บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

การวิจัยถึงความหนาแน่นของการจราจรทางอากาศ ณ ท่าอากาศยานกรุงเทพ ฯ จัดได้ว่าเป็นปัญหาของแถวคอย ดังนั้นจำเป็นต้องใช้ทฤษฎีต่าง ๆ ของแถวคอย (Queueing Theory) และทฤษฎีอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องพอสรุปได้ย่อ ๆ ดังนี้

1. ตัวแปรเชิงสุ่ม (Random Variable)

ตัวแปรเชิงสุ่มหมายถึงค่าฟังค์ชั่นที่เป็นค่าใด ๆ ใน Sample Space อย่างเช่นให้ x เป็นแต้มที่จะเกิดขึ้นจากการทอดลูกเต๋าลูกหนึ่ง ดังนั้น x จึงมีค่าได้ 6 ค่า เราเรียกว่า x ก็คือตัวแปรเชิงสุ่มนั่นเอง ซึ่งอาจแสดงค่า x ได้โดยเซท (Set) ดังนี้

$$x = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

เนื่องจากเหตุการณ์ใน Sample Space เกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นไม่เท่ากัน ฟังค์ชั่นซึ่งแสดงว่าตัวแปรเชิงสุ่มจะเป็นค่าใด ด้วยความน่าจะเป็นเท่าไร เราเรียกว่า Probability distribution function ของตัวแปรเชิงสุ่มนั้น ซึ่งแบบอย่างของการแจกแจงสามารถเป็นไปได้หลายแบบ เช่น การแจกแจงแบบปัวซอง (Poisson distribution) การแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล (Exponential distribution) การแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution) เป็นต้น

2. การแจกแจงแบบปัวซอง

การแจกแจงของข้อมูลแบบปัวซองมักเกิดกับข้อมูลที่มีความน่าจะเป็นของเหตุการณ์มีค่าน้อย แต่จำนวนครั้ง (trial) ทั้งหมดมีค่ามาก และมีรูปแบบของ

ฟังค์ชั่นดังนี้

$$P(x) = \frac{\lambda^{x}.e^{-\lambda}}{x!} \qquad (2.1)$$

เมื่อ $P(x)$ = ความน่าจะเป็นของความสำเร็จ x

λ = ค่าเฉลี่ยของความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ขึ้น

e = 2.71828...

3. <u>การแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล</u>

ตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลจะมีรูปแบบของ density function ดังนี้

$$f_x(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Theta} e^{-y/\Theta} & , \quad y \geq 0 \\ 0 & , \quad y < 0 \end{cases}$$

การแจกแจงของข้อมูลแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลจะมีพารามิเตอร์ Θ เพียงตัวเดียวซึ่งมีค่าเป็นบวกและคงที่ density function ของการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลแสดงได้ดังรูปที่ 4

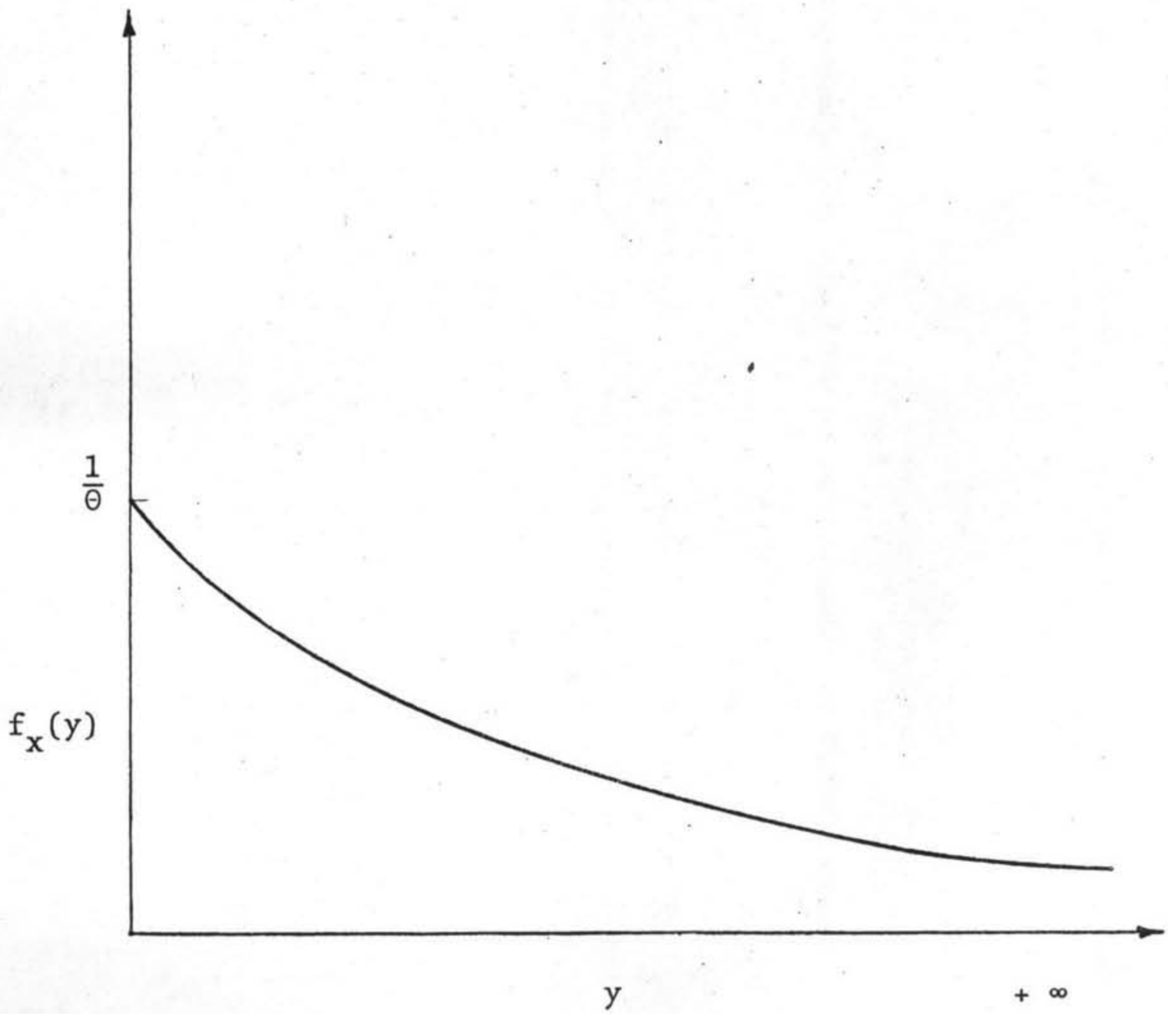
ในวิชา Operations Research มักพบว่า ช่วงเวลาระหว่างที่ลูกค้าเข้ามาถึงระบบ เวลาของการใช้บริการ และอายุของส่วนประกอบทางอีเลคทรอนิคส์มักมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล

4. <u>การแจกแจงแบบปกติ</u>

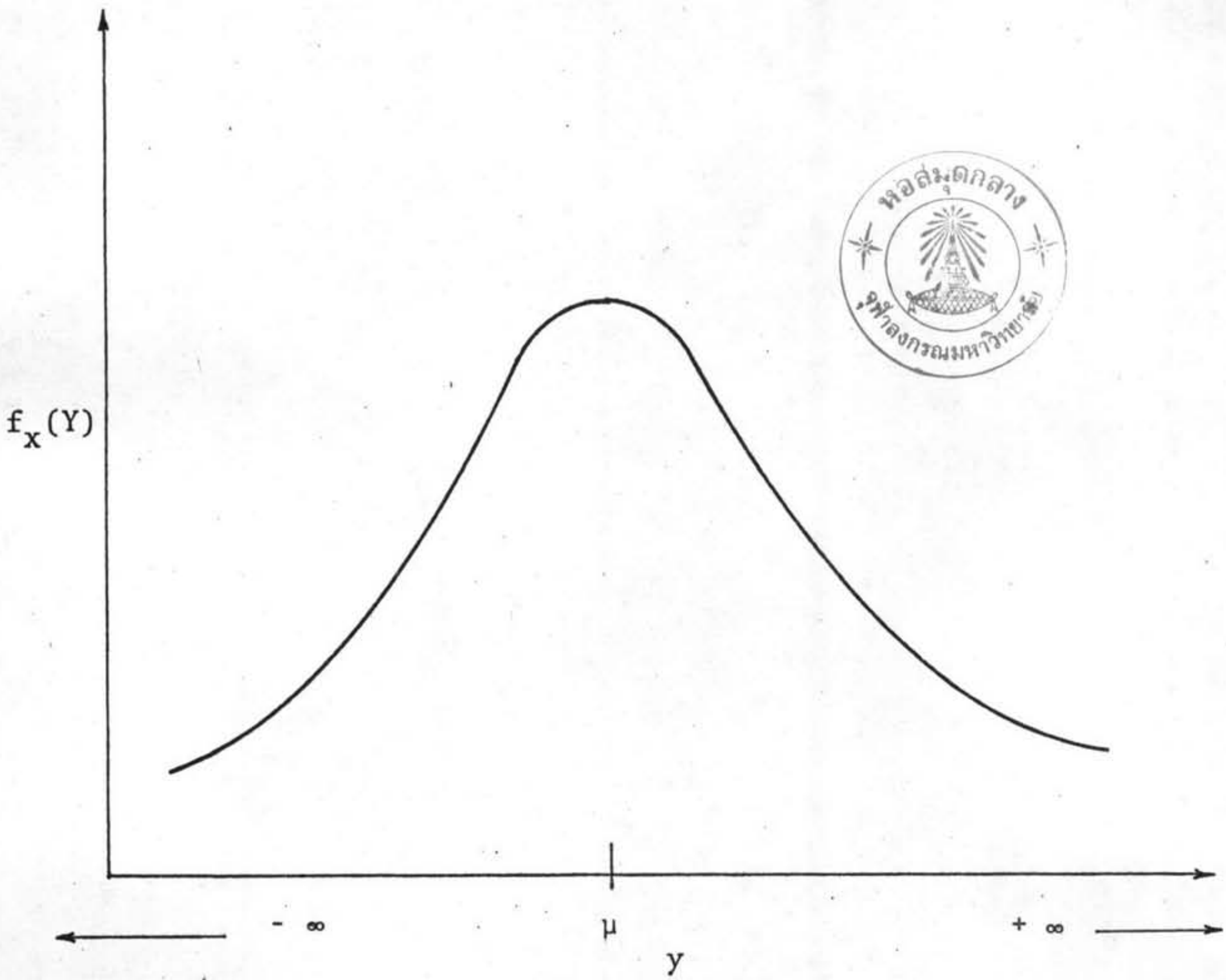
การแจกแจงแบบปกติมีรูปแบบของ density function ดังสมการ

$$f_x(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

y มีค่าอยู่ระหว่าง $-\infty$ ถึง $+\infty$



รูปที่ 4 Exponential density function



หอสมุดกลาง จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 5 Normal density function

Density function ของการแจกแจงแบบปกติจะมีพารามิเตอร์ 2 ตัวคือ μ และ σ โดยที่

μ = ค่าเฉลี่ยของข้อมูล

σ^2 = ความแปรปรวน (variance) ของข้อมูล

σ = ค่าเบี่ยงเบนมาตราฐาน

e = 2.71818...

¶ = 3.14159...

เส้นโค้งของการแจกแจงแบบปกติมีลักษณะเป็นรูประฆังปลายเส้นโค้งทั้งสองค่อย ๆ ลดลงไปยังแกนนอน โดยโค้งจะสมมาตร (symmetric) ที่ค่าเฉลี่ย μ ดังรูปที่ 5 ส่วนโค้งจะมีลักษณะโค้งมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับค่าเบี่ยงเบนมาตราฐาน กล่าวคือ ถ้า σ มีค่าใหญ่โค้งจะมีลักษณะราบกว่าโค้งที่มี σ เล็ก

5. Chi-Square Goodness of Fit Test

Chi-Square Test เป็นวิธีการทดสอบว่าข้อมูลมีการแจกแจงตามสมมุติฐานที่ตั้งขึ้นหรือไม่โดยการเปรียบเทียบความถี่ของข้อมูลจริงกับความถี่ตามทฤษฎีของสมมุติฐานนั้น ถ้ากำหนดให้

O_i = ความถี่ของข้อมูลจริงในชั้นที่ i (class)

E_i = ความถี่ตามทฤษฎีในชั้นที่ i

k = จำนวนชั้นทั้งหมดของข้อมูล (สำหรับค่า k จะเป็นกี่ชั้นก็ได้ แต่ค่าความถี่ตามทฤษฎีควรจะมากกว่าหรือเท่ากับ 5)

χ^2 = ค่า Chi-Square

$$\chi^2_{test} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

ขั้นตอนของการทดสอบข้อมูลโดย Chi-Square Test สรุปได้ดังนี้

(1) ตั้งสมมุติฐานของข้อมูล โดยการสังเกตจากค่าพารามิเตอร์ของข้อมูล หรือจากลักษณะของโค้ง

(2) คำนวณค่า Chi-Square (χ^2)

(3) เลือกค่าวิกฤต (critical value) จากการแจกแจงแบบไคส์แควร์ $\chi^2_{\alpha,\nu}$ ในภาคผนวก ง.

α ระดับนัยสำคัญ (Level of significance) หรือความน่าจะเป็นที่จะไม่ยอมรับสมมุติฐาน ซึ่งในทางปฏิบัติมักใช้ระดับนัยสำคัญ 0.05

ν Degree of freedom ซึ่งมีค่าเท่ากับ (k-1) ลบด้วยจำนวนพารามิเตอร์จากการวิเคราะห์ข้อมูล

(4) เปรียบเทียบค่า χ^2_{test} กับ $\chi^2_{\alpha,\nu}$

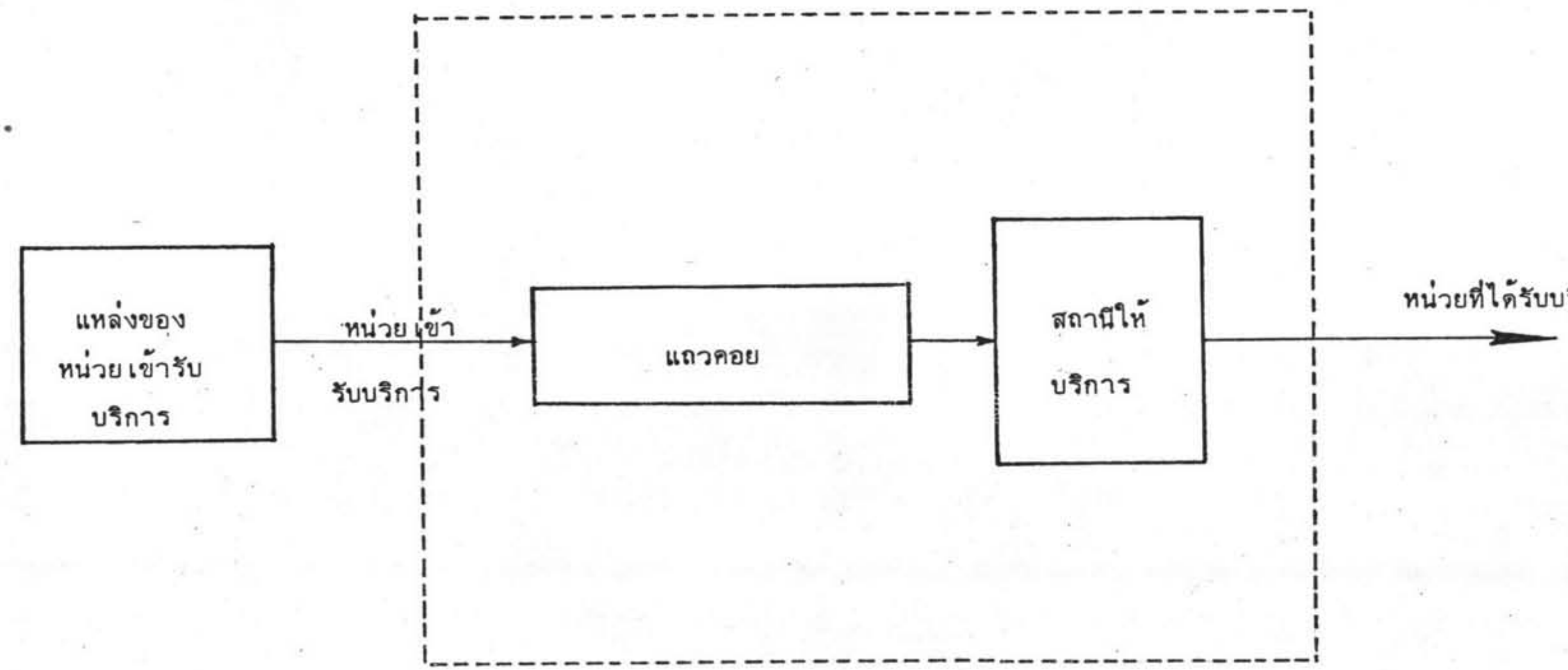
ถ้า $\chi^2_{test} > \chi^2_{\alpha,\nu}$

เป็นอันว่าไม่ยอมรับ (reject) สมมุติฐานที่ตั้งขึ้นด้วยระดับนัยสำคัญ

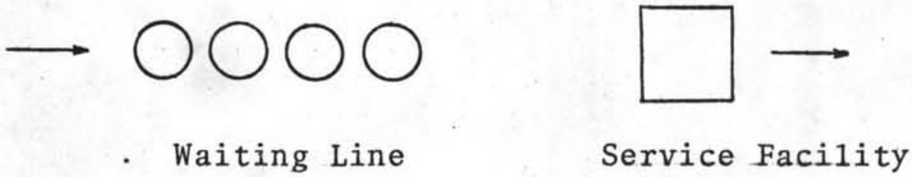
6. <u>ทฤษฎีแถวคอย</u>

ทฤษฎีแถวคอยเป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ประยุกต์ ในส่วนของ Stochastic process ซึ่งในปัจจุบันได้มีที่ใช้อย่างกว้างขวางกับกิจการด้านอุตสาหกรรมและการดำเนินงานต่าง ๆ ระบบที่จะเกิดปัญหาของแถวคอยจะต้องมีลักษณะการเคลื่อน (flow) ของหน่วยเข้ารับบริการ เช่น ผู้คน อุปกรณ์ หรือข่าวสารผ่านหน่วยบริการในกรณีที่หน่วยบริการไม่ว่างหน่วยเข้ารับบริการจะต้องรอคอยการบริการจนกว่าหน่วยบริการจะว่าง จึงทำให้เกิดแถวคอยนั้น ซึ่งการที่ต้องรอคอยนาน ๆ จะทำให้เกิดผลเสียหายทางเศรษฐกิจแก่หน่วยเข้ารับบริการ ตัวอย่างของแถวคอยซึ่งเรามักพบเห็นเป็นประจำ เช่น การรอคอยของผู้โดยสารรถเมล์ประจำทาง

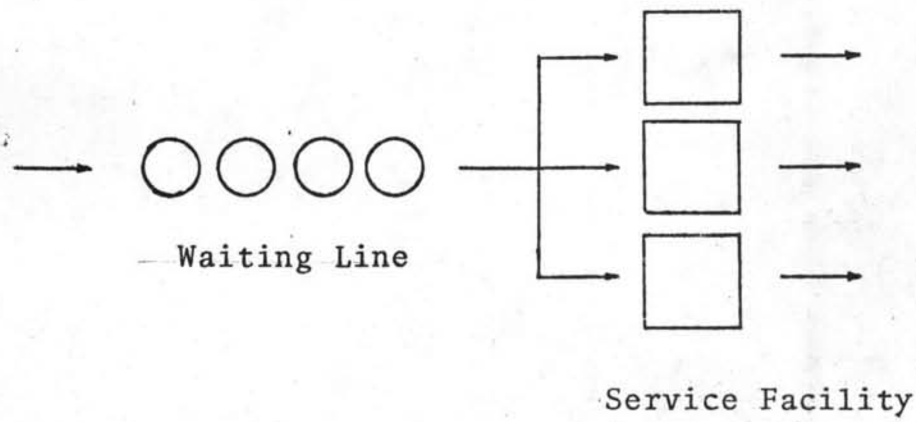
ระบบแถวคอย



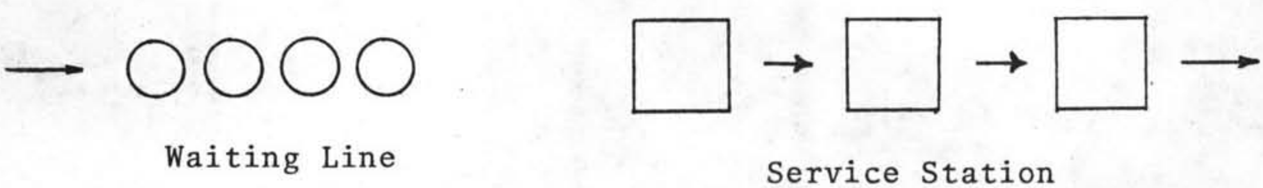
รูปที่ 6 ระบบแถวคอย



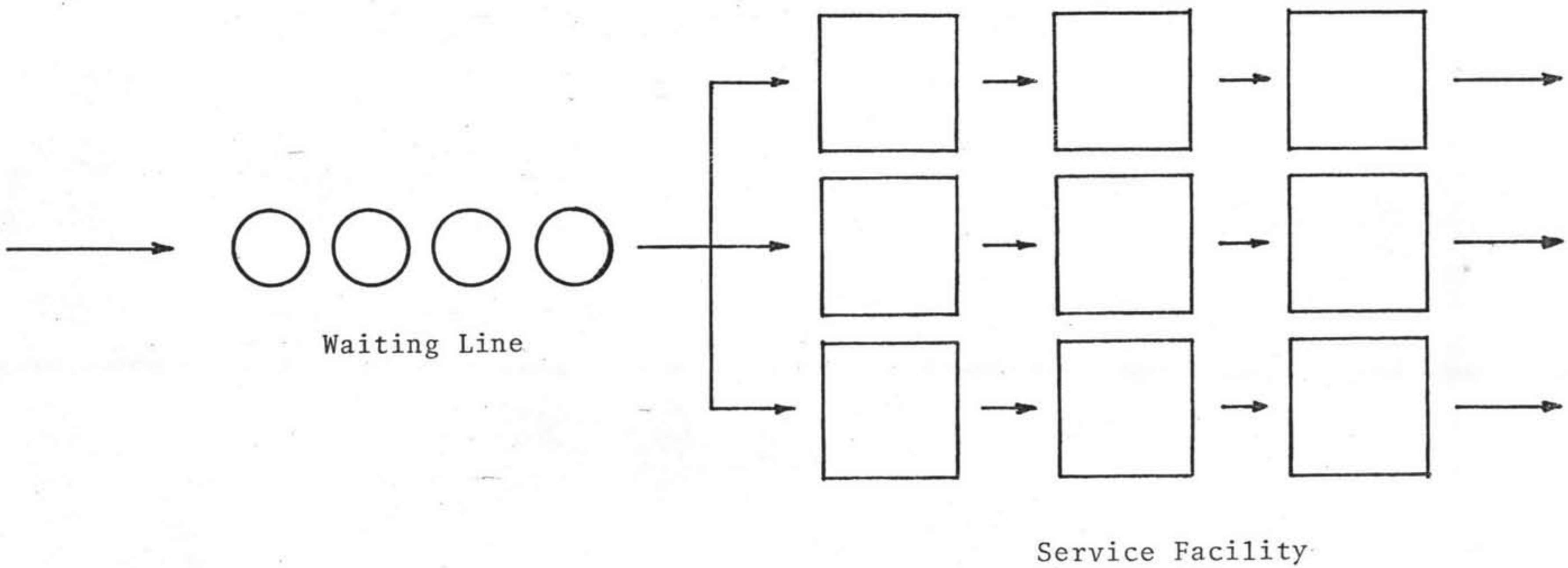
(1) Single Channel, Single Station



(2) Multiple Channel, Single Station



(3) Single Channel, Multiple Station



(4) Multiple Channel, Multiple Station

รูปที่ 7 พื้นฐานโครงสร้างของการจัดสถานีบริการ

เครื่องบินที่มาถึงสนามบินแต่ทางวิ่งยังไม่ว่าง ข่าวสารมาถึงจะต้องคอยให้บันทึก และบางทีต้องเข้า Code จึงจะส่งไปหน่วยปลายทางได้ อุปกรณ์ที่ชำรุดเสียหายต้องรอคอยการซ่อมแซมจากเจ้าหน้าที่ เป็นต้น

ระบบของแถวคอยสามารถแบ่งเป็นส่วนที่สำคัญได้ 3 ส่วน คือ

(1) รูปแบบของหน่วยเข้ารับบริการ (Arrival pattern) หมายถึงคุณสมบัติทางสถิติของหน่วยเข้ารับบริการ เช่น หน่วยเข้ารับบริการมีการแจกแจงของการเข้ารับบริการแบบปัวซอง แบบทวินาม หรือแบบเออร์แลง เป็นต้น

(2) กรรมวิธีการบริการ (Service process) หมายถึงลักษณะของการจัดหน่วยบริการ ซึ่งอาจจัดแบบหนึ่งหน่วยบริการ (single channel) หรือหลายหน่วยบริการ (Multi channels) ในบางกรณีการบริการต้องผ่านหลาย ๆ ขบวนการ จึงอาจจัดหน่วยบริการแบบอนุกรมกัน ซึ่งพื้นฐานโครงสร้างของการจัดสถานีบริการมี 4 แบบดังรูปที่ 7

(3) กฎเกณฑ์การให้บริการเมื่อเกิดแถวคอย (Queueing Discipline) หมายถึงลำดับของการให้บริการแก่หน่วยเข้ารับบริการ เช่น ให้บริการตามลำดับก่อนหลังของการเข้ามาถึงระบบ (first come first serve) ตามแบบสุ่ม (random) หรือตามลำดับชั้นของความสำคัญ (priority)

โดยทั่ว ๆ ไประบบของแถวคอยมีองค์ประกอบดังรูปที่ 6

ระบบของแถวคอยอาจแบ่งตามภาวะ (state) ของระบบได้เป็นหลายแบบ เช่น

(1) ภาวะที่จำกัดจำนวนหน่วยเข้ารับบริการที่อยู่ในแถวคอย (finite queue)

(2) ภาวะที่ไม่จำกัดจำนวนที่อยู่ในแถวคอย (infinite queue)

(3) ภาวะที่ระบบมีจำนวนหน่วยเข้ารับบริการและเวลาที่ให้บริการเปลี่ยนแปลง

(4) ภาวะที่ระบบมีจำนวนหน่วยเข้ารับบริการและเวลาที่ใช้ในการบริการไม่เปลี่ยนแปลง

ในที่นี้จะกล่าวคร่าว ๆ ถึงสองภาวะสุดท้ายเพราะมีความเกี่ยวข้องกับการวิจัย สำหรับภาวะที่สามหน่วยให้บริการยังอยู่ในภาวะเริ่มต้น จึงไม่สามารถปรับตัวให้มีสภาพเรียบร้อยพร้อมจะให้บริการอย่างสม่ำเสมอได้ ทำให้เวลาที่ให้บริการไม่แน่นอนไม่อยู่ตัว กรณีนี้อาจเกิดจากหน่วยเข้ารับบริการด้วย เป็นต้นว่าหน่วยเข้ารับบริการยังไม่มีความแน่ใจในระบบจึงอาจยังไม่เข้ารับบริการทันที ส่วนภาวะที่สี่ระบบเริ่มอยู่ตัวแล้ว การให้บริการเป็นไปด้วยความสม่ำเสมอและแน่นอน ดังนั้นการวิเคราะห์ระบบเมื่อระบบเข้าสู่ภาวะอยู่ตัวจึงมีความแน่นอนกว่า ในการวิจัยนี้ใช้การจำลองผลโดยการเปรียบเทียบกับช่วงเวลา 4200 นาที แล้วเริ่มต้นรอบของการจำลองผลใหม่ ดังนั้นจึงจัดอยู่ในภาวะไม่อยู่ตัว (Non-Steady State) หรือ Transient State

จากปัญหาแถวคอยทั่ว ๆ ไปที่จัดสถานีบริการแบบหนึ่งหน่วยหนึ่งสถานีบริการ และมีกฎเกณฑ์ของการให้บริการตามลำดับก่อนหลังของการเข้ามาถึงระบบจะได้สมการมูลฐาน (Fundamental Equations) ดังนี้[1]

$$\frac{d\,P_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \lambda P_{n+1}(t) \qquad (1)$$

$$\frac{d\,P_o(t)}{dt} = -\lambda P_o(t) + \lambda P_1(t) \qquad (2)$$

ซึ่งสมการ (1) และ (2) เรียกว่า Birth and Death Process ถ้าพิจารณาในแง่ของ Pure Birth Process คือสมมุติว่ามีหน่วยเข้ารับบริการ

---

[1] C. West Churchman, Russel L. Ackoff, E. Leonard Arnoff, Introduction to Operations Research (New York : John Wiley & Sons, Inc., 1968), P.403.

อยู่เรื่อย ๆ แต่ไม่มีหน่วยที่เข้ารับบริการเสร็จสิ้นออกไปจากระบบ จะได้ว่า

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

ซึ่ง Pure Birth Process จะเป็น Poisson Process นั่นเอง ส่วนการพิจารณาในแง่ของ Pure Death Process จะได้ว่า

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^{m-n} . e^{-\mu t}}{(m-n)!}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าเวลาที่ใช้ในการบริการมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล จึงสรุปได้ว่าจากกรณีของ Pure Birth Process และ Pure Death Process อัตราของการเข้ารับบริการมีการแจกแจงแบบปัวซอง ส่วนเวลาที่ใช้ในการบริการมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล

6.1 ระบบแถวคอยหนึ่งสถานีบริการ ซึ่งมีการแจกแจงอัตราการเข้ารับบริการแบบปัวซอง และเวลาที่ใช้ในการบริการมีการแจกแจงแบบใด ๆ (Arbitrary Service time)

สมมุติว่าระบบของแถวคอยมีการแจกแจงอัตราการเข้ารับบริการแบบปัวซองด้วยอัตราเฉลี่ย λ ส่วนเวลาที่ใช้ในการบริการมีการแจกแจงแบบใด ๆ ด้วยอัตราเฉลี่ย μ และระบบมีกฎเกณฑ์ของการบริการตามลำดับก่อนหลังของการเข้ามาถึงระบบ จะได้ว่า

$$P_o = 1 - \rho \qquad ; \quad \rho < 1$$

$$W_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2\lambda(1-\rho)} \qquad (3)$$

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} \qquad (4)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \rho + L_q$$

6.2 ระบบแถวคอยหลายสถานีบริการ ซึ่งมีการแจกแจงอัตราเข้ารับบริการมีแบบปัวซอง และเวลาที่ใช้ในการบริการมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล

สมมุติว่าอัตราการเข้ารับบริการมีการแจกแจงแบบปัวซองด้วยค่าเฉลี่ย λ และเวลาที่ใช้ในการบริการแต่ละหน่วยมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลด้วยค่าเฉลี่ย $1/\mu$ ดังนั้น

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & , \quad 0 \le n \le s \\ s\mu & , \quad n \ge s \end{cases}$$

$$\lambda_n = \lambda$$

เมื่อ s เป็นจำนวนหน่วยบริการ

จาก Birth Death Process จะได้ว่า

$$P_o(t) = 1/\left[\sum_{n=o}^{s-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=s}^{\alpha} (\frac{\lambda}{s\mu})^{n-s}\right]$$

$$P_n(t) = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} P_o & , \quad 0 \le n \le s \\ \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{s!s^{n-s}} P_o & , \quad n \ge s \end{cases}$$

ถ้าให้ $\rho = \frac{\lambda}{\mu s}$

$$L_q = \frac{P_o(t)\ (\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!(1-\rho)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

7. การจำลองผล (Simulation)

การจำลองผลเป็นเทคนิคในการแก้ปัญหาทางวิชาการวิธีหนึ่ง ซึ่งเหมาะสำหรับแก้ปัญหาระบบที่มีความสลับซับซ้อนมาก หรือปัญหาที่ต้องใช้เวลานานและไม่สะดวกในการหาคำตอบ หรือปัญหาซึ่งต้องสิ้นเปลืองค่าใช้จ่ายในการหาคำตอบสูงมาก เช่นการแก้ปัญหาป้องกันการแผ่รังสีจากอุปกรณ์นิวเคลียร์ ซึ่งถ้าทำการทดลองโดยตรงจะแพงมากทั้งยังอาจเกิดอันตรายได้ และถ้าจะวิเคราะห์ด้วยทฤษฎีทางคำนวณก็จะยุ่งยากมาก

ขั้นตอนของการจำลองผลสามารถเขียนเป็นผังงาน (flow chart) ได้ดังรูปที่ 8

อาจกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่าการจำลองผลหมายถึงการทดสอบกับแบบจำลองเพื่อแก้ปัญหานั่นเอง สำหรับแบบจำลองที่กล่าวถึงนี้อาจจะเป็นแบบจำลองทางฟิสิคส์ (physical models) หรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ก็ได้ ในการจำลองผลกับแบบจำลองทางฟิสิคส์มักใช้การทดลอง เช่น การจำลองผลของแรงกระทำที่มีต่อเครื่องบินในพฤติภาพต่าง ๆ โดยการสร้างแบบจำลองย่อส่วนเครื่องบินจริงแล้วนำไปทดสอบภายในอุโมงลม (wind tannel) เป็นต้น ส่วนการจำลองผลของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มักใช้ computer ช่วยเพื่อความถูกต้องและรวดเร็ว

วิธีการจำลองผลที่สำคัญมากวิธีหนึ่งคือ วิธี Monte Carlo เป็นการจำลองผลโดยใช้เทคนิคของการสุ่มตัวอย่าง (sampling) ซึ่งแทนที่จะสุ่มตัวอย่างจากเหตุการณ์จริงก็ใช้จัดแบ่งตัวเลขออกเป็นกลุ่ม ๆ โดยให้มีจำนวนตัวเลขในกลุ่มเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความน่าจะเป็นของ element ต่าง ๆ ใน space หลังจากได้จัดกลุ่มตัวเลขแล้วก็ทำการเลือกตัวเลขตัวหนึ่งมาจากตารางของตัวเลขสุ่ม (Table of Random Number) ตัวเลขนี้เมื่อตกอยู่ในกลุ่มใดเราก็จะบอกว่า element ตรงกับกลุ่มนั้น การทำเช่นนี้หลาย ๆ ครั้ง ทำให้ได้ผลลัพธ์เหมือนกับผลลัพธ์ของระบบจริง

รูปที่ 8 ผังงานการจำลองผล