บทที่ 3

การประมาณค่าพารามิเตอร์ในโมเดลและฟังก์ชั่นแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาที่รออยู่ในแถวเพื่อรับบริการ

3.1 พารามิเตอร์ในโมเดล (Model Parameters)

การศึกษาเพื่อหาโมเดลสำหรับระบบคิวในที่นี้มีค่าพารามิเตอร์ 2 ค่า คือ อัตราเฉลี่ยของจำนวนผู้มาใช้บริการ (Mean Arrival Rate) ใช้สัญญลักษณ์ λ และอัตราเฉลี่ยซึ่งแสดงความสามารถในการให้บริการของพนักงาน (Mean Servicing Rate) ใช้สัญญลักษณ์ μ ทั้งสองค่านี้มีความสำคัญในการวิเคราะห์ระบบการรอคอย เนื่องจากค่าพารามิเตอร์เป็นค่าแท้จริงที่เราไม่อาจทราบได้ นอกจากจะทำการสำรวจและศึกษาความเป็นไปต่าง ๆ ตลอดเวลาเป็นระยะนานมาก ๆ ซึ่งเราไม่สามารถทำได้ตามเหตุผลที่กล่าวไว้ใน บทที่ 2 ดังนั้นจึงใช้วิธีการเลือกตัวอย่าง (Sampling Survey) เพื่อเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อนำมาหาค่าประมาณทางสถิติที่เหมาะสมที่สุด (Optimal Statistical Estimators) ของพารามิเตอร์เหล่านี้

3.2 การประมาณค่า λ และ μ

3.2.1. การหาค่าประมาณของ λ

เราอาจใช้หลักตามที่ Hillier[9] กล่าวไว้ 2 อย่างคือ

(ก) นับจำนวนผู้เข้ามาใช้บริการตามช่วงเวลาที่กำหนดไว้ ถ้าให้ N เป็นจำนวนลูกค้าที่จดบันทึกได้ในช่วงเวลา t ตามที่กำหนด จะได้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงความจริง (Unbiased estimator) ของ λ เป็น $\hat{\lambda} = N/t$

(ข) แทนที่จะกำหนดช่วงเวลา t ไว้ก่อนแล้วนับจำนวนผู้เข้ามาใช้บริการตามช่วงเวลานั้น ๆ อาจจะเปลี่ยนมากำหนดจำนวนของผู้มาใช้บริการขึ้นแล้วดูว่าต้องใช้เวลานานเท่าใด จึงจะมีลูกค้าเท่ากับจำนวนที่กำหนดนั้น ดังนี้ก็จะได้ค่าประมาณของ $\frac{1}{\lambda} = \frac{T}{n}$

---

9. Hillier, Frederick S., Introduction to Operations Research, Holden - Day, Inc., P. 326.

โดยที่ T = เวลาที่ใช้ไปทั้งหมดในการนับจดจำนวนผู้มาใช้บริการเริ่มตั้งแต่คนที่หนึ่งจนถึงคนสุดท้ายซึ่งเป็นจำนวนเท่าที่กำหนดไว้ (n)

จะได้ค่าประมาณของ λ เป็น

$$\hat{\lambda} = n/T$$

และในกรณีที่ถ้าจำนวนผู้เข้ามาใช้บริการมีการกระจายเป็นแบบ พัวซองแล้ว ค่าประมาณทั้งสองค่าตามข้างต้นนี้ จัดเป็น maximum likelihood estimate[10] ของพารามิเตอร์ λ

ในที่นี้เราจะหาค่าประมาณของ λ ในแผนกซูเปอร์มาร์เก็ตที่บริษัทเซ็นทรัล และไทยไดมารู โดยใช้วิธี ในข้อ (ก) :-

	บริษัทเซ็นทรัล	บริษัทไทยไดมารู
ช่วงเวลาที่กำหนด (t) เป็นนาที	300นาที(ระหว่าง11.00-16.00น.)	480นาที(10.00-18.00น)
จำนวนผู้มาใช้บริการทั้งหมดที่นับจดได้ (N)	1670	1878
ค่าประมาณ ($\hat{\lambda} = \frac{N}{t}$)	$\frac{1670}{300} = 5.566 \simeq 5.6$	$\frac{1878}{480} = 3.91 \simeq 3.9$

3.2.2. การประมาณค่าของ μ

(ก) จดบันทึกจำนวนผู้ได้รับการบริการเสร็จ (รวมจำนวนเงินทั้งหมดที่ซื้อของ รับและทอนเงิน, และจ่าย bill) พร้อมทั้งจดเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการบริการดังกล่าว

ถ้าให้ M = จำนวนรวมของผู้ได้รับการบริการ

B = เวลาทั้งหมดที่ใช้ในการบริการลูกค้า M คน

ค่าประมาณของ μ หรือ $\hat{\mu} = \frac{M}{B}$

(ข) กำหนดจำนวนผู้ได้รับบริการแล้วเสร็จไว้ก่อน (m) แล้วดูว่าเวลาที่ใช้ในการบริการตั้งแต่คนแรกจนถึงคนที่ m นั้น รวมทั้งสิ้นเท่าใด (B)ในทางปฏิบัติ กรณีที่มีหลายแถว(multiple - server system) อาจใช้วิธีสังเกตว่าการบริการลูกค้าแต่ละคนนั้นใช้เวลาเท่าใดโดยทำได้

---

10. Hogg & Craig, Introduction to Mathematical Statistics, New York : The Macmillan Company, 1969, p. 243.

สะดวกกว่า และการสำรวจเพื่อเก็บข้อมูลมาศึกษานี้ก็ได้ใช้วิธีดังกล่าวซึ่ง Hillier ได้ให้ข้อสังเกตไว้ว่าเป็นวิธีที่ใช้ได้

ตามนี้ก็จะได้ค่าประมาณของ $\frac{1}{\hat{\mu}} = B/m$

และค่าประมาณของ μ $(\hat{\hat{\mu}}) = m/B$

ซึ่งถือเป็น maximum likelihood estimate ถ้าการกระจายของเวลาที่ใช้ในการบริการ (sevice - time distribution) เป็นแบบเอ็กซโพเน็นเชียล ซึ่งจะได้ทดสอบในบทต่อไป

การประมาณค่าของ μ ตามวิธีข้อ ข. นี้ช่วยลดความคลาดเคลื่อน (Biasedness) ในการนับจดได้ ทั้งนี้จะเห็นได้ว่าถ้าเราทำตามวิธีแรก (ข้อ ก.) คือนับจำนวนรวมของผู้ได้รับการบริการแล้วเสร็จกับเวลาทั้งสิ้นที่ใช้ไปในการให้บริการลูกค้า m คน ภายในช่วงเวลาตามที่กำหนดไว้ก่อนแล้วนั้น เช่นสมมุติว่ากำหนดไว้เป็นช่วงละ 5 นาทีเป็นต้น ปัญหาที่เกิดขึ้นในการที่จะนับจำนวน M ก็คือ การคาบเกี่ยวกัน (overlapping)สำหรับกรณีที่ลูกค้าคนที่เริ่มได้รับบริการตอนปลาย ๆ ของช่วงเวลา คือใกล้ ๆ นาทีที่ 5 ของช่วงนั้น ๆ แต่ยังไม่เสร็จสิ้นต้องรออยู่ในคิวไปอีกแล้วก็จะเริ่มอยู่ในนาทีแรกของช่วงเวลาที่ถัดมา เช่นนี้นับว่าไม่สะดวกและชัดเจนในการนับจดดังนั้นการใช้วิธีตามข้อ ข. จะเป็นการเลี่ยงปัญหาที่กล่าวไปได้

ตารางต่อไปนี้แสดงการหาค่าประมาณของ μ แยกตามคิวและแบบรวมเป็นคิวเดียว[11] ตามวิธี ข. ดังที่ได้กล่าวแล้ว

	แผนกซูเปอร์มาร์เก็ต						
	บริษัทเซ็นทรัล			บริษัทไทยไดมารู			
	แคชเชียร์ 1	แคชเชียร์ 2	รวมเป็นคิวเดียว	แคชเชียร์ 1	แคชเชียร์ 2	แคชเชียร์ 3	รวมเป็นคิวเดียว
	11.00-16.00น.	11.00-16.00น.	11.00-16.00น.	10.00-18.00น.	10.00-18.00น.	10.00-18.00น.	10.00-18.00น.
M (คน)	480	649	1129	621	665	1032	2299
B (นาที)	300	300	300	480	480	480	480
$(\widehat{\frac{1}{\mu}})$ นาทีต่อหนึ่งคน	0.625	0.462	0.265	0.772	0.721	0.465	0.208
$(\widehat{\frac{1}{\mu}})$ วินาทีต่อหนึ่งคน	37.50	27.720	15.90	46.320	43.260	27.9	12.48
$\hat{\mu}$ คนต่อนาที	1.60	2.16	3.76	1.294	1.386	2.15	4.79
$\hat{\mu}$ คนต่อวินาที	0.267	0.036	0.062	0.0215	0.023	0.035	0.079

11. Narasri Padunchewit. 1972, One Line Multiple Server Model, p. 19, A Waiting Line Model for the University State Bank. Research Paper Presented at the Third Computer Applications Symposiums.

3.3 เวลาที่ผู้มาใช้บริการรออยู่ในคิว (Waiting time)

ฟังก์ชั่นแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็น (probability density function)

โดยทั่วไปนั้นผู้มาซื้อของในแผนกซูเปอร์มาร์เก็ตมักจะต้องเสียเวลาขณะหนึ่ง เพื่อรอให้พนักงานคิดเงินค่าสิ่งของที่ซื้อไปทั้งหมด รวมทั้งการจัดบรรจุสิ่งของลงในถุงและรับทอนเงิน ถ้าเป็นกรณีที่มีผู้อื่นมารออยู่ล่วงหน้าแล้ว ก็จะต้องต่อคิวและใช้เวลารออยู่ในคิวมากขึ้นซึ่งจะเป็นเวลามากน้อยเท่าใดนั้นขึ้นกับว่าคิวนั้นยาวหรือสั้นเท่าใด

ระบบคิวที่ศึกษานี้ถือหลักการให้บริการแก่ผู้มาก่อนเสมอ (First come, first served discipline) Taha[12] ได้กล่าวถึง การแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาที่ใช้เพื่อรอรับการบริการ (Waiting time distribution) ว่า เป็นแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียล

ถ้าให้ τ = เวลาทั้งหมดที่ผู้มาใช้บริการ (คนที่เพิ่งมาถึง) จะต้องใช้ในการรอรับการบริการจนกว่าจะเสร็จสิ้น

ในกรณีที่ถ้ามีลูกค้า n คน รออยู่แล้ว จะได้ว่า

$$\tau = t_1' + t_2 + t_3 + \dots\dots\dots + t_{n+1}$$

โดยที่ t_1' = เวลาที่ใช้ในการบริการคนที่อยู่เป็นคนแรกในคิว

$t_2, t_3, \dots, t_{n+1}$ = เวลาที่ใช้ในการบริการคนที่ถัดมา

นั่นคือ t_{n+1} = เวลาที่ใช้ในการบริการคนที่เพิ่งมาต่อคิว

และถ้าให้ $w(\tau / n+1)$ เป็นฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นอย่างมีเงื่อนไข (conditional probability density function) ของ τ โดยที่มีลูกค้า n คนมารออยู่ก่อนแล้ว

$t_1', t_2, t_3, \dots, t_{n+1}$ จะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียล และ τ ก็จะเป็นผลรวมของการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียลจำนวน n+1 นั้น และการแจกแจงของ t_i ,i = 1,2,..,n+1 ต่างก็เป็นอย่างเดียวกัน และไม่ขึ้นแก่กันด้วย

และ $w(\tau / n+1)$ มีการแจงแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) ซึ่งมีพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ ค่าตัวกลาง (mean) และค่าความแปรปรวน (Variance)

12. Taha, Hamdy A., Operations Research An Introduction, p. 519

เป็น μ และ $n+1$ ตามลำดับ

จากที่ได้กล่าวข้างต้น เราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
w(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} w(\tau / n+1) p_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu\tau)^n e^{-\mu\tau}}{n!}(1-\rho)\rho^n \\
&= (1-\rho)\mu e^{-\mu\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} \\
&= \mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)\tau}, \qquad \tau > 0
\end{aligned}
$$

ซึ่งเป็นการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียล ซึ่งมีค่าตัวกลาง เป็น $E\{\tau\}$

โดยที่ $E\{\tau\} = \dfrac{1}{\mu(1-\rho)}$

= เวลาเฉลี่ยที่คาดว่าจะต้องใช้ในการรอรับการบริกา

และในที่นี้

p_n = ความน่าจะเป็นในการที่จะมีลูกค้า n คนอยู่ในระบบคิวโดยไม่ขึ้นกับว่าจะเป็นเวลาใดซึ่งเป็นสภาพที่เรียกว่าภาวะคงที่ (Steady state condition)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$