# บทที่ 5

## โมเดลแบบที่มีการให้บริการหลายแถวและการพิจารณาจำนวนผู้ให้บริการที่เหมาะสม

### 5.1 โมเดลแบบที่มีการให้บริการหลายแถว ( Multiple - server model )

ระบบการให้บริการที่พิจารณาในที่นี้เป็นแบบซึ่งมีที่จัดไว้สำหรับให้บริการหลายแถว หรือมีผู้ให้บริการมากกว่าหนึ่งคน และการให้บริการถือตามลำดับการมาของผู้มาใช้บริการ นั่นคือ ผู้มาก่อนจะได้รับการบริการก่อนเสมอการศึกษาถึงโมเดลที่จะใช้เป็นตัวแทนแสดงระบบงานดังกล่าว ใช้หลักการในทฤษฎีที่ว่าด้วยเรื่องคิวซึ่งมีลักษณะสอดคล้องกับสถานการณ์ จริง ๆ ตามที่ศึกษา และอาจสรุปได้ดังนี้

5.1.1 โมเดลตามที่ Sasieni, Yaspan, [18] และ Friedman ได้แสดงไว้ คือ กรณีที่ระบบคิวมีที่ ๆ ให้บริการมากกว่าหนึ่งแห่ง สมมุติให้เป็นจำนวน k

และที่ให้บริการแต่ละที่นั้นมี :-

อัตราเฉลี่ยของการให้บริการ $= \mu$ (ต่อหนึ่งหน่วยเวลา)

อัตราเฉลี่ยของจำนวนผู้มาใช้บริการ $= \lambda$ (------"------)

โดยกำหนดให้

$n$ = จำนวนผู้มาใช้บริการซึ่งรออยู่ในแถวรวมกับผู้ที่กำลังได้รับการบริการอยู่ด้วย

$P_n$ = ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้มาใช้บริการ n คนในเวลาที่ t หรือเวลาใด ๆที่พิจารณา

$P_o$ = ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีผู้มาใช้บริการเลยในเวลาที่ t หรือเวลาอื่นที่กำหนด

ดังนี้จะได้ว่า

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_o \qquad ; \; n = 0,1,2,\ldots\ldots,k-1$$

หรือ
$$P_n = \frac{1}{k!\,k^{n-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_o \qquad n \geq k$$

18. Sasieni, Yaspan, Arthur, and Friedman, Lawrence, Operations Research; Methods and Ploblems, p. 137-138

ซึ่ง

โดยที่ $$P_o = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \frac{k\mu}{k\mu - \lambda}}$$

ใช้ได้ในกรณีที่ค่าของ $k\mu$ มากกว่า $\lambda$ เท่านั้น

เงื่อนไขที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งใน โมเดลนี้ ก็คือ จำนวนผู้มาใช้บริการมีการแจกแจงแบบที่เรียกว่า พัวซอง และเอ็กซ์โพเน็นเชียล ตามลำดับ

จากตัวเลขที่ได้จากการสำรวจที่แผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทเซ็นทรัล และไทยไดมารู เราได้ค่าประมาณของพารามิเตอร์ที่สำคัญ 2 ค่า คือ $\hat{\mu}$ และ $\hat{\lambda}$ ซึ่งเป็นอัตราเฉลี่ยของการให้บริการถือเป็นจำนวนคนต่อหนึ่งหน่วยเวลา (ในที่นี้กำหนดเป็น 1 นาที) และอัตราเฉลี่ยของจำนวนผู้มาใช้บริการต่อหนึ่งหน่วยเวลาตามลำดับ

เพื่อที่จะแสดงว่า โมเดลที่กล่าวข้างต้นนี้ นำมาใช้ได้กับสถานการณ์จริง ๆ ที่กำลังศึกษาอยู่นี้ เราดูได้จากค่าของ $k$, $\hat{\mu}$ และ $\hat{\lambda}$ ว่าเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดคือ ต้องทำให้ค่า $k\mu$ มากกว่า $\lambda$ ดังนี้:-

| | บริษัทเซ็นทรัล | บริษัทไทยไดมารู |
|---|---|---|
| $k$ | 2 | 3 |
| $\hat{\mu}$ | 3.76 | 6.33 |
| $\hat{\lambda}$ | 5.6 | 5.17 |
| $k\hat{\mu}$ | 7.52 ซึ่งมากกว่า 5.6 | 18.99 มากกว่า5.17 |

และตามหลักการเดียวกันนี้ กรณีที่มีที่ให้บริการ $k$ แห่ง $(k>1)$ ความน่าจะเป็นของการที่ผู้มาใช้บริการต้องรออยู่ในแถวก็คือ ความน่าจะเป็นของการที่มีผู้มาใช้บริการ $k$ คน ในช่วงเวลาหนึ่งที่พิจารณา ซึ่งก็คือ

$$P\{n \geq k\} = \sum_{n=k}^{\infty} P_n$$

$$= \frac{\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!\,(k\mu - \lambda)} \cdot P_o$$

นอกจากนี้ ยังมีค่าประมาณอื่นซึ่งเป็นประโยชน์อีกดังนี้คือ

E (m) = ความยาวเฉลี่ยของแถวที่มีคนรอรับบริการ

$$= \frac{\lambda \mu (\lambda/\mu)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2} \cdot P_o$$

E (n) = จำนวนเฉลี่ยของผู้มาใช้บริการ

$$= \frac{\lambda \mu (\lambda/\mu)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2} \cdot P_o + \frac{\lambda}{\mu}$$

E (w) = เวลาเฉลี่ยที่ผู้มาใช้บริการต้องใช้เพื่อรอรับการบริการ

$$= \frac{\mu (\lambda/\mu)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2} \cdot P_o$$

E (v) = เวลาเฉลี่ยที่ผู้มาใช้บริการต้องใช้ในระบบคิว

$$= \frac{\mu (\lambda/\mu)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2} \cdot P_o + \frac{1}{\mu}$$

5.1.2 โมเดลตามแบบที่ Hillier[19] และ Lieberman แสดงไว้ โดยมีเงื่อนไขว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนผู้มาใช้บริการเป็นแบบพัวซอง ซึ่งมีพารามิเตอร์ $\lambda$ และเวลาที่ใช้ในการบริการลูกค้าแต่ละคนมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลที่มีค่าตัวกลางเป็น $\frac{1}{\mu}$

กำหนดให้ S = จำนวนผู้ให้บริการ

n = จำนวนผู้มาใช้บริการ

$\mu_n$ = อัตราเฉลี่ยของการให้บริการทั้งระบบ (เมื่อมีลูกค้า n คน)

$\lambda_n$ = อัตราเฉลี่ยของผู้มาใช้บริการ เมื่อมีลูกค้า n คนในระบบคิว

$\mu$ = อัตราเฉลี่ยของการให้บริการต่อผู้ให้บริการ (ซึ่งไม่มีเวลา) หนึ่งคน

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 \le n \le S \\ S\mu & n \ge S \end{cases}$$

19. Hillier, F.S., and Lieberman, G.J., Introduction to Operations Research. p. 308 - 310.

กรณีที่ $\lambda$ มีค่าน้อยกว่า $S\mu$ ซึ่งหมายความว่าอัตราเฉลี่ยของจำนวนผู้มาใช้บริการน้อยกว่าอัตราเฉลี่ยของความเร็วในการให้บริการที่มีค่าสูงสุด ดังนี้จะได้ว่า

(ก) ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีผู้มาใช้บริการเลย ($P_o$) $= \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{S-1} \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^S}{S} \cdot \sum\limits_{n=S} \left[\frac{\lambda}{S\mu}\right]^{n-S}}$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{S-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^S}{S!} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{S\mu}}}$$

(ข) ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้มาใช้บริการ n คน $(P_n) = \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \cdot P_o$ ถ้า $0 \leq n \leq S$

หรือ $(P_n) = \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{S!\, S^{n-S}} \cdot P_o$ ถ้า $n \geq S$

โดยที่ $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu S}$

(ค) ความยาวของแถวที่คาดว่าจะเป็น $(L_q) = P_o \cdot \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^S}{S!} \cdot \rho \cdot \dfrac{d}{d\rho}\left[\dfrac{1}{1-\rho}\right]$

$$= P_o \cdot \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n \cdot}{S!(1-\rho)^2} \cdot \rho$$

(ง) เวลาซึ่งลูกค้าต้องรออยู่ในแถว (ไม่รวมเวลาที่ใช้ในการบริการ) ที่คาดว่าจะเป็น

$$(W_q) = \frac{L_q}{\lambda}$$

(จ) เวลาซึ่งลูกค้าต้องรออยู่ในระบบงาน (รวมทั้งเวลาที่ใช้ในการบริการ) ที่คาดว่าจะเป็น $(W) = W_q + \dfrac{1}{\mu}$

(ฉ) จำนวนของผู้มาใช้บริการทั้งหมดในระบบงานที่คาดว่าจะเป็น

$$(L) = \lambda \left( W_q + \frac{1}{\mu} \right) = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

และถ้าการบริการในระบบคิวถือหลักว่า ผู้มาก่อนจะได้รับบริการก่อนเสมอ อาจหาความ

น่าจะเป็นของเวลาที่ลูกค้าใช้ในการรอรับบริการได้ ดังนี้:-

ความน่าจะเป็นที่ผู้มาใช้บริการต้องรออยู่ในแถวมากกว่า o นาที (หรือหน่วยเวลาอื่นๆ)

$$= P(>0)$$

$$= P_o \cdot \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^S}{S!(1-\rho)}$$

ความน่าจะเป็นที่ผู้มาใช้บริการต้องรออยู่ในแถวมากกว่า t นาที (หรือหน่วยเวลาอื่นๆ)

$$= P(>t)$$

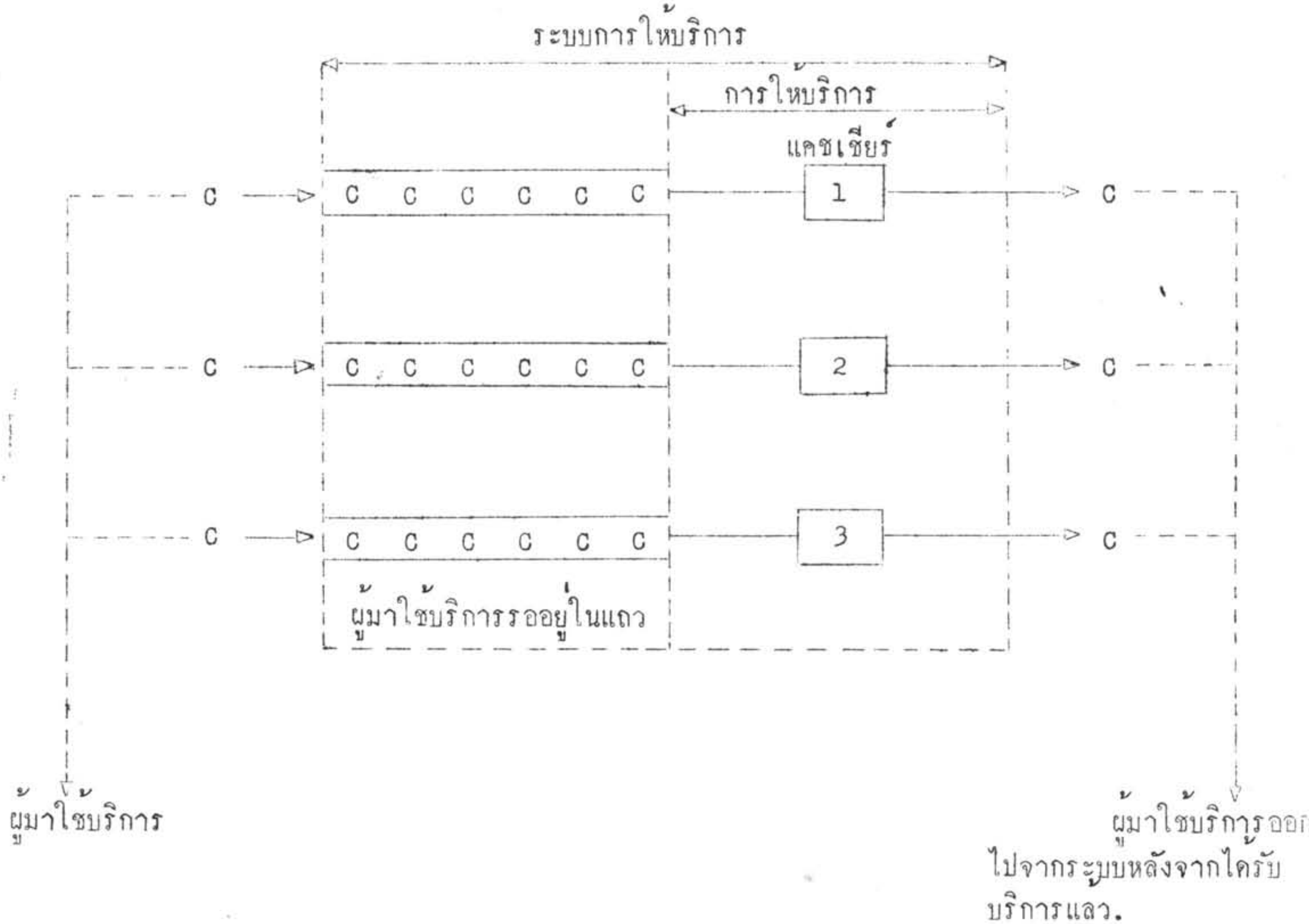
$$= e^{-S\mu t(1-\rho)} \cdot P(>0)$$

กรณีที่พิจารณาผลจากเวลาที่ใช้ในการบริการด้วยโดยกำหนดให้ตัวแปร T เป็นเวลาที่ลูกค้าใช้ในการรอรับบริการรวมกับเวลาที่ใช้ไปในการบริการ ก็จะได้ว่า

$$P\{T>t\} = e^{-\mu t}\left[1 + \frac{P_o(\frac{\lambda}{\mu})^S}{S!(1-\rho)} \cdot \left(\frac{1-e^{-\mu t(S-1-\lambda/\mu)}}{S-1-\lambda/\mu}\right)\right]$$

และถ้า $\lambda$ มีค่ามากกว่า หรือ เท่ากับ $S\mu$ นั่นคืออัตราการใช้บริการมากกว่าอัตราเร็วในการให้บริการ แล้วแถวก็จะยาวมากขึ้นได้เรื่อย ๆ โดยไม่มีขอบเขตจำกัด

โมเดลตามทฤษฎีที่ได้กล่าวไว้ข้างต้นนั้น เป็นแบบซึ่งระบบการให้บริการมีที่สำหรับให้บริการมากกว่าหนึ่งแห่ง หรือมีผู้ให้บริการมากกว่าหนึ่งคน ซึ่งตรงกับสถานการณ์ที่ศึกษา คือในแผนกซูเปอร์มาร์เก็ตทั้งที่บริษัทเซ็นทรัล และไทยไดมารู แคชเชียร์มากกว่าหนึ่งคน แถวที่ลูกค้ารอรับบริการมีหลายแถว และเท่ากับจำนวนของแคชเชียร์ ลักษณะของระบบคิวโดยทั่วไปในแผนกซูเปอร์มาร์เก็ตอาจแสดงเป็นแผนผังได้ดังนี้

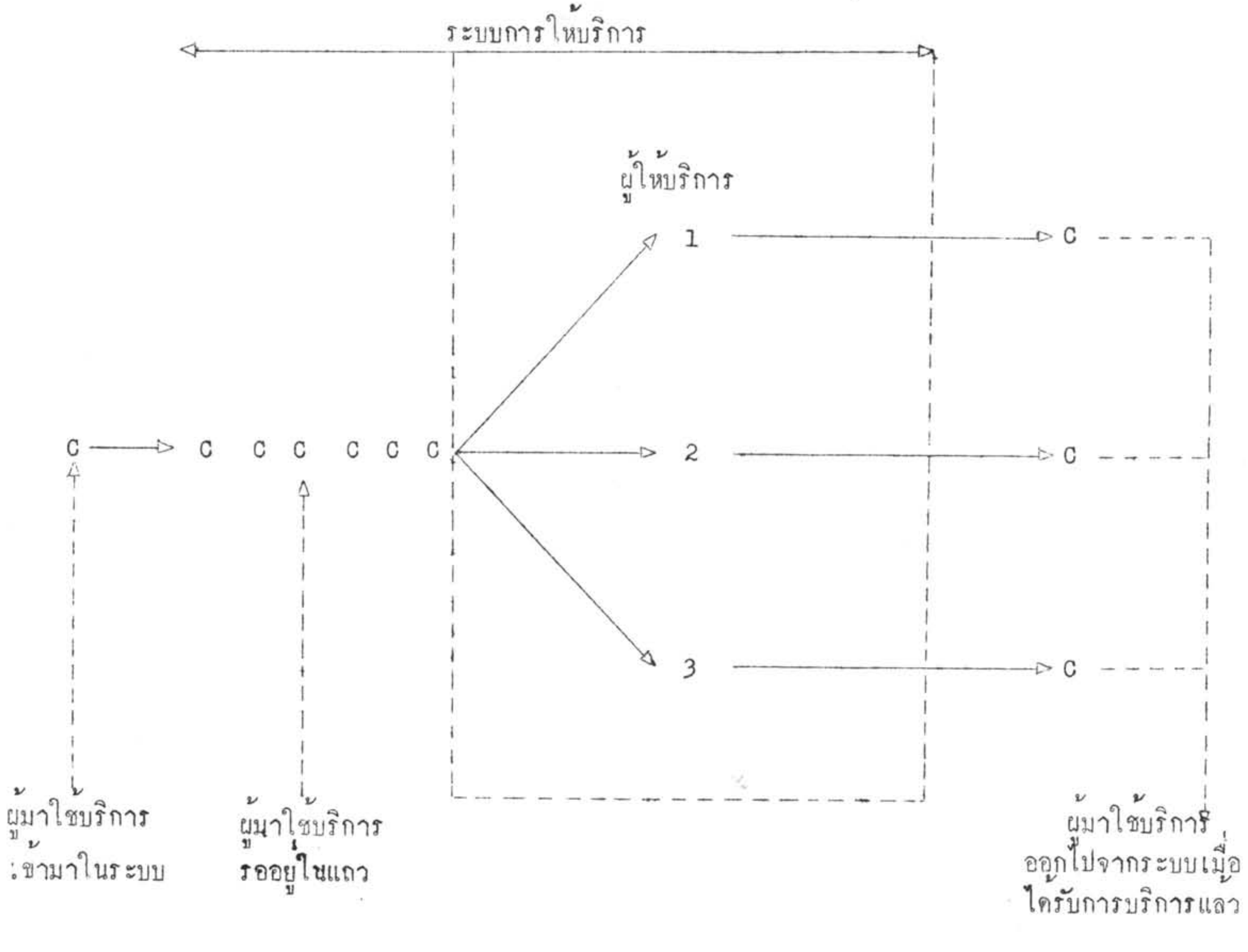



รูปที่ 7 โมเดลในทางปฏิบัติ

<u>หมายเหตุ</u>

จำนวนแคชเชียร์ที่ บริษัท เซ็นทรัล มี 2 ที่ และที่บริษัท ไทยไดมารูบี 3 ที่

ในที่นี้เพื่อเป็นการสะดวกขึ้น จะถือตามหลักที่ ดร.นราศรี[20] ได้วิเคราะห์ไว้ คือ โมเดลตามทฤษฎีแบบที่มีแถวของลูกค้าที่รอรับบริการเพียงแถวเดียว และผู้ให้บริการมากกว่าหนึ่งคนนั้นใช้ได้กับโมเดลในทางปฏิบัติซึ่งมีแถวหลายแถว และแต่ละแถวมีผู้ให้บริการหนึ่งคน




รูปที่ 8 โมเดลตามทฤษฎี

---

20. Narasri Padunchewit., Model Testing and Allocation Processes with Some Variables in Queue, p. 13,23

5.2 การทดสอบเกี่ยวกับโมเดล ( Model testing )

ในการพิจารณาว่าโมเดลแบบที่มีแถว ๆ เดียวและผู้ให้บริการหลายคนตามที่กำหนดในที่นี้ ใช้ได้กับสถานการณ์จริง ๆ (ที่ระบบการให้บริการเป็นแบบซึ่งมีแถวหลายแถว และแต่ละแถวมีผู้ให้บริการโดยเฉพาะ) หรือไม่นั้นเราใช้การทดสอบซึ่งเป็นการเปรียบเทียบจำนวนของลูกค้าในระบบการให้บริการที่ได้จากการสำรวจ กับจำนวนซึ่งคำนวณจากโมเดลตามที่กล่าวไว้ในข้อ 5.1.1 การศึกษาในตอนนี้ ใช้ตัวเลขจากการสำรวจในในช่วงเวลาที่มีการคับคั่งคือระหว่าง 13.30 - 15.30 น. ที่บริษัทเซ็นทรัล และที่บริษัทไทยไดมารูจะอยู่ระหว่างเวลา 12.30 - 14.30 น. การนับจดนี้กำหนดช่วงเวลาเป็นหนึ่งนาที และนับจำนวนลูกค้าที่รออยู่ในแถวกับที่กำลังได้รับบริการในแต่ละนาที

การทดสอบเพื่อพิจารณาว่าโมเดลแบบที่กำหนดเป็นแบบที่มีแถวหนึ่งแถวและผู้บริการหลายคนใช้กับภาวะการณ์ที่มีแถวหลายแถวได้เหมาะสมเพียงไรหรือไม่นั้นใช้ Chi - square test โดยที่จะต้องคำนวณหาค่าของความน่าจะเป็นค่าต่าง ๆ ตามโมเดล ข้อ 5.1.1 เพื่อหาค่าของความถี่ที่คาดว่าจะเป็น ( expected frequency ) ของจำนวนผู้มาใช้บริการในระดับต่าง ๆ ค่าความน่าจะเป็น ณ. ระดับผู้มาใช้บริการต่าง ๆ ตามโมเดลนั้นได้ใช้โปรแกรมฟอร์แทรน (Fortran) คำนวณดังแสดงไว้ในภาคผนวก

ตารางที่ 23 แสดงการทดสอบโมเดลโดยใช้ข้อมูลที่บริษัทเซ็นทรัล ค่าChi - square ที่คำนวณได้น้อยกว่าค่าจากตาราง ณ.ระดับความเชื่อมั่น 5% ซึ่งแสดงว่า สามารถยอมรับสมมติฐานที่ว่าโมเดลที่มีแถวเพียงหนึ่งแถวและมีผู้ให้บริการหลายคนใช้ได้กับสถานการณ์ที่มีแถวหลายแถวและแต่ละแถวมีผู้ให้บริการโดยเฉพาะ

ตารางที่ 24 แสดงการทดสอบโมเดลเช่นเดียวกัน แต่เป็นการพิจารณาระบบการให้บริการที่บริษัทไทยไดมารู ค่า Chi - square ที่คำนวณได้น้อยกว่าค่าจากตาราง ณ.ระดับความมีนัยสำคัญ ทั้ง 5% และ 1% ซึ่งหมายความว่าโมเดลตามที่กำหนดคือแบบที่มีแถวหนึ่งแถว และมีผู้ให้บริการหลายคนนั้นใช้ได้เสมอกับระบบการให้บริการในแผนกซูเปอร์มาร์เก็ตของบริษัทไทยไดมารูซึ่งมีแถวหลายแถว และแต่ละแถวต่างก็มีผู้บริการโดยเฉพาะ

ตารางที่ 21

แสดงการเปรียบเทียบระหว่างจำนวน ผู้มาใช้บริการในแผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัท เซ็นทรัล กับจำนวนที่คำนวณตามโมเดล และคำนวณค่า Chi - square เพื่อทดสอบโมเดล

| จำนวนผู้มาใช้บริการ(n) | ความถี่จากการสำรวจ ( O ) | ความน่าจะเป็นตามโมเดล(P) | ความถี่ตามโมเดล( E ) | $E'$ | $O - E'$ | $\frac{(O - E')^2}{E'}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 0.09964210 | 11.9568 | 12 | -7 | 4.0833 |
| 1 | 13 | 0.14734311 | 17.6808 | 18 | -5 | 1.3888 |
| 2 | 54 | 0.54053745 | 64.8636 | 65 | -11 | 1.8615 |
| 3 | 27 | 0.28101123 | 33.7213 | 34 | -7 | 1.4412 |
| 4 | 13 | 0.14609035 | 17.5308 | 18 | -5 | 1.3888 |
| 5 | 4 | 0.07594855 | 9.1138 | 9 | -5 | 2.7777 |
| 6 | 2 | 0.03948365 | 4.7379 | 5 | -3 | 1.8000 |
| 7 | 1 | 0.02052651 | 2.4631 | 2 | -1 | 0.5000 |
| 8 | 1 | 0.01067119 | 1.2805 | 1 | 0 | 0.0000 |
| 9 | 0 | 0.00554767 | 0.6660 | 1 | -1 | 0.0000 |
| 10 | 0 | 0.00288409 | 0.3456 | 0 | 0 | 0.0000 |
| | | | | | | 14.7413 |

$H_o$ : โมเดลแบบที่มีแถวหนึ่งแถวและมีผู้บริการหลายคนใช้ได้กับสถานการณ์ที่มีแถวหลายแถวและแต่ละแถวต่างมีผู้ให้บริการโดยเฉพาะ $\chi^2$ ที่คำนวณได้ $= \sum (O - E')^2 / E'$

$= 14.7413$

$$\chi^2_{(.05)} = 16.916$$

ค่า $\chi^2$ จากการคำนวณ $< \chi^2_{(.05)}$ จากตาราง $\therefore$ ยอมรับ $H_o$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} > 1$$

ตารางที่ 22

แสดงการเปรียบเทียบระหว่างจำนวนผู้มาใช้บริการในแผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทไทยไดมารู กับจำนวนที่คำนวณตามโมเดล และการคำนวณค่า Chi - square เพื่อทดสอบโมเดล

| จำนวนผู้มาใช้บริการ (n) | ความถี่จากการสำรวจ (O) | ค่าความน่าจะเป็นตามโมเดล (P) | ความถี่ตามโมเดล (E) | $E'$ | $(O - E')$ | $\frac{(O - E')^2}{E'}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 38 | 0.44840 | 53.8080 | 54 | -16 | 4.7407 |
| 1 | 49 | 0.35872 | 43.0464 | 43 | 6 | 0.8372 |
| 2 | 20 | 0.143488 | 17.2186 | 17 | 3 | 0.5294 |
| 3 | 9 | 0.038114 | 4.5737 | 5 | 4 | 3.2000 |
| 4 | 1 | 0.008968 | 1.0762 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 2 | 0.002490 | 0.2988 | 0 | 2 | - |
| 6 | 1 | 0.000747 | 0.08964 | 0 | 1 | - |
| 7 | 0 | 0.000159 | 0.02908 | 0 | 0 | - |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - |
| | | | | | | 9.3073 |

สมมติฐาน ($H_0$) : โมเดลแบบที่มีแถวเดียวและผู้บริการหลายคนใช้ได้กับสถานการณ์ที่มีแถวหลายแถว $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

$\chi^2$ จากการคำนวณ $= \sum \frac{(O - E')^2}{E'} = 9.3073$

$\chi^2$ จากตารางที่ 9 d.f. $\chi^2_{(.05)} = 16.9$

$\chi^2_{(.01)} = 21.7$

$\chi^2$ ที่ได้น้อยกว่า $\chi^2$ จากตาราง ดังนั้น ยอมรับ $H_0$ ทั้งที่ระดับความมีนัยสำคัญ 1% และ 5%

## 5.3 จำนวนผู้ให้บริการที่เหมาะสม

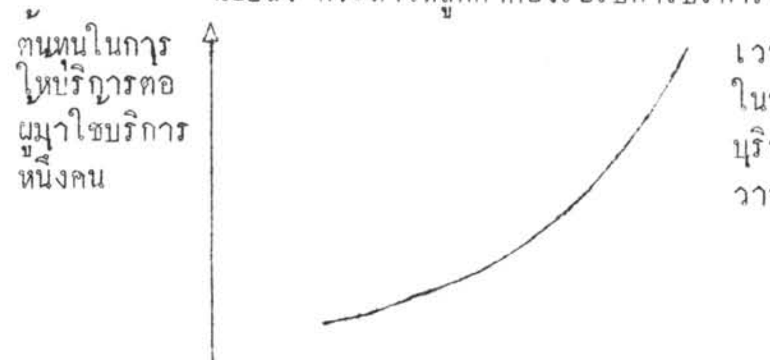
การตัดสินใจใด ๆ ของนักบริหารเพื่อแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับระบบคิวนั้น อาจอาศัยแบบจำลองการตัดสินใจ ( decision model ) ที่เหมาะกับสภาวการณ์ ซึ่งพิจารณาถึงค่าของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่สุด ค่าดังกล่าวที่นับว่าสำคัญอย่างหนึ่งก็คือ จำนวนผู้ให้บริการ การหาค่าที่ดีที่สุดนั้นอาจทำได้หลายวิธีทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้อย่างไรก็ดี โดยปกติแล้วมักใช้วิธีซึ่งพิจารณาแบบจำลองต้นทุน (Cost model) ที่ทำให้ ผลรวมของต้นทุนที่ใช้ไปเพื่อให้การบริการ ( cost of service ) กับต้นทุนที่คิดเป็นค่าของการเสียเวลารอคอยเพื่อรับบริการ ( cost of waiting time ) ต่อหนึ่งหน่วยเวลามีค่าต่ำสุด

จำนวนผู้ให้บริการที่เหมาะสมที่สุดนั้นมีความเกี่ยวข้องโดยตรงกับค่า $\lambda$ ซึ่งแสดงอัตราเฉลี่ยของจำนวนผู้มาใช้บริการต่อหนึ่งหน่วยเวลา การพิจารณาค่าดังกล่าวอาศัยเงื่อนไข 2 อย่างคือ

(ก) ต้นทุนที่เกิดขึ้นจากการจัดให้มีการบริการ

(ข) ค่าใช้จ่ายที่คิดเป็นค่าของการเสียเวลารอรับการบริการ

เงื่อนไขทั้งสองประการนี้ต้องมีการพิจารณาควบคู่กันไปซึ่งทำให้เกิดความอึดอัดใจต่อผู้บริหารในการที่จะตัดสินใจอยู่ไม่น้อย ทั้งนี้เพราะว่าการดำเนินงานใด ๆ นั้น จะต้องพยายามให้ต้นทุนรวมต่ำสุดเสมอ หมายความว่าทั้งต้นทุนในการให้บริการและค่าใช้จ่ายซึ่งคิดเป็นค่าเสียเวลารอรับการบริการจะต้องมีค่าน้อยที่สุดในขณะเดียวกัน จะต้องเพิ่มจำนวนผู้ให้บริการซึ่งเป็นผลให้ต้นทุนในการให้บริการสูงขึ้นอีก หรือถ้าจะลดจำนวนเจ้าหน้าที่ลงไปเพื่อตัดค่าใช้จ่ายให้น้อยลง ก็จะทำให้ลูกค้าต้องรอรับการบริการนานขึ้นไปอีก

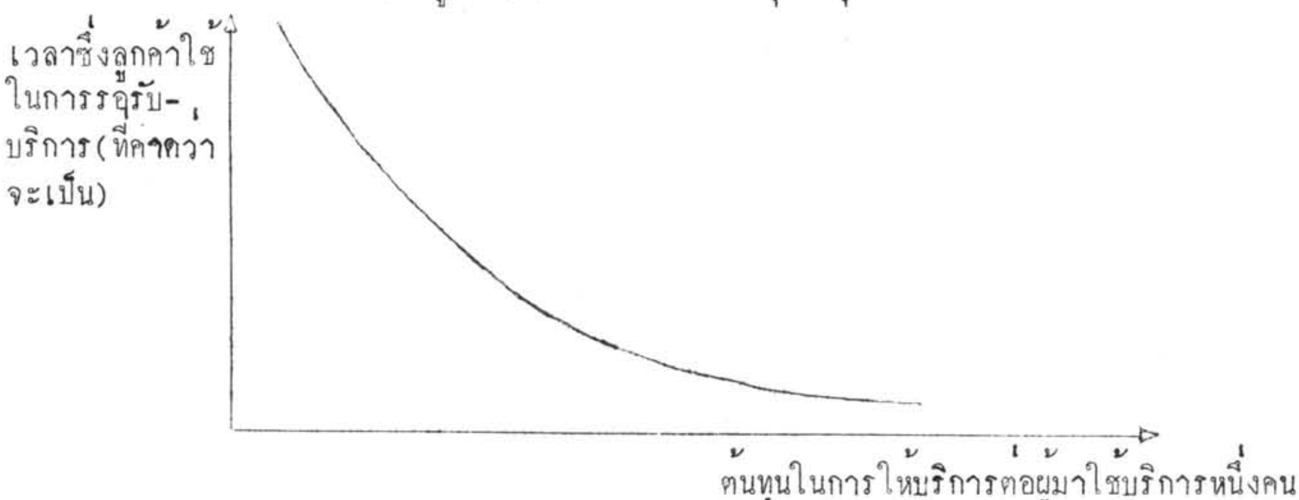



รูปที่ 9


รูปที่ 10

ต้นทุนในการให้บริการและเวลาซึ่งคาดว่าลูกค้าจะต้องรอเพื่อรับบริการต่างก็เป็นฟังก์ชันของระดับการให้บริการ (หรือจำนวนผู้ให้บริการ) แต่การเปลี่ยนแปลงของตัวแปรทั้งสองนี้ (ณ.ระดับการให้บริการจุดเดียวกัน) เป็นไปในทิศทางที่ตรงกันข้าม

Hillier[20] กล่าวไว้ว่า การที่จะพิจารณาถึงจุดต่ำสุดของต้นทุนทั้งสองอย่างดังกล่าวข้างต้นนั้น อาจทำได้โดยการรวมเส้นโค้งทั้งสองรูป (รูปที่ 7 และ 8) เข้าด้วยกัน ซึ่งจะทำให้ได้เส้นโค้งใหม่ (ดังรูปที่ 9 ) แล้วต้องเลือก จุดสมดุลย์บนเส้นโค้งใหม่นี้




รูปที่ 9 โค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนในการให้บริการและเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการรอรับบริการ

การหาจำนวนผู้ให้บริการที่เหมาะสมที่สุด (optimum) ในที่นี้ใช้วิธีพิจารณาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันของต้นทุนรวมซึ่งประกอบด้วยต้นทุนสองอย่างดังกล่าวข้างต้นตามที่ Hillier[21] ได้กล่าวไว้ดังต่อไปนี้ :-

<u>ข้อสมมติ</u>

(ก) ต้นทุนรวมที่คิดเป็นค่าของการรอคอยเป็นจำนวนที่เป็นสัดส่วนโดยตรงกับเวลาทั้งสิ้นที่ลูกค้าทั้งหมดใช้อยู่ในระบบการให้บริการ

(ข) ระบบคิวอยู่ในภาวะที่คงที่ หมายความว่า ความน่าจะเป็นในการที่จะมีลูกค้าจำนวนเท่าใดมาใช้บริการนั้นไม่ขึ้นกับเวลา

---

20. Hillier, Frederick S. and Lieberman, Gerald J., op. cit., p. 328 - 331

21. Ibid., p. 333

(ค) ต้นทุนในการให้บริการเป็นผลรวมของต้นทุนที่คงที่จำนวนหนึ่ง กับต้นทุนอีกส่วนหนึ่ง ซึ่งมีค่าเป็นสัดส่วนกับจำนวนผู้ให้บริการ

(ง) การแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนผู้มาใช้บริการเป็นแบบพัวซอง และการให้บริการถือหลัก ผู้มาก่อนจะได้รับบริการก่อนเสมอ

(จ) อัตราเฉลี่ยของจำนวนผู้มาใช้บริการและอัตราเฉลี่ยในการให้บริการต่อผู้ให้บริการหนึ่งคนในช่วงที่มีการคับคั่งนั้นมีค่าคงที่เสมอโดยไม่ขึ้นกับภาวะในระบบการให้บริการนั้น ๆ

ถ้ากำหนดให้

$C_W$ = ต้นทุนในการที่ผู้มาใช้บริการหนึ่งคนรอรับบริการ (ต่อหนึ่งหน่วยเวลา)

$L$ = ความยาวของแถวที่คาดว่าจะเป็น

$C_{S1}$ = ต้นทุนสุดท้าย (Marginal cost) ในการให้บริการต่อผู้ให้บริการหนึ่งคนในหนึ่งหน่วยเวลา

$S$ = จำนวนผู้ให้บริการ

$E(C_1)$ = ต้นทุนรวมที่คาดว่าจะเป็น (expected total variable cost) ต่อหนึ่งหน่วยเวลาจะได้ว่า

ฟังก์ชันที่จะหาค่าต่ำสุด (objective function) ก็คือ :-

$$E(C_1) = SC_{S1} + C_W \cdot L$$

โดยที่

$$P_o = 1 \Big/ \left[ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^S}{S!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right] ;$$

$$L = \frac{P_o(\lambda/\mu)^S \cdot \rho}{S!(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$$

และ $\rho = \frac{\lambda}{\mu S}$

เพื่อที่จะหาค่าจำนวนผู้ให้บริการที่เหมาะสมตามโมเดลที่กล่าว ในที่นี้จะกำหนดให้ต้นทุนที่ใช้ในการให้บริการต่อผู้ให้บริการหนึ่งคน ($C_{S1}$) เท่ากับ 5 บาทต่อหนึ่งชั่วโมง และต้นทุนในการรอรับการบริการ($C_W$) เท่ากับ 10 บาท ทั้งระบบการให้บริการทั้งสองแห่งตามที่ศึกษา

ต่อไปนี้เป็นตารางแสดงผลการคำนวณเพื่อหาระดับผู้ให้บริการซึ่งจะทำให้ต้นทุนรวมต่ำสุด

ตารางที่ 23

แสดงต้นทุนต่าง ๆ ในระบบการให้บริการแบบที่มีหนึ่งแถวและผู้ให้บริการหลายคนในช่วงเวลาที่มีการคับคั่ง

แผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทเซ็นทรัล

$\lambda = 5.56$ , $\mu = 3.76$

| S | $SC_{S1}$ | $P_o$ | L | $C_w L$ | $E(C_1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 10 | 0.0996 | 3.7410 | 37.41 | 47.41 |
| 3 | 15 | 0.2105 | 1.9725 | 19.73 | ต่ำสุด*34.73 |
| 4 | 20 | 0.2169 | 1.7028 | 17.03 | 37.03 |
| 5 | 25 | 0.2232 | 1.5279 | 15.28 | 40.28 |
| 6 | 30 | 0.2325 | 1.5069 | 15.07 | 45.07 |

ตารางที่ 24

แสดงต้นทุนต่าง ๆ ในระบบการให้บริการแบบที่มีหนึ่งแถว และผู้ให้บริการหลายคนในช่วงเวลาที่มีการคับคั่ง

แผนกซูเปอร์มาร์เก็ต บริษัทไทยไดมารู

$\lambda = 3.91$ , $\mu - 4.79$

| S | $SC_{S1}$ | $P_o$ | L | $C_w L$ | $E(C_1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 10 | 0.3917 | 1.3824 | 13.82 | 23.82 |
| 3 | 15 | 0.4484 | 0.8191 | 8.19 | ต่ำสุด*23.19 |
| 4 | 20 | 0.3552 | 0.8213 | 8.21 | 28.21 |
| 5 | 25 | 0.4316 | 1.8253 | 8.25 | 33.25 |
| 6 | 30 | 0.4314 | 0.80003 | 8.00 | 38.00 |

ผลจากการคำนวณเพื่อพิจารณาต้นทุนต่ำสุดตามตารางที่ 23 และ 24 เราได้ว่า ระบบการให้บริการทั้งที่บริษัทเซ็นทรัล และ ไทยไดมารู นั้น ระดับของผู้ให้บริการที่ทำให้ต้นทุนรวม $[E(C_1)]$ ต่ำสุดเท่ากับ 3 เหมือนกันทั้งสองแห่ง ซึ่งถือได้ว่าเป็นระดับที่เหมาะสมที่สุด ในช่วงเวลาที่มีการคับคั่ง.