บทที่ 2

ความรู้ที่ใช้ในการแก้ปัญหา

ปัญหาที่จะศึกษานี้ อาจจะแยกศึกษาเป็นส่วนใหญ่ ๆ ได้ 2 ส่วน คือ

2.1 การพยากรณ์ความต้องการในอนาคต

2.1.1 อนุกรมเวลา (Time Series) ข้อมูลของการลำเลียงทางอากาศที่เก็บมาได้นั้นเป็นข้อมูลที่ได้จัดให้เรียงตามลำดับเวลาที่เกิดขึ้น เรียกว่า อนุกรมเวลา ซึ่งอนุกรมเวลานี้มีการเปลี่ยนแปลง หรือความเคลื่อนไหว แบ่งออกเป็น 4 แบบด้วยกัน คือ

2.1.1.1 แนวโน้มตามลำดับเวลา (Secular Movements or Secular Trend) คือ การเติบโตหรือถดถอยของข้อมูลในระยะยาว ซึ่งอาจจะเป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้งก็ได้

2.1.1.2 การเคลื่อนไหวเป็นวัฏจักร (Cyclical Movements) คือ การแกว่งกลับไปมา เริ่มจากจุดสูงสุดไปยังจุดต่ำสุด และกลับขึ้นมายังจุดสูงสุดอีก ความเคลื่อนไหวนี้ไม่จำกัดเวลา ช่วงระยะเวลาและขนาดมากน้อย

2.1.1.3 การแปรผันตามฤดูกาล หรือเป็นคาบ (Seasonal Movements) คือความเคลื่อนไหวซึ่งค่อนข้างจะสม่ำเสมอทุกระยะเวลา 12 เดือน ความเคลื่อนไหวเช่นนี้เกิดขึ้นทุกปีเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของฤดูกาล แต่โดยทั่วไปแล้ว ช่วงระยะเวลาอาจเป็นวัน ชั่วโมง หรือสัปดาห์ ขึ้นอยู่กับข้อมูลที่สามารถจะหาได้

2.1.1.4 การแปรผันโดยบังเอิญหรือสุ่ม (Irregular or Random Movements) ได้แก่การเปลี่ยนแปลงอันเป็นผลกระทบกระเทือน ซึ่งแปลกไปจากธรรมดา เช่น ภาวะสงคราม ความหายนะ ความนิยมชั่วขณะ ภารกิจที่ต้องปฏิบัติตามคำสั่ง หรือเหตุอื่น ๆ ที่เกิดขึ้นเฉพาะชั่วคราว

2.1.2 การเกลาการกระเพื่อมของอนุกรมเวลา (Smoothing of Time Series)

ข้อมูลที่เป็นอนุกรมเวลา ย่อมมีการกระเพื่อมขึ้นลง ซึ่งเกิดจากเหตุการณ์ไม่ปกติอยู่เสมอ ดังนั้นถ้าหากจะนำมาเกลาการกระเพื่อมเสียก่อน แล้วจึงทำการพยากรณ์ก็ย่อมจะได้ผลคาดคะเนใกล้เคียงกว่า จะพยากรณ์จากข้อมูลเดิม วิธีเกลาการกระเพื่อมที่ใช้กันเสมอ คือวิธีการถัวเฉลี่ยเคลื่อนที่

วิธีถัวเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average) วิธีนี้พยายามเกลาการกระเพื่อมขึ้นลง ซึ่งเกิดจากเหตุการณ์ไม่ปกติ โดยค่อย ๆ เฉลี่ยคะแนนทีละหมู่ (โดยใช้มัชฌิมชนิดใดชนิดหนึ่ง ส่วนมากใช้มัชฌิมเลขคณิต) หมู่หนึ่ง ๆ จะมีกี่คะแนนก็ได้ ในการเฉลี่ยจะค่อย ๆ ทิ้งคะแนนต้นทีละคะแนนแล้วใช้คะแนนใหม่ถัดไปแทนที่ ตัวอย่างเช่น สมมุติว่ามีคะแนนครั้งแรกอยู่ 6 ค่า ด้วยกันคือ $y_1 = 18$, $y_2 = 23$, $y_3 = 22$, $y_4 = 17$, $y_5 = 25$ $y_6 = 15$ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลเหล่านี้คือ $M_6 = 20$

ถ้าให้ M_t เป็นค่าถัวเฉลี่ยจริงของข้อมูลที่ใหม่ที่สุด N ค่า ซึ่งคำนวณเมื่อถึงคะแนนที่ t

$$M_t = \frac{y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + \cdots\cdots + y_{t-N+1}}{N}$$

$$= \frac{y_{t-1} + y_{t-2} + \cdots\cdots + y_{t-N+1} + y_{t-N}}{N} + \frac{y_t - y_{t-N}}{N}$$

$$= M_{t-1} + \frac{y_t - y_{t-N}}{N}$$

ต่อไปสมมุติว่ามีคะแนนใหม่ต่อมาอีกหนึ่งคะแนน คือคะแนนที่ 7 $y_7 = 22$ ถ้าเราคงเฉลี่ยคะแนนที่ใหม่ที่สุดเพียงหกคะแนนเท่าเดิม นั่นคือ N = 6 เราจะได้ค่าถัวเฉลี่ย

$$M_7 = 20 + \frac{22-18}{6} = 20.\dot{6}$$

และถ้า $y_8 = 18$

$$M_8 = 20.\dot{6} + \frac{18-23}{6} = 19.8\dot{3}$$

วิธีการคำนวณค่าถัวเฉลี่ยเคลื่อนที่นี้ เป็นการยากที่จะเปลี่ยนอัตราการตอบสนอง (Rate of Response) ซึ่งอัตราการตอบสนองได้แก่การเลือกจำนวน N ของข้อมูลที่จะนำมาถัวเฉลี่ย เมื่อขบวนการเป็นขบวนการที่คงที่จะเป็นการดี ถ้าเราใช้ค่า N ใหญ่ เพื่อที่จะได้ค่าเฉลี่ยที่ดี เมื่อขบวนการเปลี่ยนไปการใช้ค่า N เล็ก จะดีกว่าเพื่อที่จะให้การตอบสนองต่อขบวนการที่กำลังเปลี่ยนนั้นอย่างรวดเร็ว นอกจากนั้นการใช้ค่า N ใหญ่ จะทำให้ข้อมูลตอนต้นและตอนปลายของอนุกรมหายไปมาก และอาจจะทำให้เกิดการเคลื่อนไหวเป็นวัฏจักร หรือการเคลื่อนไหวอย่างอื่น ๆ ซึ่งความจริงแล้วอาจไม่มีในข้อมูลเริ่มต้น แต่อย่างไรก็ตามวิธีถัวเฉลี่ยเคลื่อนที่เป็นวิธีที่ง่ายและตรงไปตรงมา ค่าเฉลี่ยของผลบวกกำลังสองของความแตกต่างระหว่างข้อมูลที่ใหม่ที่สุด N ข้อมูล กับค่าประมาณตัวคงที่จะมีค่าน้อยที่สุด อีกทั้งยังง่ายต่อการที่จะใช้เครื่องจักรช่วยในการคำนวณ หรือจะไม่ใช้ก็ได้

2.1.3 <u>วิธีพยากรณ์</u> ข้อมูลซึ่งเป็นชนิดอนุกรมเวลานั้น มีวิธีพยากรณ์ที่น่าสนใจอยู่ 2 วิธี คือ วิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอคโพเนนเชียล (Exponentially Weighted Moving Averages) กับวิธี ลิเนียร์ รีเกรสชั่น (Linear Regression)

วิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอคโพเนนเชียล มีวิธีการคล้ายกับวิธีถัวเฉลี่ยเคลื่อนที่ในข้อ 2.1.2 อัตราการตอบสนอง (การเลือกค่า N มาเฉลี่ย, $\frac{1}{N}$) ของวิธีถัวเฉลี่ยเคลื่อนที่ก็เหมือนกันกับตัวถ่วงน้ำหนัก (Smoothing Constant, A) ของวิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอคโพเนนเชียล แต่ไม่เท่ากันทีเดียวนัก ตัวถ่วงน้ำหนักของวิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอคโพเนนเชียลนี้ เมื่อเวลาผ่านไปน้ำหนักที่ให้ต่อข้อมูลก่อนๆ จะลดลงอย่างเรขาคณิต สมมุติถ้าตัวถ่วงน้ำหนัก $A = 0.3$ ข้อมูลใหม่จะมีน้ำหนัก 0.3 ข้อมูลก่อน ๆ จะมีน้ำหนักเป็น $(1-0.3)$, $(1-0.3)^2$, $(1-0.3)^3$, ... เรื่อย ๆ ไปตามลำดับ [1] นอกจากนั้นวิธีนี้ยังสามารถปรับปรุงให้ใช้ได้กับอนุกรมที่มีแนวโน้มตามลำดับ

---

[1] สมชาย วยาจุด, <u>การพยากรณ์เงินฝากธนาคารโดยวิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอคโพเนนเชียล</u> (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2515) หน้า 8

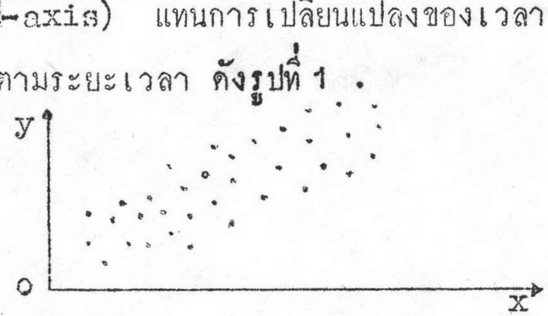
เวลา และการแปรผันตามฤดูกาล ซึ่งมักจะมีปะปนอยู่กับอนุกรมเวลาเสมอ ไม่อย่างใดก็อย่างหนึ่ง [2]

ในกรณีที่มีข้อมูลมากพอสมควร และต้องการพยากรณ์เหตุการณ์ล่วงหน้าในระยะสั้นๆ จึงควรที่จะใช้วิธีนี้พยากรณ์ เพราะให้ความถูกต้องในการพยากรณ์มากทีเดียว กล่าวคือผลบวกของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างข้อมูลเดิมกับค่าประมาณตัวคงที่ จะมีค่าน้อยกว่าวิธีอื่น ๆ ในกรณีที่มีข้อมูลน้อย และต้องการพยากรณ์ล่วงหน้าในระยะยาว วิธีนี้ไม่เหมาะที่จะนำมาใช้ เพราะไม่สามารถจะปรับปรุงอนุกรมที่มีแนวโน้มตามลำดับเวลา และการแปรผันตามฤดูกาลได้ ประการที่สำคัญคือ การพยากรณ์วิธีนี้ให้ตัวถ่วงน้ำหนักกับข้อมูลใหม่มาก ส่วนข้อมูลก่อน ๆ ตัวถ่วงน้ำหนักจะลดลงเรื่อย ๆ ไปตามลำดับ ดังนั้นการพยากรณ์วิธีนี้ความสำคัญจึงขึ้นอยู่กับข้อมูลล่าสุดที่นำมาใช้พยากรณ์ ถ้าข้อมูลล่าสุดมีความผิดปกติมาก การพยากรณ์ก็ผิดพลาดมาก

เมื่อวิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเอคโพเนนเชียลใช้พยากรณ์ เหตุการณ์ล่วงหน้าในระยะยาวกับกรณีซึ่งมีข้อมูลน้อยไม่ได้ผลดีเท่าที่ควร จึงควรหันมาสนใจวิธีพยากรณ์แบบลิเนียร์ รีเกรสชั่นดีกว่า เพราะวิธีนี้เป็นวิธีที่ง่าย ให้ความสำคัญต่อข้อมูลทุกข้อมูลเหมือนกันหมด และไม่จำเป็นต้องใช้เครื่องจักรช่วยในการคำนวณ หากข้อมูลเดิมนั้นได้ผ่านการเกลาการกระเพื่อมเพื่อปรับข้อมูลที่ผิดปกติโดยวิธีถัวเฉลี่ยเคลื่อนที่มาขั้นหนึ่งก่อน แล้วนำมาพยากรณ์ด้วยวิธีนี้ก็จะให้ความถูกต้องดีพอสมควร

<u>ลิเนียร์ รีเกรสชั่น</u> (Linear Regression)

การวิเคราะห์ข้อมูลขั้นมูลฐาน เรานำข้อมูลมาเขียนลงบนแผนภูมิ (graph) โดยให้แกนทางระดับ (X-axis) แทนการเปลี่ยนแปลงของเวลา และแกนทางดิ่ง (Y-axis) แทนปริมาณที่เกิดขึ้นตามระยะเวลา **ดังรูปที่ 1** .



รูปที่ 1

---

[2] เรื่องเดียวกัน, หน้า 10

วิธีหนึ่งที่จะทำนายความสัมพันธ์ของ y ที่เกี่ยวข้องกับ x นั้น เราใช้วิธีการของลิเนียร์ รีเกรสชั่น โดยอาศัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ดังนี้

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon \qquad \text{------(1)}$$

โดยที่ β_0 เป็นค่าคงที่ (Constant) ที่จะหาค่า (Estimate) ได้จากข้อมูล

β_1 เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบต่อ x

ϵ เป็นค่าผิดพลาด (Error)

แบบจำลองดังกล่าวนี้ อาจจะเป็นได้ทั้งแบบจำลองที่แน่นอนและไม่แน่นอน กล่าวคือ ถ้าเรากำหนด x ให้ 1 ค่า แทนค่าในสมการ (1) จะได้ค่า y แน่นอน 1 ค่า (ไม่มี Error, $\epsilon = 0$) เราเรียกว่าเป็นแบบจำลองที่แน่นอน (Deterministic Mathematical Model) ถ้าหากว่า x เป็นตัวแปรชนิดสุ่ม (Random Variable) และกำหนดการแจกแจง (Distribution)ให้อย่างใดอย่างหนึ่ง เราก็เรียกว่าเป็นแบบจำลองที่ไม่แน่นอน (Probabilistic Mathematical Model)

สำหรับปัญหาที่เราจะศึกษาในเรื่องนี้ เราต้องการทราบชั่วโมงบิน น้ำหนักบรรทุกของแต่ละฝูงบินในแต่ละเดือน จึงมีสมมุติฐานดังนี้

1. ϵ เป็นตัวแปรชนิดสุ่ม ที่มีการแจกแจง (Distribution)เป็น $N(0, \sigma_\epsilon^2)$
2. x เป็นตัวแปรชนิดสุ่มที่มีการแจกแจงเป็น $N(\mu_x, \sigma_x^2)$

เมื่อเราต้องการทราบว่า เส้นตรงในสมการ (1) เป็นเส้นตรงที่เหมาะสมดี (Good Fitting Line) หรือไม่นั้น โดยทางปฏิบัติง่าย ๆ เราเลื่อนเส้นตรงนี้ขึ้นลงเพื่อหาตำแหน่งที่เหมาะสมที่สุด จนกระทั่งได้เส้นรีเกรสชั่น (Regression Line) คือ

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \qquad \text{------(2)}$$

โดยการใช้ความรู้เรื่อง Partial Differentiation ในวิธีที่เรียกว่า Method of Least Squares จะหาค่าของ $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ ได้ว่า

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i}{n \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} \qquad \text{------}(3)$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

ซึ่ง Σ หมายถึง $\sum_{i=1}^{n}$ และ $\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n}$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

ในทางทฤษฎีเราถือว่า เส้นตรงในสมการ (2) ซึ่งมีพฤติภาพตามสมการ (3) เป็นเส้นที่ดีที่สุดที่จะใช้แทนการเคลื่อนไหวของกลุ่มของจุดที่ได้มาจากข้อมูล หรือกล่าวอีกนัย–หนึ่ง $\hat{y}$ นี้ก็เหมือนค่าเฉลี่ยของ y_i นั่นเอง การใช้สมการ (2) พยากรณ์เหตุการณ์ข้างหน้าก็กระทำได้ง่าย เช่นเราต้องการทราบน้ำหนักบรรทุกที่เครื่องบินต้องรับภาระในอีก 5 ปีข้างหน้า นับจากเริ่มเก็บข้อมูลได้ ก็แทนค่า $x = 60$ (ถ้า x คือเวลาเป็นเดือน) ลงไปในสมการ (2) ก็จะได้ค่าประมาณของ y ออกมาดังนี้เป็นต้น

2.2 <u>การแก้ปัญหา</u>

2.2.1 <u>รูปแบบของปัญหา</u> จุดประสงค์อันสำคัญของปัญหาที่จะศึกษานี้คือจะพิจารณาว่า ถ้าเราจะซื้อเครื่องบินลำเลียงใหม่แทนของเก่าที่หมดอายุไป เพื่อให้ใช้ในภารกิจดังเดิมได้ และพอใช้ถึงช่วงระยะเวลา 5 ปีข้างหน้าด้วย เราจะซื้อเครื่องบินแบบใหม่หรือแบบเก่าดี ซึ่งเราจะทราบคำตอบได้ก็ต่อเมื่อได้คำนวณค่าใช้จ่ายของเครื่องบินแต่ละแบบออกมา

เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ จะยกข้อมูลที่ใช้ศึกษาบางส่วนมาเป็นตัวอย่าง สมมุติว่าเราทราบสมรรถนะและค่าใช้จ่ายของเครื่องบินแบบ C-47 และ C-123 B เป็นดังนี้

	C-47		C-123 B	
ความเร็วเดินทาง	130	น็อต	145	น็อต
น้ำหนักบรรทุก	3,500	ปอนด์	7,000	ปอนด์
ค่าใช้จ่ายต่อชั่วโมง	3,310	บาท	10,363	บาท

และความต้องการ การลำเลียงทางอากาศในอีก 5 ปี ข้างหน้า มีว่า

จำนวนชั่วโมงบิน ฝูง 62 913 ชั่วโมง

จำนวนชั่วโมงบิน ฝูง 61 1078 ชั่วโมง

น้ำหนักบรรทุกรวม 4,108,753 ปอนด์

ถ้าฝูงบินกำหนดว่า เครื่องบินเครื่องหนึ่ง ๆ จะต้องบินเดือนละ 15 วัน (เดือนหนึ่งมี 22 วันทำการ เครื่องบินจะต้องเข้ารับการซ่อมบำรุงโดยเฉลี่ยแล้วประมาณ 1 ใน 3 ของวันทำการ คงเหลือเวลาบิน 22-7 = 15 วัน) และต้องบินให้ได้ชั่วโมงบินโดยเฉลี่ยเดือนละ 45 ชั่วโมง)

จากข้อมูลดังกล่าวนี้ เราจะสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

ให้ x_1 เป็นจำนวนเครื่องบิน C-47 ที่จะใช้ในฝูง 62

x_2 เป็นจำนวนเครื่องบิน C-123 B ที่จะใช้ในฝูง 61

พฤติภาพเป้าหมาย คือหาค่าต่ำสุดของ $3310 \times 45\, x_1 + 10363 \times 45\, x_2$

ซึ่งต้องสมจริงกับพฤติภาพบังคับ คือ

$$45\, x_1 \geqslant 913$$

$$45\, x_2 \geqslant 1078$$

$$3500 \times 15x_1 + 7000 \times 15x_2 \geqslant 4,108,753$$

จากการพิจารณาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับข้อมูลที่ใช้ศึกษานี้ จะเห็นได้ว่าลักษณะของปัญหาเป็นแบบการจัดโครงการเชิงเส้น (Linear Programming) กล่าวคือเราต้องการพฤติภาพที่จะทำให้เกิดค่าสูงสุด (Maximum) หรือค่าที่ต่ำสุด (Minimum) ขึ้นแก่ตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งในสัมพันธภาพที่เราพิจารณา เช่นในเรื่องการลำเลียงทางอากาศนี้ เราต้องการหาเครื่องบินลำเลียงจำนวนหนึ่ง แบบใด ขนาดไหน ก็ได้ แต่เครื่องบินดังกล่าวนั้นต้องบินให้ได้ชั่วโมงบิน หรือระยะทางครบตามต้องการ บรรทุกพัสดุหรือผู้โดยสารได้ตามที่กำหนด โดยที่ต้องเสียค่าใช้จ่ายน้อย ๆ วิธีไหนเสียค่าใช้จ่ายต่ำที่สุดก็เลือกวิธีนั้น

2.2.2 <u>วิธีการแก้ปัญหา</u> ดังได้พิจารณาแล้วว่า รูปแบบของปัญหาเป็นแบบการจัดโครงการเชิงเส้น(Linear Programming)การแก้ปัญหาแบบนี้มีวิธีการที่น่าสนใจอยู่ 2 วิธี คือ

2.2.2.1 วิธีกราฟ (Graphical Method) เป็นวิธีง่าย ๆ สำหรับแก้ปัญหาที่มีเพียง 2 หรือ 3 ตัวเปลี่ยน โดยปกติจึงไม่ค่อยใช้กันบ่อยนัก การแก้ปัญหาด้วยวิธีกราฟเราจะเริ่มด้วย ทฤษฎีมูลฐานที่ว่า

"A linear function of the form $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ or $[c]'[x]$ which is defined over a convex region $[A][x] \leqslant [B]$ takes its maximum value at the corner point of the region.

Also, $[c]'[x]$ takes its minimum value at the corner point of the region."[3]

ตัวอย่างเช่น ต้องการหาค่าต่ำสุดของ $z = 200x_1 + 160x_2$ ซึ่งขึ้นอยู่กับข้อกำหนดที่ว่า

$$6x_1 + 2x_2 \geqslant 12 \quad \dots\dots (ก)$$

$$2x_1 + 2x_2 \geqslant 8 \quad \dots\dots (ข)$$

$$4x_1 + 12x_2 \geqslant 24 \quad \dots\dots (ค)$$

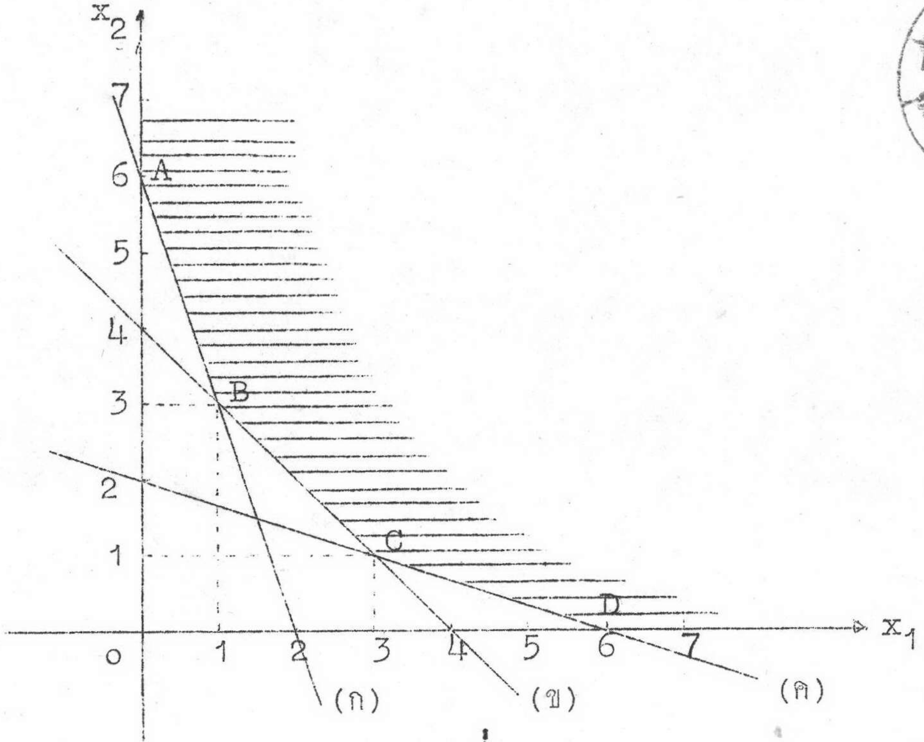
$$x_1, x_2 \geqslant 0 \quad \dots\dots (ง)$$

เรานำสัมพันธภาพทั้งสี่ของข้อกำหนดมาเขียนกราฟ ใน x_1x_2- plane จะได้ดังรูปที่ 2

จากความรู้ทางเรขาคณิตวิเคราะห์ จุดซึ่งจะสมจริงตามสัมพันธภาพทั้งสี่พร้อมกันจะอยู่ทางด้านขวามือ ซึ่งแลเงาไว้ และจากทฤษฎีมูลฐานดังกล่าวแล้ว จุดที่จะให้ค่าของ x_1 และ x_2 ซึ่งจะทำให้ z มีค่าต่ำสุด จะต้องอยู่ที่จุดมุมของขอบเขต (Corner point of the region) ในที่นี้คือจุด A,B,C,D เมื่อได้จุดต่าง ๆ เหล่านี้แล้วก็นำไปแทนในค่าของ z เพื่อหาค่าต่ำสุด เราก็จะได้ค่าของ x_1 และ x_2 ตามต้องการ

---

[3] นิยม ปุราคำ, "Method for finding solution of Linear Programming Problem", คำบรรยายวิชา Operations Research แผนกวิชาสถิติ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย, 2512 (จดบันทึก)



รูปที่ 2

จุด / พิกัด	A	B	C	D
x_1	0	1	3	6
x_2	6	3	1	0
z	960	680	760	1200

จากตารางเราได้คำตอบออกมาว่า ค่า $x_1 = 1, x_2 = 3$ จะทำให้ได้ค่า z ต่ำสุด คือ 680 สำหรับปัญหาการหาค่าสูงสุดก็กระทำในทำนองคล้ายกันแต่กลับกัน

2.2.2.2 <u>วิธีซิมเพล็กซ์</u> (Simplex Method) เป็นเทคนิคของการหาคำตอบที่ดีที่สุด (Optimum Soltuion) ของสมการที่มีหลายตัวเปลี่ยน เทคนิคที่ใช้กันมากเป็นทฤษฎีของ Dantzig เรียกว่า Simplex algorithm ซึ่งประยุกต์มาจาก Gauss - Jordan elimination method

โดยทั่วไปเรามักใช้กรรมวิธีแบบซิมเพล็กซ์ หาคำตอบของชุดสมการที่อยู่ในรูป

$[A]\ [x] = [b]$ ซึ่งกรรมวิธีแบบกราฟ ไม่สามารถจะใช้แก้หาคำตอบได้ และจะใช้ได้ในกรณีที่ b ไม่เป็นจำนวนลบใด ๆ

ชุดแบบจำลองของปัญหาการจัดโครงการเชิงเส้นทั้งสองแบบเราเขียนเป็นรูปทั่วไปได้ดังนี้

	ปัญหาค่าสูงสุด	ปัญหาค่าต่ำสุด
พฤติภาพตัวแปร	$[x] \geqslant 0$	$[x] \geqslant 0$
พฤติภาพบังคับ	$[A]\ [x] \leqslant [b]$	$[A]\ [x] \geqslant [b]$
พฤติภาพเป้าหมาย	$[C]\ [x] = \max$	$[C]\ [x] = \min$

โดยที่ $[x]$ คือ Column matrix ที่มีสมาชิก (elements) เป็นตัวแปรต่าง ๆของชุดสมการข้อกำหนด (Restriction)มีอันดับเป็น $n \times 1$

$[A]$ คือ Matrix ที่มีสมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในชุดสมการ ข้อกำหนดมีอันดับเป็น $m \times n$

$[b]$ คือColumn matrix ที่มีสมาชิกเป็นขีดจำกัด (Constraints) ของชุดสมการข้อกำหนด มีอันดับเป็น $n \times 1$

$[c]$ คือRow matrix ที่มีสมาชิกเป็น ค่า (costs) ของตัวแปร มีขนาดเป็น $1 \times n$

ก่อนที่จะแก้ปัญหาการจัดโครงการเชิงเส้นด้วยกรรมวิธีแบบซิมเพล็กซ์ เราจะต้องเอาชุดสมการของปัญหามาสร้างตารางเสียก่อน การสร้างตารางของปัญหามีข้อตกลงดังนี้

<u>ปัญหาค่าสูงสุด</u> เราสร้างตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรก (Initial Simplex tableau) ได้ว่า

$A_{m \times n}$	$I_{m \times m}$	$b_{m \times 1}$
$-C_{1 \times n}$	$O_{1 \times m}$	$O_{1 \times 1}$

[ตัวเลขชี้ฐาน (Subscript) เป็นตัวเลขบอกขนาดของ Matrix]

ซึ่งอาจเขียนขยายรายละเอียดเข้าไปได้ดังนี้

$a_{11}\ a_{12}\ \dots\dots\ a_{1n}$	$1\quad 0\ \dots\dots\ 0$	b_1
$a_{21}\ a_{22}\ \dots\dots\ a_{2n}$	$0\quad 1\ \dots\dots\ 0$	b_2
$\dots\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots\dots$	$\dots$
$a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\dots\ a_{mn}$	$0\quad 0\ \dots\dots\ 1$	b_m
$-c_1\ \ -c_2\ \dots\dots\ -c_n$	$0\quad 0\ \dots\dots\ 0$	0

Indicators

ในที่นี้ I คือ Unit หรือ Identity metrix

และ O คือ Zero matrix

เมื่อสร้างตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรกได้แล้ว ก็ทำการคำนวณหาคำตอบด้วยกรรมวิธีแบบซิมเพล็กซ์ ตามลำดับขั้นดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 แปลงความหมายของปัญหาออกมาในเทอมทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาค่า [A], [b], [c] แทนเข้าไปในตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรก

ขั้นที่ 2 ดูว่ามี Indicator ตัวใดตัวหนึ่งเป็นลบหรือไม่

ขั้นที่ 3 ถ้ามี Indicator เป็นลบ เลือก Indicator ที่เป็นลบนั้น สมมุติว่าอยู่ในคอลัมน์ที่ J เรียกคอลัมน์ที่ J ว่า Pivotal column

ขั้นที่ 4 เลือกแถวที่ I ในคอลัมน์ที่ J ซึ่ง $b_I / a_{IJ} < b_i / a_{iJ}$ สำหรับทุกค่า i ซึ่ง $a_{iJ} > 0$ เรียกแถวที่ I นี้ว่า Pivotal row และ a_{IJ} เรียกว่า Pivot

ขั้นที่ 5 หารแถวที่ I ของตารางเก่า (ตารางเริ่มแรก) ด้วย Pivot a_{IJ} และใส่ผลลัพธ์ลงไปในแถวที่ I ของตารางใหม่

ขั้นที่ 6 หาแถวใหม่ที่เหลือใส่ในตารางใหม่ให้ครบ โดย

ขั้นที่ 7 เอา a_{iJ} ของตารางเก่าคูณกับแถวที่ I ของตารางใหม่ แล้วเอาไปลบแถวที่ i ของตารางเก่า และใส่ผลลัพธ์ที่ได้ในแถวที่ i ของตารางใหม่

ต่อไปก็กลับไปเข้าขั้นที่ 2 คือ ดูว่า Indicator ตัวใด ยังเป็นลบอยู่อีก ถ้ามีก็ทำตามขั้นที่ 3 ต่อไปเรื่อย ๆ

ขั้นที่ 8 ถ้าไม่มี Indicator ตัวใดเป็นลบเหลืออยู่ การคำนวณก็เสร็จสิ้น อ่านคำตอบจากตารางได้

การอ่านคำตอบ อ่านจากตารางสุดท้าย ซึ่งค่าของ Indicator ไม่เป็นลบ ค่าของ x_i อ่านจากค่าของ b_i ส่วนค่าสูงสุดของพฤติภาพเป้าหมาย (Objective function) ดูได้จากตำแหน่งของ Matrix $O_{1\times 1}$

<u>ปัญหาค่าต่ำสุด</u> เราสร้างตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรกได้ว่า

$A'_{m\times m}$	$I_{n\times n}$	$c'_{n\times 1}$
$-b'_{1\times m}$	$O_{1\times n}$	$O_{1\times 1}$

สำหรับกรรมวิธีการคำนวณหาคำตอบ ก็ทำตามลำดับขั้นเช่นเดียวกับปัญหาค่าสูงสุด ผิดกันแต่การอ่านคำตอบเท่านั้น ปัญหาค่าต่ำสุดนี้ ค่าของ x_i อ่านจากตำแหน่งของ Matrix $O_{1\times n}$

เพื่อความเข้าใจ ลองพิจารณาใช้วิธีซิมเพล็กซ์กับตัวอย่างของวิธีกราฟดู ปัญหาคือ ให้หาค่า $x_1, x_2 \geq 0$ ซึ่งสมจริงกับ

$$6x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$4x_1 + 12x_2 \geq 24$$

และทำให้ $200x_1 + 160x_2 = \text{Min.}$

จากปัญหาเราสร้าง Matrix ได้ดังนี้

$$[A] = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}, \quad [b] = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 24 \end{bmatrix}, \quad [c] = \begin{bmatrix} 200 & 160 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $[A]' = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 12 \end{bmatrix}$, $[b]' = [12 \;\; 8 \;\; 24]$, $[c]' = \begin{bmatrix} 200 \\ 160 \end{bmatrix}$

เราสร้างตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรก ได้ว่า

6	2	4	1	0	200
2	2	12	0	1	160
-12	-8	-24	0	0	0

จากตารางแรกเลือก -12 เป็น Pivotal Column ฉะนั้น 6 เป็น Pivot เพราะ $\frac{200}{6} < \frac{160}{2}$

1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{100}{3}$
0	$\frac{3}{4}$	$\frac{32}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{280}{3}$
0	-4	-16	2	0	400

กระทำตามกรรมวิธีของซิมเพล็กซ์จนได้ตารางต่อมา จะเห็นว่า Indicator ยังเป็นลบ

1	0	-2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	10
0	1	8	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	70
0	0	16	1	3	680

กระทำตามกรรมวิธีของซิมเพล็กซ์อีกครั้ง จะได้ตารางสุดท้าย ซึ่งไม่มี Indicator ตัวใดเป็นลบ แสดงว่าได้ Optimum solution แล้ว

จากตารางสุดท้าย อ่านคำตอบได้ดังนี้

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

$200x_1 + 160x_2 = 680$ (min.)