บทที่ 5

การคำนวณและการปรับแก้

บทนี้จะกล่าวถึงเฉพาะขั้นตอนที่สำคัญ ในการคำนวณปรับแก้ข้อมูลอันได้แก่ การคำนวณค่าประมาณของพิกัดของจุดต่าง ๆ การทอนค่าการวัดและการจัดรูปจำลองเชิงคณิต

ข้อกำหนดเบื้องต้นในการปรับแก้คือ

ก. แอซิมัธที่ใช้คำนวณ เป็นแอซิมัธที่นับจากทิศเหนือไปตามเข็มนาฬิกา มีเครื่องหมายบวก

ข. ลองจิจูดไปทางตะวันออกของกรีนิชมีเครื่องหมายบวก

ค. สเฟียรอยด์ที่ใช้คือ เอเวอร์เรสท์ ความยาวของกึ่งแกนยาว 6377276.345 เมตร และความแบนที่ขั้ว (f) $= \frac{1}{300.8017}$

ง. ตำแหน่งของจุดแรกออกใช้ค่าพิกัดของหมุดปลายเส้นฐานใต้ราชบุรี (สถานีที่ 2) ซึ่งมีค่าพิกัดจากการปรับแก้โดยใช้พื้นหลักฐานอินเดียน 2497 (ข้อ 2 ของข้อ 2.2) คือละติจูด $13^\circ\ 33'\ 09.''7810$ เหนือ ลองจิจูด $99^\circ\ 50'\ 20.''5654$ ตะวันออก

โครงข่ายสามเหลี่ยมที่ปรับแก้ครั้งนี้ มีทั้งหมด 53 สถานี พารามิเตอร์ 104 ค่า การวัดมี 3 ชนิดคือ การวัดมุม 221 มุม วัดระยะเส้นฐาน 2 ระยะ และการวัดแอซิมัธลาปลาส 5 ทิศทาง รายละเอียดตามข้อ 3.1, 3.2 และ 3.3

5.1 การคำนวณค่าประมาณของพารามิเตอร์

จุดประสงค์เพื่อกำหนดค่าเริ่มต้นให้กับพารามิเตอร์ เนื่องจากสมการการวัดไม่ใช่สมการเส้นตรง จำเป็นต้องรู้ค่าประมาณของพารามิเตอร์ หรือ x_0 ก่อน จึงจะคำนวณต่อไปได้

x_0 คำนวณจาก Puissant Formulars สำหรับ Direct Problem (Rapp, 1974) คือ

$$d\phi = S\cos A_{12}B - S^2\sin^2 A_{12}C - hS^2A_{12}E - (\delta\phi)^2D \quad \ldots\ldots\ 5.1$$

$$\Delta\lambda = \frac{S}{N_2}\sin A_{12}\sec\phi_2\left[1-\frac{S^2}{6N_2^2}(1-\sin^2 A_{12}\sec^2\phi_2)\right] \quad \ldots\ldots\ 5.2$$

$$dA = \Delta\lambda\sin\phi_m\sec\frac{d\phi}{2}+\frac{\Delta\lambda^3}{12}\left(\sin\phi_m\sec\frac{d\phi}{2}-\sin^3\phi_m\sec^3\frac{d\phi}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ 5.3$$

$$\phi_2 = \phi_1 + d\phi, \quad \lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda, \quad A_{21} = A_{12} + dA + 180^\circ$$

$$B = \frac{1}{M_1} \qquad E = \frac{1+3\tan^2\phi_1}{6N_1^2} \qquad e^2 = 2f - f^2$$

$$C = \frac{\tan\phi_1}{2M_1N_1} \qquad N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\phi)^{\frac{1}{2}}} \qquad h = \frac{S\cos A_{12}}{M_1}$$

$$D = \frac{3e^2\sin\phi_1\cos\phi_1}{2(1-e^2\sin^2\phi_1)} \qquad M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\phi)^{\frac{3}{2}}}$$

ค่าประมาณของการวัดมุม การวัดระยะและแอซิมัธลาปลาส (L_0) นั้น คำนวณจากค่าประมาณของพารามิเตอร์ (X_0) โดยสูตร Gauss-Mid-Latitude Formulas สำหรับ Inverse Problem (Rapp, 1974)

$$\tan\left(A_{12}+\frac{dA}{2}\right) = \frac{\cos\phi_m\sin\frac{\Delta\lambda}{2}}{\sin\frac{M_m}{2N_m}\,d\phi\cos\frac{\Delta\lambda}{2}} \quad \ldots\ldots\ 5.4$$

$$\sin\frac{S}{2N_m} = \frac{\cos\phi_m\sin\frac{\Delta\lambda}{2}}{\sin\left(A_{12}+\frac{dA}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ 5.5$$

5.2 <u>การหอนค่าการวัด</u>

จุดประสงค์ของการหอนค่าการวัดเพื่อให้ได้ค่าการวัดต่าง ๆ ที่กระทำบนผิวของโลกเป็นค่าการวัดบนผิวของสเฟียรอยด์ แต่ในทางปฏิบัติแล้วส่วนใหญ่ไม่มีข้อมูลของ Geoidal Undulation (N) และข้อมูลการเบี่ยงเบนของเส้นดิ่ง (ξ , η) เพียงพอ การหอนค่าการวัดจึงหอนเพียงผิวยีออยด์ ผลที่เกิดขึ้นคือความคลาดเคลื่อนของพารามิเตอร์ที่ได้ เนื่องจากสูตรการคำนวณปรับแก้เป็นสูตรบนผิวของสเฟียรอยด์

การหอนค่าการวัดทิศทางใช้วิธี Rapp (1974) เรื่องการหอนค่าการวัดคือ

$$D_c = D + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5.6$$

δ_1 = จำนวนแก้เพื่อทำรอยตัดนอร์มัลให้เป็นเส้นยีออเดสิก

$$= -\frac{e^2}{12}\left(\frac{S}{N_1}\right)^2 \cos^2\phi_m \sin 2A_{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5.7$$

δ_2 = จำนวนแก้เนื่องจากความสูงของที่หมายเล็ง

$$= \frac{h}{2M_m} e^2 \cos^2\phi_m \sin 2A_{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5.8$$

(h = ความสูงของที่หมายเล็งตามภาคผนวก ค.)

δ_3 = จำนวนแก้เนื่องจากการเบี่ยงเบนของเส้นดิ่ง

$$= -(\xi \sin A_{12} - \eta \cos A_{12}) \cot z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5.9$$

สำหรับ δ_3 ไม่มีการหอน เนื่องจากไม่มีข้อมูลของ N, ξ และ η

การหอนค่าของมุมใช้สูตร $A_c = A + D_1 - D_2$

เมื่อ A_c = มุมที่หอนแล้ว

A = ค่าการวัดมุม

D_1, D_2 = ค่าการหอนทิศทางทั้งสองซึ่งเป็นแขนของมุม A

การหอนค่าการวัดแอซิมัธลาปลาส จาก Rapp (1974) คือ

$$A_L = A' - (\lambda' - \lambda) \sin\phi$$

การหอนค่าการวัดระยะ มีวิธีการหอนค่าตามรายละเอียดใน Bomford (1965) ระยะที่นำมาใช้ในการปรับแก้ครั้งนี้ ได้หอนลงบนผิวยีออยด์ตามข้อ 3.3 แล้ว จึงนำมาใช้ได้ทันที

ต่อไปนี้เป็นการแสดงการหอนค่าการวัดเลขที่ 20 ซึ่งเป็นค่าการวัดมุม ทิศทางที่เกี่ยวข้องคือทิศทางจากสถานีที่ 6 ไปสถานีที่ 5 (D_{65}) และทิศทางจากสถานีที่ 6 ไปสถานีที่ 9 (D_{69})

จากการคำนวณค่าประมาณการวัดจะได้

$D_{65} = 90^\circ\ 15'\ 23.''5532$ $\qquad D_{69} = 43^\circ\ 05'\ 35.''399+$

จากภาคผนวก ค. ความสูงของสถานีที่ 5 และ 9 คือ 322.20 เมตร และ 250.65 เมตร ตามลำดับ

จากการคำนวณค่าประมาณของพารามีเตอร์จะได้

$\phi_5 = 13^\circ\ 43'\ 25''.6709$ $\quad\lambda_5 = 99^\circ\ 42'\ 46''.9597$

$\phi_6 = 13^\circ\ 43'\ 28''.6294$ $\quad\lambda_6 = 99^\circ\ 32'\ 21''.3410$

$\phi_9 = 13^\circ\ 52'\ 04''.9207$ $\quad\lambda_9 = 99^\circ\ 40'\ 35''.8798$

และจากผลการคำนวณระยะจะได้

$S_{65} = 18794.140$ เมตร

$S_{69} = 21732.181$ เมตร

แทนค่าข้อมูลเหล่านี้ลงในสมการ 5.6 จะได้ค่าการหอนทิศทางคือ

$D_{65} = -0''.0003 \qquad D_{69} = 0''.0242$

ค่าการวัดเลขที่ 20 ที่หอนแล้ว $= 47^\circ\ 09'\ 48''.152 - 0''.0003 - 0''.0242$

$= 47^\circ\ 09'\ 48''.1275$

5.3 การจัดแมทริกซ์

5.3.1 การจัดแมทริกซ์ L

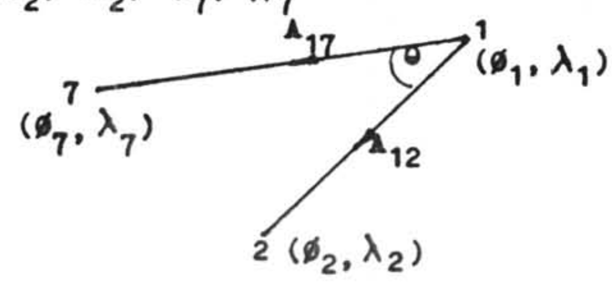
จัดจากสูตรตามข้อ 4.1 คือ $L = L_0 - L_b$ และ $L_0 = F(X_0)$

ขนาดของแมทริกซ์ $L = (228,1)$

ค่า X_0 คำนวณจากสูตร 5.1, 5.2 และ 5.3

เช่น การหาค่าองค์ที่ (1,1) ของแมทริกซ์ L ซึ่งมีพารามีเตอร์ที่เกี่ยวข้องคือ

$\phi_1, \lambda_1, \phi_2, \lambda_2, \phi_7, \lambda_7$



จากผลการคำนวณค่าประมาณของพารามิเตอร์ (X_0) ได้

$\phi_1 = 13^\circ\ 37'\ 27''.1691 \qquad \lambda_1 = 99^\circ\ 50'\ 07''.4831$

$\phi_2 = 13^\circ\ 33'\ 09''.7810 \qquad \lambda_2 = 99^\circ\ 50'\ 20''.5654$

$\phi_7 = 13^\circ\ 34'\ 31''.1994 \qquad \lambda_7 = 99^\circ\ 46'\ 16''.9957$

แทนค่า X_0 ของสถานีที่ 1, 2 และ 7 ในสูตร 5.4 และ 5.5 จะได้ค่าองค์ที่ (1,1) ของ L_0 คือ

$$\theta = A_{17} - A_{12}$$
$$= 54^\circ\ 52'\ 47''.4104$$

แต่จากสูตรข้อ 4.1 คือ $L = L_0 - L_b$

โดย $L_0 = 54^\circ\ 52'\ 47''.4104$

และ $L_b = 54^\circ\ 52'\ 46''.6895$ (ค่าการวัดมุมที่ทอนแล้ว)

จะได้องค์ที่ (1,1) ของ $L = 0''.7209$

ทำนองเดียวกันองค์อื่น ๆ ของแมทริกซ์ L ก็จะหาได้จนครบ 228 ตัว

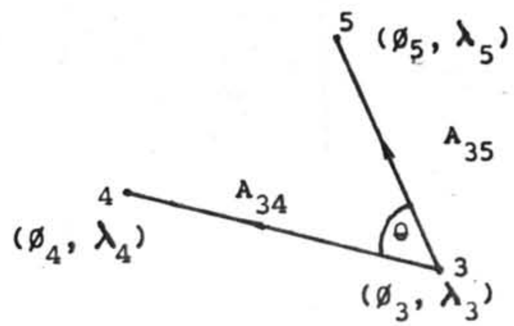
5.3.2 <u>การจัดแมทริกซ์ A</u>

ขนาดของแมทริกซ์ $A = (n, u)$

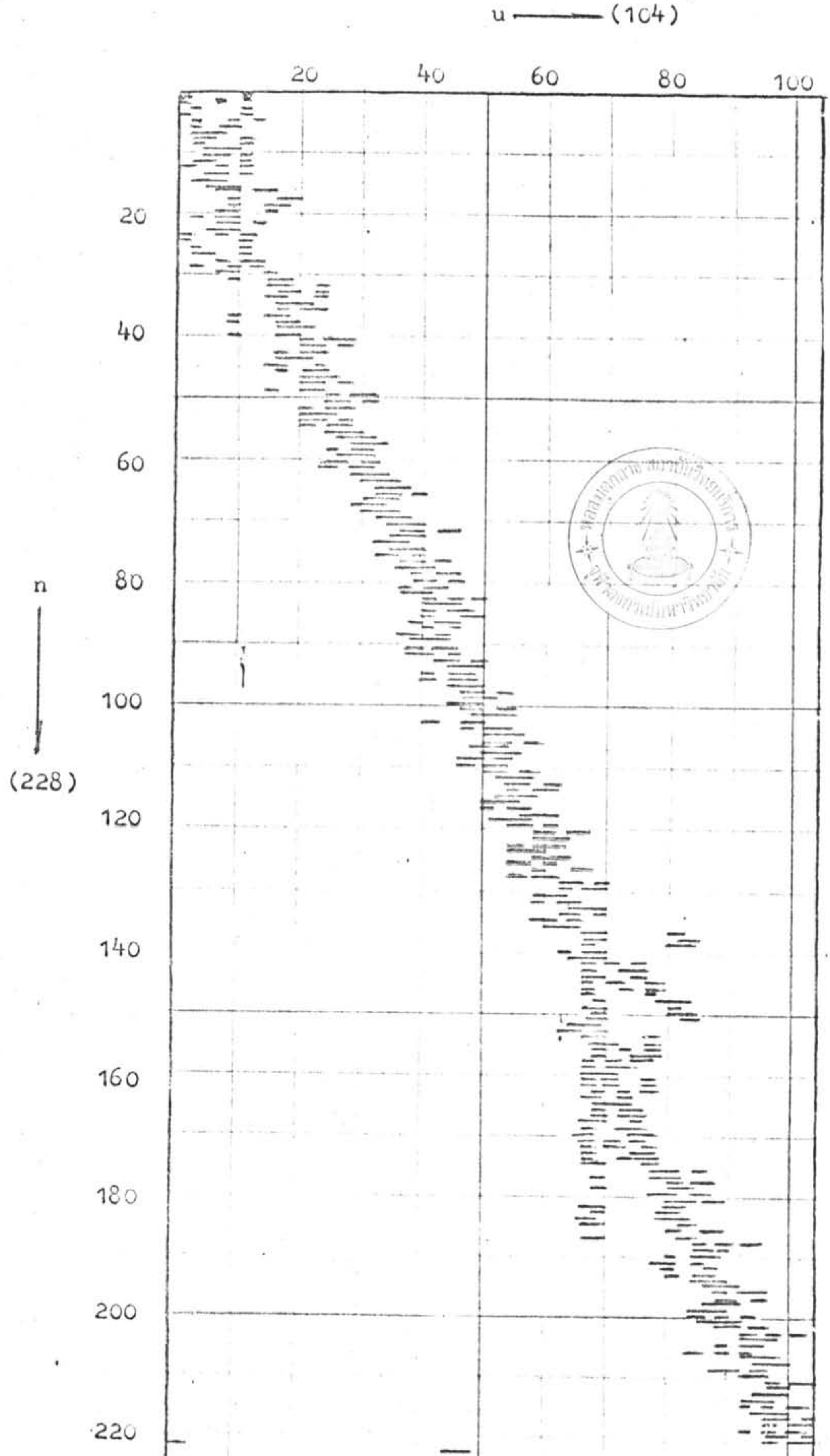
$= (228,\ 104)$

โครงสร้างแมทริกซ์ A คำนวณจากสูตร ข้อ 4.1 ปรากฏตามรูปที่ 5.1

การหาองค์ต่าง ๆ ของแมทริกซ์ A คำนวณตามสูตรในข้อ 4.1 เช่น การคำนวณแมทริกซ์ A จากสมการการวัดที่ 7 ซึ่งเป็นสมการมุม มีสถานีที่เกี่ยวข้องคือสถานีที่ 3,4 และสถานีที่ 5 มีพารามิเตอร์คือ $\phi_3, \lambda_3, \phi_4, \lambda_4, \phi_5, \lambda_5$



รูปที่ 5.1 โครงสร้างของแมทริกซ์ A



ค่าประมาณของพารามีเตอร์ (X_0) ของสถานีที่ 3,4 และ 5 คำนวณต่อเนื่องมาจากสถานีที่ 2 ซึ่งเป็นจุดแรกออก โดยใช้สูตร 5.1, 5.2 และ 5.3

ค่าประมาณของการวัด (L_0) คำนวณโดยใช้ X_0 ของสถานีที่ 3,4 และ 5 โดยใช้สูตรที่ 5.4 และ 5.5

นำค่า X_0 และ L_0 ที่ได้แทนค่าลงในสูตรข้อ 4.1 คือ

$$A = \frac{\partial F}{\partial X_a}\bigg|_{X_a = X_0}$$

และสูตรที่ 4.1 จะได้ dA_{35} และ dA_{34}

สมการอนุพันธ์ของมุม $\theta = dA_{35} - dA_{34}$

จากผลการคำนวณจะได้

สัมประสิทธิ์ของ $d\phi_3 = 0.448486 \times 10^3$

" $d\lambda_3 = 0.605058 \times 10^2$

" $d\phi_4 = -.448601 \times 10^3$

" $d\lambda_4 = -.302073 \times 10^3$

" $d\phi_5 = 0.654572 \times 10^2$

" $d\lambda_5 = 0.241567 \times 10^3$

ค่าสัมประสิทธิ์นี้คือค่าองค์ที่ (7,3), (7,4), (7,5), (7,6), (7,7) และ (7,8) ของแมทริกซ์ A ตามลำดับ สำหรับองค์อื่น ๆ ตามสมการที่ 7 นี้จะเป็นศูนย์หมด

เนื่องจากแมทริกซ์ A มีขนาดใหญ่ แต่ในแต่ละสมการจะมีองค์แมทริกซ์ A อย่างมากเพียง 6 ตัว ลักษณะของแมทริกซ์ A จึงเป็นแมทริกซ์กระจัดกระจาย (sparse matrix) เช่นรูปที่ 5.1

5.3.3 <u>การจัดแมทริกซ์น้ำหนักของการวัด</u> (P)

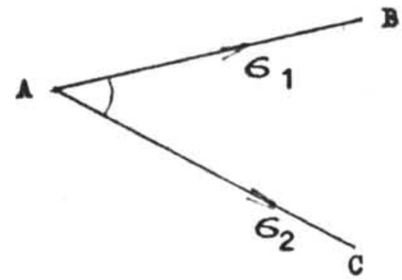
จัดตามสูตรที่ 4.4 ขนาดของ $P = (n,n)$

$= (228,228)$.

เนื่องจากแต่ละข้อมูลการวัดไม่มีความสัมพันธ์กัน (ข้อ 4.2) แมทริกซ์น้ำหนัก (P) จึงเป็นชนิดเส้นทแยง และลักษณะของ P จะเป็นชนิดผสมเพราะประกอบไปด้วยน้ำหนักของการวัดมุม การวัดแอซิมัธลาปลาสและการวัดระยะเส้นฐาน

ก. <u>การจัดน้ำหนักการวัดมุม</u>

จากข้อมูลกรมแผนที่ทหาร ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดทิศทางแต่ละครั้ง (σ) คือ 0.6 พิลิบดา และการวัดทิศทางแต่ละครั้งเป็นอิสระ



จากทฤษฎี **Propagation of error (Mikhail, 1976)** จะได้ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดมุมแต่ละครั้ง $= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \pm 2\sigma_{12}}$

โดย $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.6$ พิลิบดา

และ $\sigma_{12} = 0$ (สมมุติฐานว่าการวัดแต่ละทิศทางเป็นอิสระต่อกัน)

จะได้ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการวัดมุมแต่ละครั้ง $= \sqrt{0.36 + 0.36}$

ค่าแปรปรวนของการวัดมุมแต่ละครั้ง $= 0.72$

ค่าแปรปรวนเฉลี่ยการวัดมุม n ครั้ง $= \frac{0.72}{n}$

น้ำหนักของการวัดมุม n ครั้ง $= \frac{n}{0.72}$

น้ำหนักของการวัดมุมมีทั้งหมด 221 ค่า แต่ละค่าจัดจากจำนวนการวัดมุมหรือที่เรียกว่าจำนวนศูนย์ ฉะนั้น n ในที่นี้คือจำนวนศูนย์ของการวัดแต่ละมุม

เช่น มุมที่วัด 12 ศูนย์ น้ำหนัก $= \frac{12}{0.72} = 16.667$

" 10 " " $= \frac{10}{0.72} = 13.889$

น้ำหนักของการวัดมุมทั้ง 221 ค่า คือองค์ที่ 1 ถึงองค์ที่ 221 ของแมทริกซ์ P

ข. การจัดน้ำหนักของการวัดแอซิมัธลาปลาสและการวัดระยะ

น้ำหนักของการวัดแอซิมัธลาปลาสและการวัดระยะ คำนวณจาก **Probable Error** ซึ่งเป็นข้อมูลจากสมุดสนามของการวัด ณ สถานีลาปลาสและระยะเส้นฐาน

สูตร $P.E. = 0.6745\,\sigma$ (Bomford, 1965)

$$\sigma = \frac{P.E.}{0.6745}$$

และจากสูตร 4.4 $P = \sigma_0^2 \Sigma^{-1}_{L_b}$

จะได้น้ำหนักการวัดตัวที่ $i = \dfrac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$

เมื่อแทนค่าของ **Probable Error** ของการวัด จะได้น้ำหนักของการวัดแอซิมัธลาปลาสและระยะ นั่นคือ องค์ที่ 222 ถึง 228 ของแมทริกซ์ **P**

- การคำนวณปรับแก้ครั้งนี้ กำหนดให้ $\sigma_0^2 = 1$
- โครงสร้างของแมทริกซ์ **N** แสดงไว้ตามรูปที่ 5.2 โดยที่ **N** คำนวณจากสูตรข้อ 4.1 คือ $N = A'PA$
- ผลการปรับแก้ค่าพิกัดปรากฏอยู่ในภาคผนวก ค.

5.4 ขั้นตอนการเขียนโปรแกรม

ขั้นตอนการเขียนโปรแกรมสำหรับการคำนวณปรับแก้ในการทำวิจัยครั้งนี้ มีขั้นตอนที่สำคัญดังนี้

ก. อ่านข้อมูลการวัดทุกชนิด

ข. คำนวณค่าประมาณของพารามิเตอร์และค่าประมาณของการวัด

ค. คำนวณค่าการวัดที่ทอนลงบนผิวของยีออยด์

ง. คำนวณแมทริกซ์ **A**,**L** และแมทริกซ์ **P**

จ. คำนวณปรับแก้ค่าพิกัดของสถานีสามเหลี่ยมโดยการวนซ้ำจนได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

ฉ. บันทึกผลลัพธ์การปรับแก้ทุกชนิด

ผลของการคำนวณปรับแก้มีตามภาคผนวก ค.

รูปที่ 5.2 โครงสร้างของแมทริกซ์ N