บทที่ 1

บทนำและทฤษฎี

หอสมุดกลาง จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

1.1 บทนำ

ในปัจจุบันการศึกษาคุณสมบัติทางฟิสิกส์ที่อุณหภูมิต่ำ ๆ มีความสำคัญเพราะทำให้พบปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่น่าสนใจ เช่นสภาพนำยิ่งยวด (superconductivity) และของไหลยิ่งยวด (superfluid) เป็นต้น นอกจากนี้การศึกษาที่อุณหภูมิต่ำ ๆ ยังเป็นการยืนยันทฤษฎีฟิสิกส์สมัยใหม่ ที่อุณหภูมิต่ำ ๆ การสั่นสะเทือนของอะตอมของของแข็งเนื่องจากอุณหภูมิเกือบจะไม่มี. การประพฤติตัวของอิเลกตรอนจะทำให้เราเห็นปรากฏการณ์บางอย่างซึ่งเราไม่มีโอกาสเห็นที่อุณหภูมิสูง ตัวอย่างเช่นปรากฏการณ์ de Haas van Alphen หรือ cyclotron resonance เราสามารถทดสอบความถูกต้องของทฤษฎีฟิสิกส์ควอนตัมกับปรากฏการณ์เหล่านี้ได้ก็โดยการทดลองที่อุณหภูมิต่ำ ๆ เท่านั้น ดังนั้นจึงเป็นการดีที่เราจะเริ่มศึกษาการวิจัยที่อุณหภูมิต่ำ ๆ ขึ้น อย่างไรก็ตามอุณหภูมิต่ำ ๆ ที่กล่าวข้างบนในการทดลองมักจะต่ำจนถึงอุณหภูมิของฮีเลียมเหลว ($4^{\circ}K$) หรือต่ำกว่านี้และเป็นที่น่าเสียดายว่าในประเทศไทยยังไม่มีฮีเลียมเหลวเพื่อใช้ในการทดลอง ดังนั้นในการวิจัยครั้งนี้เราจึงทำเพียงที่อุณหภูมิของไนโตรเจนเหลว ($77^{\circ}K$) เท่านั้น

เนื่องจากการวิจัยที่อุณหภูมิต่ำ ๆ ครั้งนี้เป็นครั้งแรกในแผนก ดังนั้นจุดประสงค์ที่สำคัญในการวิจัยคือศึกษาและพัฒนาเทคนิคที่อุณหภูมิต่ำ ๆ โดยพยายามหาวัสดุและอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่มีอยู่ในบ้านเรามาใช้ เช่นภาชนะใส่ไนโตรเจนเหลวขณะทดลอง และศึกษาการสร้างจุดสัมผัส (point contact) กับสารตัวอย่าง ซึ่งจะต้องทดลองใช้ได้ทั้งที่อุณหภูมิห้องและอุณหภูมิ $77^{\circ}K$ โดยที่อุณหภูมิทั้งสองต่างกันมากกว่า $200^{\circ}C$ เป็นเหตุให้สารตัวอย่างและวัสดุที่ใช้สร้างภาชนะใส่สารตัวอย่างหดตัวก่อให้เกิดปัญหามาก ในการสร้างจุดสัมผัสกับสารตัวอย่างต้องใช้วัสดุและวิธีการที่เหมาะสมจึงสามารถแก้ปัญหานี้ได้ รายละเอียดต่าง ๆ ได้กล่าวไว้ในบทที่ 3

นอกจากนี้จุดประสงค์ที่สำคัญอีกประการหนึ่งคือศึกษาผลที่ได้จากการวัดเปรียบเทียบกับทฤษฎีดังกล่าวแล้วข้างบน

การวิจัยแบ่งเป็น 2 เรื่องใหญ่ ๆ คือการวัดค่าความหนาแน่นของพาหะของสารกึ่งตัวนำกับโลหะ นอกจากนี้ยังเปรียบเทียบค่าเวลาผ่อนคลาย (relaxation time) ของโลหะระหว่างอุณหภูมิห้องกับอุณหภูมิ $77^{\circ}K$ และการวัดค่าสภาพนำความร้อนของฉนวน สารตัวอย่างที่ใช้วัดค่าความหนาแน่นของพาหะคือซิลิกอน สารกึ่งตัวนำและทองแดงโดยอาศัยปรากฏการณ์ของฮอล (Hall effect) กล่าวคือเมื่อให้กระแสไฟฟ้าไหลผ่านสารตัวอย่างในทิศ x และมีสนามแม่เหล็กในทิศ Y แล้วจะเกิดความต่างศักย์ในทิศ z ของสารตัวอย่าง ซึ่งเรียกว่าความต่างศักย์ฮอล (Hall voltage) วัดค่าความต่างศักย์ฮอลที่ความเข้มสนามแม่เหล็กหลาย ๆ ค่าแล้วเขียนกราฟระหว่างความเข้มสนามแม่เหล็กและความต่างศักย์ฮอล จากความชันของกราฟกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านสารตัวอย่างและขนาดของสารตัวอย่าง สามารถนำไปคำนวณหาค่าความหนาแน่นของพาหะของสารตัวอย่างได้ และจากการวัดค่าความต่างศักย์ที่จุดสองจุดของสารตัวอย่างเราสามารถวัดสภาพนำไฟฟ้าของสารนั้นได้ การทดลองที่กล่าวมานี้ทำทั้งที่อุณหภูมิห้องและที่ $77^{\circ}K$ จากข้อมูลที่ได้จากข้างบนเราจะสามารถศึกษาการเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นของพาหะและเวลาผ่อนคลายไปกับอุณหภูมิ จากนั้นเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการทดลองเหล่านี้กับทฤษฎีได้ตามต้องการ

สำหรับการวัดค่าสภาพนำความร้อนของสาร วัตถุที่ใช้ในการทดลองคือกระจกใสและพลาสติกสี่เหลี่ยมบาง ๆ ที่มีความหนาสม่ำเสมอ เราสอดวัสดุนี้ระหว่างแผ่นให้ความร้อนและดูดความร้อน (heat source and heat sink) ซึ่งบรรจุอยู่ในกล่องที่สูบอากาศออกเพื่อป้องกันการพาความร้อนจากการวัดอุณหภูมิที่ผิวทั้งสองของสารตัวอย่าง เราสามารถคำนวณสภาพนำความร้อนของสารตัวอย่างที่อุณหภูมิต่าง ๆ ได้

จากการทดลองนี้เราจะทราบการเปลี่ยนแปลงของสภาพนำความร้อนของสารต่าง ๆ ไปกับอุณหภูมิ สามารถนำไปเทียบเพื่อทดสอบความถูกต้องของทฤษฎีที่มีอยู่เดิมได้ นอกจากนั้นเรายังสามารถนำเครื่องมือนี้ไปวัดสภาพนำความร้อนของสารต่าง ๆ ที่เราต้องการทราบได้ตามต้องการ ซึ่งค่าเหล่านี้เป็นสิ่งที่เราจะต้องทราบเมื่อเราต้องการจะใช้วัสดุเหล่านี้ในการใช้งาน

รายละเอียดเกี่ยวกับการวัดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องจะกล่าวโดยละเอียดต่อไป

1.2 สมการโบล์ทซมาน (Boltzmann equation)

ปรากฏการณ์การเคลื่อนย้ายสามารถอธิบายได้ด้วยสมการโบล์ทซมาน ซึ่งจะได้กล่าวรายละเอียดต่อไป ก่อนอื่นเราควรทราบว่าปรากฏการณ์การเคลื่อนย้ายคืออะไร การเคลื่อนที่ของพาหะเนื่องจากอิทธิพลของแรงภายนอกหรือเกรเดียนท์ของความหนาแน่น (density gradient) เรียกว่าปรากฏการณ์การเคลื่อนย้าย (transport phenomena) เช่นการนำไฟฟ้าและการนำความร้อน ในกรณีการนำไฟฟ้าพาหะที่เคลื่อนย้ายประจุไฟฟ้าคืออิเลกตรอนอิสระหรือโฮล (hole) และในกรณีการนำความร้อนถ้าเป็นโลหะพาหะส่วนมากที่เป็นตัวพาพลังงานความร้อนคืออิเลกตรอนอิสระ สำหรับฉนวนพาหะที่เคลื่อนย้ายพลังงานความร้อนคือโฟนอน (phonon) การเคลื่อนที่ของพาหะเหล่านี้ถูกกระเจิงได้จากโฟนอน อสุทธิอะตอม (impurity atoms) และการผิดปกติของแลททิส (lattice defects) เป็นต้น ทำให้เกิดสภาพต้านทาน (resistivity) ขึ้น ในการพิจารณาปัญหาเหล่านี้เราจะพิจารณาในกรณีที่สนามภายนอกมีค่าคงที่เท่านั้น

ให้ $f_k(\vec{r}, t)\, d\vec{k}d\vec{r}$ คือความหนาแน่นของพาหะในบริเวณ $d\vec{k}$ ในระวางที่ k(k - space)และในบริเวณ $d\vec{r}$ ในระวางที่จริง (real space) $f_k(\vec{r})$ จะมีค่าเปลี่ยนไปตามเวลาด้วยเหตุ 3 ประการคือ

1) การฟุ้งกระจาย (Diffusion) คือการที่พาหะเคลื่อนที่เข้าหรือออกจากบริเวณ $\vec{r}$ สมมุติว่าความเร็วของพาหะที่มีเวคเตอร์คลื่น (wave vector) $\vec{k}$ คือ $\vec{v}_k$ เมื่อเวลาผ่านไป t พาหะนี้เคลื่อนที่ไปได้ระยะทาง $\vec{v}_k t$ จากทฤษฎีของหลุยส์วิล (Liouville's theorem) จำนวนพาหะในบริเวณรอบ ๆ $\vec{r}$ ที่เวลา t มีค่าเท่ากับจำนวนพาหะในบริเวณรอบ ๆ $\vec{r} - \vec{v}_k t$ ที่เวลา $t = 0$ นั่นคือ

$$f_k(\vec{r}, t) = f_k(\vec{r} - \vec{v}_k t, 0) \qquad (1.2.1)$$

ให้ $\left.\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|_d$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ f_k เนื่องจากการฟุ้งกระจาย จากสมการ (1.2.1) เราได้

$$\left.\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|_d = \frac{\partial f_k}{\partial t}(\vec{r} - \vec{v}_k t \ , \ 0)$$

$$= \frac{\partial f_k}{\partial(\vec{r}-\vec{v}_k t)} \frac{\partial(\vec{r}-\vec{v}_k t)}{\partial t}$$

$$= - \vec{v}_k \frac{\partial f_k}{\partial \vec{r}} \qquad (1.2.2)$$

2) สนามภายนอก (External field) ทำให้พาหะมีเวคเตอร์คลื่น $\vec{k}$ เปลี่ยนไปด้วยอัตรา

$$\dot{\vec{k}} = \frac{e}{\hbar}(\vec{E} + \vec{v}_k \times \vec{B}) \qquad (1.2.3)$$

เราสามารถมองดูเหมือนกับว่าเป็นความเร็วของพาหะในระวางที่ k เดิมพาหะมีเวคเตอร์คลื่น $\vec{k}$ เมื่อใส่สนามภายนอกไว้จนกระทั่งเวลาผ่านไป t พาหะจะมีเวคเตอร์คลื่นเป็น $\vec{k} - \dot{\vec{k}}t$ คิดคล้ายกับสมการ (1.2.1) เราได้

$$f_k(\vec{r}, t) = f_{k-\dot{k}t}(\vec{r}, 0) \qquad (1.2.4)$$

ให้ $\left.\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|_f$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ f_k เนื่องจากสนามภายนอก จากสมการ (1.2.4) เราได้

$$\left.\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|_f = \frac{\partial f_{k-\dot{k}t}}{\partial t}$$

$$= -\dot{\vec{k}} \frac{\partial f_k}{\partial \vec{k}}$$

$$= - \frac{e}{\hbar}(\vec{E} + \vec{v}_k \times \vec{B}) \frac{\partial f_k}{\partial \vec{k}} \qquad (1.2.5)$$

3) การกระเจิง (Scattering) การกระเจิงของพาหะอาจเนื่องจากสาเหตุต่าง ๆ หลายประการ ผลของการกระเจิงนี้ยุ่งยากมาก ในที่นี้คิดว่าส่วนมากเป็นการกระเจิงแบบยืดหยุ่น จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f_k เนื่องจากการกระเจิงว่า

$$\left.\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|_s = \int \left[f_{k'} (1-f_k) - f_k (1-f_{k'}) \right] Q(\vec{k},\vec{k}')\, d\vec{k}' \qquad (1.2.6)$$

การกระเจิงจากสภาวะ $\vec{k}$ ไปยังสภาวะ $\vec{k}'$ เป็นการลดค่า f_k ความน่าจะเป็นของการกระเจิงแบบนี้ขึ้นกับจำนวนพาหะในสภาวะ $\vec{k}$ คือ f_k และจำนวนที่ว่างที่ยังอยู่ได้ในสภาวะ $\vec{k}'$ คือ $(1 - f_{k'})$ ในทำนองเดียวกันก็มีการกระเจิงจากสภาวะ $\vec{k}'$ มายังสภาวะ $\vec{k}$ ด้วยเป็นการเพิ่มค่า f_k $Q(\vec{k}, \vec{k}')$ คือความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสภาวะซึ่งมีค่าเหมือนกันไม่ว่าจะเปลี่ยนจากสภาวะ $\vec{k}$ ไปยัง $\vec{k}'$ หรือจากสภาวะ $\vec{k}'$ มายัง $\vec{k}$

สมการของโบล์ทซมานกล่าวว่าที่จุดใด ๆ และค่าเวคเตอร์คลื่น $\vec{k}$ ใด ๆ ผลรวมของอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f_k มีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\left.\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|_s + \left.\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|_f + \left.\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|_d = 0 \qquad (1.2.7)$$

สมการ (1.2.7) แสดงว่า f_k อยู่ในสภาวะสเทดดี (steady state) สภาวะนี้ไม่ใช่สภาวะสมดุลย์ (equilibrium state) เพราะสภาวะสมดุลย์เป็นสภาวะที่ไม่มีสนามจากภายนอกและไม่มีเกรเดียนท์ของอุณหภูมิซึ่งแทนได้ด้วย f_k^o ถ้าเราแทนค่าสมการ (1.2.2) และ (1.2.5) ในสมการ (1.2.7) จะได้

$$-\vec{v}_k \frac{\partial f_k}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{\hbar} (\vec{E} + \vec{v}_k \times \vec{B}) \frac{\partial f_k}{\partial \vec{k}} = -\left.\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|_s \qquad (1.2.8)$$

ในสภาวะใกล้สมดุลย์ f_k จะต่างจาก f_k^o ไม่มากนัก ในกรณีนี้เราให้

$$g_k = f_k - f_k^o \qquad (1.2.9)$$

เมื่อ g_k มีค่าน้อย ๆ จากฟังก์ชั่นการแจกแจงของเฟอร์มี-ไดแรค (Fermi - Dirac distribution function) เราได้

$$f_k^o = \frac{1}{\exp\left[(\varepsilon_k - \zeta)/k_B T\right] + 1} \qquad (1.2.10)$$

$$= f^o(\varepsilon_k)$$

ดิฟเฟอเรนชิเอตสมการ (1.2.9) เทียบกับ $\vec{r}$ จะได้

$$\frac{\partial g_k}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial f_k}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial f_k^o}{\partial \vec{r}} \qquad (1.2.11)$$

พิจารณาเทอม $\frac{\partial f_k^o}{\partial \vec{r}}$, $\frac{\partial f_k^o}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left[\frac{1}{\exp\left[(\varepsilon_k - \zeta)/k_B T\right] + 1}\right]$

เนื่องจาก ζ และ T เป็นฟังก์ชั่นของ $\vec{r}$ ในสมการข้างบนเราได้

$$\frac{\partial f_k^o}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial f_k^o}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial f_k^o}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \vec{r}}$$

แต่

$$\frac{\partial f_k^o}{\partial \zeta} = \frac{1}{\left[\exp\left[(\varepsilon_k - \zeta)/k_B T\right] + 1\right]^2} \exp\left[(\varepsilon_k - \zeta)/k_B T\right] \left(-\frac{1}{k_B T}\right)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla}\zeta$$

$$\frac{\partial f_k^o}{\partial T} = -\frac{1}{\left[\exp\left[(\varepsilon_k - \zeta)/k_B T\right] + 1\right]^2} \exp\left[(\varepsilon_k - \zeta)/k_B T\right] \left(\frac{\varepsilon_k - \zeta}{k_B}\right)\left(-\frac{1}{T^2}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla} T$$

ดังนั้น
$$\frac{\partial f_k^o}{\partial \vec{r}} = - \frac{\exp\left[(\varepsilon_k - \zeta)/k_B T\right]}{\left[\exp\left[(\varepsilon_k - \zeta)/k_B T\right] + 1\right]^2} \left(-\frac{1}{k_B T}\right) \left[\vec{\nabla}\zeta + \frac{\varepsilon_k - \zeta}{T} \vec{\nabla} T\right]$$

เนื่องจาก
$$\frac{\partial f_k^o}{\partial \varepsilon} = - \frac{\exp\left[(\varepsilon_k - \zeta)/k_B T\right]}{\left[\exp\left[(\varepsilon_k - \zeta)/k_B T\right] + 1\right]^2} \left(\frac{1}{k_B T}\right)$$

สมการข้างบนอาจเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial f_k^o}{\partial \vec{r}} = - \frac{\partial f_k^o}{\partial \varepsilon} \left[\vec{\nabla}\zeta + \frac{(\varepsilon_k - \zeta)\vec{\nabla} T}{T}\right] \qquad (1.2.12)$$

แทนค่าสมการ (1.2.12) ในสมการ (1.2.11) จะได้

$$\frac{\partial f_k}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial g_k}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial f_k^o}{\partial \varepsilon} \left[\vec{\nabla}\zeta + \frac{(\varepsilon_k - \zeta)}{T} \vec{\nabla} T\right] \qquad (1.2.13)$$

ดิฟเฟอเรนชิเอตสมการ (1.2.9) เทียบกับ $\vec{k}$ จะได้

$$\frac{\partial f_k}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial g_k}{\partial \vec{k}} + \frac{\partial f_k^o}{\partial \vec{k}}$$

$$= \frac{\partial g_k}{\partial \vec{k}} + \frac{\partial f_k^o}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{k}}$$

$$= \frac{\partial g_k}{\partial \vec{k}} + \frac{\partial f_k^o}{\partial \varepsilon} \hbar \vec{v}_k \qquad (1.2.14)$$

เมื่อ $\vec{v}_k$ คือความเร็วของพาหะ ดังนั้นจากสมการ (1.2.5) เราจะได้

$$-\frac{e}{\hbar}(\vec{E}+\vec{v}_k \times \vec{B})\frac{\partial f_k}{\partial \vec{k}} = -\frac{e}{\hbar}(\vec{E}+\vec{v}_k \times \vec{B})\left(\frac{\partial g_k}{\partial \vec{k}}+\hbar\vec{v}_k\frac{\partial f_k^o}{\partial \varepsilon}\right)$$

$$= -\frac{e}{\hbar}\vec{E}\frac{\partial g_k}{\partial \vec{k}} - \frac{e}{\hbar}\vec{E}\frac{\partial f_k^o}{\partial \varepsilon}\hbar\vec{v}_k - \frac{e}{\hbar}\vec{v}_k \times \vec{B}\frac{\partial g_k}{\partial \vec{k}}$$

$$-\frac{e}{\hbar}\vec{v}_k \times \vec{B}\frac{\partial f_k^o}{\partial \varepsilon}\hbar\vec{v}_k$$

เนื่องจาก $\vec{E}\frac{\partial g_k}{\partial \vec{k}}$ อยู่ในลำดับ (order) ของ E^2 ตัดทิ้งได้เพราะต่างไปจากกฎของโอห์ม และเพราะ $\vec{v}_k \cdot \vec{v}_k \times \vec{B} = 0$ สมการข้างบนกลายเป็น

$$-\frac{e}{\hbar}(\vec{E}+\vec{v}_k \times \vec{B})\frac{\partial f_k}{\partial \vec{k}} = -e\vec{E}\frac{\partial f_k^o}{\partial \varepsilon}\vec{v}_k - \frac{e}{\hbar}\vec{v}_k \times \vec{B}\frac{\partial g_k}{\partial \vec{k}} \quad (1.2.15)$$

แทนค่าสมการ (1.2.13) และสมการ (1.2.15) ในสมการ (1.2.8) จะได้

$$-\vec{v}_k\left[\frac{\partial g_k}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial f_k^o}{\partial \varepsilon}\left[\vec{\nabla}\zeta + \frac{(\varepsilon_k-\zeta)}{T}\vec{\nabla}T\right]\right] - e\vec{E}\frac{\partial f_k^o}{\partial \varepsilon}\vec{v}_k - \frac{e}{\hbar}\vec{v}_k \times \vec{B}\frac{\partial g_k}{\partial \vec{k}}$$

$$= -\left.\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|_s$$

$$\left(-\frac{\partial f_k^o}{\partial \varepsilon}\right)\vec{v}_k\left[-\frac{(\varepsilon_k-\zeta)}{T}\vec{\nabla}T + e\left(\vec{E}-\frac{1}{e}\vec{\nabla}\zeta\right)\right] = -\left.\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|_s + \vec{v}_k\frac{\partial g_k}{\partial \vec{r}}$$

$$+\frac{e}{\hbar}(\vec{v}_k \times \vec{B})\frac{\partial g_k}{\partial \vec{k}} \quad (1.2.16)$$

สมการ (1.2.16) คือสมการโบล์ทซมานเชิงเส้น[1] ถ้าแทนค่าสมการ (1.2.6) ในสมการ (1.2.16) เราจะเห็นว่าสมการโบล์ทซมานก็คือสมการอินทิโกร-ดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น (linear integro-differential) ของการไม่สมดุลย์ของฟังก์ชั่นการแจกแจง $g_k(\vec{r})$ ซึ่งถูกกำหนดโดยความเข้มของสนามไฟฟ้าและเกรเดียนท์ของอุณหภูมิ

1.3 สภาพนำไฟฟ้า (Electrical conductivity)

สภาพนำไฟฟ้าสามารถหามาจากสมการโบล์ทซมานเชิงเส้นได้ดังนี้ คิดว่ามีแต่เพียงสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ อย่างเดียว ในกรณีนี้ ζ และ T มีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับ $\vec{r}$ ดังนั้นจากสมการ (1.2.16) เราได้

$$-\frac{\partial f_k^o}{\partial \varepsilon}\,\vec{v}_k \cdot e\vec{E} = -\left.\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|_s \qquad (1.3.1)$$

$$= \int (f_k - f_{k'})\, Q(\vec{k}, \vec{k}')\, d\vec{k}'$$

$$= \int (g_k - g_{k'})\, Q(\vec{k}, \vec{k}')\, d\vec{k}'$$

อัตราการกลับสู่สภาวะสมดุลย์เนื่องจากการกระเจิงเป็นสัดส่วนโดยตรงกับสภาวะที่เปลี่ยนไป นั่นคือ

$$-\left.\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|_s = \frac{f_k - f_k^o}{\tau}$$

$$= \frac{g_k}{\tau} \qquad (1.3.2)$$

โดยที่ τ คือเวลาผ่อนคลาย (relaxation time) ซึ่งมีค่าคงที่ในสภาวะหนึ่ง ๆ จากข้างบนเราได้

$$\frac{\partial g_k}{\partial t} = -\frac{g_k}{\tau}$$

นั่นคือ $$g_k(t) = g_k(0) \exp(-t/\tau)$$

แทนค่าสมการ (1.3.2) ในสมการ (1.3.1) จะได้

$$g_k = \left(\frac{-\partial f_k^o}{\partial \varepsilon}\right) \tau \vec{v}_k \cdot e\vec{E} \qquad (1.3.3)$$

จากความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้า $\vec{J} = e \int_o^\infty \vec{v}(\varepsilon)\, N(\varepsilon)\, d\varepsilon$ (1.3.4)

เมื่อ $N(\varepsilon)d\varepsilon$ คือจำนวนอิเลกตรอนที่มีพลังงานอยู่ระหว่าง ε และ $\varepsilon + d\varepsilon$ โดยที่

$$N(\varepsilon)\, d\varepsilon = 2D(\varepsilon) f(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

เมื่อ $D(\varepsilon)\, d\varepsilon$ เป็นความหนาแน่นของสภาวะ (density of state) ของอิเลกตรอนในช่วงพลังงาน $d\varepsilon$ และ $f(\varepsilon)$ คือความน่าจะเป็นของอิเลกตรอนที่จะอยู่ในสภาวะพลังงาน ε จากสมการ (1.3.4) เราได้

$$\vec{J} = 2e \int_o^\infty \vec{v}(\varepsilon)\, D(\varepsilon)\, f(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$= 2e \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v}(k)\, D(k)\, f(k)\, d\vec{k}$$

เนื่องจาก $D(k)\,d\vec{k} = \frac{V}{(2\pi)^3}\, d\vec{k}$ ดังนั้นสมการข้างบนกลายเป็น

$$\vec{J} = \frac{2eV}{(2\pi)^3} \int \vec{v}_k\, f_k\, d\vec{k}$$

$$= \frac{eV}{4\pi^3} \int \vec{v}_k\, g_k\, d\vec{k} \quad \left(\text{เนื่องจาก} \int \vec{v}_k\, f_k^o\, d\vec{k} = 0\right)$$

แทนค่า g_k จากสมการ (1.3.3) ในสมการข้างบน จะได้

$$\vec{J} = \frac{eV}{4\pi^3} \int \vec{v}_k \left(\frac{-\partial f_k^o}{\partial \varepsilon} \right) \tau \vec{v}_k \cdot e\vec{E}\, d\vec{k} \qquad (1.3.5)$$

จากกฎของโอห์ม $\vec{J} = \overleftrightarrow{\sigma}\vec{E}$ เทียบกับสมการ (1.3.5) เราได้

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{Ve^2}{4\pi^3} \int \tau \vec{v}_k \vec{v}_k \left(\frac{-\partial f_k^o}{\partial \varepsilon} \right) d\vec{k}$$

เทอม $\left(-\frac{\partial f_k^o}{\partial \varepsilon}\right)$ ประพฤติตัวคล้าย ๆ กับเป็นเดลตาฟังก์ชั่น (delta function) ที่พื้นที่ผิวเฟอร์มิ (Fermi surface) เราเปลี่ยนจากการอินทิเกรตปริมาตร (volume integral) ของเวคเตอร์คลื่น $\vec{k}$ เป็นการอินทิเกรตพื้นที่ผิว (surface integral) ของพลังงานที่คงที่ จะได้

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{Ve^2}{4\pi^3} \int\int \tau \vec{v}_k \vec{v}_k \, \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \, \frac{dS}{|\mathrm{grad}_k\, \varepsilon|} d\varepsilon$$

$$= \frac{Ve^2}{4\pi^3} \int \tau \vec{v}_k \vec{v}_k \, \frac{dS_F}{\hbar v_F}$$

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{V}{4\pi^3} \frac{e^2\tau}{\hbar} \int \frac{\vec{v}_k \vec{v}_k}{v_F} \, dS_F \qquad (1.3.6)$$

$\overleftrightarrow{\sigma}$ ในสมการ (1.3.6) คือเทนเซอร์ของสภาพนำไฟฟ้า (conductivity tensor) สำหรับผลึกที่มีสมมาตรลูกบาศก์ เทนเซอร์ของสภาพนำไฟฟ้าจะกลายเป็นสเกลาร์ พิจารณากรณีที่ $\vec{E}$ และ $\vec{J}$ อยู่ในทิศ x จากสมการ (1.3.6) เราได้

$$\sigma = \frac{V}{4\pi^3} \frac{e^2\tau}{\hbar} \int \frac{v_x^2}{v_F} \, dS_F \qquad (1.3.7)$$

สำหรับสมมาตรลูกบาศก์ $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} v_F^2$ จากสมการ (1.3.7) จะได้

$$\sigma = \frac{V}{4\pi^3} \frac{e^2\tau}{\hbar} \int \frac{1}{3} v_F \, dS_F$$

ถ้าพื้นที่ผิวเฟอร์มิเป็นรูปทรงกลม สมการข้างบนกลายเป็น

$$\sigma = \frac{V}{4\pi^3} \frac{e^2\tau}{\hbar} \frac{1}{3} v_F \, 4\pi k_F^2 \qquad (1.3.8)$$

โดยที่ $k_F = (3\pi^2 n/V)^{1/3}$ เมื่อ n คือความหนาแน่นของอิเลกตรอนในหนึ่งหน่วยปริมาตรและ V คือ ปริมาตร และจาก $m^* v_F = \hbar k_F$ จะได้ $v_F = \frac{\hbar k_F}{m^*}$

แทนค่า v_F และ k_F ในสมการ (1.3.8) เราได้

$$\sigma = \frac{V}{4\pi^3} \frac{e^2\tau}{\hbar} \frac{1}{3} \frac{\hbar}{m^*} 4\pi \frac{3\pi^2 n}{V}$$

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*} \qquad (1.3.9)$$

เราพิจารณาว่าสภาพนำไฟฟ้าเป็นฟังก์ชั่นของอุณหภูมิอย่างไร ในกรณีของโลหะค่า n เปลี่ยนไปกับอุณหภูมิน้อยมาก e และ m^* เป็นค่าคงที่ ดังนั้นสภาพนำไฟฟ้าเป็นฟังก์ชั่นกับอุณหภูมิตามเวลาผ่อนคลายที่เปลี่ยนไปกับอุณหภูมิ แต่ส่วนมากเราจะพิจารณาสภาพต้านทานไฟฟ้า (resistivity) ซึ่งเป็นส่วนกลับกับสภาพนำไฟฟ้าว่ามีค่าเปลี่ยนไปกับอุณหภูมิอย่างไร จากสมการ (1.3.9) เราได้

$$\rho = \frac{m^*}{ne^2\tau} \qquad (1.3.10)$$

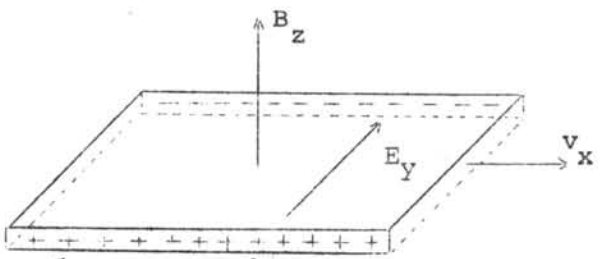
กำหนด $\tau = v_F \Lambda$ เมื่อ Λ คือวิถีอิสระเฉลี่ย (mean free path) และ v_F เป็นความเร็วเฉลี่ยของอิเลกตรอนที่พื้นที่ผิวเฟอร์มิ จากสมการ (1.3.10) เราได้

$$\rho = \frac{m^*}{ne^2 v_F \Lambda} \qquad (1.3.11)$$

เนื่องจาก v_F ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ ดังนั้นจากสมการ (1.3.11) จะเห็นว่าสภาพต้านทานไฟฟ้ามีค่าเปลี่ยนไปกับอุณหภูมิตามค่า $\frac{1}{\Lambda}$ พบว่าที่อุณหภูมิสูง ($\theta/T << 1$) , $\frac{1}{\Lambda}$ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ T และที่อุณหภูมิต่ำ ($\theta/T >> 1$) , $\frac{1}{\Lambda}$ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ T^5 นั่นคือ สภาพต้านทานไฟฟ้าของโลหะที่อุณหภูมิสูงมีค่าเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ T และที่อุณหภูมิต่ำมีค่าเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ T^5

1.4 ปรากฏการณ์ของฮอล (Hall effect)

ในการวิจัย เราใช้ปรากฏการณ์ของฮอลเพื่อหาค่าความหนาแน่นของพาหะที่อุณหภูมิต่าง ๆ เพื่อจะศึกษาการเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นนี้ไปกับอุณหภูมิสำหรับสารต่างชนิดกัน ปรากฏการณ์ของฮอลเกิดขึ้นได้ดังนี้ เมื่อวางสารตัวอย่างไว้ในสนามแม่เหล็กและมีกระแสไฟฟ้าไหลผ่านสารตัวอย่างในทิศตั้งฉากกับทิศของสนามแม่เหล็ก จะเกิดความต่างศักย์ระหว่างด้านทั้งสองของสารตัวอย่างที่ตั้งฉากกับทิศของสนามแม่เหล็กและทิศของกระแสไฟฟ้า ดังแสดงในรูป 1.1 ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า ปรากฏการณ์ของฮอล ความต่างศักย์ที่เกิดขึ้นเรียกว่า ความต่างศักย์ของฮอล และสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นนี้เรียกว่า สนามของฮอล (Hall field) ปรากฏการณ์ของฮอลนอกจากจะใช้หาความหนาแน่นของพาหะแล้วยังสามารถบ่งชนิดของพาหะตัวนำของสารนั้นได้ว่าเป็นอิเลกตรอนหรือโฮล



รูปที่ 1.1 ปรากฏการณ์ของฮอลในกรณีที่พาหะตัวนำคืออิเลกตรอน

สำหรับประจุ q ซึ่งวิ่งด้วยความเร็ว $\vec{v}$ ในสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$ และสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ แรงลอเรนต์ซ (Lorentz force) ที่กระทำต่อประจุคือ

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad (1.4.1)$$

ถ้าสารตัวอย่างมีสนามแม่เหล็กในทิศ z และสนามไฟฟ้าในทิศ x จะเกิดสนามของฮอลในทิศ y ดังรูป 1.1 และแรงที่กระทำต่อพาหะเนื่องจากสนามแม่เหล็กต้องหักล้างกับแรงที่กระทำต่อพาหะเนื่องจากสนามของฮอล[2] ดังนั้นจากสมการ (1.4.1) เราได้

$$F_y = 0 = q(E_y - v_x B_z)$$

$$E_y = v_x B_z \qquad (1.4.2)$$

จาก $$j_x = nev_x \qquad (1.4.3)$$

เมื่อ j_x คือกระแสไฟฟ้าต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ (current density) และ n คือความหนาแน่นของพาหะต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร แทนค่า v_x จากสมการ (1.4.3) ในสมการ (1.4.2) จะได้

$$E_y = \frac{j_x B_z}{ne}$$

หรือ $$\frac{E_y}{j_x B_z} = \frac{1}{ne} \qquad (1.4.4)$$

อัตราส่วน $\frac{E_y}{j_x B_z}$ เรียกว่าค่าคงที่ของฮอล (Hall constant - R_H) มีค่าเป็นบวกสำหรับโฮล และเป็นลบสำหรับอิเลกตรอน

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B_z}$$

$$= \frac{1}{ne} \qquad (1.4.5)$$

ถ้าสารตัวอย่างมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหนา b หน่วยและกว้าง a หน่วย เราได้ $V_y = a\vec{E}_y$ และ $I_x = ab\vec{j}_x$ นั่นคือ

$$R_H = \frac{bV_y}{I_x B_z} \tag{1.4.6}$$

และ

$$n = \frac{I_x B_z}{ebV_y} \tag{1.4.7}$$

ในกรณีที่ไม่มีสนามแม่เหล็ก กระแสไฟฟ้าต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่จะสม่ำเสมอ (uniform) ก็ต่อเมื่อสมมุติว่าสารตัวอย่างนี้ยาวมาก แต่ในทางปฏิบัติจริง ๆ แล้วเป็นไปไม่ได้เนื่องจากความยาวของสารตัวอย่างจำกัด พบว่าถ้าความยาวยาวกว่าความกว้าง 4 เท่าขึ้นไปถือได้ว่าข้อผิดพลาดในกรณีนี้น้อยมากจะทิ้งได้ แต่ถ้าความยาวของสารตัวอย่างเท่ากับความกว้าง ค่าความต่างศักย์ของฮอลจะลดลงเหลือประมาณ 0.7 เท่าของความยาวไม่จำกัด[3]

ในกรณีของโลหะความหนาแน่นของพาหะมีค่าเปลี่ยนไปกับอุณหภูมิน้อยมาก สามารถประมาณให้อยู่ในรูปความหนาแน่นของอะตอมได้ดังนี้[4]

$$n \simeq z\, n_{at.} \tag{1.4.8}$$

เมื่อ z คือจำนวนวาเลนซ์อิเลกตรอนและ $n_{at.}$ คือความหนาแน่นของอะตอมต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร แทนค่าสมการ (1.4.8) ในสมการ (1.4.5) จะได้

$$R_H \simeq \frac{1}{ezn_{at.}}$$

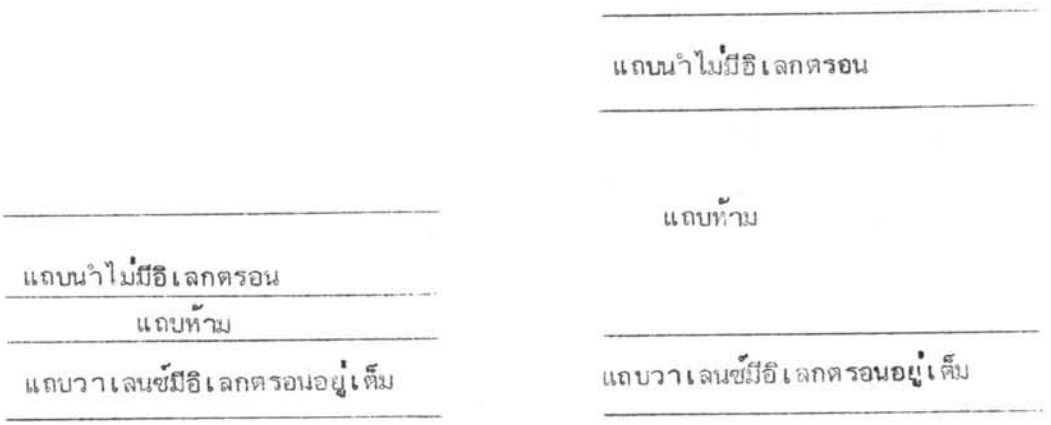
$$z_{exp} = \frac{1}{en_{at.}R_H} \tag{1.4.9}$$

สมการ (1.4.9) ใช้ได้ดีในกรณีของโลหะที่มีวาเลนซ์อิเลกตรอนเท่ากับหนึ่ง (monovalence metal)

001060

1.5 สารกึ่งตัวนำ (Semiconductor)

สารกึ่งตัวนำที่สำคัญได้แก่ ซิลิกอนและเยอมาเนียม ซึ่งอยู่ในกลุ่มที่ IV ของตารางธาตุ (periodic table) สารกึ่งตัวนำเป็นสารที่มีค่าสภาพต้านทานไฟฟ้าอยู่ระหว่างโลหะและฉนวน ถ้าพิจารณาดูแถบพลังงาน (energy band) พบว่าแถบห้าม (forbidden band) ที่อยู่ระหว่างแถบนำ (conduction band) และแถบวาเลนซ์ (valence band) แคบมาก เมื่อเทียบกับฉนวน ดังแสดงในรูป 1.2



รูปที่ 1.2 แถบพลังงานของสารกึ่งตัวนำที่ $0^{\circ}K$ เทียบกับฉนวน

1.5.1 สารกึ่งตัวนำอินทรินซิก[5] (Intrinsic semiconductor)

ที่อุณหภูมิ $0^{\circ}K$ จะไม่มีอิเลกตรอนในแถบนำ สภาวะเช่นนี้สารกึ่งตัวนำก็คือฉนวนนั่นเอง เมื่ออุณหภูมิสูงขึ้นอิเลกตรอนได้รับพลังงานความร้อนจะเปลี่ยนสถานะ (state) ของพลังงานจากสถานะที่อยู่ในแถบวาเลนซ์ไปยังสถานะที่อยู่ในแถบนำ และทิ้งสถานะว่าง (vacant state) ไว้ในแถบวาเลนซ์ซึ่งเรียกว่าง โฮล (hole) อิเลกตรอนในแถบวาเลนซ์นี้สามารถเคลื่อนที่ไปแทนสถานะว่างหรือโฮลได้โดยที่อิเลกตรอนเคลื่อนที่เข้ามาแทนที่โฮลในทิศใดก็เหมือนกับโฮลเคลื่อนที่ออกไปในทิศทางตรงกันข้าม มองดูคล้ายกับว่าโฮลเป็นประจุไฟฟ้าบวก ทั้งอิเลกตรอนที่อยู่ในแถบนำและโฮลที่อยู่ในแถบวาเลนซ์จึงเป็นประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ได้ (charge carriers) ของสารกึ่งตัวนำ เมื่ออุณหภูมิสูงขึ้นการนำไฟฟ้าของสารกึ่งตัวนำดีขึ้นเพราะมี

จำนวนประจุไฟฟ้าเคลื่อนที่ได้มากขึ้น เราเรียกสารกึ่งตัวนำที่มีประจุไฟฟ้าที่สามารถนำไฟฟ้าได้ เนื่องจากอุณหภูมิว่า สารกึ่งตัวนำอินทรินซิก จำนวนอิเลกตรอนในแถบนำและจำนวนโฮลในแถบวาเลนซ์[6] สามารถคำนวณได้จากสมการข้างล่างนี้

$$n = 2(2\pi m_e k_B T/h^2)^{3/2} \exp(\mu - E_g)\beta \qquad (1.5.1)$$

และ $$p = 2(2\pi m_h k_B T/h^2)^{3/2} \exp(-\mu)\beta \qquad (1.5.2)$$

เมื่อ n คือจำนวนอิเลกตรอนในแถบนำต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

p คือจำนวนโฮลในแถบวาเลนซ์ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

m_e และ m_h คือมวลของอิเลกตรอนและโฮลตามลำดับ

μ คือระดับพลังงานเฟอร์มี

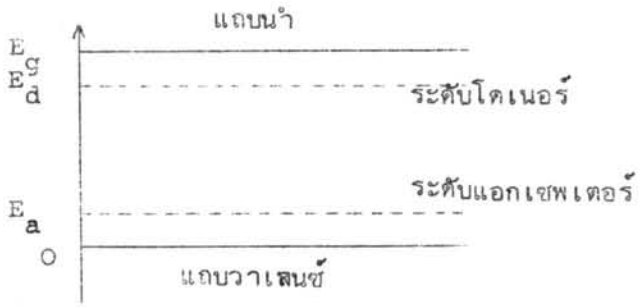
E_g คือระดับพลังงานต่ำสุดของแถบนำ

$\beta = 1/k_B T$

ทั้งค่า μ และ E_g วัดจากระดับพลังงานสูงสุดของแถบวาเลนซ์

1.5.2 สารกึ่งตัวนำเอกทรินซิก[5] (Extrinsic semiconductor)

เราสามารถเพิ่มจำนวนประจุไฟฟ้าแก่สารกึ่งตัวนำได้โดยใส่อะตอมของธาตุที่อยู่ในกลุ่ม ที่ III หรือกลุ่มที่ V ของตารางธาตุลงไปในอัตราส่วนประมาณหนึ่งต่อล้าน อะตอมที่ใส่เข้าไปเรียกอะตอมสิ่งเจือปน (impurity atoms) เรียกสารกึ่งตัวนำประเภทนี้ว่า เอกทรินซิก ถ้าอะตอมสิ่งเจือปนที่ใส่เข้าไปอยู่ในกลุ่มที่ V เรียกว่า โดเนอร์ (donor) สารกึ่งตัวนำนี้จะเป็นชนิดเอน (N - type) คือพาหะที่เป็นตัวนำส่วนมากเป็นอิเลกตรอนในแถบนำ ถ้าอะตอมสิ่งเจือปนที่ใส่เข้าไปอยู่ในกลุ่มที่ III เรียกว่า แอกเซพเตอร์ (acceptor) สารกึ่งตัวนำนี้จะเป็นชนิดพี (P - type) และพาหะที่เป็นตัวนำส่วนมากเป็นโฮลในแถบวาเลนซ์ อะตอมสิ่งเจือปนที่ใส่เข้าไปนี้ทำให้เกิดระดับพลังงานขึ้นซึ่งอยู่ในแถบห้ามระหว่างแถบวาเลนซ์กับแถบนำ ดังรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3 แสดงระดับของโดเนอร์และแอกเซพเตอร์ในแถบห้ามของสารกึ่งตัวนำ

1.5.3 <u>การหาความหนาแน่นของโฮลเนื่องจากแอกเซพเตอร์ถูกไอออนไนซ์ที่อุณหภูมิ T</u>

ให้ N_d และ N_a คือความหนาแน่นของโดเนอร์และแอกเซพเตอร์ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

N_d^0 และ N_a^0 คือความหนาแน่นของโดเนอร์และแอกเซพเตอร์ที่ไม่ถูกไอออนไนซ์ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

N_d^+ และ N_a^- คือความหนาแน่นของโดเนอร์และแอกเซพเตอร์ที่ถูกไอออนไนซ์ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

เนื่องจากจำนวนแอกเซพเตอร์ที่ถูกไอออนไนซ์ = จำนวนแอกเซพเตอร์ x ความน่าจะเป็นที่อิเลกตรอนจะอยู่ที่ E_a

นั่นคือ $$Na^- = N_a \frac{1}{1 + \exp(E_a - \mu)\beta}$$

เพราะว่าสารกึ่งตัวนำต้องเป็นกลางทางไฟฟ้า จะได้

$$p + N_d^+ = n + N_a^- \qquad (1.5.3)$$

พิจารณาในกรณีที่ไม่มีโดเนอร์ (คือ $N_d = 0$) และคิดว่าเป็นสารกึ่งตัวนำชนิดพี ดังนั้น

$p >> n$

จากสมการ (1.5.3) เราได้

$$p = N_a^- \qquad (1.5.4)$$

จากสมการ (1.5.1) $p = p_o \exp(-\mu)\beta$ (1.5.5)

เมื่อ $p_o = 2(2\, m_h k_B T/h^2)^{3/2}$ แทนค่า p และ N_a^- ในสมการ (1.5.4) จะได้

$$p_o \exp(-\mu)\beta = \frac{N_a}{1 + \exp(E_a - \mu)\beta}$$

$$\left[\exp(-2\mu)\beta\right]\left[\exp E_a\beta\right] + \exp(-\mu)\beta - \frac{N_a}{p_o} = 0$$

ถอดสมการข้างบนเราพบว่า

$$\exp(-\mu)\beta = \frac{-1 + \left[1 + 4\frac{N_a}{p_o}\exp E_a\beta\right]^{\frac{1}{2}}}{2\exp E_a\beta} \qquad (1.5.6)$$

แทนค่าสมการ 1.5.6) ใน (1.5.5) เราได้

$$p = \frac{\left[1 + 4\frac{N_a}{p_o}\exp E_a\beta\right]^{\frac{1}{2}} p_o - p_o}{2\exp E_a\beta} \qquad (1.5.7)$$

ที่อุณหภูมิสูง $\exp E_a\beta \ll 1$ เราสามารถประมาณสมการ (1.5.7) ให้อยู่ในรูปง่าย ๆ ดังนี้

$$p \approx \frac{\left[1 + \frac{1}{2}\,4\frac{N_a}{p_o}\exp E_a\beta\right] p_o - p_o}{2\exp E_a\beta}$$

$$p \approx N_a \qquad (1.5.8)$$

ที่อุณหภูมิต่ำ $\exp E_a\beta \gg 1$ สมการ (1.5.7) สามารถประมาณให้อยู่ในรูปดังนี้

$$p \approx p_o\left[\left(\frac{N_a}{p_o}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{E_a\beta}{2}\right)\right]$$

$$\approx (p_o N_a)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{E_a\beta}{2}\right) \qquad (1.5.9)$$

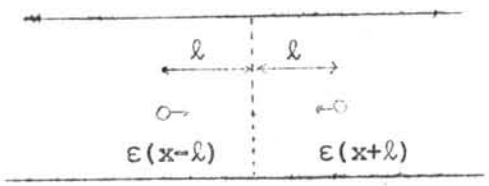
จากสมการ (1.5.8) และ (1.5.9) จะเห็นว่าที่อุณหภูมิสูงความหนาแน่นของโฮลมีค่าคงที่เท่ากับความหนาแน่นของแอกเซพเตอร์ เมื่ออุณหภูมิต่ำความหนาแน่นของโฮลเปลี่ยนไปกับอุณหภูมิ เราสามารถทดสอบการเปลี่ยนแปลงนี้ได้ โดยการวัดความหนาแน่นของพาหะที่อุณหภูมิต่าง ๆ ดังกล่าวแล้วในหัวข้อ 1.4

1.6 สภาพนำความร้อนของฉนวน

ในการวิจัยนี้ เราศึกษาถึงการเปลี่ยนแปลงของสภาพนำความร้อนของสารต่าง ๆ ไปกับอุณหภูมิ การเปลี่ยนแปลงนี้อธิบายได้โดยทฤษฎีทางฟิสิกส์ของของแข็งซึ่งกล่าวไว้ข้างล่างนี้ ส่วนหลักเกณฑ์ในการวัดจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

1.6.1 ทฤษฎีทั่ว ๆ ไปเกี่ยวกับสภาพนำความร้อนของโฟนอน[6]

ในกรณีของฉนวนพาหะที่เคลื่อนย้ายพลังงานความร้อนคือโฟนอน เราอาจหาสภาพนำความร้อนได้โดยใช้ทฤษฎีจลน์ของกาซ[7] ขอให้เราพิจารณาในกรณีซึ่งอุณหภูมิ (T) เปลี่ยนไปตามแนว x ซึ่งเป็นแนวตามความยาววัตของฉนวน สมมุติว่าโฟนอนวิ่งไปมาคล้าย ๆ กับกาซด้วยความเร็ว v มีพลังงาน $\varepsilon(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของระยะทาง x ให้โฟนอนมีวิถีอิสระเฉลี่ย (mean free path) ℓ หมายความว่า โดยเฉลี่ยโฟนอนวิ่งไปได้ระยะทาง ℓ ก็ชนกัน ให้ N เป็นจำนวนโฟนอนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร



รูปที่ 1.4 การเคลื่อนย้ายพลังงานโดยโฟนอนผ่านระนาบ x

จากรูป 1.4 พิจารณาโฟนอนที่เคลื่อนที่มาระนาบ x จากทางขวามือ หลังจากชนกันครั้งสุดท้ายที่ตำแหน่ง $x + \ell$ ให้ $Q_1^{\rightarrow}$ เป็นพลังงานที่ถูกเคลื่อนย้ายโดยโฟนอนจากทางขวามือต่อหนึ่งหน่วยเวลาต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่มายังระนาบ x เราจะได้

$$Q_1^{\rightarrow} = -\frac{1}{6} N v \varepsilon (x + \ell) \qquad (1.6.1)$$

พิจารณาโฟนอนที่เคลื่อนที่มาระนาบ x จากทางซ้ายมือ โฟนอนเหล่านี้เกิดการชนกันครั้งสุดท้ายที่ตำแหน่ง $x - \ell$ ให้ Q_2 เป็นพลังงานที่ถูกเคลื่อนย้ายโดยโฟนอนจากทางซ้ายมือต่อหนึ่งหน่วยเวลาต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่มายังระนาบ x นั่นคือ

$$Q_2 = \frac{1}{6} Nv\varepsilon \quad (x - \ell) \tag{1.6.2}$$

ให้ Q_x เป็นพลังงานรวมทั้งหมดที่ถูกเคลื่อนย้ายโดยโฟนอนต่อหนึ่งหน่วยเวลาต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ จากสมการ (1.6.1) และ (1.6.2) เราได้

$$Q_x = -\frac{1}{6} Nv\varepsilon \ (x + \ell) + \frac{1}{6} Nv\varepsilon \ (x - \ell) \tag{1.6.3}$$

เนื่องจาก ℓ มีค่าน้อย เราสามารถกระจายเทอม $\varepsilon(x + \ell)$ และ $\varepsilon(x - \ell)$ ในรูปของเทย์เลอร์ซีรี (Taylor's series) ได้ ดังนั้นจากสมการ (1.6.3) จะได้

$$Q_x = -\frac{1}{6} Nv \left[\varepsilon(x) + \ell \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x} + \ldots \right] + \frac{1}{6} Nv \left[\varepsilon(x) - \ell \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x} \ldots \right]$$

$$= -\frac{1}{3} Nv\ell \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{3} Nv\ell \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{3} v\ell \frac{\partial N\varepsilon(x)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \tag{1.6.4}$$

เมื่อ $N\varepsilon(x)$ คือพลังงานของโฟนอนทั้งหมดในหนึ่งหน่วยปริมาตร เนื่องจากความร้อนจำเพาะ $C \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$ เมื่อ ε เป็นพลังงานรวมทั้งหมด ดังนั้น $C = \frac{\partial N\varepsilon(x)}{\partial T}$ จากสมการ (1.6.4) เราได้

$$Q_x = -\frac{1}{3} v\ell C \frac{\partial T}{\partial x} \tag{1.6.5}$$

เนื่องจาก

$$Q = -K(T) \frac{dT}{dx} \tag{1.6.6}$$

เมื่อ K(T) คือสภาพนำความร้อนและ Q เป็นอัตราการไหลของปริมาณความร้อนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่เทียบสมการ (1.6.5) กับ (1.6.6) เราได้

$$K(T) = \frac{1}{3} Cv\ell \qquad (1.6.7)$$

เนื่องจาก $v = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ ซึ่งมีค่าไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ ดังนั้นสภาพนำความร้อนจะเปลี่ยนไปกับอุณหภูมิตาม C และ ℓ ที่อุณหภูมิห้อง C มีค่าคงที่ ℓ เท่านั้นที่เปลี่ยนไปกับอุณหภูมิ นั่นคือ K(T) จะเปลี่ยนไปกับอุณหภูมิตามค่า ℓ เพราะว่า ℓ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ (จำนวนโฟนอน) หรือ $\frac{1}{N}$ เนื่องจาก

เนื่องจาก $$N = \int_0^\infty D(\omega) < n > d\omega \qquad (1.6.8)$$

เมื่อ $D(\omega)\, d\omega$ คือความหนาแน่นของโมด (mode) ของการสั่นที่มีความถี่ระหว่าง ω กับ $\omega + d\omega$ $<n>$ เป็นจำนวนโฟนอนต่อโมด ซึ่งกำหนดโดย

$$<n> = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \qquad (1.6.9)$$

กรณีที่อุณหภูมิห้อง $k_B T >> \hbar\omega$ สมการ (1.6.9) ประมาณได้เป็น

$$<n> \approx \frac{k_B T}{\hbar\omega}$$

แทนค่า $<n>$ ในสมการ (1.6.8) ได้

$$N \approx \int_0^\infty D(\omega) \frac{k_B T}{\hbar\omega} d\omega$$

หรือ $N \alpha T$

ดังนั้น $\ell \alpha \frac{1}{T}$ นั่นคือ $K(T) \alpha \frac{1}{T}$ ที่อุณหภูมิห้อง

สำหรับวัตถุที่เป็นอสัณฐาน (amorphous) เช่นแก้ว แลททิสของผลึกเรียงตัวไม่เป็นคาบ (period) ℓ จะคงที่ไม่เปลี่ยนไปกับอุณหภูมิและมีค่าอยู่ในช่วงของระยะห่างระหว่างอะตอม ดังนั้น K(T) จะเปลี่ยนไปกับอุณหภูมิตามค่า C เนื่องจากที่อุณหภูมิห้อง C มีค่าคงที่ จะได้ว่า K(T) มีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนไปกับอุณหภูมิ[8]

1.6.2 หลักเกณฑ์ในการวัดสภาพนำความร้อน

เนื่องจากอัตราการไหลของปริมาณความร้อนในผลึกเป็นสัดส่วนโดยตรงกับเกรเดียนท์ของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นในผลึกและพื้นที่หน้าตัด นั่นคือ

$$\dot{Q} = - K(T) \quad A \frac{dT}{dx} \tag{1.6.10}$$

เมื่อ $\dot{Q}$ เป็นอัตราการไหลของปริมาณความร้อน , A เป็นพื้นที่หน้าตัดของสารตัวอย่าง และ K(T) เป็นสภาพนำความร้อนของสาร เครื่องหมายลบชี้ให้เห็นว่า ความร้อนไหลจากอุณหภูมิสูงไปสู่อุณหภูมิต่ำ ถ้าให้สารตัวอย่างยาว L และปลายล่างมีอุณหภูมิคงที่ T_o จากสมการ (1.6.10) เราได้

$$\frac{\dot{Q}}{A} \int_o^L dx = \int_{T_o}^{T} K(T)\, dT \qquad \text{(ไม่คิดเครื่องหมายลบ)}$$

$$\dot{Q} = \frac{A}{L} \int_{T_o}^{T} K(T)\, dT$$

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial T} = \frac{A}{L} K(T)$$

$$K(T) = \frac{L}{A} \left(\frac{d\dot{Q}}{dT}\right) \tag{1.6.11}$$

ถ้าเขียนกราฟระหว่าง $\dot{Q}$ กับ T และจากความชันของกราฟนี้คูณกับ $\frac{L}{A}$ ก็จะทราบค่า K(T) ของสาร ดังแสดงในสมการข้างบน

ในการทดลองเราแช่ภาชนะทดลองในน้ำแข็งและน้ำแข็งแห้ง นั่นคือ T_o เป็นอุณหภูมิของน้ำแข็งและน้ำแข็งแห้ง เพื่อเปรียบเทียบสภาพนำความร้อนของสารตัวอย่างที่อุณหภูมิต่าง ๆ รายละเอียดเกี่ยวกับการทดลองและผลการทดลองได้กล่าวไว้ในบทที่ 3