002884	
0.05	0.0335194		-0.0013664	-0.0013625		-0.0000475
		0.0004328			0.0002409	
0.06	0.0339522		-0.0011246	-0.0011215		-0.0000370
		-0.0006918			0.0002040	
0.07	0.0332604		-0.0009200	-0.0009175		-0.0000301
		-0.0016118			0.0001739	
0.08	0.0316486		-0.0007458	-0.0007437		-0.0000252
		-0.0023576			0.0001486	
0.09	0.0292909		-0.0005969	-0.0005951		-0.0000215
		-0.0029545			0.0001271	
0.10	0.0263364		-0.0004695	-0.0004680		-0.0000185
		-0.0034240			0.0001086	
0.11	0.0229125		-0.0003607	-0.0003594		-0.0000160
		-0.0037847			0.0000926	
0.12	0.0191278		-0.0002679	-0.0002668		-0.0000139
		-0.0040526			0.0000787	
0.13	0.0150752		-0.0001891	-0.0001881		-0.0000121
		-0.0042417			0.0000666	
0.14	0.0108335		-0.0001224	-0.0001215		-0.0000106
		-0.0043640			0.0000560	
0.15	0.0064695		-0.0000663	-0.0000655		-0.0000092
		-0.0044303			0.0000468	
0.16	0.0020392		-0.0000194	-0.0000187		-0.0000079
		-0.0044496			0.0000389	
0.17	-0.0024104		0.0000197	0.0000202		-0.0000065
		-0.0044300			0.0000324	
0.18	-0.0068404		0.0000522	0.0000526		-0.0000055
		-0.0043778			0.0000270	
0.19	-0.0112182		0.0000792	0.0000796		-0.0000046
		-0.0042987			0.0000224	
0.20	-0.0155169		0.0001016	0.0001019		-0.0000039
		-0.0041970			0.0000185	
0.21	-0.0197139		0.0001201	0.0001204		-0.0000033
		-0.0040769			0.0000151	
0.22	-0.0237909		0.0001353	0.0001355		-0.0000028
		-0.0039417			0.0000123	
0.23	-0.0277325		0.0001476	0.0001478		-0.0000024
		-0.0037940			0.0000099	
0.24	-0.0315266		0.0001575	0.0001577		-0.0000021
		-0.0036366			0.0000077	
0.25	-0.0351631		0.0001653	0.0001654		-0.0000018
		-0.0034713			0.0000059	
0.26	-0.0386344		0.0001712	0.0001713		-0.0000016

ρ	P_{30}	δP	$\delta^2 P$	ξ	$\delta\xi$	$\delta^2\xi$
0.25	-0.0351631		0.0001653	0.0001654		-0.0000018
		-0.0034713			0.0000059	
0.26	-0.0386344		0.0001712	0.0001713		-0.0000016
		-0.0033001			0.0000044	
0.27	-0.0419345		0.0001756	0.0001757		-0.0000014
		-0.0031245			0.0000030	
0.28	-0.0450590		0.0001786	0.0001787		-0.0000012
		-0.0029459			0.0000018	
0.29	-0.0480049		0.0001804	0.0001805		-0.0000010
		-0.0027655			0.0000008	
0.30	-0.0507704		0.0001813	0.0001813		-0.0000009
		-0.0025842			-0.0000001	
0.31	-0.0533546		0.0001812	0.0001813		-0.0000008
		-0.0024030			-0.0000008	
0.32	-0.0557577		0.0002224	0.0001804		0.0005033
		-0.0021807			0.0005025	
0.34	-0.0579384		0.0006376	0.0006829		-0.0005441
		-0.0015431			-0.0000416	
0.36	-0.0594815		0.0006411	0.0006413		-0.0000019
		-0.0009020			-0.0000435	
0.38	-0.0603835		0.0005977	0.0005978		-0.0000008
		-0.0003043			-0.0000442	
0.40	-0.0606877		0.0007472	0.0005536		0.0023232
		0.0004429			0.0022790	
0.45	-0.0602448		0.0026940	0.0028326		-0.0028631
		0.0030369			-0.0005842	
0.50	-0.0572079		0.0022532	0.0022484		+0.0000580
		0.0052901			-0.0005262	
0.55	-0.0519178		0.0017280	0.0017222		0.0000697
		0.0070181			-0.0004565	
0.60	-0.0448997		0.0012717	0.0012657		0.0000718
		0.0082898			-0.0003848	
0.65	-0.0366099		0.0008866	0.0008809		0.0000687
		0.0091764			-0.0003161	
0.70	-0.0274335		0.0005701	0.0005649		0.0000630
		0.0097465			-0.0002530	
0.75	-0.0176870		0.0003165	0.0003118		0.0000562
		0.0100630			-0.0001969	
0.80	-0.0076240		0.0001190	0.0001149		0.0000491
		0.0101820			-0.0001478	
0.85	0.0025580		-0.0000294	-0.0000329		0.0000422
		0.0101526			-0.0001056	
0.90	0.0127106		-0.0001355	-0.0001385		0.0000358
		0.0100471			-0.0000698	
0.95	0.0227278		-0.0002058	-0.0002083		0.0000301
		0.0098113			-0.0000397	
1.00	0.0325391		-0.0002460	-0.0002480		0.0000251
		0.0095654			-0.0000146	
1.05	0.0421045		-0.0002612	-0.0002627		0.0000174
		0.0093042			+0.0000028	
1.10	0.0514086		-0.0002591	-0.0002598		0.0000094
		0.0090451			0.0000122	
1.15	0.0604537		-0.0002472	-0.0002476		0.0000055
		0.0087980			0.0000177	
1.20	0.0692517		-0.0002297	-0.0002299		0.0000027

ρ	P_{30}	δP	$\delta^2 P$	ξ	$\delta\xi$	$\delta^2\xi$
1.15	0.0604537					
		0.0087980	-0.0002472	-0.0002476		
1.20	0.0692517				0.0000177	0.0000055
		0.0085683	-0.0002297	-0.0002299		
1.25	0.0778200				0.0000204	0.0000027
		0.0083588	-0.0002095	-0.0002095		
1.30	0.0861788				0.0000211	0.0000007
		0.0081703	-0.0001885	-0.0001884		
1.35	0.0943491				0.0000204	-0.0000007
		0.0080021	-0.0001682	-0.0001681		
1.40	0.1023512				0.0000187	-0.0000017
		0.0078526	-0.0001495	-0.0001494		
1.45	0.1102038				0.0000164	-0.0000023
		0.0077194	-0.0001332	-0.0001329		
1.50	0.1179232				0.0000137	-0.0000027
		0.0075999	-0.0001195	-0.0001192		
1.55	0.1255232				0.0000108	-0.0000030
		0.0074912	-0.0001087	-0.0001085		
1.60	0.1330144				0.0000077	-0.0000031
		0.0073902	-0.0001010	-0.0001008		
1.65	0.1404046				0.0000046	-0.0000031
		0.0072937	-0.0000965	-0.0000962		
1.70	0.1476984				0.0000015	-0.0000031
		0.0071987	-0.0000950	-0.0000947		
1.75	0.1548971				-0.0000016	-0.0000030
		0.0071021	-0.0000966	-0.0000964		
1.80	0.1619992				-0.0000046	-0.0000029
		0.0070010	-0.0001012	-0.0001009		
1.85	0.1690002				-0.0000074	-0.0000028
		0.0068924	-0.0001086	-0.0001084		
1.90	0.1758926				-0.0000102	-0.0004370
		0.0067374	-0.0001550	-0.0001186		
2.00	0.1826300				-0.0004472	+0.0003537
		0.0062012	-0.0005362	-0.0005657		
2.10	0.1888312				-0.0000935	0.0000268
		0.0055442	-0.0006570	-0.0006592		
2.20	0.1943753				-0.0000667	0.0000230
		0.0048202	-0.0007240	-0.0007259		
2.30	0.1991955				-0.0000437	0.0000200
		0.0040522	-0.0007680	-0.0007696		
2.40	0.2032477				-0.0000237	0.0000172
		0.0032603	-0.0007919	-0.0007934		
2.50	0.2065080				-0.0000066	0.0000146
		0.0024615	-0.0007987	-0.0007999		
2.60	0.2089695				+0.0000080	0.0000122
		0.0016706	-0.0007910	-0.0007920		
2.70	0.2106401				0.0000202	0.0000100
		0.0008996	-0.0007709	-0.0007718		
2.80	0.2115397				0.0000302	0.0000081
		0.0001588	-0.0007409	-0.0007416		
2.90	0.2116984				0.0000383	-0.0017848
		-0.0006932	-0.0008520	-0.0007032		
3.10	0.2110052			-0.0024497	-0.0017465	

ตารางที่ 7ก แสดงการอินติเกรทเข้าด้านใน

ϵ = 0.37765 A = 0.002525 x = 0.2148466

ρ	P_{30}	δP	$\delta^2 P$	ξ	$\delta\xi$	$\delta^2\xi$
14.7	0.0020784			0.0000803		
		0.0004465			0.0000158	
14.3	0.0025250		0.0000960	0.0000961		0.0000028
		0.0005425			0.0000186	
13.9	0.0030674		0.0001150	0.0001147		0.0000035
		0.0006575			0.0000221	
13.5	0.0037249		0.0001371	0.0001368		0.0000038
		0.0007946			0.0000259	
13.1	0.0045195		0.0001630	0.0001627		0.0000044
		0.0009576			0.0000303	
12.7	0.0054771		0.0001933	0.0001929		0.0000049
		0.0011510			0.0000351	
12.3	0.0066280		0.0002285	0.0002281		0.0000053
		0.0013795			0.00000404	
11.9	0.0080075		0.0002690	0.0002685		0.0000058
		0.0016485			0.0000463	
11.5	0.0096560		0.0003153	0.0003148		0.0000061
		0.0019638			0.0000524	
11.1	0.0116198		0.0003676	0.0003671		0.0000063
		0.0023314			0.0000586	
10.7	0.0139512		0.0004263	0.0004258		0.0000061
		0.0027577			0.0000647	
10.3	0.0167089		0.0004910	0.0004905		0.0000056
		0.0032487			0.0000703	
9.9	0.0199576		0.0005612	0.0005608		0.0000044
		0.0038098			0.0000747	
9.5	0.0237674		0.0006357	0.0006355		0.0000024
		0.0044456			0.0000771	
9.1	0.0282130		0.0007126	0.0007126		-0.0000008
		0.0051581			0.0000763	
8.7	0.0333711		0.0007885	0.0007890		-0.0000054
		0.0059467			0.0000709	
8.3	0.0393178		0.0008589	0.0008599		-0.0000121
		0.0068055			0.0000588	
7.9	0.0461233		0.0009169	0.0009187		-0.0000213
		0.0077224			0.0000375	
7.5	0.0538457		0.0009533	0.0009561		-0.0000337
		0.0086757			0.0000038	
7.1	0.0625214		0.0009224	0.0009599		-0.0004500
		0.0095982			-0.0004462	
6.7	0.0721196		0.0005482	0.0005137		0.0004146
		0.0101464			-0.0000316	
6.4	0.0822660		0.0004791	0.0004821		-0.0000357
		0.0106255			-0.0000673	
6.1	0.0928915		0.0004111	0.0004148		-0.0000443
		0.0110366			-0.0001116	
5.8	0.1039281		0.0002986	0.0003031		-0.0000546
		0.0113352			-0.0001662	
5.5	0.1152633		0.0001314	0.0001369		-0.0000664
		0.0114666			-0.0002326	
5.2	0.1267299		-0.0000834	-0.0000956		0.0001469
		0.0113832			-0.0000857	
4.9	0.1381131		-0.0001844	-0.0001813		-0.0000375
		0.0111988			-0.0001231	
4.7	0.1493119		-0.0003066	-0.0003044		-0.0000266

ρ	P_{30}	δP	$\delta^2 P$	ξ	$\delta\xi$	$\delta^2\xi$
4.7	0.1493119			-0.0003044		-0.0000266
		0.0108922			-0.0001497	
4.5	0.1602041		-0.0004566	-0.0004541		-0.0000294
		0.0104356			-0.0001791	
4.3	0.1706397		-0.0006359	-0.0006332		-0.0000321
		0.0097998			-0.0002112	
4.1	0.1804395		-0.0008473	-0.0008444		-0.0000348
		0.0089524			-0.0002460	
3.9	0.1893919		-0.0010935	-0.0010904		-0.0000370
		0.0078589			-0.0002830	
3.7	0.1972508		-0.0013767	-0.0013734		-0.0000386
		0.0064822			-0.0003216	
3.5	0.2037331		-0.0016983	-0.0016950		-0.0000391
		0.0047840			-0.0003607	
3.3	0.2085171		-0.0020587	-0.0020557		-0.0000361
		0.0027253			-0.0003968	
3.1	0.2112424		-0.0022736	-0.0024524		+0.0021460
		0.0004517			0.0017492	
2.9	0.2116941		-0.0008521	-0.0007032		-0.0017867
		-0.0004004			-0.0000375	
2.8	0.2112936			-0.0007407		

ได้ $\epsilon = 0.37765$

$r_m = 2.9$

$$\int_0^\infty P_{30}^2 \, d\rho = 0.1498131$$

แฟคเตอร์ถูกทำให้ปกติ $N = 2.5835988$