หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาของปัญหา

องค์อาคารที่มีลักษณะเป็นแผ่นวงแหวนรับแรงอัดในแนวรัศมีตามเส้นรอบวง มักจะเกิดปัญหาเกี่ยวกับเสถียรภาพ (elastic stability) นั่นคือ องค์อาคารเกิดการเดาะ (buckling) ก่อนที่หน่วยแรงจะถึงค่าที่ยอมให้ (allowable stress) ฉะนั้นจึงได้มีนักวิจัยหลายท่านศึกษาเกี่ยวกับปัญหาที่เกิดขึ้นนี้ ซึ่งส่วนใหญ่เป็นการศึกษาเกี่ยวกับแผ่นวงแหวนที่มีสภาพการรองรับที่ขอบเป็นแบบธรรมดา (simply supported edge) ขอบยึดแน่น (fixed edge) และขอบอิสระ (free edge) ส่วนสภาพการรองรับที่ขอบ นอกเหนือจากที่กล่าวมานี้ยังมีผลงานวิจัยน้อย ผลงานวิจัยที่แล้วมาในบางกรณี ในทางปฏิบัติยังทำได้ยาก เช่น กรณีของขอบยึดแน่นซึ่งจะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อที่รองรับมีลักษณะพิเศษ คือ จะต้องเคลื่อนที่ได้ในแนวของแรงอัด แต่จะต้องไม่เกิดการหมุน (rotation) ที่ขอบ สภาพการที่น่าจะเป็นไปได้อย่างมากในทางปฏิบัติควรจะเป็นกรณีของแผ่นวงแหวนเสริมด้วยคานขอบ (edge beam) ซึ่งเมื่อรับแรงอัดจะส่งผลสองประการคือ ในประการแรกจะเกิดความเค้นในแนวแกน (axial strain) ของคานขอบซึ่งจะมีผลให้คานขอบรับแรงอัดไปส่วนหนึ่ง และช่วยลดขนาดความเค้นในตัวแผ่นวงแหวนลงด้วย ซึ่งทั้งนี้ย่อมขึ้นกับค่าของความเกร็งเชิงแกน (axial rigidity) ของคานขอบ ในประการที่สอง ความเกร็งเชิงดัด (flexural rigidity) ของคานขอบจะทำหน้าที่ฝืน (restrain) การหมุนที่ขอบของแผ่นในขณะเกิดการเดาะ ซึ่งทั้งสองประการย่อมจะยังผลต่อค่าแรงวิกฤติ (critical load) และรูปแบบของการเดาะ (buckling mode) ดังนั้นการศึกษานี้จึงมุ่งที่จะหาคำตอบเกี่ยวกับการเดาะของแผ่นวงแหวนเสริมด้วยคานขอบทั้งขอบในและขอบนอก ซึ่งผลจากการศึกษานี้จะได้ค่าแรงวิกฤติและรูปแบบของการเดาะของแผ่นวงแหวนในกรณีต่าง ๆ กัน โดยจะได้รวบรวมไว้ในตารางและนำเสนอในรูปของกราฟต่อไป

1.2 ผลงานวิจัยในอดีต

เริ่มแรกไบร์แอน[1] (Bryan) ได้ศึกษาเกี่ยวกับเสถียรภาพของวงกลมเต็มแผ่น รับแรงอัดสม่ำเสมอในแนวรัศมี ในปี ค.ศ. 1891 โดยสมมุติว่าแรงวิกฤติเกิดขึ้นขณะที่

องค์อาคารเกิดการเดาะแบบสมมาตรรอบแกน(axisymmetrical buckling mode) ได้สมการควบคุมกลไกของการเดาะ (governing differential equation) เป็นสมการดิฟเฟอร์เรนเชียลแบบเบสเซล (Bessel's differential equation) ซึ่งได้คำตอบเป็นแบบความลาดเอียง (slope) ในรูปของเบสเซลฟังก์ชั่น (Bessel function)

เกี่ยวกับเสถียรภาพของวงกลมเต็มแผ่นเสริมด้วยคานขอบนั้นได้มีผู้ทำการวิจัยไว้เท่าที่ค้นคว้าหาเอกสารอ้างอิงได้มีดังนี้คือ ไรส์มานน์[2] (Reismann) ทำการวิจัยไว้ในปี ค.ศ. 1952 เรนี อะมอน และออตโต[3] (Rene Amon and Otto) ทำการวิจัยในปี ค.ศ. 1971 ทั้งสามท่านนี้ได้ศึกษาโดยสมมุติว่าแรงวิกฤติเกิดขึ้นขณะที่องค์อาคารเกิดการเดาะแบบสมมาตรรอบแกน ได้สมการควบคุมกลไกของการเดาะเป็นสมการดิฟเฟอร์เรนเชียลแบบเบสเซล และคำตอบที่ได้จากการวิจัยแสดงให้เห็นว่า เมื่ออัตราส่วนของความเกร็งเชิงดัดของคานขอบต่อแผ่นกลมเต็มมีค่ามากขึ้นแล้ว ค่าแรงวิกฤติก็จะมีค่ามากขึ้นด้วย นอกจากงานวิจัยที่กล่าวมาแล้ว ยังมีงานวิจัยอื่น ๆ อีก เช่น คลายน์ และ แฮนค็อค[4] (Kline and Handcock) ได้ศึกษาเกี่ยวกับเสถียรภาพของวงกลมเต็มแผ่นเมื่อวางบนพื้นอีลาสติค (elastic foundation) เป็นต้น

สำหรับการเดาะของแผ่นวงแหวนนั้น ดีน[5] (Dean) เป็นผู้ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเดาะของแผ่นวงแหวนเมื่อรับแรงเฉือนกระจายไปตามแนวของขอบในและขอบนอกเป็นครั้งแรกปี ค.ศ. 1924 และในเวลาต่อมา มิสเนอร์[6] (Meisner) ได้ศึกษาในกรณีที่แผ่นวงแหวนรับแรงอัดสม่ำเสมอในแนวรัศมีที่ขอบนอก ออลส์สัน[7] (Olsson) และชูเบิต[8] (Schubert) ศึกษากรณีที่แผ่นวงแหวนรับแรงอัดสม่ำเสมอในแนวรัศมีทั้งขอบในและขอบนอก ซึ่งในการศึกษาของทั้งสามท่านล้วนสมมุติว่าแรงวิกฤติเกิดขึ้นขณะที่เกิดการเดาะแบบสมมาตรรอบแกน ภายหลังต่อมา ยามากิ[9] (Yamaki) พบว่าแรงวิกฤติมิใช่จะเกิดขึ้นขณะที่แผ่นวงแหวนเกิดการเดาะแบบสมมาตรรอบแกนเสมอไป ในปี ค.ศ. 1971 มาจุมดา[10] (Majumdar) ได้ศึกษากรณีของแผ่นวงแหวนรับแรงอัดที่ขอบนอกซึ่งเป็นกรณีเดียวกันกับของมีสเนอร์ แต่ครั้งนี้มิได้จำกัดว่าแรงวิกฤติจะต้องเกิดขึ้นขณะที่เกิดการเดาะแบบสมมาตรรอบแกนเท่านั้น สมการควบคุมกลไกของการเดาะที่ได้เป็นสมการพาร์เชียลดิฟเฟอร์เรน

เชียล และในการหาคำตอบส่วนหนึ่งใช้วิธีวิเคราะห์โดยประมาณของ เรย์เลห์ ริทซ์ (Rayleigh Ritz's method) จากผลการศึกษาครั้งนี้ชี้ให้เห็นว่าอัตราส่วนของรัศมีขอบในต่อรัศมีขอบนอกของแผ่นวงแหวนที่มีค่าน้อย ๆ จะเกิดแรงวิกฤติในขณะที่เกิดการเดาะแบบสมมาตรรอบแกน เมื่ออัตราส่วนดังกล่าวมีค่าเพิ่มมากขึ้น แรงวิกฤติจะเกิดขึ้นในขณะที่แผ่นวงแหวนเกิดการเดาะไม่สมมาตรรอบแกน (asymmetrical buckling mode) กล่าวคือจะเกิดการเดาะเป็นคลื่นรอบแผ่นวงแหวน จากผลการทดลองด้วยแผ่นวงแหวนบางที่ทำด้วยอลูมิเนียม ค่าแรงวิกฤติที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับการวิเคราะห์โดยทางทฤษฎี ต่อมาในปี ค.ศ. 1976 วิวัฒน์ คล่องพานิช[11] ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเดาะของแผ่นวงแหวนรับแรงอัดสม่ำเสมอในแนวรัศมีที่ขอบนอก โดยใช้วิธีวิเคราะห์โดยประมาณของกาเลอคิน (Galerkin's method) ผลของการวิเคราะห์ได้แสดงให้เห็นว่าแรงวิกฤติเกิดขึ้นขณะที่แผ่นวงแหวนเกิดการเดาะแบบไม่สมมาตรรอบแกน ค่าแรงวิกฤติที่ได้จะมากขึ้น เมื่ออัตราส่วนของรัศมีขอบในต่อรัศมีขอบนอกมากขึ้น

จากผลการวิจัยดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นวัสดุเป็นแบบไอโซทรอปปิคทั้งหมด (isotropic material) กรณีที่วัสดุเป็นแบบออโธทรอปปิค (orthotropic material) ได้ศึกษาในปี ค.ศ. 1971 โดยวิชายะกุมาร และโจกาเรโอ[12] (Vijayakumar and Joga Rao) ซึ่งทั้งสองท่านนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับเสถียรภาพของแผ่นวงแหวนรับแรงอัดสม่ำเสมอในแนวรัศมีที่ขอบในและขอบนอก โดยได้สมมุติว่าแรงวิกฤติเกิดขึ้นขณะที่เกิดการเดาะแบบสมมาตรรอบแกน และหาคำตอบโดยวิธีของ เรย์เลห์ ริทซ์

1.3 ขอบข่ายของการวิจัย

ในการศึกษาครั้งนี้จะได้ศึกษาเกี่ยวกับการเดาะและแรงวิกฤติของแผ่นวงแหวนเสริมด้วยคานขอบทั้งขอบในและขอบนอก เมื่อรับแรงกระทำ p ดังแสดงในรูปที่ 1 (ก),(ข) โดยมีที่รองรับที่คานขอบรองรับธรรมดา (simply supported edge beams) สมมุติว่าขณะเกิดการเดาะฟังก์ชั่นของระยะโก่ง w อยู่ในรูป ฟังก์ชั่นของรัศมี r และคลื่นโคไซน์ (cosine) ของมุม ne โดยที่ฟังก์ชั่นของ r นี้จะแปรตามตัวคงที่ ϕ_j (arbitrary constant) และฟังก์ชั่นของรูปร่างของการโก่งงอที่ขึ้นอยู่กับรัศมี r ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

การรองรับที่ขอบทั้งหมด ส่วนคลื่นโคไซน์จะแปรตามจำนวนคลื่น n และมุม e ที่กวาดไปตามเส้นรอบวงของแผ่นวงแหวน เมื่อนำ w แทนลงในสมการควบคุมกลไกของการเดาะซึ่งเป็นสมการแบบพาร์เชียลดิฟเฟอร์เรนเชียล (partial differential equation) ทำให้สามารถลดรูปเป็นสมการดิฟเฟอร์เรนเชียลธรรมดาเชิงเส้นแบบโฮโมจีเนียส (ordinary homogeneous linear differential equation) มี w เป็นตัวแปรตาม (dependent variable) มี r เป็นตัวแปรอิสระ (indepent variable) โดยมีสัมประสิทธิ (coefficients) ของอนุพันธ์ของตัวแปรตามอยู่ในรูปของฟังก์ชั่นของรัศมี r และแรงอัดในแนวรัศมีตามเส้นรอบวงที่ด้านขอบนอก P โดยการใช้วิธีของกาเลอคินที่ว่าตัวคงที่ ϕ_j จะต้องมีค่าสอดคล้องกับสมการควบคุมกลไกของการเดาะ (ที่ลดรูปแล้ว) ให้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ โดยถือหลักที่ว่าให้เกิดความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดภายในอาณาบริเวณของแผ่นวงแหวนเมื่อดำเนินการตามวิธีดังกล่าวจะได้สมการพีชคณิตสมัลตาเนียสเชิงเส้นแบบโฮโมจีเนียส (simultaneous homogeneous linear algebraic equations) เป็นจำนวนเท่ากับจำนวนตัวคงที่ที่ยังไม่รู้ค่า ϕ_j ซึ่งเงื่อนไขที่จะได้คำตอบของ ϕ_j ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด (non-trivial solution) จะเป็นสมการที่ใช้หาค่าตัวแปรของการเดาะ (buckling parameter) และศึกษาผลกระทบของตัวแปรต่าง ๆ เช่น อัตราส่วนของความเกร็งเชิงดัดและเชิงแกนของคานขอบต่อแผ่นวงแหวน อัตราส่วนของรัศมีขอบในต่อรัศมีขอบนอก เป็นต้น คำตอบที่ได้จะนำเสนอในรูปของตารางและกราฟ เพื่อใช้เป็นข้อมูลในการศึกษาเปรียบเทียบกับผลงานของนักวิจัยอื่น ๆ และใช้ในการศึกษาพฤติกรรมของการเดาะขององค์อาคารประเภทนี้

ในกรณีของคำตอบเฉพาะ (limiting cases) ได้จากการกำหนดให้อัตราส่วนของความเกร็งเชิงแกนของคานขอบต่อแผ่นวงแหวนมีค่าเป็นศูนย์และแปรค่าอัตราส่วนของความเกร็งเชิงดัดของคานขอบต่อแผ่นวงแหวน ก็จะได้คำตอบของค่าแรงวิกฤติของแผ่นวงแหวนที่มีสภาพการรองรับที่ขอบอยู่ระหว่างขอบธรรมดากับขอบยึดแน่นหรือเป็นการยึดแบบอีลาสติค (elastically restrained edge) และเมื่อกำหนดให้อัตราส่วนของความเกร็งเชิงดัดมีค่าเป็นศูนย์หรือเข้าใกล้ค่าอนันต์ (infinity) ก็จะได้คำตอบซึ่งมีสภาพการรองรับที่ขอบธรรมดาหรือยึดแน่นตามลำดับ คำตอบได้นำเสนอในรูปของตารางและกราฟ เพื่อการเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยอื่น ๆ และเพื่อการศึกษาถึงพฤติกรรมของการเดาะเท่านั้น นอกจากนี้ยังใช้เป็นข้อมูลในการออกแบบด้วย