

การโคงเคาะของแผนงานเสริมค้วคานชอบ



นายพรเลิศ สันติภากรณ์

004212

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2524

I16690378

BUCKLING OF AN ANNULAR PLATE WITH SUPPORTED EDGE BEAMS

Mr. Pornlers Santipaporn

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement

for the Degree of Master of Engineering

Department of Civil Engineering

Graduate School

Chulalongkorn University

1981

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การโค้งเคาะของแผ่นวงแหวนเสริมด้วยคานขอบ

โดย

นายพรเลิศ สันติภากรณ์

ภาควิชา

วิศวกรรมโยธา

อาจารย์ที่ปรึกษา

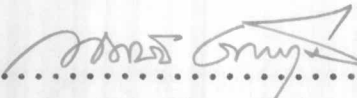
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุธรรม สุริยะมงคล

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้บัณฑิตวิทยาลัยนี้เป็น
ส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต



.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร.สุประดิษฐ์ บุญนาค)

คณะกรรมการ สอบวิทยานิพนธ์



.....ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.ทักษิณ เทพชาตรี)



.....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุธรรม สุริยะมงคล)



.....กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.วินิต ช่อวิเชียร)



.....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เอกสิทธิ์ ลิ้มสุวรรณ)

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หัวข้อวิทยานิพนธ์
ชื่อนิสิต
อาจารย์ที่ปรึกษา
ภาควิชา
ปีการศึกษา

การโก่งเคาะของแผ่นวงแหวนเสริมด้วยคานขอบ
นายพรเลิศ สันติภาพภณ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุธรรม สุริยะมงคล
วิศวกรรมโยธา
2524



บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาเกี่ยวกับการหาแรงวิกฤติของแผ่นวงแหวนเสริมด้วยคานขอบทั้ง
ขอบในและขอบนอกโดยมีที่รองรับขรรคมค (inner and outer simply supported
edge beam) ซึ่งรับแรงอัดในแนวรัศมีตามเส้นรอบวงที่คานขอบนอก และหาค่าตอบ โดย
ประมาณตามวิธีของกาเลอคิน (Galerkin's method) โดยสมมุติว่าขณะเกิดการเคาะทั้งกั้น
ของการโก่ง w อยู่ในรูป $w = F(r) \cos(n\theta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, โดยที่
 $F(r) = \sum_{j=1}^m \psi_j f_j(r)$, $f_j(r)$ เป็นฟังก์ชันของรัศมี r ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขการ
รองรับที่ขอบทั้งหมด และ ψ_j เป็นตัวคงที่ที่จะต้องหาค่าสอดคล้องกับสมการควบคุมกลไกของ
การเคาะ (governing differential equation) มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ โดยถือ
หลักที่ว่าให้เกิดความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดภายในอาณาบริเวณ (region) ของแผ่นวงแหวน
การที่สมมุติฟังก์ชันของการโก่งแบบนี้ สามารถทำให้ลดรูปสมการควบคุมกลไกของการเคาะ
จากสมการพาร์เชียลดิฟเฟอเรนเชียล (partial differential equation) เป็น
สมการดิฟเฟอเรนเชียลธรรมดา (ordinary differential equation) จากนั้นหาค่า
ตอบจากสมการดิฟเฟอเรนเชียลธรรมดาโดยหลักการคังกล่าวข้างต้น ค่าตอบที่ได้จากการ
ศึกษานี้ แสดงให้เห็นว่าการที่แผ่นวงแหวนเสริมคานขอบเฉพาะที่ขอบนอกยอมทำให้แรงวิกฤติ
(critical load) มีค่ามากขึ้นเสมอ และทำให้จำนวนคลื่น n ของฟังก์ชันของการโก่ง
ซึ่งเป็นจำนวนคลื่นที่เกิดขึ้นในแนวเส้นรอบวงในขณะที่เกิดการเคาะมีค่ามากขึ้น แต่สำหรับใน
กรณีเสริมคานขอบเฉพาะที่ขอบใน โดยการเพิ่มอัตราส่วนของความเกร็งเชิงแกน (axial

rigidity) ของคานขบต่อแฉ่นวงแหวนเพียงอย่างเดี่ยว กลับจะทำให้ค่าแรงวิกฤติที่ได้มีค่าลดลง และยังทำให้จำนวนคลื่น n มีค่าลดลงเท่ากับศูนย์ กล่าวคือ แฉ่นวงแหวนเกิดการเคาะแบบสมมาตรรอบแกน (axisymmetrical buckling mode)

ในกรณีค่าตอเฉพาะ (limiting cases) ได้ศึกษาไว้ในครั้งนี้ด้วย คือในกรณีที่กำหนดอัตราส่วนของความเกร็งเชิงแกนของคานขบต่อแฉ่นวงแหวนมีค่าเป็นศูนย์ และแปรค่าอัตราส่วนของความเกร็งเชิงคัต (flexural rigidity) ของคานขบต่อแฉ่นวงแหวน ก็จะได้ค่าตอของค่าแรงวิกฤติของแฉ่นวงแหวนที่มีสภาพการรองรับที่ขบอยู่ระหว่างขบธรรมดา (simply supported edge) กับขบยึดแน่น (fixed edge) หรือเป็นการยึดแบบอัสติค (elastically restrained) นั้นเอง เมื่อกำหนดให้อัตราส่วนของความเกร็งเชิงคัตมีค่าเป็นศูนย์หรือเข้าใกล้ค่าอนันต์ (infinity) ก็จะได้ค่าตอที่สามารถนำไปเปรียบเทียบกับผลงานของเค. วิชาเยกุมาร (K. Vijayakumar) และวิวิฒน์คล่องพานิช จากการเปรียบเทียบพบว่าแรงวิกฤติที่ได้จากการศึกษานี้มีค่าต่ำกว่าในทุกกรณี ยกเว้นในกรณีที่มีสภาพการรองรับที่ขบในเป็นขบธรรมดาและขบนอกยึดแน่น ซึ่งค่าตอของวิวิฒน์ให้ค่าต่ำกว่า แต่ก็มีข้อน่าสังเกตว่าค่าตอของวิวิฒน์ที่ได้จากการสมมุติฟังก์ชันของคานโก่งที่ขบในไม่สอดคล้องกับสภาพการรองรับที่ขบ กล่าวคือโมเมนต์คัตที่ขบในไม่เป็นศูนย์

ผลจากการศึกษานี้ได้เสนอค่าตอไว้ในรูปของตารางและกราฟ เพื่อจะได้นำไปใช้เป็นข้อมูลในการศึกษาถึงพฤติกรรมของการเคาะขององค์อาคารประเภทนี้ และใช้ในการวิเคราะห์ห่ออกแบบของค้ออาคารบางชนิดที่มีลักษณะดังกล่าวนำมาแล้ว.

Thesis Title Buckling of an Annular Plate with Supported
Edge Beams
Name Mr. Pornlers Santipaporn
Thesis Advisor Assistant Professor Suthum Suriyamongkol,
D. Eng.
Department Civil Engineering
Academic Year 1981

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to study the critical load of an annular plate with inner and outer simply supported edge beams under uniform radial compressive force acting along the outer edge. The problem is solved approximately according to Galerkin's method by assuming that, at buckling, the deflection function is in the form $w = F(r)\cos(n\theta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ such that $F(r) = \sum_{j=1}^m \phi_j f_j(r)$, $f_j(r)$ being function of radius r which satisfies the boundary condition, and ϕ_j denotes arbitrary constant which, based on the principle of minimum error in the least-square sense, satisfies the governing equation. By assuming the deflection function in this way, the governing equation in the form of a partial differential equation is reduced to an ordinary differential equation which can be solved approximately as mentioned above.

The results of this investigation show that, by reinforcing the outer edge of the annular plate with a simply supported edge beam, the critical load as well as the number of waves, n , of the deflection shape, which occurs in the tangential direction of the plate during buckling, increase. In the case of an annular plate with inner edge beam, by largely increasing the axial rigidity of the edge beam, the critical load is decreased while the number of waves, n , reduces in such a manner that the plate tends to buckle in an axisymmetrical mode.

By setting the axial rigidity of the edge beam to zero and varying the flexural rigidity, a limiting case of an annular plate elastically restrained at the edges is obtained. In particular, when the flexural rigidity ratio of the edge beam is set to zero or approach infinity, the result can be compared with the corresponding solution as obtained by K. Vijayakumar and Wiwat Klongpanich. From the comparison, it is found that the critical load obtained in this study is lower in every case except in the case in which the inner edge of the plate is simply supported and the outer edge is fixed, for which the result from Wiwat's study is lower. However, it should be noted that in that exceptional case, Wiwat's assumed deflection function does not satisfy the condition of zero moment at the inner edge.

The results from this study which are presented in the form of tables and curves should provide further informations for the analysis and design of this type of structures.



กิติกรรมประกาศ

ในการจัดทำวิทยานิพนธ์นี้ ผู้เขียนขอแสดงความขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์
ดร.สุธรรม สุริยะมงคล ในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษา ซึ่งได้กรุณาให้คำปรึกษาแนะนำ
และตรวจสอบ แก่วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จนสำเร็จเรียบร้อย และขอแสดงความขอบคุณ
รองศาสตราจารย์ ดร.ทักษิณ เทพชาติศรี รองศาสตราจารย์ ดร.วินิต ช่อวิเชียร
และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เอกสิทธิ์ อัมสุวรรณ ซึ่งเป็นกรรมการตรวจวิทยานิพนธ์ที่ได้
กรุณาตรวจสอบเพื่อให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ผู้เขียนขอแสดงความขอบคุณต่อคุณพ่อและคุณแม่ ตลอดจนคุณนุรพาศณาจารย์
ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนผู้เขียนตั้งแต่นั้น และช่วยผลักดันและเป็นกำลังใจให้แก่ผู้เขียน
เสมอมา

นอกจากนี้ผู้เขียนขอแสดงความขอบคุณเจ้าหน้าที่ศูนย์คอมพิวเตอร์จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย ที่ได้ช่วยแนะนำการใช้เครื่องจักรกลประมวลผลในการคำนวณของวิทยานิพนธ์
นี้ และยังมีบุคคลอีกหลายท่านที่มีได้กล่าวนามที่ได้ช่วยในการเขียนกราฟ อำนวยความสะดวก
ในด้านการจัดพิมพ์ จึงขอแสดงความขอบคุณต่อทุกท่านในโอกาสนี้ด้วย

ท้ายสุดนี้ผู้เขียนใคร่ขอแสดงความสำนึกในพระคุณของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ซึ่งทำให้ผู้เขียนมีโอกาสได้ศึกษาต่อในระดับบัณฑิตศึกษา

พรเลิศ สันติภาภรณ์

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ	ช
รายการรูปประกอบ	ญ
รายการตารางประกอบ	ฎ
รายการสัญลักษณ์	ฏ



บทที่

1 บทนำ

1.1 ความเป็นมาของปัญหา	1
1.2 ผลงานวิจัยในอดีต	1
1.3 ขอบข่ายของการวิจัย	3

2 วิธีการวิเคราะห์

2.1 ข้อสมมุติฐานเบื้องต้น	5
2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำกับระยะเคลื่อนที่ของคานขอบ	5
2.3 สมการพื้นฐานเพื่อการวิเคราะห์แฉนวนวงแหวน	7
2.4 สมการระยะเคลื่อนที่ของแฉนวนวงแหวน	9
2.5 สมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ P กับแรงค้ำในแฉนวนวงแหวน	10
2.6 สมการควบคุมกลไกของการเคาะ	11
2.7 การหาค่าแรงวิกฤติ	13
2.8 รูปร่างของการโก่งงอ (Shape Function)	14

2.9	เงื่อนไขของสภาพการรองรับ (Boundary Conditions).	15
2.10	ค่าตอบของแรง विकฤติ	17
3	ผลการวิเคราะห์และการวิจารณ์	
3.1	ค่าตอบสำหรับแผ่นวงแหวนเสริมด้วยคานขอบ.	26
3.1.1	ผลกระทบของความเกร็งเชิงค้ำคของคานขอบต่อค่าแรง विकฤติ	27
3.1.2	ผลกระทบของความเกร็งเชิงแกนของคานขอบต่อค่า แรง विकฤติ	27
3.2	ค่าตอบเฉพาะ (Limiting Cases)	29
3.2.1	ค่าตอบของแผ่นวงแหวนไร้คานขอบรองรับแบบอีลาสติก	29
3.2.2	เปรียบเทียบค่าตอบเฉพาะกับผลงานวิจัยอื่น ๆ	30
3.2.2.1	ขอบในและขอบนอกรองรับขรรมค	30
3.2.2.2	ขอบในและขอบนอกรองรับยึดแน่น	31
3.2.2.3	ขอบในรองรับขรรมคและขอบนอกรองรับยึดแน่น	31
3.2.2.4	ขอบในรองรับยึดแน่นและขอบนอกรองรับขรรมค	32
3.2.3	เปรียบเทียบค่าแรง विकฤติเมื่อมีเงื่อนไขการรองรับที่ ขอบแตกต่างกัน	32
4	สรุปผลการวิเคราะห์ และข้อเสนอแนะ	
4.1	สรุปผลการวิเคราะห์	33
4.2	ข้อเสนอแนะ	34
	เอกสารอ้างอิง	35
	ภาคผนวก	63
	ประวัติการศึกษา	87

รายการรูปประกอบ

รูปที่		หน้า
1	ลักษณะของแผ่นวงแหวนเสริมค้ำยันคานขอบรับแรงอัดในแนวรัศมี	38
2	ลักษณะของคานขอบที่รับแรงดึงในแนวรัศมี	39
3	คานขอบยึคขยายจากตำแหน่งเดิมไปอยู่ตำแหน่งใหม่	39
4	การสมมูลย์ของแรงในทิกัดโพลาร์ และการโก่งงอของชิ้นส่วนเล็ก ๆ abcd	40
5	การหมุนและแรงสมมูลย์ในคานขอบวงแหวน	41
6	แผ่นวงแหวนรับแรงอัดตามขอบนอก กรณี-ขอบในและขอบนอก เสริมคานขอบ	42
7	แผ่นวงแหวนรับแรงอัดตามขอบนอก กรณี-ขอบในเสริมคานขอบ และ ขอบนอกรองรับหรรมา	42
8	แผ่นวงแหวนรับแรงอัดตามขอบนอก กรณี-ขอบในรองรับหรรมา และ ขอบนอกเสริมคานขอบ	43
9	แผ่นวงแหวนรับแรงอัดตามขอบนอก กรณี-ขอบในเสริมคานขอบ และ ขอบนอกรองรับยึคแน่น	43
10	แผ่นวงแหวนรับแรงอัดตามขอบนอก กรณี-ขอบในรองรับยึคแน่น และ ขอบนอกเสริมคานขอบ	44
11	แผ่นวงแหวนรับแรงอัดตามขอบนอก กรณี-ขอบในและขอบนอก รองรับแบบอีลาสติก	45
12	แผ่นวงแหวนรับแรงอัดตามขอบนอก กรณี-ขอบในรองรับแบบอีลาสติก และขอบนอกรองรับหรรมา	45

13	แผนวงแหวนรับแรงอัดตามขอบนอก กรณี-ขอบในรองรับขรรคคา และขอบนอกรองรับแบบอีลาสติค	46
14	แผนวงแหวนรับแรงอัดตามขอบนอก กรณี-ขอบในรองรับแบบ อีลาสติค และ ขอบนอกรองรับยึดแน่น	46
15	แผนวงแหวนรับแรงอัดตามขอบนอก กรณี-ขอบในรองรับยึดแน่น และ ขอบนอกรองรับแบบอีลาสติค	47
16	ตัวแปรของการเคาะ \bar{P}_{cr} กับอัตราส่วนความเกร็งเชิงคัต $x_i = x_0$ ที่คั่น n ต่าง ๆ เมื่อ $k = 0.1-0.7$ สำหรับแผนวงแหวนขอบใน และขอบนอกรองรับแบบอีลาสติค	48
17	ตัวแปรของการเคาะ \bar{P}_{cr} กับอัตราส่วนความเกร็งเชิงคัต x_i ที่คั่น n ต่าง ๆ เมื่อ $k=0.1-0.7$ สำหรับแผนวงแหวนขอบใน รองรับแบบอีลาสติค และขอบนอกรองรับขรรคคา	49
18	ตัวแปรของการเคาะ \bar{P}_{cr} กับอัตราส่วนความเกร็งเชิงคัต x_0 ที่คั่น n ต่าง ๆ เมื่อ $k = 0.1-0.7$ สำหรับแผนวงแหวนขอบใน รองรับขรรคคาและขอบนอกรองรับแบบอีลาสติค	50
19	ตัวแปรของการเคาะ \bar{P}_{cr} กับอัตราส่วนความเกร็งเชิงคัต x_i ที่คั่น n ต่าง ๆ เมื่อ $k = 0.1-0.7$ สำหรับแผนวงแหวนขอบใน รองรับแบบอีลาสติค และขอบนอกรองรับยึดแน่น	51
20	ตัวแปรของการเคาะ \bar{P}_{cr} กับอัตราส่วนความเกร็งเชิงคัต x_0 ที่คั่น n ต่าง ๆ เมื่อ $k = 0.1 - 0.7$ สำหรับแผนวงแหวนขอบใน รองรับยึดแน่น และขอบนอกรองรับแบบอีลาสติค	52
21	แผนวงแหวนรับแรงอัดตามขอบนอก กรณี-ขอบในและขอบนอกรองรับ ขรรคคา	53

22	แผนผังแหวนรับแรงอัดตามขอบนอก กรณี-ขอบในและขอบนอก รองรับยึดแน่น	53
23	แผนผังแหวนรับแรงอัดตามขอบนอก กรณี-ขอบในรองรับขรรมคา และขอบนอกรองรับยึดแน่น.	54
24	แผนผังแหวนรับแรงอัดตามขอบนอก กรณี-ขอบในรองรับยึดแน่น และขอบนอกรองรับขรรมคา	54
25	ตัวแปรของการเคาะ \bar{P}_n กับอัตราส่วน k ที่เคลื่อน n ต่าง ๆ สำหรับ แผนผังแหวนขอบในและขอบนอกรองรับขรรมคา	55
26	ตัวแปรของการเคาะ \bar{P}_n กับอัตราส่วน k ที่เคลื่อน n ต่าง ๆ สำหรับ แผนผังแหวนขอบในและขอบนอกรองรับยึดแน่น.	56
27	ตัวแปรของการเคาะ \bar{P}_n กับอัตราส่วน k ที่เคลื่อน n ต่าง ๆ สำหรับ แผนผังแหวนขอบในรองรับขรรมคา และขอบนอกรองรับยึดแน่น. . .	57
28	ตัวแปรของการเคาะ \bar{P}_n กับอัตราส่วน k ที่เคลื่อน n ต่าง ๆ สำหรับ แผนผังแหวนขอบในรองรับยึดแน่นและขอบนอกรองรับขรรมคา . . .	58
29	ตัวแปรของการเคาะ \bar{P}_{cr} กับอัตราส่วน k ที่เคลื่อน n ต่าง ๆ I แผนผังแหวนขอบในและขอบนอกรองรับขรรมคา II แผนผังแหวนขอบในและขอบนอกรองรับยึดแน่น III แผนผังแหวนขอบในรองรับขรรมคาและขอบนอกรองรับยึดแน่น IV แผนผังแหวนขอบในรองรับยึดแน่นและขอบนอกรองรับขรรมคา	59

รายการตารางประกอบ

ตารางที่

หน้า

1	ค่าตัวแปรของการเคาะ \bar{P}_{cr} ของแผ่นวงแหวนเสริมคานขอบ ; ผลกระทบของอัตราส่วนของความเกร็งเชิงคัต x_i และ/หรือ x_o ($\nu = 0.3$)	60
2	ค่าตัวแปรของการเคาะ \bar{P}_{cr} ของแผ่นวงแหวนเสริมคานขอบ ; ผลกระทบของอัตราส่วนความเกร็งเชิงแกน α_i และ/หรือ α_o ($\nu = 0.3$)	61
3	ตัวแปรของการเคาะ \bar{P}_{cr} ของแผ่นวงแหวนไร้คานขอบ ; เปรียบเทียบค่าแรงวิกฤติกับเค วิชายะกุมาร และวิวัฒน์ คลองพานิช ($\nu = 0.3$)	62

รายการสัญลักษณ์

	a	รัศมีขอบในของแผ่นวงแหวน
A_i, A_o		พื้นที่หน้าตัดของคานาขอบในและนอกตามลำดับ
b		รัศมีขอบนอกของแผ่นวงแหวน
D		ความเกร็งเชิงคัตของแผ่นวงแหวน
E		โมดูลัสยืดหยุ่นของแผ่นวงแหวน
E_i, E_o		โมดูลัสยืดหยุ่นของคานาขอบในและนอกตามลำดับ
GDE		governing differential equation
I_i, I_o		โมเมนต์เฉื่อยของคานาขอบในและนอกตามลำดับ
k		อัตราส่วนรัศมีขอบในต่อขอบนอก
M_r		โมเมนต์คัตบนหน้าตัดของแผ่นวงแหวน
M_i, M_o		โมเมนต์คัตบนหน้าตัดของคานาขอบในและนอกตามลำดับ
n		จำนวนคลื่นที่เกิดขึ้นตามแนวเส้นรอบวงของแผ่นวงแหวน
N_i, N_o		แรงคั้นในแนวรัศมีต่อหน่วยความยาวเส้นรอบวงที่ขอบในและนอกของแผ่นวงแหวนตามลำดับ
N_r		แรงคั้นในแนวรัศมีต่อหน่วยความยาวเส้นรอบวงของแผ่นวงแหวน
N_θ		แรงคั้นในแนวเส้นรอบวงต่อหน่วยความยาวรัศมีของแผ่นวงแหวน
P		แรงอัดในแนวรัศมีต่อหน่วยความยาวเส้นรอบวง
P_{cr}		แรงวิกฤติ
\bar{P}_{cr}		$\frac{P_{cr} b^2}{D}$
\bar{P}_n		ตัวแปรของการเคาะที่คลื่น n ต่าง ๆ
r		รัศมีของแผ่นวงแหวน
t		ความหนาของแผ่นวงแหวน
u_i, u_o		ระยะเคลื่อนในแนวรัศมีของคานาขอบในและนอกตามลำดับ

w = ระยะโก่งของแผ่นวงแหวน

θ = มุมในพิกัดโพลาร์ (polar coordinate)

ϵ_i, ϵ_o = ความเค้นในแนวเส้นรอบวงของคานขอบในและนอกตามลำดับ

ϵ_r = ความเค้นในแนวรัศมีของแผ่นวงแหวน

ϵ_θ = ความเค้นในแนวเส้นรอบวงของแผ่นวงแหวน

ϕ = เสถียรฟังก์ชัน (stress function)

ν = อัตราส่วนพิวของ (Poisson's ratio)

$$\alpha_i = \frac{A_i E_i}{a t E}$$

$$\alpha_o = \frac{A_o E_o}{b t E}$$

$$X_i = \frac{E_i I_i}{a D}$$

$$X_o = \frac{E_o I_o}{b D}$$

ω_i, ω_o = มุมเอียงของเส้นคิ่งของหน้าตัดคานขอบในและนอกตามลำดับ