



การคำนวณโดยวิธี Multiple Linear Regression

4.1 การคำนวณของเครื่องคอมพิวเตอร์

ในการหาความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ โดยวิธี Multiple Linear Regression มีวิธีคำนวณที่นิยมใช้กัน 2 วิธีคือ

วิธีที่ 1 เมื่อเครื่องคอมพิวเตอร์รับข้อมูลต่าง ๆ เรียบร้อยแล้ว ขั้นแรกจะคำนวณหาความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระ (X) หลาย ๆ ตัว กับตัวแปรตาม (Y) โดยคำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่าง Y กับ X ตัวที่มีความสำคัญมากที่สุด แล้วจึงหาความสัมพันธ์ของ Y กับ X ตัวอื่น ที่มีความสำคัญรองลงมา เพิ่มเข้าไปในสมการทีละตัวจนครบ k ตัว

ดังนั้นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของ Y กับ X มีจำนวน k สมการตามลำดับความสำคัญของตัวแปร X ดังนี้คือ

ขั้นแรก เมื่อได้ x_1 เป็นตัวแปรที่มีความสำคัญต่อ y มากที่สุดจะได้สมการ

$$y = a + b_1x_1$$

เมื่อ b_1 เป็นค่า Regression Coefficient

x_1 เป็น Independent variable ตัวที่ 1

y เป็น Dependent variable

a เป็น intercept ของสมการ

ขั้นต่อไป เพิ่ม x_2, \dots, x_k ที่มีความสำคัญรองลงไปเข้าไปในสมการจะได้

$$y = a' + b_1'x_1 + b_2'x_2 \text{ เมื่อเพิ่ม } x_2 \text{ เข้าในสมการ}$$

$$y = a'' + b_1''x_1 + b_2''x_2 + b_3''x_3 \text{ เมื่อเพิ่ม } x_3 \text{ เข้าในสมการ}$$

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k \text{ เมื่อเพิ่ม } x_k \text{ เข้าในสมการ}$$

สมการสุดท้ายแสดงความสัมพันธ์ของ x ทั้ง k ตัว กับ y ตามลำดับความสำคัญของ x ค่า a, b_1 ในแต่ละสมการจะไม่เท่ากัน เนื่องจากจำนวนตัวแปรที่นำมาพิจารณาในแต่ละสมการมีไม่เท่ากัน

วิธีที่ 2 การดำเนินการขั้นแรกเหมือนกับวิธีที่ 1 แต่ในการหา Regression Coefficient แต่ละตัวนั้นจะทดสอบค่า b โดยใ้การทดสอบแบบ t ในแต่ละขั้นที่เพิ่มตัวแปร x เข้าในสมการ ค่า b ตัวใดที่ไม่มีนัยสำคัญ (non significant) จะตัดออกจากสมการ ดังนั้นเมื่อเครื่องคำนวณถึงค่า b ตัวใดที่ไม่มีนัยสำคัญ เครื่องจะหยุดคำนวณ เพราะว่า x ตัวถัดไปย่อมไม่มีนัยสำคัญเลย เนื่องจากได้มีการจัดเรียงลำดับความสำคัญของ x ไว่ก่อนแล้ว ดังนั้นตัวแปร x ทั้ง k ตัว จะไม่ปรากฏในสมการสุดท้ายทุกตัว จะปรากฏเฉพาะตัวที่ทดสอบค่า b แล้วมีนัยสำคัญเท่านั้น สมการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปร x และ y จึงมีขนาดเล็กกว่าสมการที่ได้จากวิธีแรก

$$Y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots$$

การคำนวณหาความสัมพันธ์ของ x, Y ทั้ง 2 วิธีมีข้อสังเกตดังนี้คือ

ในกรณีที่ตัวแปร x มีจำนวนมาก

สมการจากวิธีที่ 1 ทำให้เกิดความยุ่งยากในการคำนวณเนื่องจากต้องคำนวณผลจาก x ทุกตัวที่มีต่อ y ไม่ว่า x ตัวนั้นจะมีอิทธิพลต่อ y น้อยมากจนอาจคิดว่าไม่มีผลกระทบกระเทือนค่า y เลยก็ตาม การนำตัวแปรที่ไม่มีนัยสำคัญเข้ามาในสมการ จึงไม่เกิดประโยชน์ในการประมาณค่า y เท่าใดนัก เพราะตัวแปร x มีจำนวนมาก ตัวแปรแต่ละตัวจึงมีอิทธิพลต่อส่วนรวมน้อยมาก การตัดตัวแปรที่มีความสำคัญน้อยออก จึงไม่เกิดผลกระทบกระเทือนกับการประมาณค่า y ถ้าใช้วิธีที่ 1 จะเพิ่มความรบกวน (disturbance) ในการคำนวณ เมื่อตัวแปร x มีจำนวนมาก จึงควรเลือกใช้วิธีที่ 2 ในการคำนวณ

ในกรณี X มีจำนวนน้อย

การหาความสัมพันธ์ของตัวแปรโดยวิธีที่ 1 จะช่วยให้ประมาณค่า Y ได้ ถูกต้องกว่าวิธีที่ 2 เนื่องจากตัวแปรมีจำนวนน้อย การนำตัวแปรทุก ๆ ตัวเข้ามาพิจารณา ในสมการจะให้เกิดในการประมาณที่ถูกต้องกว่า การพิจารณาจากสมการที่ตัดตัวแปรบางตัว ออก ในขณะที่ตัวแปรมีจำนวนน้อยอยู่แล้ว อาจเกิดความผิดพลาดในการประมาณได้ง่ายกว่า ถ้าจะหาความสัมพันธ์ของตัวแปรโดยวิธีที่ 2 ดังนั้นเมื่อตัวแปร (X) มีจำนวนน้อย จึง เลือกวิธีที่ 1 ในการหาความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ

4.2 ผลการคำนวณและการวิเคราะห์

ข้อมูลที่ใช้ในการคำนวณเป็นข้อมูลของผู้รับทุนจำนวน 159 คน ข้อมูลของ แต่ละคนประกอบด้วยตัวแปร 4 ตัวคือ

1. ตัวแปรอิสระ X_1 ไคแก่อายุของผู้รับทุน
2. ตัวแปรอิสระ X_2 ไคแก่คะแนนภาษาอังกฤษของผู้รับทุน
3. ตัวแปรอิสระ X_3 ไคแก่ระยะเวลาตั้งแต่ผู้รับทุนจบมหาวิทยาลัยในประเทศจนถึงวันที่ผู้รับทุนเดินทางไปศึกษาต่อในต่างประเทศ
4. ตัวแปรตาม Y ไคแก่คะแนนเฉลี่ยของผู้รับทุนในมหาวิทยาลัยต่างประเทศ

การคำนวณหาความสัมพันธ์ของ Y และ X ดังกล่าว ไม่สามารถคำนวณ ด้วยมือตามวิธีธรรมดา เนื่องจากข้อมูลมีจำนวนมาก จึงต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ช่วย ในการคำนวณ.

1. ขั้นแรก เครื่องคอมพิวเตอร์เลือกได้ X_2 เป็นตัวแปรที่มีความสำคัญ
ต่อ Y มากที่สุด

$$\text{จากสมการ} \quad Y = a + b_2 X_2$$

$$\text{ได้สมการ} \quad Y = 1.38378 + 0.000595 X_2$$

$$\text{เมื่อกำหนดให้ } a \text{ เป็นค่า intercept} \quad = 1.38378$$

$$b_2 \text{ เป็นค่า Partial Regression coefficient} \\ \text{ของ } X_2 \text{ ต่อ } Y \quad = + 0.00595$$

หมายความว่าเมื่อ X_2 เพิ่มขึ้น 1 หน่วยจะมีผลทำให้ Y เพิ่มขึ้น
0.000595 หน่วย นั่นคือ เมื่อผู้รับทุนได้คะแนนภาษาอังกฤษเพิ่มขึ้น 1 หน่วย มีผลทำให้
คะแนนเฉลี่ยในต่างประเทศเพิ่มขึ้น = 0.000595 หน่วยโดยประมาณ

$$\text{มัธยัมเลขคณิต}^{1/} \text{ ของคะแนนภาษาอังกฤษ } (\bar{X}_2) = 322.01886 \quad \text{คะแนน} \\ \text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน}^{2/} \text{ ของคะแนนภาษาอังกฤษ} = 16.14160$$

1/ มัธยัมเลขคณิต (\bar{X}_2) หาได้จากสูตรของคะแนนภาษาอังกฤษหารด้วยจำนวนผู้รับทุน

$$\text{จากสูตร } \bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} \quad \text{เมื่อ } x_i \text{ คือคะแนนภาษาอังกฤษของผู้รับทุนคนที่ } i \\ n \text{ คือจำนวนผู้รับทุนทั้งหมด}$$

2/ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานหาได้จากสูตร $SE = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ หารด้วย n เพราะ
ถือว่าผู้รับทุนกลุ่มนี้เป็นประชากร (population)

$$\text{COEFFICIENT OF VARIATION ของ } X_2 \text{ (C.V.)}^{\frac{3}{2}} = 5\%$$

แสดงว่า ความกระจายของคะแนนภาษาอังกฤษเปรียบเทียบกับมัชฌิมเลขคณิตของคะแนนภาษาอังกฤษ 5% ซึ่งหมายความว่า คะแนนภาษาอังกฤษมีการกระจายน้อยมาก การที่คะแนนภาษาอังกฤษมีความกระจายน้อยมากเพราะผู้รับทุนแต่ละคนจะถนัดสอบภาษาอังกฤษให้สูงกว่า 290 จึงจะได้รับพิจารณาให้ไปศึกษาต่อ ณ ต่างประเทศได้

$$s_{b_2} = 0.00260$$

$$\therefore t = \frac{0.000595}{0.00260} = 2.288^*$$

$$|t_{.05}| = 1.96, |t_{.01}| = 2.57$$

$$\therefore \text{Reject } H_0 : \beta_2 = 0 \text{ ที่ } \alpha = .05$$

นั่นคือ X_2 มีอิทธิพลต่อ Y อย่างมีนัยสำคัญ ที่ $\alpha = .05$

2. ขั้นตอน เมื่อเพิ่มตัวแปร X_3 ที่มีความสำคัญรองลงมาเข้าในสมการ X_3 คือระยะเวลาตั้งแต่จบมหาวิทยาลัยในประเทศ จนถึงวันที่ไปศึกษาต่อต่างประเทศ

$$\text{จากสมการ } Y = a + b_2 X_2 + b_3 X_3$$

$$\text{ได้สมการ } Y = 1.48308 + 0.00575X_2 - 0.00043X_3$$

โดยกำหนดให้ a เป็น intercept ของสมการ = 1.48308

$\frac{3}{2} \text{C.V.} = \frac{S.E.}{\bar{X}} \times 100$ มีประโยชน์ในการเปรียบเทียบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็นเปอร์เซ็นต์ของมัชฌิมเลขคณิต C.V. ของข้อมูลแต่ละชุดมักมีค่าคงที่ในขณะที่ S.E., \bar{X} ของข้อมูลมักเปลี่ยนแปลงไปตามความกระจายของข้อมูล นอกจากนี้ C.V. ยังมีประโยชน์ในการเปรียบเทียบความกระจายของข้อมูลที่หน่วยต่างกัน เนื่องจาก C.V. ไม่มีหน่วย

b_2 เป็น Partial Regression Coefficient ของ X_2 ต่อ Y เมื่อ X_3 คงที่
มีค่า = $0.00575^{4/}$

b_3 เป็น Partial Regression Coefficient ของ X_3 ต่อ Y เมื่อ X_2 คงที่
มีค่า = $-0.00043^{5/}$

มัธยฐานเลขคณิตของ X_3 (\bar{X}_3) = 78.333 เกือบ

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.E.) = 42.79544

∴ Coefficient of Variation (C.V.) = 54.86%

แสดงว่าการกระจายของระยะเวลาดังแต่จบมหาวิทยาลัยจนถึงวันไปศึกษาต่อ

ทางประเทศของยุโรปนั้นเปรียบเทียบกับมัธยฐานเลขคณิต = 54.86%

นั่นคือ X_3 มีการกระจายมากพอประมาณ

$$s_{b_2} = 0.00265, \quad t_2 = 2.169^*$$

∴ Reject $H_0 : B_2 = 0$ ที่ $\alpha = .05$

$$s_{b_3} = 0.00100, \quad t_3 = -0.433$$

∴ Accept $H_0 : B_3 = 0$ ที่ $\alpha = .05$

4/ ค่า b_2 ในสมการนี้ไม่เท่ากับ b_2 ในสมการแรกเนื่องจากเพิ่มตัวแปร X_3 เข้าในสมการ

5/ ค่า $b_3 = -0.00043$ แสดงว่าความสัมพันธ์ระหว่าง X_3 และ Y เป็นไปในทาง
กลับกัน กล่าวคือ เมื่อ X_3 เพิ่มขึ้น 1 หน่วยทำให้ค่า Y ลดลง 0.00043 หน่วย
โดยประมาณ

นั่นคือใน step ที่ 2 เมื่อเพิ่ม x_3 เข้าในสมการแล้ว การเปลี่ยนแปลงของค่า x_3 มีอิทธิพลต่อการเปลี่ยนแปลงของ Y น้อยมากจนไม่นับสำคัญทางสถิติ

3. ขั้นที่สาม เมื่อเพิ่ม x_1 เข้าในสมการ x_1 ได้แก่อายุของผู้รับทุน

จากสมการ $Y = a + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_1 X_1$

ได้สมการ $Y = 1.49946 + 0.00574 X_2 - 0.00040 X_3 - 0.00047 X_1$

เมื่อกำหนดให้ a เป็น intercept = 1.49946

b_2 เป็น Partial Regression Coefficient ของ X_2 ต่อ Y
เมื่อ X_3, X_1 คงที่ มีค่า = 0.00574*

b_3 เป็น Partial Regression Coefficient ของ X_3 ต่อ Y
เมื่อ X_1, X_2 คงที่

มีค่า = -0.0040*

b_1 เป็น Partial Regression Coefficient ของ X_1 ต่อ Y
เมื่อ X_2, X_3 คงที่

มีค่า = -0.0047^{6/}

6/ ค่า $b_1 = -0.00047$ แสดงว่าความสัมพันธ์ระหว่าง x_1 และ y_1 เป็นไปในทางกลับกัน กล่าวคือเมื่อ x_1 เพิ่มขึ้น 1 หน่วย ค่า y จะลดลง .00047 หน่วยโดยประมาณ

* พึงสังเกตุว่า ค่า b_2, b_3 เปลี่ยนไปจากเดิมแต่เครื่องหมายยังคงเดิม ทั้งนี้เนื่องจากการเพิ่มตัวแปรอิสระ x_1 เข้าในสมการ

$$\text{มัธยิมเลขคณิตของ } x_1 (\bar{x}_1) = 32 \text{ ปี}$$

$$\text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.E.)} = 5.21$$

$$\text{Coefficient of variation (C.V.)} = 16.28\%$$

แสดงว่าการกระจายของอายุผู้รับทุนเมื่อเปรียบเทียบกับมัธยิมเลขคณิต

$$\text{ของอายุ} = 16.28\%$$

นั่นคือผู้รับทุนแต่ละคนมีอายุต่างกันพอประมาณ

$$s_{b_2} = .00267, \quad t_2 = 2.150^*$$

$$\therefore \text{Reject } H_0 : \beta_2 = 0 \text{ ที่ } \alpha = .05$$

$$s_{b_3} = 0.00116, \quad t_3 = +0.347$$

$$\therefore \text{Accept } H_0 : \beta_3 = 0 \text{ ที่ } \alpha = .05$$

$$s_{b_1} = 0.00953, \quad t_1 = -0.049$$

$$\therefore \text{Accept } H_0 : \beta_1 = 0 \text{ ที่ } \alpha = .05$$

สรุปผลจากการทดสอบค่า b_i ในสมการสุดท้ายได้ดังนี้คือ

1. การเปลี่ยนแปลงของ x_2 มีอิทธิพลต่อการเปลี่ยนแปลงของ y อย่างมีนัยสำคัญที่ $\alpha = .05$
2. การเปลี่ยนแปลงของ x_3 ไม่มีอิทธิพลต่อการเปลี่ยนแปลงของ y ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$
3. การเปลี่ยนแปลงของ x_1 ไม่มีอิทธิพลต่อการเปลี่ยนแปลงของ y ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$

$$\text{Multiple correlation coefficient } r_{y\hat{y}} = 0.183$$

จากตาราง 2/ ค่า $R_{.05} = .225$, $R_{.01} = .270$ เมื่อมีตัวแปรอิสระ 3 ตัว
 \therefore ค่า $r_{y\hat{y}} = 0.183$ น้อยกว่าค่าในตาราง
 ความสัมพันธ์ของ y, \hat{y} ไม่เป็นที่ยอมรับที่ $\alpha = 0.05, .01$
 นั่นคือค่าประมาณ \hat{y} ไม่เป็นที่ยอมรับที่ $\alpha = 0.05, .01$

การหาค่าความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ จาก CORRELATION MATRIX

	Y	X ₁	X ₂	X ₃
Y	1.00000	-0.04981	0.17963	-0.06532
X ₁		1.00000	-0.16381	0.52201
X ₂			1.00000	-0.17691
X ₃				1.00000

CORRELATION MATRIX มีลักษณะเป็น Symmetric Matrix

เมื่อกำหนดให้ a_{ij} เป็น element ของ matrix แถวที่ i และคอลัมน์ที่ j

$a_{12} = a_{21}$ เป็นค่าแสดงความสัมพันธ์ของ Y และ $X_1 = -0.04981$

แสดงว่าความสัมพันธ์ของคะแนนเฉลี่ยในต่างประเทศและอายุเป็นไปในทางกลับกัน ตัวอย่างเช่น ผู้ที่รับทุนอายุมากจะมีคะแนนเฉลี่ยในต่างประเทศน้อย
 " " " " " มาก

2/ ค่า R ได้จากตารางของหนังสือ PRINCIPLES AND PROCEDURES OF STATISTICS ของ STEEL & TORRIE หน้า 453

ค่าต่าง ๆ ในตารางมีความหมายดังต่อไปนี้

ก. ค่าสัมประสิทธิ์ของคะแนนเฉลี่ยในมหาวิทยาลัยต่างประเทศ

ค่าสัมประสิทธิ์ของคะแนนเฉลี่ยในมหาวิทยาลัยต่างประเทศ	= 3.3	แต้มเฉลี่ย
" อายุ ของผู้รับทุน	= 32	ปี
" คะแนนภาษาอังกฤษ	= 322	คะแนน
" ระยะเวลาตั้งแต่จบมหาวิทยาลัยในประเทศจนถึงวันไปศึกษาต่อในต่างประเทศ	= 78	เดือน

ข. ค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย (C.V.) ของตัวแปรต่าง ๆ

1. ค่า C.V. ของคะแนนภาษาอังกฤษของผู้รับทุนมีค่าน้อยที่สุด แสดงว่าผู้รับทุนแต่ละคนมีคะแนนภาษาอังกฤษใกล้เคียงกัน ทั้งนี้เพราะผู้รับทุนทุกคนต้องสอบภาษาอังกฤษ (ALI/GU TEST) ให้ได้อย่างน้อย 290 คะแนน จึงจะได้รับการพิจารณาให้เร่่าศึกษาต่อในมหาวิทยาลัยต่างประเทศได้ ส่วนคะแนนชั้นสูงก็มีขีดจำกัดตามความสามารถของผู้รับทุนแต่ละคน ดังนั้นคะแนนภาษาอังกฤษของผู้รับทุนจึงกระจายอยู่ในช่วงหนึ่ง ซึ่งมีความแตกต่างกันไม่มาก

2. ค่า C.V. ของระยะเวลาดังแต่จบมหาวิทยาลัยในประเทศจนถึงวันไปศึกษาต่อต่างประเทศมีการกระจายมากที่สุดในบรรดาตัวแปรทั้ง 4 ตัว แสดงว่าผู้รับทุนแต่ละคนจบจากมหาวิทยาลัยมาเป็นระยะเวลาานแตกต่างกันมาก ทั้งนี้เนื่องจาก ไม่มีข้อกำหนดแน่นอนว่า ผู้รับทุนจะได้ไปศึกษาต่อต่างประเทศเมื่อทำงานมานานกี่ปี แต่ผู้รับทุนจะถูกคัดเลือกตามความเหมาะสมของหน้าที่การงานที่ปฏิบัติและความต้องการของหน่วยราชการนั้น ๆ ช่วงระยะเวลาดังแต่จบมหาวิทยาลัยจนถึงวันไปศึกษาต่อต่างประเทศของผู้รับทุนแต่ละคน จึงแตกต่างกันมาก



3. ค่า C.V. ของอายุของผู้รับทุนน้อยกว่าค่า C.V. ของระยะเวลาที่จบจากมหาวิทยาลัย ทั้ง ๆ ที่ค่าทั้งสองไม่ควรแตกต่างกันมาก แต่เหตุที่ค่า C.V. ของอายุมีค่าน้อยกว่าประมาณ 3 เท่า เนื่องจากถึงแม้ว่าผู้รับทุนจะมีอายุเท่ากัน ช่วงระยะเวลาตั้งแต่จบมหาวิทยาลัยจนถึงวันไปศึกษาต่อต่างประเทศของผู้รับทุนอาจแตกต่างกันมาก เพราะคนหนึ่งจบจากมหาวิทยาลัยเมื่ออายุน้อย แต่อีกคนหนึ่งจบจากมหาวิทยาลัยเมื่ออายุมาก จึงทำให้ C.V. ของอายุมีค่าน้อยกว่า C.V. ของช่วงเวลาตั้งแต่จบมหาวิทยาลัย จนถึงวันไปศึกษาต่อต่างประเทศ

4. คะแนนเฉลี่ยในมหาวิทยาลัยต่างประเทศ มีค่า C.V. ไม่มากนัก เนื่องจากผู้รับทุนทุกคนต้องสอบให้ผ่านคะแนนเฉลี่ยขั้นต่ำที่กำหนด คือ 3 แต้มเฉลี่ย ส่วนคะแนนชั้นสูง ก็มีขีดจำกัดตามความสามารถของผู้รับทุนแต่ละคน C.V. ของ Y จึงมีความกระจายไม่มาก

การประมาณค่า \hat{Y} จากสมการ

โดยปกติการพยากรณ์ค่า Y มักทำโดยการแทนค่าตัวแปรอิสระต่าง ๆ เพื่อหาค่าตัวแปรตามทางซ้ายมือ

$$\text{จากสมการ } Y = 1.49946 + 0.00574x_1 - 0.00040x_2 - 0.00047x_3$$

โดยการแทนค่า x_1, x_2, x_3 ก็จะได้ค่า Y ตามต้องการ

ในกรณีนี้ค่า $R = r_{yy}$ ที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่า $r_{.05}, r_{.01}$

ซึ่งแสดงว่าความสัมพันธ์ของ Y ค่าจริง และ \hat{Y} ค่าประมาณไม่อยู่ในระดับที่มัยนัยสำคัญ (ที่ $\alpha = .05, .01$) ดังนั้นถ้าเราจะใช้สมการดังกล่าวข้างต้นพยากรณ์ ความสำเร็จของผู้รับทุนก็จะทำให้เราไม่สามารถจำกัด ความผิดพลาด (error) ในการประมาณค่า Y ตามวิธีทางสถิติได้

อย่างไรก็ตาม ถ้าเรายอมรับความผิดพลาดที่เกิดขึ้นมากกว่า 5% ในกา.พยากรณ์ เราก็สามารถประมาณค่า \hat{Y} ของผู้รับทุนอย่างใด ๆ จาก ตัวแปร 3 ตัว ดังกล่าว (ดูรายละเอียดของตัวเลขเกี่ยวกับค่าตัวแปรต่าง ๆ และค่า \hat{Y} ที่คำนวณได้ในภาคผนวก)

* * * * *