บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 สมมติฐานเบื้องต้นสำหรับการวิเคราะห์คานคอดินเป็นฐานราก

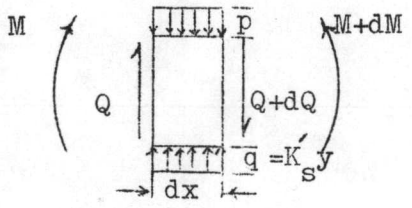
ในการออกแบบคานคอดินเพื่อใช้เป็นฐานรากนั้นจะต้องใช้ทฤษฎีคานวางบนฐานยืดหยุ่น (Theory of Beam on Elastic Foundation) และทฤษฎีกำลังแบกทานของดิน (Theory of Soil Bearing Capacity) ดังที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 1 ในบทที่ 2 นี้ จะกล่าวถึงทฤษฎีทั้งสองรวมทั้งตัวประกอบทฤษฎีอื่น ๆ ที่ใช้ในการวิเคราะห์คานคอดิน และในการวิเคราะห์นี้จะต้องอาศัยสมมุติฐานเบื้องต้นดังต่อไปนี้

2.1.1 ดินที่รองรับคานคอดินมีเนื้อเป็นเอกพันธ์ (Homogeneous) และมีคุณสมบัติทางกายภาพและทางกลศาสตร์เหมือนกันรอบด้าน (Isotropic) และมีการทรุดตัวตามธรรมชาติ

2.1.2 ดินมีความยืดหยุ่นอย่างสมบูรณ์ หรือเป็นไปตาม Hook's Law ภายในช่วงน้ำหนักบรรทุกที่ทำการวิเคราะห์ กล่าวคือแรงปฏิกิริยาของดินที่รองรับคานคอดินที่ทุก ๆ จุดใต้คานคอดินเป็นปฏิภาค โดยตรง กับการทรุดตัวของดินภายใต้คานคอดิน[1]

2.1.3 แรงเสียดทานระหว่างคานคอดินกับผิวดินในแนวราบมีค่าน้อยมาก และไม่นำมาพิจารณาในการวิเคราะห์

2.2 Differential Equation of the Elastic Line[2]



รูปที่ 2.1

จากชิ้นส่วนเล็ก ๆ dx ที่ตัดจากคานคอดินที่ยาวมาก ซึ่งประกอบด้วยแรงกระทำต่อชิ้นส่วนตามรูปที่ 2.1 เนื่องจากชิ้นส่วนนี้อยู่ในภาวะสมดุลย์จะได้สมการของ Elastic Line ดังนี้

---

[1] Winkler, E. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit (Prag. 1867), p.182.

[2] Hetényi, M. Beam on Elastic Foundation. University of Michigan Press, Ann Arbor Mich., 1946, pp.3-4, 53-4.

หอสมุดกลาง จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$E_b I_b \frac{d^4y}{dx^4} + K'_s y = p \quad \ldots\ldots\ldots (2.2\text{-}1)$$

โดย $K'_s = K_o B$

ถ้าแรงกระทำต่อคานคอดินเป็นน้ำหนักบรรทุกที่ลงเป็นจุด ก็จะได้ $p = 0$

และเมื่อจัดรูปสมการ (2.2-1) ใหม่ โดยกำหนดให้ $\lambda = \sqrt[4]{\frac{K'_s}{4E_b I_b}}$ ...(2.2-2)

จะได้สมการ Elastic Line ในรูป

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\lambda^4 y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2.2\text{-}3)$$

General Solution ของสมการ (2.2-3) สำหรับคานคอดินที่มีความยาวปานกลาง (ดูข้อ 2.3) และมีแรงกระทำ (P) กระทำที่จุดกึ่งกลางตามยาวของคานพอดี คือ

การทรุดตัวที่ระยะ X ใด ๆ จากแรงกระทำ (P)

$$Y_x = \frac{P\lambda}{2K'_s\left[\text{Sinh}\lambda L + \sin\lambda L\right]}\left[\begin{array}{l}\text{Cosh}\lambda x\cos\lambda(L-x)+\cos\lambda x\,\text{Cosh}\lambda(L-x)+\text{Sinh}\lambda x\sin\lambda(L-x)+\\ \sin\lambda x\,\text{Sinh}\lambda(L-x)+2\text{Cosh}\,\lambda x\,\cos\lambda x\end{array}\right] \ldots\ldots (2.2\text{-}4)$$

การทรุดตัวที่จุดกึ่งกลางคาน $(x=0)$ $Y_c = \frac{P\lambda}{2K'_s}\,\frac{\text{Cosh}\lambda L + \cos\lambda L + 2}{\text{Sinh}\lambda L + \sin\lambda L} \ldots\ldots (2.2\text{-}4a)$

การทรุดตัวที่จุดปลายสุดของคาน $(x=\frac{L}{2})$ $Y_A = Y_B = \frac{2P\lambda}{K'_s}\,\frac{\text{Cosh}\frac{\lambda L}{2}\cos\frac{\lambda L}{2}}{\text{Sinh}\lambda L + \sin\lambda L}$ ...(2.2-4b)

Slope ของคานที่จุด x ใด ๆ จากแรงกระทำ (P)

$$\theta_x = \frac{P\lambda^2}{K_s'} \frac{\left[\text{Sinh}\lambda x\{\cos\lambda x+\cos\lambda(L-x)\} - \sin\lambda x\{\text{Cosh}\lambda x+\text{Cosh}\lambda(L-x)\}\right]}{\text{Sinh}\lambda L + \sin\lambda L} \quad \ldots(2.2\text{-}5)$$

Slope ที่ปลายสุดของคาน $(x = \frac{L}{2})$

$$\theta_A = -\theta_B = -\frac{2P\lambda^2}{K_s'} \frac{\text{Sinh}\frac{\lambda L}{2}\cos\frac{\lambda L}{2} - \sin\frac{\lambda L}{2}\text{Cosh}\frac{\lambda L}{2}}{\text{Sinh}\lambda L + \sin\lambda L} \quad \ldots(2.2\text{-}5a)$$

แรงดัดที่จุด x ใด ๆ จากแรงกระทำ (P)

$$M_x = \frac{P}{4\lambda\left[\text{Sinh}\lambda L+\sin\lambda L\right]}\Big[\text{Sinh}\lambda x\{\sin\lambda x-\sin\lambda(L-x)\} - \text{Cosh}\lambda x\{\cos\lambda x+\cos\lambda(L-x)\} + \sin\lambda x\{\text{Sinh}\lambda x-\text{Sinh}\lambda(L-x)\} + \cos\lambda x\{\text{Cosh}\lambda x + \text{Cosh}\lambda(L-x)\}\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2\text{-}6)$$

แรงดัดสูงสุดที่จุดกึ่งกลางคาน (x = 0)

$$M_c = \frac{P}{4\lambda}\frac{\text{Cosh}\lambda L - \cos\lambda L}{\text{Sinh}\lambda L + \sin\lambda L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2\text{-}6a)$$

ค่าแรงเฉือนที่จุด x ใด ๆ จากแรงกระทำ P

$$Q_x = \frac{P}{2}\frac{\left[\text{Cosh}\lambda x\{\sin\lambda x-\sin\lambda(L-x)\}+\cos\lambda x\{\text{Sinh}\lambda x- \text{Sinh}\lambda(L-x)\}\right]}{\text{Sinh}\lambda L + \sin\lambda L} \quad \ldots(2.2\text{-}7)$$

แรงเฉือนสูงสุดที่จุดกึ่งกลางคาน (x = 0)

$$Q_c = \frac{P}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2\text{-}7a)$$

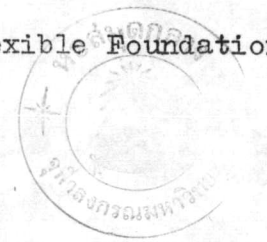
2.3 การจำแนกคานตาม Stiffness ของคานและคุณสมบัติของดิน

ในการวิเคราะห์คานคอดินในหัวข้อ 2.2 นั้น เนื่องจากค่า λL แสดงค่า Relative Stiffness ของคานวางบนฐานยืดหยุ่น และมีส่วนสัมพันธ์กับขนาดของความโค้งของ Elastic Line และนอกจากนี้ค่า λL ยังเป็นตัวแสดงระยะตามยาวบนคานคอดินที่น้ำหนักบรรทุกจะแผ่อิทธิพลไปถึง ดังนั้นค่า λL จึงมีความสำคัญในการจำแนกคานคอดิน ซึ่ง M. Hetényi[3] ได้จำแนกไว้เป็น 3 ชนิด คือ

2.3.1 คานสั้น มีค่า $\lambda L < \frac{\pi}{4}$ ถือว่าเป็น Rigid Foundation

2.3.2 คานยาวปานกลาง มีค่า $\frac{\pi}{4} < \lambda L < \pi$ ถือว่าเป็น Flexible Foundation

2.3.3 คานยาว มีค่า $\lambda L > \pi$ ถือว่าเป็น Flexible Foundation เช่นกัน



2.4 The Modulus of Subgrade Reaction

ในการวิเคราะห์สมการของ Elastic Line ในหัวข้อ 2.2 จะเห็นว่าค่า Modulus of Subgrade Reaction K_s' (บางทีก็เรียก Modulus of Foundation หรือ Coefficient of Subgrade Reaction) เป็นตัวประกอบสำคัญมากตัวหนึ่ง เพราะเป็นตัวประกอบที่มีความสัมพันธ์กับขนาดของน้ำหนักบรรทุก (P) ขนาดแรงดัด (M) และการทรุด (Y) ค่า K_s' นี้ ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติต่าง ๆ ของดิน เช่น ความชื้น ความแน่น ความอิ่มตัว และกำลังของดิน นอกจากนี้ยังขึ้นอยู่กับขนาดและรูปร่างของฐานรากด้วย

Modulus of Subgrade Reaction เป็นอัตราส่วนระหว่างความดันของดิน

---

[3] Ibid., p.46.

(Soil Pressure) กับค่าการทรุดตัวของดินในช่วงที่ดินยังอยู่ในพิกัดยืดหยุ่น (Elastic Limit) ซึ่งอาจแสดงได้โดยสมการดังนี้

$$K_s = \frac{q}{y} \quad \text{.....(2.4-1)}$$

ในกรณีที่ใช้ตานดอดินเป็นฐานราก Terzaghi[4] (1955) ได้เสนอ empirical equation ในการหาค่า Modulus of Subgrade Reaction ดังนี้

$$K_m = K_o \left[\frac{m+0.5}{1.5\ m}\right] \quad \text{.....(2.4-2)}$$

โดย $m = \frac{L}{B}$ และ K_o เป็น Modulus of Subgrade Reaction ที่ได้จากการทดลองโดยใช้ Plate ขนาด 1 ฟุต x 1 ฟุต

จะเห็นว่าเมื่อ $m\ B \longrightarrow \infty$ หรือตานยาวมาก ๆ

$$K_m = 0.667\ K_o \quad \text{.....(2.4-2a)}$$

ในปี 1961 Vesic[5] ได้เสนอสูตรสำหรับหาค่า Modulus of Subgrade Reaction สำหรับฐานรากรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนี้

$$K_s' = 0.65 \sqrt[12]{\frac{E_s B^4}{E_b I_b}} \frac{E_s}{(1-\mu^2)} \quad \text{.....(2.4-3)}$$

ค่า E_s เป็นค่า Modulus of Elasticity ของดิน ซึ่งหาได้จากการทดลอง Plate Load Test โดยใช้ Plate ขนาด 1'x 1' และสำหรับหาค่าที่เกินจาก Plate Load Test, E_s จะหาได้จากสูตร

---

[4] Terzaghi, K. Evaluation of Coefficient of Subgrade Reaction, Geotechnique, London, Vol.5, no.4, 1955, pp.297-326.

[5] Vesić A.B, Bending of Beams Resting on Isotropic Elastic Solid, J. Eng. Mech. Div. ASCE Vol,EM2-87, April 1961 pp.35-53.

$$E_s = I_w B \frac{q}{y} (1-\mu^2) \quad \text{.....(2.4-4)}$$

โดย I_w= Influence Factorสำหรับ Plate สี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีค่า = 0.815 [6] เมื่อกำหนดให้ $\frac{q}{y} B = K_o B = K'$ แล้ว แทนค่าในสมการ (2.4-4) จะได้ $E_s = 0.815 K'(1-\mu^2)$...(2.4-5) แทนค่า E_s ในสมการของ Vesić จะได้

$$K_s' = 0.515 \sqrt[12]{\frac{K' B^4 (1-\mu^2)}{E_b I_b}} K' \text{.....(2.4-6)}$$

ค่า K_s' ในสมการ (2.4-6) เป็นค่า Modulus of Subgrade Reaction ที่ใช้ในการวิเคราะห์ในหัวข้อ 2.2

2.5 การทรุดตัวของดินในฟิกัดยืดหยุ่น (Elastic Settlement of Foundation)

เมื่อดินได้รับน้ำหนักจะเกิดความเค้น (Strain) ในดินโดยที่ปริมาตรของดินไม่เปลี่ยนแปลง การทรุดตัวของดินนี้เกิดขึ้นโดยที่ไม่เกิด **dissipation of pore** pressure และเป็นการทรุดตัวในช่วงที่ดินยังอยู่ในฟิกัดยืดหยุ่น ซึ่งเรียกการทรุดตัวนี้ว่า "Initial Settlement"

การทรุดตัวในฟิกัดยืดหยุ่นนี้ David J.D.' Appolonia; Harry, G. Poulos and Charles, C. Ladd [7] (1971) ได้เสนอสมการที่ใช้คำนวณหาค่าการทรุดตัวดังต่อไปนี้

$$Y_i = \frac{qB I_w}{E_u} \quad \text{.....(2.5-1)}$$

---

[6] Bowles, J.E. Foundation Analysis and Design, New York. McGraw-Hill Book Company Inc., 1968, Table 2-12, p.87.

[7] Appolonia, David, J.D., Harry G.Poulos, and Charles, C.Ladd Initial Settlement of Structure on Clay. Journal of ASCE Division of Soil Mechanics. October, 1971.

Boussineaq ใช้ Elastic Theory ในการหาสูตรสำหรับการทรุดตัวของดินดังนี้

$$Y_i = \frac{q\,B\,I_w\,(1-\mu^2)}{E_s} \qquad \text{.....} \quad (2.5\text{-}2)$$

จากสมการ (2.5-1,2) จะเห็นว่าตัวประกอบที่ต้องพิจารณานอกเหนือไปจากความดัน (q) ความกว้าง (B) ค่า Undrained Young Modulus (E_u) แล้ว ค่า Influence Factor (I_w) และค่า Poisson's Ratio (μ) ของดินก็มีส่วนสำคัญซึ่งต้องพิจารณาต่อไป

ค่า Influence Factor (I_w) ขึ้นอยู่กับจุดที่จะพิจารณาและรูปร่างของฐานราก Terzaghi[8] (1943) ได้เสนอสูตร สำหรับหาค่า Influence Factor at Corner of a Loaded area ดังนี้

$$I_w = \frac{1}{\pi}\left[\frac{L}{B}\ln\left(\frac{1+\sqrt{(L/B)^2+1}}{L/B}\right) + \ln\left(\frac{L}{B}+\sqrt{\left(\frac{L}{B}\right)^2+1}\right)\right] \qquad \text{....} \quad (2.5\text{-}3)$$

และ Influence factor at center of Loaded area เป็นสองเท่าของค่า I_w ที่มุมของฐานราก ดังที่แสดงไว้ใน Table 2 - 12 [9] ค่า I_w ที่ศูนย์กลางแรงกระทำ ค่า I_w ที่มุมของฐานรากและค่า I_w เฉลี่ย แสดงในรูปที่ 2.2 (ภาคผนวก ก.)

ค่า Poission's Ratio (μ) ของดินเหนียวนั้น ได้มีการหาค่าไว้ดังนี้

Terzaghi[10] (1943) μ_{clay} = 0.4 ถึง 0.43

---

[8] Terzaghi, K. Theoretical Soil Mechanics. John Wiley, & Sons, Inc., New York. 1943, p.382.

[9] Bowles, J.E. loc.cit.

[10] Terzaghi, K. Ibid Chap.8.

G.I. Pokrovsky[11] $\mu_{clay} = 0.38 - 0.4$

D.D. Barkan and R.Z. Katsenelenbogen[12]

$\mu_{clay} = 0.5$

$\mu_{clay+30\% sand} = 0.42$

2.6 ทฤษฎีกำลังแบกทานของดิน (Theory of Soil Bearing Capacity)

เนื่องจากการทรุดตัวของดินในช่วงที่ดินยังอยู่ในพิกัดยืดหยุ่นมีค่าต่ำมาก ทำให้คานคอดินรับน้ำหนักตามทฤษฎีของคานวางบนฐานยืดหยุ่นได้น้อยลงด้วย เพื่อให้คานคอดินสามารถรับน้ำหนักได้มากขึ้น การใช้ทฤษฎีกำลังแบกทานของดินเข้าช่วยประยุกต์ จะทำให้คานคอดินสามารถรับน้ำหนักได้มากขึ้น Prandtl[13] (1920) ได้คิดสูตรสำหรับ Ultimate Bearing Capacity ของดินสำหรับฐานรากแถบยาวดังนี้

$$q_d = \frac{c}{\tan \phi}\left[\tan^2 (45+ \phi/2)\, e^{\pi \tan \phi} - 1\right] \quad ....(2.6\text{-}1)$$

เพื่อมิให้ $q_d = 0$ เมื่อ $c=0$ Terzaghi[14] (1943) เสนอให้เพิ่ม equivalent weight of surcharge เข้าไป ซึ่งทำให้ สมการของ Prandtl ถูกดัดแปลงเป็น

$$q_d = \frac{c+c'}{\tan \phi}\left[\tan^2(45 + \phi/2)\, e^{\pi \tan \phi} -1\right] \quad .....(2.6.\text{-}2)$$

โดย $c = r\, t \tan \phi$

r = unit weight ของดิน

t = equivalent height of surcharge

---

[11] Barkan, D.D. Dynamics of Bases and Foundations. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962, pp.12-3.

[12] Barkan, D.D. loc.cit.

[13] Jumikis, A.R. Soil Mechanics D.Van Nostrand Company, Inc., 1962, pp.618-25.

[14] Terzaghi, K. Ibid p.510.

A.R.Jumikis[15] ได้ดัดแปลงสมการของ Prandtl หลังจากที่ Terzaghi ได้ดัดแปลงแล้วอีก โดยเพิ่มแรงต้านเนื่องจากความลึกของฐานรากเข้าไปอีก ซึ่งได้สมการเป็น

$$q_d = \frac{(c+c')}{\tan \phi} \left[\tan^2(45+\phi/2)\, e^{\pi \tan \phi} - 1 \right] + rD \tan^2(45+\phi/2) \quad ..(2.6\text{-}3)$$

Terzaghi[16] (1943) เสนอสูตรสำหรับคิด Ultimate Bearing Capacity โดยคิดให้เกิด failure แบบ General Shear Failure สำหรับฐานราก แถบยาวดังนี้

$$q_d = c N_c + \frac{r B}{2} N_r + r D N_q \quad .....(2.6\text{-}4)$$

ตัวประกอบ N_c N_q N_r ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของดิน แต่ไม่ขึ้นอยู่กับขนาดของฐานราก ในกรณีที่ฐานรากฝังในดินลึก น้อยกว่าความกว้าง B เทอม $r D N_q$ จะตัดทิ้งได้

Donald W.Taylor[17] (1948) แก้ไข สูตรของ Prandtl โดยเพิ่ม Over Burden Pressure เข้าไป เพื่อให้ดินมีกำลังสูงขึ้น และได้สมการคือ

$$q_d = \left[\frac{c}{\tan \phi} + \frac{r B}{2} \tan (45+\phi/2) \right] \left[\tan^2(45+\phi/2)\, e^{\pi \tan \phi} - 1 \right] \quad ...(2.6\text{-}5)$$

---

[15] Jumikis A.R. Ibid., pp.625-6.

[16] Terzaghi K. Ibid., Chap.8.

[17] Taylor, D.W. Fundamental of Soil Mechanics. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York 1948, p.573.

สูตร Ultimate Bearing Capacity ที่กล่าวมาทั้งหมดนี้เป็นสูตรสำหรับดินทั่วไป หรือ ϕ - c Soil สำหรับดินที่เป็นดินเหนียวล้วนๆอย่างดินกรุงเทพฯค่า $\phi=0$ เมื่อพิจารณาให้ค่า $\phi = 0$ แล้ว สูตร Ultimate Bearing Capacity ที่หามาได้ตั้งแต่ต้นจะลดลงเหลือดังต่อไปนี้

สูตรของ Prandtl (2.6-1) $q_d = 5.14\ c$

Terzaghi(2.6-2) $q_d = 5.7\ c$ ..(2.6-6)

AR. Jumikis(2.6-3) $q_d = 5.14(c+r\ t)+ rD$

Tschebotarioff[18](1951) คิดสูตร Ultimate Bearing Capacity เนื่องจาก failure ของดินเป็น รูปวงกลม ได้สูตร

$$q_d = c\left(2\pi + 2\frac{D}{B}\right) + r\,D \quad \text{.....(2.6-7)}$$

เมื่อให้ $D = 0$ คือให้ฐานรากวางที่ผิวดินจะได้

$$q_d = 6.28\ c \quad \text{.....(2.6-8)}$$

Fellenius[19](1929) คิดสูตร Utimate Bearing Capacity โดยคิดจาก cylindrical failure surface ได้

$$q_d = 5.52\ c \quad \text{.....(2.6-9)}$$

Hansen,J.Brinch[20] (1957) ได้พิจารณาดัดแปลงสูตร Ultimate Bearing Capacity ของ Terzaghi โดยคิดความสัมพันธ์ของความกว้าง

---

[18]Tschebotarioff, G.P. Soil Mechanics, Foundations, and Earth Structures McGraw-Hill Book Company, Inc.,1951. p.223.

[19]Tschebotarioff, G.P. Loc.cit.,

[20]Hansen,J. Brinch, Foundation of Structures General Report Proc.4 Intern. Conf. on Soil Mech. and Foundation Engineering, II London.1957 pp.441-47.

ความยาว ความลึกของฐานรากและแขนงของแรงในแนวราบและแนวดิ่งเข้าประกอบกัน เป็นสูตรใหม่ สำหรับดินเหนียว คือ

$$q_d = 5c\ (1+0.2\ \frac{B}{L})(1+0.2\ \frac{D}{B})\ (1-1.3\ \frac{H}{V}) + rD \quad ....(2.6-10)$$

โดยจำกัดให้ $B \leq L$ $D \leq 2.5\ B$ และ $H \leq 0.4\ V$

H, V = แขนงแรงในแนวราบและแนวดิ่งที่กระทำต่อฐานราก

D = ความลึกของฐานรากวัดจากผิวดินถึงส่วนล่างสุดของฐานราก

ในปี 1967 Terzaghi and Peck[21] ได้แก้ไขสูตร Ultimate Bearing Capacity ให้ง่ายขึ้น สำหรับ Undrained Loading ดังนี้

$$q_d = N_c S_u + r\ D \quad .....(2.6-11)$$

ซึ่ง $N_c = 5\ (1+0.2\ \frac{B}{L})$.

$= 5.14$ สำหรับฐานรากยาว ๆ

S_u = Undrained Shear Strength ของดิน

001596

---

[21] Terzaghi, K. and R.B. Peck, Soil Mechanics in Engineering Practice 2nd Ed, John Wiley & Sons Inc., New York. 1967.