บทที่ 3

ทฤษฎีการปรับแก้โครงข่ายระดับด้วยลีสท์สแควร์

ทฤษฎีของการปรับแก้ในส่วนที่สัมพันธ์กับงานโครงข่ายระดับในสภาพปกติทั่วไป พอสรุปได้จาก "วิชา (2524)" ดังนี้

3.1 กล่าวนำ

การปรับแก้ (adjustment) จะมีความหมายก็ต่อเมื่อมีข้อมูลมากกว่าจำนวนต่ำสุดที่จำเป็น (redundant observations) โดยทั่วไปแล้วค่าที่แท้จริงของปริมาณใด ๆ ไม่สามารถจะทราบได้ในทางปฏิบัติจะใช้การวัด (measurement) หรือการสังเกต (observation) จะโดยตรงหรือทางอ้อม เพื่อใช้คาดคะเนหรือคำนวณหาปริมาณที่ต้องการทราบข้อมูลที่ได้ดังกล่าวย่อมเปลี่ยนแปลงหรือขึ้น ๆ ลง ๆ (fluctuate) ได้ตามทฤษฎีของความน่าจะเป็นและสถิติซึ่งเรียกกันว่า "ความคลาดเคลื่อน" (errors)

เมื่อเลือกแบบจำลอง (model) ขึ้นมาแล้ว แบบจำลองนั้น ๆ จะนำไปสู่จำนวนตัวแปรอิสระต่ำสุดจำนวนหนึ่ง ซึ่งแทนด้วยปริมาณ n_o ถ้าแทนจำนวนค่าสังเกตด้วย n ค่าดังกล่าวนี้จะต้องเป็นอิสระแก่กันคือ จะต้องไม่มีค่าสังเกตค่าใดค่าหนึ่งที่สามารถหาได้จากค่าสังเกต (n-1) ที่เหลือ และเมื่อ n มีขนาดใหญ่กว่า n_o ก็จะต้องมีข้อมูลเกินมา (redundancy) จึงจำเป็นต้องมีการปรับแก้เพื่อให้ได้คำตอบที่เป็นเอกภาพ สำหรับเซ็ทของค่าคาดคะเนของตัวแปรในแบบจำลองนั้น ๆ ซึ่งในกระบวนวิธีการปรับแก้ทั้งหลายนั้น "วิธีลีสท์สแควร์" เป็นวิธีที่ใช้กันมากที่สุด

ปริมาณที่เกินมา (redundancy) นั้นแทนด้วย r

$$r = n - n_o \qquad (3 - 1)$$

และค่านี้เท่ากับลำดับชั้นของความอิสระ (degree of freedom)

3.2 หลักการของลีสท์สแควร์ (The Least Squares Principle)

ให้เซ็ทของค่าสังเกตที่ได้มาแทนด้วยเวคเตอร์ L_b และเป็นกลุ่มที่ประกอบด้วยจำนวนต่ำสุดที่จำเป็น หลังจากการปรับแก้จะได้เซ็ทของค่าคาดคะเน (estimates) แทนด้วยเวคเตอร์ $\hat{L}_a$ ซึ่งสอดคล้องกับแบบจำลอง ผลต่างของเซ็ททั้งสองคือ

$$V = \hat{L}_a - L_b \qquad (3 - 2)$$

ซึ่งมีชื่อเรียกว่า Residual หรือ "เศษคงเหลือ"

โดยทั่วไปหลักการของลีสท์สแควร์นั้นพยายามทำให้ค่าคาดคะเน $\hat{L}_a$ ใกล้เคียงกับค่าตัวอย่าง L_b ที่สังเกตมาให้มากที่สุด โดยคำนึงถึงคุณสมบัติทางสโตคาสติค (สถิติ) ด้วย และเมื่อถึงจุดที่ $r = 0$, $\hat{L}_a$ จะเท่ากับ L_b และเศษคงเหลือทั้งหมดก็จะเป็นศูนย์

หลักการของลีสท์สแควร์คือ

$$\phi = V'PV \rightarrow \text{minimum} \qquad (3 - 3)$$

โดยที่ P เป็นแมทริกซ์น้ำหนักของค่าสังเกต (weight matrix of the observations)

เมื่อค่าสังเกตไม่มีสหสัมพันธ์กัน (uncorrerate) จะมีผลให้แมทริกซ์น้ำหนักมีโครงสร้างเป็นแมทริกซ์ทะแยงมุม (diagonal matrix) ดังนั้นจากสมการ (3 - 3) จะเป็น

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} (P_i V_i^2) \qquad (3 - 4)$$

โดยที่ P_i เป็น diagonal element ที่ i ของแมทริกซ์ P

V_i เป็นเศษคงเหลือของค่าสังเกตตัวที่ i ซึ่งสอดคล้องกัน

นอกจากค่าสังเกตทุก ๆ ค่าจะไม่มีสหสัมพันธ์ต่อกันแล้วยังมีน้ำหนักเท่ากันด้วย (หรือมีความถูกต้องเท่ากัน) เช่นนี้ P จะกลายเป็นแมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) จะได้ว่า

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} (V_i^2) \qquad (3 -5)$$

หลักการของลีสท์สแควร์ที่กล่าวมานี้ไม่จำเป็นต้องทราบรูปแบบของการแจกแจงทางสถิติ สิ่งที่จำเป็นต้องทราบเป็นเพียงแมทริกซ์น้ำหนักของค่าสังเกต(P)หรือ cofactor matrix Q แต่ในกรณีที่ความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติ (normal distribution) ค่าคาดคะเนที่ได้จากลีสท์สแควร์จะมีคุณสมบัติพิเศษบางประการเช่น จะเป็นค่าเดียวกับค่าที่ได้จาก "Method of Maximum Likelihood"

3.3 <u>เทคนิคของลีสท์สแควร์</u> (The Techniques of Least Squares)

ก่อนอื่นจะต้องสร้างแบบจำลองเชิงคณิตขึ้นมา เพื่อเป็นจุดเริ่มต้นในการที่จะเลือกเทคนิคของลีสท์สแควร์ในรูปแบบใดแบบหนึ่งให้เหมาะสมกับการคำนวณและการปฏิบัติ ซึ่งการคำนวณของลีสท์สแควร์จะให้ค่าคาดคะเนใหม่ของตัวแปรทั้งหมดในแบบจำลอง พร้อม ๆ กับแมทริกซ์ของความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม (Variance-Covariance matrix) ของค่าใหม่ ในขั้นตอนต่อไปจำเป็นต้องมีการประเมินผลทางสถิติของค่าที่ได้มา อาจจะมีการปรับแก้แบบจำลองใหม่ ถ้าการประเมินผลทางสถิติไม่ผ่านตามเป้าหมาย ซึ่งทั้งนี้ขึ้นอยู่กับเหตุผลหลาย ๆ ด้านที่จะต้องพิจารณาอย่างรอบคอบ

ในแบบจำลองจะมีปริมาณสโตคาสติคของค่าสังเกตและพารามิเตอร์ (parameters) หรือค่าคงที่อยู่ด้วย โดยที่พารามิเตอร์เหล่านี้เป็นตัวที่ไม่ทราบค่าในตอนเริ่มต้น แต่การปรับแก้จะนำไปสู่ค่าคาดคะเนของแต่ละตัวพร้อมกับคุณสมบัติทางสถิติ ให้เวคเตอร์ของพารามิเตอร์แทนด้วย $X_{u,1}$ เมื่อ u คือจำนวนพารามิเตอร์ ภายหลังจากสร้างฟังก์ชั่นนอลและสโตคาสติคโมเดลขึ้นมาแล้ว เทคนิคของลีสท์สแควร์จะเป็นการพรรณาถึงแบบจำลองเชิงคณิตของปัญหา

เราแยกสมการเหล่านี้ออกเป็นประเภทต่าง ๆ ตามลักษณะของมันเช่น สมการที่มีค่าสังเกตล้วน ๆ เรียกว่า "สมการเงื่อนไข" (Condition equations) และสมการที่มีค่าสังเกตเป็นฟังก์ชั่นของพารามิเตอร์เรียกว่า "สมการค่าสังเกต" (Observation equations)

3.4 วิธีการปรับแก้โครงข่ายระดับด้วยลีสท์สแควร์

การปรับแก้โครงข่ายระดับด้วยลีสท์สแควร์สามารถกระทำได้ 2 วิธีคือ "วิธีสมการค่าสังเกต" และ "วิธีสมการเงื่อนไข" จากบทความของ สวัสดิ์ชัย (2523) พอสรุปได้ดังนี้

แบบจำลองเชิงคณิตของวิธีสมการค่าสังเกต

มีลักษณะดังนี้

$$L_a = F(X_a)$$

สมการเชิงเส้น $V = AX + L$ (3 - 6)

สมการปกติ $NX + U = 0$, $(N = A'PA,\ U = A'PL)$

$$X = -N^{-1}U$$

พารามิเตอร์ที่ปรับแก้แล้ว $X_a = X_o + X$

(การพิสูจน์สูตรกล่าวในผนวก ง.)

โดยวิธีนี้เราสามารถนำข้อมูลจากการสังเกตแต่ละตัวมาเขียนเป็นสมการได้ 1 สมการ ซึ่งประกอบด้วยพารามิเตอร์อย่างน้อย 1 ตัวเราเรียกสมการที่ได้ว่า "สมการค่าสังเกต" (observation equations)

แบบจำลองเชิงคณิตของวิธีสมการเงื่อนไข

มีลักษณะดังนี้

$$F(L_a) = 0$$

สมการเชิงเส้น $BV + W = 0$ (3 - 7)

สมการปกติ $PV - B'K = 0$

$$BV + W = 0$$

$$K = -M^{-1}W,\quad (M = BP^{-1}B')$$

$$V = P^{-1}B'K$$

ค่าสังเกตที่ได้ปรับแก้แล้ว $L_a = L_b + V$

(การพิสูจน์สูตรกล่าวไว้ในภาคผนวก ง.)

3.4.1 การปรับแก้โครงข่ายระดับด้วยวิธีสมการค่าสังเกต

ตัวอย่างโครงข่ายระดับจากรูปที่ ซ.1 ประกอบไปด้วยจุดบังคับ 1 จุดคือ B.M.S. 122 มีจุดที่ไม่ทราบค่าระดับ 12 จุด และจำนวนค่าสังเกตทั้งสิ้น 19 ค่า

เนื่องจากแบบจำลองเชิงคณิตของโครงข่ายระดับเป็นสมการเชิงเส้น ดังนั้นจึงให้ค่าประมาณของพารามิเตอร์ X_o มีค่าเป็นศูนย์ได้ นั่นคือ $L_o = F(X_o)$ จะมีค่าเท่ากับค่าคงที่ของสมการ

เมื่อกำหนดให้

$\ell_1, \ell_2, \ldots\ldots, \ell_{19}$ เป็นค่าต่างระดับระหว่างจุดสองจุดตามสัญญลักษณ์ที่ให้ในรูปที่ ซ.1

$H_1, H_2, \ldots\ldots, H_{12}$ เป็นค่าระดับของจุด 1, 2,...., 12 ตามลำดับ ซึ่งเป็นตัวไม่ทราบค่าหรือพารามิเตอร์

จากสมการเชิงเส้น

$$L_a = AX_a + C \qquad (C = \text{ เวคเตอร์ของค่าคงที่})$$

เขียนเป็นรูปแมทริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \vdots \\ \ell_{18} \\ \ell_{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ \vdots \\ H_{11} \\ H_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B.M.S.122 \\ -B.M.S.122 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3-8)$$

3.4.2 การปรับแก้โครงข่ายระดับด้วยวิธีสมการเงื่อนไข

การเขียนสมการเงื่อนไขนั้น ก่อนอื่นต้องหาจำนวนเงื่อนไขทั้งหมดที่เป็นอิสระต่อกันเสียก่อน จำนวนเงื่อนไขนี้จะเท่ากับผลต่างระหว่างจำนวนค่าสังเกตกับจำนวนพารามิเตอร์ ซึ่งในรูปที่ ข.1 นี้เท่ากับ (19-12) = 7 เงื่อนไข และในแต่ละเงื่อนไขหมายถึงผลรวมของค่าต่างระดับรอบวงจรปิด ต้องมีค่าเท่ากับศูนย์จากสมการเชิงเส้น

$$BL_a + C = 0, \ (C = \text{เวคเตอร์ของค่าคงที่})$$

เขียนเป็นรูปแมทริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ell_{17} \\ \ell_{18} \\ \ell_{19} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (0) \qquad (3-9)$$

วิธีตรวจสอบว่าสมการเงื่อนไขที่ได้เป็นอิสระต่อกันหรือไม่ ให้ตรวจดู Rank ของแมทริกซ์ B และถ้าพบว่ามี Rank เท่ากับจำนวนสมการเงื่อนไขก็แสดงว่าเงื่อนไขทั้งหมดเป็นอิสระต่อกันตามต้องการ

เมื่อเรานำสมการเงื่อนไขชุดที่เป็นอิสระต่อกันไปสร้างสมการปกติ (normal equations) เราจะสามารถคำนวณหาค่าเกี่ยวพันคือเวคเตอร์ K จากค่าเกี่ยวพันที่ได้เราคำนวณหาเศษคงเหลือ (V) และค่าปรับแก้ของค่าสังเกตตามลำดับ ท้ายที่สุดเป็นการคำนวณหาค่าระดับของจุดต่าง ๆ ที่ต้องการโดยถ่ายทอดระดับจาก B.M.S. 122 ด้วยค่าสังเกตที่ปรับแก้แล้วนั้น ควรจะหมายเหตุไว้ในที่นี้ว่า ถ้าสมการเงื่อนไขยังไม่เป็นอิสระต่อกัน

คำตอบของสมการปกติจะไม่ใช่คำตอบเอกภาพ เนื่องจากดีเทอร์มิแนนท์ (determinant) ของสมการปกติจะเป็นศูนย์

3.5 <u>การเลือกวิธีปรับแก้โครงข่ายระดับ</u>

ในการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์ไม่ว่าจะเป็นวิธีใดผลลัพธ์ที่ได้จะเหมือนกัน เพราะลีสท์สแควร์จะให้คำตอบที่เป็นเอกภาพ ปัญหามีอยู่ว่าจะเลือกใช้วิธีการใดที่เหมาะสมในการปรับแก้โครงข่ายระดับ การวิเคราะห์เรื่องนี้จะต้องพิจารณาหลาย ๆ ด้าน ซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

สมมุติว่าเราต้องการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถแก้ปัญหาแต่ละประเภทได้อย่างกว้างขวางเช่น สามารถปรับแก้โครงข่ายระดับได้ทุกลักษณะ หรือสามารถปรับแก้โครงข่ายควบคุมทางราบได้ทุกประเภท วิธีการที่เหมาะสมคือ "วิธีสมการค่าสังเกต" ที่เป็นเช่นนี้เพราะความยากง่ายของการเขียนรูปจำลองเชิงคณิตโดยวิธีนี้ไม่ขึ้นกับลักษณะเรขาคณิตของปัญหา คุณสมบัติที่สำคัญอีกประการหนึ่งของวิธีสมการการค่าสังเกตคือ ผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้สมการปกติจะเป็นค่าตรวจแก้ของพารามิเตอร์ เมื่อเอาค่าตรวจแก้นี้ไปบวกกับค่าประมาณของพารามิเตอร์ (X_o) จะได้ค่าพารามิเตอร์ที่ปรับแก้แล้วทันที จากคุณสมบัติเหล่านี้ประกอบกับเป็นวิธีที่มีความยืดหยุ่นต่อการเปลี่ยนแปลงจำนวนข้อมูล ทำให้วิธีสมการค่าสังเกตเป็นวิธีที่เหมาะสมในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูป

สมการเงื่อนไขจะเปลี่ยนรูปแบบไปตามลักษณะทางเรขาคณิตของโครงข่ายระดับ ทำให้ไม่สะดวกในการใช้งานทั่ว ๆ ไป และนอกจากนี้เมื่อมีการเพิ่มหรือลดค่าสังเกตลง วิธีนี้จะมีความยืดหยุ่นน้อยกว่าวิธีสมการค่าสังเกต สำหรับข้อเด่นของวิธีสมการเงื่อนไขคือ จำนวนสมการปกติจะน้อยกว่า แต่อย่างไรก็ตามมันจะให้ผลลัพธ์เป็นค่าปรับแก้ของค่าสังเกต (L_a)

ในสภาวะปัจจุบันเป็นยุคคอมพิวเตอร์ เราอาจสรุปได้ว่าปัญหาการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์ส่วนใหญ่นั้น ถ้าใช้วิธีสมการค่าสังเกตจะมีความสะดวกกว่า

ตารางที่ 3.1 การปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์จากแบบจำลองเชิงคณิตที่ต่างกัน

Method	Math. Model	Number of Condition	Linear equation	Normal equations	Parameter Correlate Vector	A posteriori variance of unit weight	Cofactor matrix	Check Compt.
Observation equations	$L_a = F(X_a)$	n	$V = AX+L$	$NX+U = 0$, $N = A'PA$, $U = A'PL$	$X = -N^{-1}U$	$V'PV=X'U+L'PL$ $\hat{\sigma}_o^2 = \frac{V'PV}{n-u}$	$Q_{Xa} = N^{-1}$ $Q_{La} = AN^{-1}A'$	$A'PV=0$
Condition equations	$F(L_a) = 0$	n - u	$BV+W = 0$	$MK+W = 0$, $M=BP^{-1}B'$	$K = -M^{-1}W$ $V = P^{-1}B'K$	$V'PV = - K'W$ $\hat{\sigma}_o^2 = \frac{V'PV}{n-u}$	$Q_{La} =$ $P^{-1}-P^{-1}B'M^{-1}BP^{-1}$	$PV-B'K = 0$