บทที่ 4

ทฤษฎีการคำนวณปรับแก้

การคำนวณปรับแก้ในการทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้ มีทฤษฎีการคำนวณที่เกี่ยวข้องหลายทฤษฎี จะกล่าวถึงเป็นข้อ ๆ ตามลำดับความสำคัญ ทฤษฎีการคำนวณปรับแก้ที่สำคัญอันดับแรก คือ ทฤษฎีของลีสท์สแควร์

หลักการของลีสท์สแควร์ เป็นเทคนิคในการปรับแก้ข้อมูลการวัด เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ของพารามีเตอร์ที่ให้ผลการปรับแก้นั้นมีค่าของ $V'PV$ น้อยที่สุด นอกจากนั้นการปรับแก้ด้วยทฤษฎีของลีสท์สแควร์ยังให้ค่าที่เป็นเอกภาพ (unique) ของพารามีเตอร์ เมื่อจำนวนข้อมูลการวัด มีมากกว่าจำนวนของพารามีเตอร์ ในการปรับแก้โครงข่ายสามเหลี่ยมโดยหลักของลีสท์สแควร์ วิธีที่ใช้กันอยู่ทั่วไปได้แก่วิธีสมการเงื่อนไข (Condition Equation) และวิธีสมการการวัด (Observation Equation)

วิธีสมการเงื่อนไขไม่เหมาะสำหรับการปรับแก้โครงข่ายสามเหลี่ยมที่มีจำนวนสถานีมาก ๆ เพราะยุ่งยากในการจัดสมการที่เป็นอิสระต่อกัน ฉะนั้นวิธีสมการการวัดจึงถูกเลือกขึ้นใช้ในการปรับแก้ครั้งนี้ ด้วยเหตุผลพอสรุปได้ดังนี้ (Kriengkraipet, 1979)

ก. ง่ายในการจัดสมการ ไม่ว่าโครงข่ายสามเหลี่ยมจะซับซ้อนเพียงใด จึงสามารถแก้ปัญหาได้อย่างกว้างขวาง

ข. มีความยืดหยุ่นดีในการที่จะลดหรือเพิ่มข้อมูลบางตัวและการเพิ่มเงื่อนไขบังคับ

ค. ปริมาณที่ต้องการ เช่น ค่าที่ปรับแก้แล้วของพารามีเตอร์ ค่าการวัด ค่า V รวมทั้งค่าแปรปรวนและค่าแปรปรวนร่วม ก็คำนวณได้สะดวก

4.1 การคำนวณปรับแก้โดยวิธีสมการการวัด

จาก Mikhail (1976) โดยใช้สัญลักษณ์ตาม จิวาลัย (2524)

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของสมการการวัด $L_a = F(X_a)$

สมการการวัดเชิงเส้น $V = AX + L$

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_a = X_0} \quad (F = \text{สมการการวัด})$$

$$L = L_0 - L_b$$

$$L_0 = F(X_0)$$

$$X = -N^{-1}U$$

$$N = A'PA$$

$$U = A'PL$$

$$V = AX + L = Q_V PL$$

$$Q_V = P^{-1} - AN^{-1}A'$$

$$Q_X = N^{-1}$$

$$Q_{L_a} = AN^{-1}A'$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V'PV}{n-u}$$

การจัดสมการการวัดให้ถือว่า แอซิมัธนับจากทิศเหนือไปตามเข็มนาฬิกาเป็นบวก ลองจิจูดไปทางทิศตะวันออกของกรีนิชเป็นบวก สมการทุกสมการทำให้เป็นเชิงเส้นในรูปของ $V = AX + L$ เครื่องหมาย subscripts 1 และ 2 หมายถึงสถานีที่วัดและสถานีที่หมายเล็งตามลำดับ

4.1.1 <u>การจัดสมการมุม</u> จัดจากสมการการวัดทิศทาง เพราะว่าผลต่างของทิศทางสองทิศทางคือมุมระหว่างทิศทางทั้งสองนั้น จาก Rapp (1974)

การจัดสมการการวัดทิศทาง $v = (A_{i_0} - A_i) + dA_{12t}$ -------- 4.1

โดยที่ $A_i = (A_{I_0} + Z) + (D_i - D_I)$

$$dA_{12t} = \frac{1}{m}\left[M_2 \sin A_{21} d\phi_2 + M_1 \sin A_{12} \frac{dm}{ds} d\phi_1 - N_2 \cos\phi_2 \cos A_{21}(d\lambda_2 - d\lambda_1)\right]$$

$$\frac{dm}{ds} = -\frac{N_1 \cos\phi_1 \cos A_{12}}{N_2 \cos\phi_2 \cos A_{21}} + \frac{m \tan\phi_2}{N_2 \cos A_{21}}$$

$$m = R\sin\frac{S}{R} - \frac{RCl}{3}\left(\frac{S}{R}\right)^2$$

$$C = \frac{-e'^2 \sin 2\phi}{2}, \quad l = \cos\alpha$$

การจัดสมการมุม จัดจากผลต่างของสมการของการวัดทิศทาง (สมการ 4.1) โดยมีรูปแบบตามรูปที่ 4.1 คือ $v_{\theta_j} = v_{jk} - v_{ji}$

โดยที่ v_{θ_j} = สมการมุม θ_j

v_{jk} , v_{ji} = สมการการวัดทิศทางที่คำนวณจากสมการ 4.1

- ค่าประมาณของพารามีเตอร์ (X_0) คือค่าประมาณของพิกัดของสถานีสามเหลี่ยมได้แก่ ϕ_1, λ_1 . . . . . ϕ_i, λ_i โดยที่ i = 1, ... 53

- ค่า X_0 ได้จากการคำนวณต่อเนื่องจากจุดแรกออก โดยใช้สูตร Puissant สำหรับ Direct Problem (Rapp, 1974)

- ค่าประมาณของการวัด (L_0) คือ แอซิมัธ และระยะเส้นฐานได้จากการคำนวณจาก X_0 โดยใช้สูตร Gauss - Mid - Latitude สำหรับ Inverse Problem (Rapp, 1974)

- ทั้งค่าประมาณของพารามีเตอร์ (X_0) และค่าประมาณของการวัด (L_0) มีค่าใกล้เคียงกันและการปรับแก้ตามภาคผนวก ค.

การคำนวณสมการมุม เช่น สมการที่ 20 มีดังนี้

ค่าประมาณของพารามิเตอร์ (X_0) คือค่าพิกัดของสถานีสามเหลี่ยม โดยมีสถานีที่เกี่ยวข้องคือสถานีที่ 5, 6 และ 9 จากผลการคำนวณ

จะได้ $\phi_5 = 13^\circ\ 43'\ 25''.6709 \qquad \lambda_5 = 99^\circ\ 42'\ 46''.9597$

$\phi_6 = 13^\circ\ 43'\ 28''.6294 \qquad \lambda_6 = 99^\circ\ 32'\ 21''.3410$

$\phi_9 = 13^\circ\ 52'\ 04''.9207 \qquad \lambda_9 = 99^\circ\ 40'\ 35''.8798$

ค่าประมาณของการวัดมุม (L_0) ของสมการที่ 20 จากผลการคำนวณ

จะได้ $= 47^\circ\ 09'\ 48''.1538$

ค่าการวัดมุมที่ทอนแล้ว (L_b) ของสมการที่ 20 $= 47^\circ\ 09'\ 48''.1275$

ค่าการวัดทิศทาง $A_{69} = 43^\circ\ 05'\ 35''.3994$ (คำนวณจาก X_0)

ค่าการวัดทิศทาง $A_{65} = 90^\circ\ 15'\ 23''.5532$ (คำนวณจาก X_0)

แทนค่าข้อมูลที่ได้ลงในสมการ 4.1 จะได้ $V_{20} = 0''.3594$

4.1.2 <u>การจัดสมการระยะ</u> จาก Rapp (1974)

$$V = S_0 - S_{L_b} + dS_t \qquad \text{------------} \qquad 4.2$$

โดยที่ S_0 = ค่าประมาณของระยะ คำนวณโดยใช้สูตร Gauss - Mid - Latitude สำหรับ Inverse Problem (Rapp, 1974) โดยใช้ค่าประมาณของพารามิเตอร์

S_{L_b} = ค่าระยะที่วัด

dS_t = ค่าระยะจากสูตรอนุพันธ์

$$dS_t = -M_2\cos A_{21}d\phi_2 - M_1\cos A_{12}d\phi_1 - N_2\cos\phi_2\sin A_{21}(d\lambda_2 - d\lambda_1)$$

การคำนวณสมการระยะ เช่น สมการที่ 228 มีดังนี้

ค่าประมาณของพารามิเตอร์ (x_0) ที่เกี่ยวข้อง จากผลการปรับแก้คือ

$$\phi_{37} = 18^\circ \ 17' \ 03''.6248 \qquad \lambda_{37} = 99^\circ \ 27' \ 53''.3448$$

$$\phi_{38} = 18^\circ \ 20' \ 02''.7430 \qquad \lambda_{38} = 99^\circ \ 22' \ 27''.2446$$

ค่าประมาณของการวัดระยะ (s_0) ของสมการที่ 228 จากผลการคำนวณ

จะได้ = 11045.561 เมตร

แทนค่าข้อมูลที่ได้ลงในสมการ 4.2 จะได้ v_{228} = 0.000 เมตร

4.1.3 <u>การจัดสมการแอซิมัธลาปลาส</u> จาก Rapp(1974)

$$V = A_0 - (A_L + dA_L) + dA_{12t} \qquad \text{---------} \qquad 4.3$$

โดยที่ $A_L = A' - (\lambda_1' - \lambda_1)\sin\phi_1$

$dA_L = d\lambda_1 \sin\phi_1$

A_0 = ค่าประมาณของแอซิมัธ (คำนวณจากค่าประมาณของพารามิเตอร์)

การคำนวณสมการแอซิมัธลาปลาส เช่น สมการที่ 223 มีดังนี้

ค่าประมาณของพารามิเตอร์ (x_0) ที่เกี่ยวข้อง จากผลการปรับแก้ คือ

$$\phi_{30} = 17^\circ \ 08' \ 59''.5860 \qquad \lambda_{30} = 98^\circ \ 50' \ 52''.2698$$

$$\phi_{32} = 17^\circ \ 38' \ 07''.1590 \qquad \lambda_{32} = 98^\circ \ 59' \ 26''.0143$$

ค่าประมาณของแอซิมัธ (A_0) ของสมการที่ 223 จากผลการคำนวณ

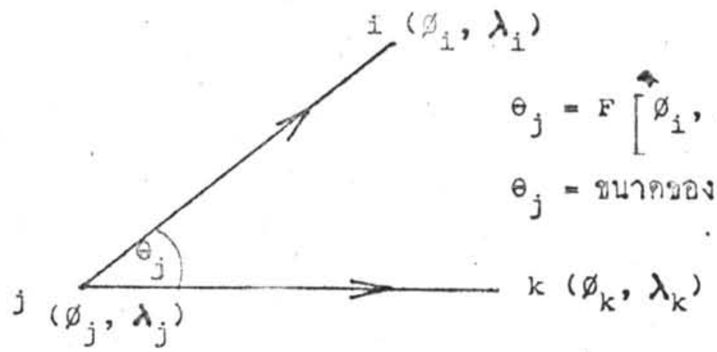
จะได้ = $358^\circ \ 49' \ 41''.6875$

แทนค่าข้อมูลที่ได้ลงในสมการ 4.3 จะได้ v_{223} = $0''.1196$

4.2 <u>แมทริกซ์น้ำหนัก</u>

น้ำหนักของข้อมูลในการวัดเป็นตัวชี้ความสำคัญแห่งการวัดนั้น ๆ การปรับแก้โดยลีสท์สแควร์ แม้จะไม่จำเป็นต้องรู้ถึงลักษณะการแจกแจงความถี่ของความคลาดเคลื่อนของข้อมูล

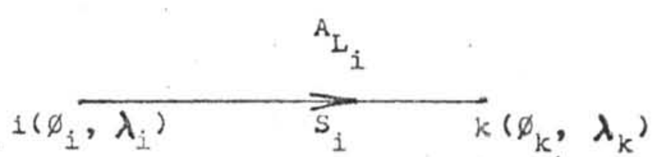
รูปที่ 4.1 รูปแบบทั่วไปของการจัดสมการการวัด



$\theta_j = F\left[\phi_i, \lambda_i, \phi_j, \lambda_j, \phi_k, \lambda_k\right]$

θ_j = ขนาดของมุมที่ j

ก. การจัดสมการมุม



ข. การจัดสมการระยะและอาปลาสแอซิมัธ

$S_i = F\left[\phi_i, \lambda_i, \phi_k, \lambda_k\right]$

$A_{L_i} = F\left[\phi_i, \lambda_i, \phi_k, \lambda_k\right]$

S_i = ขนาดของระยะระหว่างสถานี i และ k

A_{L_i} = ค่าแอซิมัธลาปลาสจาก i ไป k

เหล่านั้นอย่างละเอียดก็ตาม แต่เพื่อ การวิเคราะห์ทางสถิติของผลการปรับแก้ จึงต้องสมมุติให้ว่าข้อมูลต่าง ๆ มีการแจกแจงแบบปกติ (normal distribution)

เราต้องรู้น้ำหนักของการวัดแต่ละข้อมูลและความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่าง ๆ จึงจะจัดแมทริกซ์น้ำหนักได้ ในทางปฏิบัติแล้ว ลักษณะของแมทริกซ์น้ำหนักมักจะให้เป็นเส้นทแยงมุม โดยถือว่าแต่ละข้อมูลไม่มีความสัมพันธ์กัน เพียงแต่รู้ค่าแปรปรวนของการวัดแต่ละข้อมูล ก็สามารถจะสร้างแมทริกซ์น้ำหนักได้

รูปแบบของแมทริกซ์น้ำหนัก จะได้ (Mikhail, 1976)

$$P = \sigma_0^2 \sum\nolimits_{L_b}^{-1} \qquad \text{------------} \quad 4.4$$

4.3 การทดสอบทางสถิติ

การตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้จากการปรับแก้โดยหลักลีสท์สแควร์นั้น สามารถทำได้โดยการทดสอบทางสถิติ เพื่อดูว่าผลลัพธ์ที่ได้นั้นอยู่ในเกณฑ์หรือไม่ ถ้าหากผลลัพธ์ไม่เป็นที่น่าพอใจแสดงว่าอาจมีผลจากสาเหตุต่าง ๆ ดังนี้ (Kriengkraipet, 1979)

ก. อาจเกิดจากการจัดรูปจำลองคณิตศาสตร์ไม่เหมาะสม

ข. อาจมีความผิดพลาดในการคำนวณ

ค. เงื่อนไขบังคับที่ใช้อาจไม่ดีพอ

ง. อาจเกิดจากผลของการยอมให้ตัดเทอมท้าย ๆ ของอนุกรมทางคณิตศาสตร์ออก

จ. น้ำหนักการวัดอาจไม่เหมาะสม

ฉ. อาจมีความผิดพลาดขณะวัดค่า

การทดสอบทางสถิติในการวิจัยครั้งนี้มีจุดประสงค์ 2 ประการ คือ การทดสอบค่าแปรปรวน และการทดสอบเพื่อหา blunder

4.3.1 <u>การทดสอบค่าแปรปรวน</u> เพื่อตรวจ consistency ของข้อมูลทั้งหมดที่นำมาปรับแก้ วิธีการทดสอบที่ใช้คือ ไคสแควร์ (Chi-square) ซึ่งเป็นการทดสอบสำหรับ

ค่าแปรปรวนโดยตรง วิธีการทดสอบมีดังนี้ (Hamilton, 1964)

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2$$

คำนวณค่าสถิติที่จะใช้ทดสอบจากสูตร

$$\chi_r^2 = \frac{r\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$$ เมื่อ r = degree of freedom = n-u

ปฏิเสธสมมุติฐานที่ระดับความมีนัยสำคัญ α ถ้า

$$\chi_r^2 > \chi_{\frac{\alpha}{2},r}^2$$

หรือ $\chi_r^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2},r}^2$

4.3.2 <u>การทดสอบเพื่อหา blunder</u> จุดประสงค์เพื่อตรวจ blunder ที่อาจมีในการวัดค่า การทดสอบนี้ใช้วิธีของ Baarda (1968) เนื่องจากสามารถควบคุม Type I และ Type II errors ในเวลาพร้อมกัน ทั้งยังมีโนโมแกรมใช้ได้สะดวก (Kriengkraipet, 1979)

<u>Test I</u> $H_0 : L_b \sim N\left[E(L_b), \Sigma_{L_b}\right]$

$H_1 : L_b = E(L_b) + \Delta L_b \,, \Delta L_b \neq 0$

คำนวณค่าสถิติที่จะใช้ทดสอบจากสูตร $F_r = \dfrac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$

ปฏิเสธ H_0 เมื่อ $F_r \geq F_{1-\alpha;\, r,\infty}$

<u>Test II</u> (ปฏิบัติเมื่อ H_0 ใน Test I ถูกปฏิเสธ)

คำนวณค่าสถิติที่จะใช้ทดสอบจากสูตร $w_i = \left|\dfrac{v_i}{\sigma_{v_i}}\right|$

ถ้า $w_i \geq F^{1/2}_{1-\alpha_0,\ 1,\ \infty}$ แสดงว่าค่าการวัดที่ i อาจเป็น blunder

4.4 วงรีความคลาดเคลื่อน (Error Ellipse)

เมื่อการปรับแก้เสร็จ ทฤษฎีวงรีความคลาดเคลื่อน จะมีประโยชน์มากในการวิเคราะห์ค่าแปรปรวนและแปรปรวนร่วมของพารามีเตอร์ในระบบสองมิติ หรือ XY - plane โดยการพิจารณาจากรูปวงรี ตามค่าที่คำนวณได้ เพราะรูปร่างและขนาดของวงรีความคลาด-เคลื่อนจะเป็นอย่างไร ขึ้นอยู่กับค่าของ σ_x^2, σ_y^2 และ σ_{xy} ถ้าจะพิจารณาเพียง σ_x^2 หรือ σ_y^2 ไม่สามารถที่จะให้ข้อมูลเกี่ยวกับความแน่นอนของพารามีเตอร์ได้พอ ผลแห่งการวิเคราะห์ยังช่วยในการตัดสินใจปัญหาต่าง ๆ ของงานโครงข่ายสามเหลี่ยมได้อย่างเหมาะสมเพียงใช้สายตาในการพิจารณา เช่น ปัญหาการเลือกจุดออกงานและจุดเข้าบรรจบของงานวงรอบ การเลือกสถานีการวัดแอซิมัธลาปลาส เป็นต้น

จากทฤษฎีวงรีความคลาดเคลื่อน (Mikhail, 1976)

$$c^2 = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]$$

σ_x, σ_y = ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานตามแนวแกน x และ y ตามลำดับ

ρ = สัมประสิทธิ์ของสหสัมพันธ์ระหว่าง σ_x และ σ_y

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_0^2 q_{xx}$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_0^2 q_{yy}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_0^2 q_{xy}$$

ถ้ากำหนดให้จุดกำเนิดของ xy - plane ทับกับจุดศูนย์ร่วมของวงรีที่จุด (x = 0, y = 0) จะได้ c = 1 เรียกว่าวงรีมาตรฐาน

จากทฤษฎีของ orthogonal transformation และจากทฤษฎีของ propagation of error (Mikhail, 1976)

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{-2\,\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}\right]$$

โดย θ = ขนาดของมุมที่เปลี่ยนไปจากแกน xy - plane ไปเป็นแกน uv - plane

σ_{xx} = ค่าแปรปรวนในแนวแกน x

σ_{yy} = ค่าแปรปรวนในแนวแกน y

σ_{xy} = ค่าแปรปรวนร่วมระหว่าง σ_{xx} และ σ_{yy}

จากทฤษฎีของวงรีความคลาดเคลื่อน (Mikhail, 1976) จะได้

$$a = \sigma_x \sin\theta + \sigma_y \cos\theta$$

และ $$b = \sigma_x \cos\theta - \sigma_y \sin\theta$$

โดย a = กึ่งแกนยาวของวงรีความคลาดเคลื่อนตามแนวแกน v

b = กึ่งแกนสั้นของวงรีความคลาดเคลื่อนตามแนวแกน u

σ_x = ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานตามแนวแกน x

σ_y = ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานตามแนวแกน y

วงรีความคลาดเคลื่อนสามารถพล็อตได้ด้วยขนาดของ θ, a และ b เมื่อทราบค่า σ_{xx}, σ_{yy} และ σ_{xy}

4.5 การหยุด iteration

จุดประสงค์เพื่อประหยัดเวลาและค่าใช้จ่ายของเครื่องคำนวณขณะที่ทำการคำนวณปรับแก้ เนื่องจากการคำนวณปรับแก้ตามวิธีสมการการวัดจะมีการคำนวณวนซ้ำ โดยการนำเอาค่าผลลัพธ์ของพารามิเตอร์ที่คำนวณได้ไปใช้เป็นค่าประมาณของพารามิเตอร์ในรอบใหม่

เพื่อให้ได้ค่าพารามีเตอร์ที่ถูกต้องยิ่งขึ้น การคำนวณวนซ้ำจะหยุดเมื่อผลลัพธ์ได้ converge สู่เกณฑ์กำหนด หลักเกณฑ์ที่จะหยุดการคำนวณซ้ำสำหรับการปรับแก้ครั้งนี้ตาม Mikhail (1976)

ก. อัตราการเปลี่ยนของพารามีเตอร์ที่มากที่สุด <0.0001 ฟิลิปดา

ข. จำนวนรอบการคำนวณวนซ้ำไม่เกิน 5 รอบ