บทที่ ๓

ความเพี้ยนของสัญญาณที่เกิดจากอินเตอร์โมดูเลชั่น ในระบบ ๑ ช่องต่อ ๑ คลื่นพาหะชนิดโมดูเลชั่นแบบ FM (Intermodulation Distortion in SCPC/CFM)

<u>บทนำ</u>

ในระบบ ๑ ช่องต่อ ๑ คลื่นพาหะชนิดโมดูเลชั่นแบบ FM ความถี่ของคลื่นพาหะ ๑ คลื่นจะถูกโมดูเลทด้วยสัญญาณเสียงเพียง ๑ สัญญาณ เนื่องจากเครื่องทวนสัญญาณแต่ละตัวในดาวเทียมสื่อสาร (Transponder) มีแถบความถี่กว้างเท่ากับ ๓๖ MHz ซึ่งกว้างพอที่จะสามารถผ่านคลื่นพาหะจำนวนหลายคลื่นเข้าไปพร้อมกันในเวลาเดียวกันทำให้ระบบสื่อสารดาวเทียมที่ใช้ระบบ ๑ ช่องต่อ ๑ คลื่นพาหะ เป็นระบบที่มีจำนวนหลายคลื่นพาหะซึ่งถูกขยายกำลังด้วยเครื่องขยายร่วมกัน

เนื่องจากคุณลักษณะไม่เป็นเชิงเส้นของเครื่องขยายกำลัง เมื่อถูกขับให้ทำงานใกล้จุดอิ่มตัวจะทำให้การขยายสัญญาณที่ประกอบด้วยหลายคลื่นพาหะ เกิดมีการผสมผสานกันระหว่างสัญญาณเป็นอินเตอร์โมดูเลชั่น โปรดัค (Intermodulation Product) ขึ้นที่ขาออกของเครื่องขยายกำลัง ซึ่งอินเตอร์โมดูเลชั่น โปรดัค ที่เกิดขึ้นนี้จะทำให้คุณภาพของสัญญาณลดลง

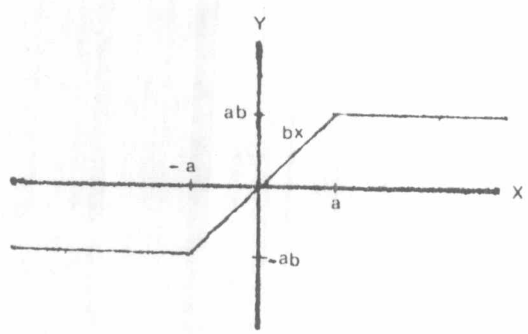
นอกจากนี้ในอุปกรณ์ที่มีคุณลักษณะของการขยายไม่เป็นเชิงเส้นทั่วไป จะมีคุณลักษณะเกิดการเลื่อนของมุม (Phase Shift) ของสัญญาณที่ถูกขยายโดยมุมที่เคลื่อนไปนี้จะเป็นฟังก์ชั่นของระดับที่เปลี่ยนแปลง (Envelope) ของสัญญาณที่ขาเข้าซึ่งมีลักษณะเหมือนมุมของสัญญาณนั้นถูกโมดูเลท (Phase Modulation) ด้วยระดับของสัญญาณขาเข้า ซึ่งเรียกกันว่า AM – PM conversion ในระบบสื่อสารที่มีหลายคลื่นพาหะ AM – PM conversion จะเป็นอีกสาเหตุหนึ่งที่ทำให้เกิดอินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัคขึ้น แต่จากการศึกษาของ SUNDE[๔] แสดงให้เห็นว่าเมื่อเครื่องขยายกำลังมีจุดทำงานอยู่บริเวณใกล้จุดอิ่มตัว อินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัค ส่วนใหญ่จะเกิดจากคุณลักษณะของการขยายที่ไม่เป็นเชิงเส้น

สำหรับระบบ FM ที่มีหลายคลื่นพาหะยังอาจประสบกับการรบกวนกันระหว่างช่องเสียงที่อยู่ต่างคลื่นพาหะกันและเรียกว่า Intelligible Crosstalk ซึ่งมีสาเหตุจากคุณลักษณะการขยายของเครื่องขยายเป็นฟังก์ชั่นขึ้นกับความถี่ของสัญญาณที่ถูกขยาย จึงทำให้มีลักษณะเหมือนการเปลี่ยนจากความถี่ของสัญญาณขาเข้ามาเป็นขนาดของสัญญาณที่ขาออก (FM-AM conversion) สัญญาณที่ได้จึงมีขนาดเปลี่ยนแปลงตามความถี่ของตัวสัญญาณ ซึ่งจะทำให้ได้รับผลของ AM-PM conversion ติดตามมาด้วยจึงทำให้เกิดปรากฏการณ์ Intelligible Crosstalk ขึ้น จากการศึกษา(๑๕) พบว่าเมื่อจำนวนคลื่นพาหะสูงขึ้น ผลของ Intelligible Crosstalk จะลดลง ซึ่งต่างไปจากอินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัค ซึ่งจะมีระดับสูงขึ้นตามจำนวนคลื่นพาหะ

ในบทนี้จะศึกษาเฉพาะผลของอินเตอร์โมดูเลชั่น ที่เกิดจากคุณลักษณะการขยายที่ไม่เป็นเชิงเส้นในระบบ ๑ ช่องต่อ ๑ คลื่นพาหะที่ใช้เทคนิคการโมดูเลชั่นแบบ FM โดยกำหนดองค์ประกอบของรูปแบบที่ใช้ในการศึกษาดังนี้

๑.๑ สัญญาณพื้นฐาน (Baseband Signal) เป็นสัญญาณโคซายน์

๑.๒ คุณลักษณะของเครื่องขยายกำลังแทนด้วย Soft Limiter ซึ่งมีบางส่วนเป็นเชิงเส้น ดังในรูปที่ ๓-๑



รูปที่ ๓-๑ คุณลักษณะของเครื่องขยายกำลังที่ใช้ศึกษา

SUNDE (๔) ได้ทำการทดลองแสดงให้เห็นว่า การแทนคุณลักษณะอัตราการขยายของเครื่องขยายกำลังด้วย Soft limiter สามารถจะให้ผลการทำงานสอดคล้องกับผลที่ได้จากการวัดผลจริง ๆ ของการทำงานของเครื่องขยายได้โดยการเลือกค่าขีดจำกัด a(limiting level) ที่เหมาะสม

การศึกษาผลกระทบของอินเตอร์โมดูเลชั่นได้ใช้วิธีหา Autocorrelation Function ของสัญญาณขาออกของเครื่องขยายโดยวิธี Transform Method ของ Root และ Davenport (๑๖) จากนั้นทำการวิเคราะห์แยก Autocorrelation Function ออกเป็นส่วนของสัญญาณและส่วนของสัญญาณรบกวน ซึ่งประกอบด้วยการผสมผสานกันระหว่างเสียงรบกวน (noise) สัญญาณ และสัญญาณกับเสียงรบกวน และหาคุณภาพของสัญญาณที่ขาออกของภาครับ FM ด้วยสูตรประมาณการทำงานของเครื่องรับ FM ของ SUNDE

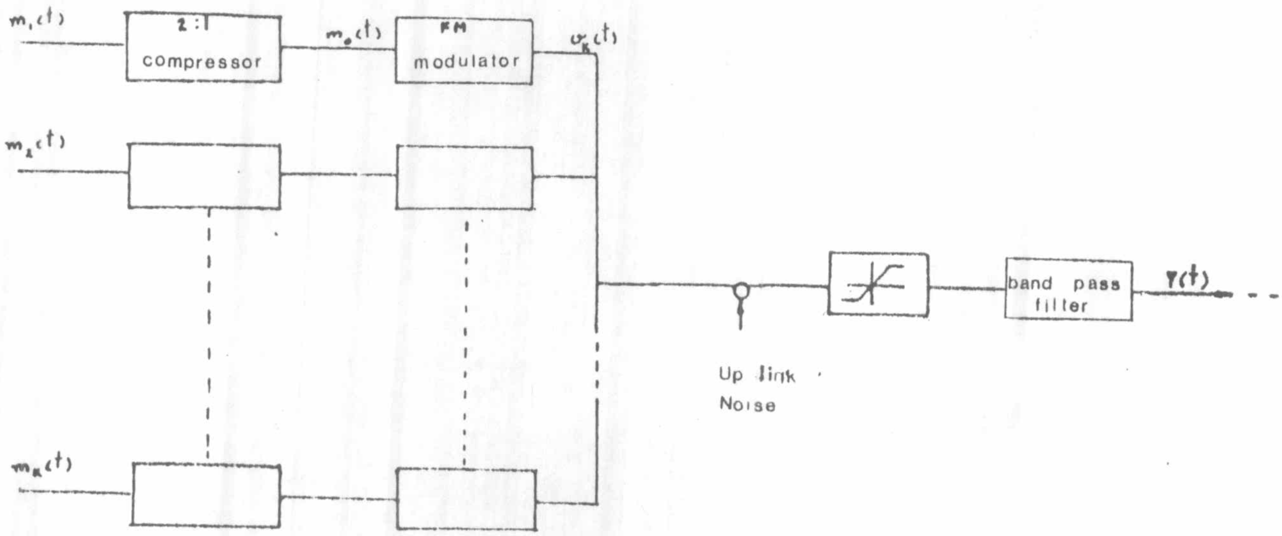
รูปแบบของระบบที่ใช้ในการศึกษา (System Model)

รูปแบบของระบบที่ใช้ในการศึกษาได้แสดงในรูปที่ ๓-๒ สัญญาณพื้นฐานจะโมดูเลทเข้ากับความถี่ของคลื่นพาหะของแต่ละช่องสัญญาณ คลื่นพาหะในแต่ละช่องสื่อสารกับเสียงรบกวนขาขึ้น (up link noise) จะรวมกันเป็นสัญญาณขาเข้าของเครื่องขยายกำลังที่อยู่ในดาวเทียมสื่อสาร ที่ขาออกของเครื่องขยายมีตัวกรองผ่านแถบความถี่ (Bandpass Filter) ที่ยอมให้เฉพาะความถี่ที่อยู่รอบๆ คลื่นพาหะผ่าน (First Zone Bandpass Filter) ทางภาครับของแต่ละช่องสัญญาณจะมีตัวกรองที่จะยอมให้สัญญาณที่มีความถี่ตรงกับช่องสัญญาณนั้นเท่านั้นที่ผ่านได้

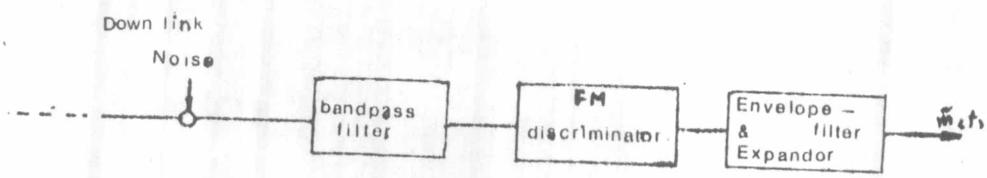
การหา Autocorrelation Function ของสัญญาณที่ขาออกของเครื่องขยาย

ในการที่จะหาอัตราส่วนระหว่างกำลังของสัญญาณ (Signal Power) ต่อกำลังของสัญญาณรบกวนที่ขาออกของเครื่องขยาย (Repeater, TWTA) จำเป็นจะต้องทราบการกระจายกำลังเชิงความถี่ (Spectral Density) ที่ขาออกของเครื่องขยาย โดย Wiener Theorem ซึ่งกล่าวว่าเราสามารถหาการกระจายกำลังเชิงความถี่ของสัญญาณได้โดยการทำ Fourier Transform ของ Autocorrelation Function ซึ่งในที่นี้จะหา Autocorrelation Function ของสัญญาณที่ขาออกของเครื่องขยายโดยวิธี Transform Method ดังนี้

จาก Davenport และ Root (๑๖) สามารถหา Autocorrelation Function ของสัญญาณได้จากสมการ (๓-๑)



รูปที่ ๓.๒ ระบบสื่อสารแบบ SCPC/CFM ที่ผ่านดาวเทียม



รูปที่ ๓.๓ ระบบเครื่องรับ FM ที่สถานีภาคพื้นดิน

$$R_y(t_1,t_2) = \frac{1}{(2\pi j)^2} \int_c f(\omega_1)d\omega_1 \int_c f(\omega_2)d\omega_2 M_x(\omega_1,\omega_2) \qquad (๓-๑)$$

เมื่อ $R_y(t_1,t_2)$ = Autocorrelation Function ของสัญญาณขาออก $y(t)$ ที่เวลา t_1 และ t_2

$M_x(\omega_1,\omega_2)$ = Joint Characteristic Function ของสัญญาณขาเข้า $x(t)$ ที่เวลา t_1 และ t_2

$f(\omega)$ = Transfer Function ของเครื่องทวนสัญญาณ

$\int_c$ = แนวทางเดินของการทำอินทิเกรทบนเส้น $\omega = u-j\infty$ ถึง $\omega = u+j\infty$

โดยทั่วไปสัญญาณขาเข้าของเครื่องทวนสัญญาณ, $x(t)$ จะประกอบด้วยส่วนที่เป็นสัญญาณและเสียงรบกวนซึ่งเขียนอยู่ในรูปคณิตศาสตร์ได้

$$x(t) = s(t) + n(t) \qquad (๓-๒)$$

เมื่อ $s(t)$ = ส่วนของสัญญาณ

$n(t)$ = เสียงรบกวน (noise)

เนื่องจากสัญญาณจริงกับเสียงรบกวนมีคุณสมบัติทางสถิติที่ไม่ขึ้นต่อกัน (Statistically Independent Random Variable) ทำให้สามารถเขียน Joint Characteristic Function ของสัญญาณขาเข้าของเครื่องขยายอยู่ในรูปผลคูณระหว่าง Characteristic Function ของสัญญาณกับเสียงรบกวนได้

$$M_x(\omega_1,\omega_2) = M_s(\omega_1,\omega_2)\, M_N(\omega_1,\omega_2) \qquad (๓-๓)$$

เมื่อ $M_s(\omega_1,\omega_2)$ = Joint Characteristic Function ของสัญญาณจริง $s(t)$

$M_N(\omega_1,\omega_2)$ = Joint Characteristic Function ของเสียงรบกวน

กรณีที่เสียงรบกวนเป็น Real Gaussian Random Process ซึ่งมีค่าเฉลี่ยคณิตศาสตร์เป็นศูนย์ จะได้[๑๖]

$$M_N(\omega_1,\omega_2) = EXP\{\tfrac{1}{2}[\sigma_1^2\omega_1^2 + 2R_N(t_1,t_2)\omega_1\omega_2 + \sigma_2^2\omega_2^2]\} \qquad (๓-๔)$$

เมื่อ σ_1 และ σ_2 คือค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของเสียงรบกวน n_1 และ n_2

$R_N(t_1,t_2)$ คือ Autocorrelation Function ของเสียงรบกวน

เมื่อแทน (๓-๓) และ (๓-๔) ลงใน (๓-๑) จะได้

$$R_y(t_1,t_2) = \frac{1}{(2\pi j)^2} \int_c f(\omega_1)\ EXP\left(\frac{\sigma_1^2\omega_1^2}{2}\right) d\omega_1 \int_c f(\omega_2)\ EXP\left(\frac{\sigma_2^2\omega_2^2}{2}\right) d\omega_2$$

$$\cdot\ EXP\left[R_N(t_1,t_2)\ \omega_1\omega_2\right] M_s(\omega_1,\omega_2) \qquad (๓-๕)$$

และกระจายพจน์เอกซ์โปเน็นเชียลสุดท้ายใน (๓-๕) ให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง (power series)

$$EXP\left[R_N(t_1,t_2)\ \omega_1\omega_2\right] = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{R_N^\kappa(t_1,t_2)\ \omega_1^\kappa\omega_2^\kappa}{\kappa!} \qquad (๓-๖)$$

ด้วยความสัมพันธ์, (๓-๖), สมการ (๓-๕) สามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$R_y(t_1,t_2) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{R_N^\kappa(t_1,t_2)}{\kappa!(2\pi j)^2} \int_c f(\omega_1)\ \omega_1^\kappa\ EXP\left[\frac{\sigma_1^2\omega_1^2}{2}\right] d\omega_1$$

$$\cdot \int_c f(\omega_2)\omega_2^\kappa\ EXP\left[\frac{\sigma_2^2\omega_2^2}{2}\right] d\omega_2 M_s(\omega_1,\omega_2) \qquad (๓-๗)$$

การที่จะดำเนินการวิเคราะห์ต่อไปจะต้องทราบคุณลักษณะของสัญญาณขาเข้าจริงและคุณลักษณะของเครื่องขยาย

การหาฟังก์ชั่นคุณลักษณะของสัญญาณจริง (Joint Characteristic Functions of s(t))

กำหนดให้สัญญาณพื้นฐานของช่องที่ n (n^{th} channel) เป็นสัญญาณโคซายน์ ซึ่งเขียนในรูปคณิตศาสตร์ได้เป็น

$$m_n(t) = a_n \cos(\omega_{mn} t) \qquad (๓-๘)$$

เมื่อ a_n = ขนาดคงที่ของสัญญาณช่องที่ n

ω_{mn} = ความถี่เชิงมุมของช่อง n

ในระบบ CFM ก่อนที่จะนำสัญญาณข่าวสารนี้ไปทำการโมดูเลทกับความถี่ของคลื่นพาหะ จะผ่านสัญญาณพื้นฐานนี้เข้าไปใน Syllabic Compandor ที่มีอัตราส่วนการกด (compression ratio) โดยทั่วไปเป็น ๒: ๑ เพื่อลดระดับสูงสุดและต่ำสุดของสัญญาณในช่องการสื่อสาร (Transmission Path) เนื่องจากสัญญาณพื้นฐานเป็นสัญญาณที่มีระดับคงที่และพิจารณาที่จุดภาวะคงตัว (steady state) ดังนั้นสัญญาณที่ขาออกของ Syllabic Compandor จะมีลักษณะเช่นเดียวกับสัญญาณขาเข้าโดยมีขนาดลดไปเท่ากับกรณ์ที่ ๒ ของขนาดสัญญาณเดิม

$$m_{on}(t) = a_n^{\frac{1}{2}} \cos(\omega_{mn} t) \qquad (๓-๙)$$

จากสมการ (๓-๙) แสดงให้เห็นว่าผลของ Syllabic Compandor มีต่อการลดค่า Modulation index โดยตรง

สัญญาณ $m_{on}(t)$ จะทำหน้าที่เป็นสัญญาณพื้นฐานที่โมดูเลทเข้ากับความถี่ของคลื่นพาหะที่มีความถี่เชิงมุมเป็น ω_n ดังนั้นสัญญาณ FM ของช่องสัญญาณที่ n สามารถเขียนได้เป็น

$$\nu_n(t) = A_n \cos\left(\omega_n t + \frac{a_n^{\frac{1}{2}}}{\omega_{mn}} \sin(\omega_{mn} t)\right)$$

$$= A_n \cos(\omega_n t + \beta_n \sin \omega_{mn} t) \qquad (๓-๑๐)$$

เมื่อ A_n = ขนาดคงที่ของคลื่นพาหะของช่อง n

β_n = modulation index ของสัญญาณ n

สัญญาณขาเข้าของเครื่องขยายประกอบด้วยผลรวมของสัญญาณ FM ของทุกช่องสัญญาณกับเสียงรบกวนขาขึ้น

$$x(t) = s(t) + n(t) \qquad (๓-๑๑)$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \nu_n(t) + n(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{n} A_n \cos(\omega_n t + \beta_n \sin(\omega_{mn} t)) + n(t) \qquad (๓-๑๒)$$

เนื่องจากสัญญาณขาเข้ามีลักษณะเป็นสัญญาณที่มีแถบความถี่แคบ (narrow band signal) เมื่อเทียบกับค่าความถี่กลางของคลื่นพาหะ ทำให้เขียนในรูปของ envelope กับเฟสได้

$$x(t) = \left[Y^2 + Z^2\right]^{\frac{1}{2}} \cos(\omega_0 t + \tan^{-1} \frac{Z}{Y}) \qquad (๓-๑๓)$$

เมื่อ $Y = \sum_{n=1}^{n} A_n \cos\left[\Delta \omega_n t + \beta_n \sin(\omega_{mn} t)\right] + N_c(t)$

$$Z = \sum_{n=1}^{n} A_n \sin\left[\Delta\omega_n t + \beta_n \sin(\omega_{mn} t)\right] + N_s(t) \qquad (๓-๑๔)$$

ω_0 = ความถี่กลางของคลื่นพาหะ

$\Delta\omega_n$ = $\omega_n - \omega_0$

$N_c(t)$, $N_s(t)$ = เป็น Inphase และ Quadrature Components ของเสียงรบกวนขาขึ้น (up link noise)

ถ้าให้ ℓ เป็นระดับของความจำกัด (limiting level) ของลักษณะของเครื่องขยายกำลัง เพื่อที่จะศึกษาผลกระทบจากระดับของสัญญาณขาเข้าจึงเป็นการสะดวกที่จะเขียนสัญญาณขาเข้าให้อยู่ในรูปที่ขนาดถูกปรับให้เป็นปกติ (normalized) ด้วยค่าของระดับจำกัด

$$X(t) = \left[\frac{Y^2 + Z^2}{\ell}\right]^{\frac{1}{2}} \cos\left(\omega_0 t + \tan^{-1}\frac{Z}{Y}\right) \qquad (๓-๑๕)$$

เมื่อกระจายสมการ (๓-๑๕) ซึ่งอยู่ในรูปของ envelope กับเฟสกลับไปอยู่ในรูปของสมการ (๓-๑๒) จะได้สัญญาณขาเข้าที่ขนาดถูกปรับให้เป็นปกติ เป็น

$$X(t) = \sum_{n=1}^{n} B_n \cos(\omega_n t + \beta_n \sin(\omega_{mn} t)) + \hat{n}(t) \qquad (๓-๑๖)$$

เมื่อ $\hat{n}(t) = \frac{n(t)}{\ell}$

$B_n = \frac{A_n}{\ell}$

สมการ (๓-๑๖) แสดงให้ทราบว่าผลของการทำการปรับขนาดให้เป็นปกติของสัญญาณรวมมีผลเท่ากับการปรับขนาดของแต่ละช่องสัญญาณด้วยค่าที่ใช้ปรับตัวเดียวกัน

โดยคำจำกัดความของ Joint Characteristic Function ดังนั้น Joint Characteristic Function ของสัญญาณ s(t) เขียนได้ดังนี้

$$M_s(\omega_1, \omega_2) = E\left[\mathrm{EXP}\ \{\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2\}\right] \qquad (๓-๑๗)$$

เมื่อ $E[\cdot]$ = Expected Value

$$M_s(\omega_1, \omega_2) = E\Big[\mathrm{EXP}\ \{\omega_1 \sum_{n=1}^{n} B_n \cos(\omega_n t_1 + \beta_n \sin(\omega_{mn} t_1))$$

$$+ \omega_2 \sum_{n=1}^{n} B_n \cos(\omega_n t_2 + \beta_n \sin(\omega_{mn} t_2))\}\Big] \qquad (๓-๑๘)$$

$$= \prod_{n=1}^{n} E\Big[\mathrm{EXP}\ \{B_n \omega_1 \cos(\omega_n t_1 + \beta_n \sin(\omega_{mn} t_1))$$

$$+ B_n \omega_2 \cos(\omega_n t_2 + \beta_n \sin(\omega_{mn} t_2))\}\Big] \qquad (๓-๑๙)$$

และโดย Jacobi - Anger Formula

$$\mathrm{EXP}\ (Z \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n(Z) \cos n\theta \quad ; \varepsilon_n = \text{Neumann factor} \tag{๓-๒๐}$$

จะได้

$$M_s(\omega_1,\omega_2) = \prod_{n=1}^{n} \left[\sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \varepsilon_b \varepsilon_\gamma E\left[I_b(B_n\omega_1) I_\gamma(B_n\omega_2) \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \cos b(\omega_n t_1 + \beta_n \sin(\omega_{mn} t_1)) \cos \gamma(\omega_n t_2 + \beta_n \sin(\omega_{mn} t_2)) \right]\right] \tag{๓-๒๑}$$

เนื่องจาก B_n เป็นค่าคงที่ ดังนั้นสามารถที่จะนำพจน์ของ modified Bessel ออกนอกเครื่องหมายการหาค่าเฉลี่ยได้ ทำให้การหาค่าเฉลี่ยในสมการ (๓-๒๑) เหลือเพียงการหาค่าเฉลี่ย ของผลคูณระหว่างฟังก์ชั่นโคซายน์ จาก Davenport และ Root [๑๖] (สมการ ๑๓-๔๗, หน้า ๒๙๐) ค่าเฉลี่ยของผลคูณโคซายน์จะเป็นศูนย์ เมื่อสัมประสิทธิ์ของความถี่เชิงมุมต่างกัน

$$E\left[\cos m(\omega_c t_1 + \theta_1) \cos n(\omega_c t_2 + \theta_2)\right] = 0 \quad ; m \neq n \tag{๓-๒๒}$$

ทำให้ได้

$$M_s(\omega_1,\omega_2) = \prod_{n=1}^{n} \left[\sum_{\gamma=0}^{\infty} \varepsilon_\gamma^2 I_\gamma(B_n\omega_1) I_\gamma(B_n\omega_2) \right.$$

$$\left. \cdot E\left[\cos \gamma(\omega_n t_1 + \beta_n \sin \omega_{mn} t_1) \cos \gamma(\omega_n t_2 + \beta_n \sin \omega_{mn} t_2)\right]\right] \tag{๓-๒๓}$$

เปลี่ยนผลคูณของโคซายน์ในสมการ (๓-๒๓) ให้อยู่ในรูปผลบวกของโคซายน์ที่มีมุมเป็นผลบวกและผลต่าง

$$E\left[\cos \gamma(\omega_n t_1 + \beta_n \sin \omega_{mn} t_1) \cos \gamma\ (\omega_n t_2 + \beta_n \sin \omega_{mn} t_2)\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_\gamma} E\left[\cos \gamma(\omega_n(t_1 + t_2) + \beta_n \sin(\omega_{mn} t_1 + \sin \omega_{mn} t_2)\right]$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon_\gamma} E\left[\cos \gamma(\omega_n \tau + \beta_n\ (\sin \omega_{mn} t_2 - \sin \omega_{mn} t_1)\right] \qquad (๓-๒๔)$$

เมื่อ $t_2 = t_1 + \tau$

ในขั้นแรกนี้จะหาค่าของ $E[\cdot]$ ในพจน์หลังของสมการ (๓-๒๔) ก่อน

$$E[\cdot] = E\left[\mathrm{Re}\ \{\ \mathrm{EXP}(j\gamma\omega_n \tau)\ \ \mathrm{EXP}\ (j\gamma\beta_n \sin \omega_{mn} t_2) \cdot \mathrm{EXP}\ (-j\gamma\beta_n \sin \omega_{mn} t_2)\}\right] \qquad (๓-๒๕)$$

$$= \mathrm{Re}\ \{\mathrm{EXP}\ (j\gamma\omega_n \tau)\ E\left[\mathrm{EXP}(j\gamma\beta_n \sin \omega_{mn} t_2)\ \mathrm{Exp}(-j\gamma\beta_n \sin\omega_{mn} t_2)\right]\} \qquad (๓-๒๖)$$

โดย
$$\mathrm{EXP}\ (jz \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\ \mathrm{EXP}(jn\,\theta) \qquad (๓-๒๗)$$

$$E\left[\mathrm{EXP}(j\gamma\beta_n \sin \omega_{mn} t_2)\ \mathrm{EXP}(-j\gamma\beta_n \sin \omega_{mn} t_1)\right]$$

$$= \sum_{b=-\infty}^{\infty} \sum_{d=-\infty}^{\infty} J_b(\gamma\beta_n)\ J_d(\gamma\beta_n)\ E\left[\mathrm{EXP}\ j(b\omega_{mn} t_2 - d\omega_{mn} t_1)\right] \qquad (๓-๒๘)$$

$$E\left[\mathrm{EXP}\ j(b\omega_{mn} t_2 - d\omega_{mn} t_1)\right] = \begin{cases} 0 & ,\ b \neq d \\ \cos(b\omega_{mn}\tau) & ,\ b = d \end{cases} \qquad (๓-๒๙)$$

ดังนั้น โดย (๓-๒๖), (๓-๒๘) และ (๓-๒๙) ค่าเฉลี่ยของพจน์ที่เป็นมุมผลต่าง เท่ากับ

$$E[\cdot] = \cos(\gamma\omega_n \tau) \sum_{b=-\infty}^{\infty} J_b^2\ (\gamma\beta_n)\ \cos(b\,\omega_{mn} \tau)$$

$$= \varepsilon_b \cos(\gamma\omega_n \tau) \sum_{b=0}^{\infty} J_b^2(\gamma\beta_n)\ \cos\ (b\omega_{mn}\ \tau) \qquad (๓-๓๐)$$

ในขั้นต่อไปพิจารณา $E[\cdot]$ ของพจน์ที่เป็นมุมผลบวก

$$E\left[\cos\gamma(\omega_n(t_1+t_2)+\beta_n(\sin\omega_{mn}t_1+\sin\omega_{mn}t_2))\right]$$

$$= \mathrm{Re}\ \{EXP(j\gamma\omega_n\tau)\ E\left[EXP(j2\gamma\omega_n t_1)\right.$$

$$\left.\cdot\ EXP(j\gamma\beta_n\ \sin\omega_{mn}t_1)\ EXP(j\gamma\beta_n\ \sin\omega_{mn}t_2)\right]\} \qquad (๓-๓๑)$$

$$= \mathrm{Re}\{EXP(j\gamma\omega_n\tau)\ E[\cdot]\}$$

$$E[\cdot] = E\left[EXP(j2\gamma\omega_n t_1)\ \sum_{b=-\infty}^{\infty}\sum_{d=-\infty}^{\infty} J_b(\gamma\beta_n)\ J_d(\gamma\beta_n)\right.$$

$$\left.\cdot\ EXP\ (jb\omega_{mn}t_1)\ EXP\ (jd\omega_{mn}t_2)\right] \qquad (๓-๓๒)$$

$$= E\left[\sum_{b=-\infty}^{\infty}\sum_{d=-\infty}^{\infty} J_b(\gamma\beta_n)\ J_d(\gamma\beta_n)\right.$$

$$\left.\cdot\ EXP\ j(2\gamma\omega_n t_1+(b+d)\ \omega_{mn}t_1+d\omega_{mn}\tau\ )\right] \qquad (๓-๓๓)$$

$$= \sum_{b=-\infty}^{\infty}\sum_{d=-\infty}^{\infty} J_b(\gamma\beta_n)\ J_d(\gamma\beta_n)\ E\left[\cos(2\gamma\omega_n+(b+d)\ \omega_{mn}t_1+d\omega_{mn}\tau)\right] \qquad (๓-๓๔)$$

$$E\left[\cos(2\gamma\omega_n+(b+d)\ \omega_{mn}t_1+d\omega_{mn}\tau)\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & ,\ 2\gamma\omega_n+(b+d)\omega_{mn}\neq 0 \\ \cos(d\omega_{mn}\tau) & ,\ 2\gamma\omega_n+(b+d)\omega_{mn}=0 \end{cases} \qquad (๓-๓๕)$$

เนื่องจากเราสนใจเฉพาะส่วนของสัญญาณที่อยู่ในแถบความถี่ของเครื่องขยายกำลังเท่านั้น เมื่อพิจารณาค่าความถี่ของฟังก์ชั่นโคซายน์พบว่า การที่ $\omega_n >> \omega_{mn}$ ทำให้ค่า b+d จะต้องมีค่าสูงและเครื่องหมายเป็นลบ($\gamma\geq 0$, $-\infty<b$ และ $d<\infty$)จึงทำให้ค่า $E[\cdot]$ ไม่เป็นศูนย์และมีความถี่อยู่ในย่านของแถบความถี่ที่สนใจได้ b และ d เป็นลำดับของฟังก์ชั่นBessel ซึ่งจะมีค่าของฟังก์ชั่นเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ

ลำดับเข้าใกล้อนันต์ ดังนั้นผลกระทบของ E[·] ในสมการ (๓-๓๕) ที่มีต่อสมการ (๓-๒๔) จึงน้อยมาก ซึ่งจะละไว้ ไม่นำมาพิจารณาในการศึกษาต่อไป

จากข้อสรุปข้างต้นและสมการ (๓-๒๓), (๓-๒๔) และ (๓-๓๐) ทำให้สามารถเขียน Joint Characteristic Function ของสัญญาณ s(t) ได้ดังสมการ (๓-๓๖)

$$M_s(\omega_1,\omega_2) = \prod_{n=1}^{n} \Big[\sum_{\gamma=0}^{\infty} \varepsilon_\gamma \varepsilon_b I_\gamma(B_n\omega_1)\, I_\gamma(B_n\omega_2)\, \cos(\gamma\omega_n\tau) \cdot \sum_{b=0}^{\infty} J_b^2(\gamma\beta_n)\, \cos(b\omega_{mn}\tau)\Big] \qquad (๓-๓๖)$$

$$= \prod_{n=1}^{n} \Big[\sum_{\gamma=0}^{\infty} I_\gamma(B_n\omega_1)\, I_\gamma(B_n\omega_2) \sum_{b=0}^{\infty} J_b^2(\gamma\beta_n) \cdot \sum_{+,-}^{4} \mathrm{EXP}(j\,(\pm\gamma\omega_n \pm b\omega_{mn})\,\tau)\Big] \qquad (๓-๓๗)$$

โดยที่ $\sum_{+,-}^{4}$ หมายถึง พจน์ที่อยู่ข้างหลังเครื่องหมายสามารถเขียนกระจายออกได้ ๔ พจน์ ซึ่งเกิดจากการสลับเครื่องหมาย $\pm$ ให้แตกต่างกัน ดังนั้นเมื่อกระจายเครื่องหมาย $\prod_{n=1}^{n}$ จะได้พจน์ทั้งสิ้น $\sum_{+,-}^{2^{2n}}$ พจน์

$$M_s(\omega_1,\omega_2) = \sum_{\gamma_1=0}^{\infty} \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\gamma_n=0}^{\infty} I_{\gamma_1}(B_1\omega_1)\, I_{\gamma_2}(B_2\omega_1) \cdots I_{\gamma_n}(B_n\omega_1)$$

$$\cdot\, I_{\gamma_1}(B_1\omega_2)\, I_{\gamma_2}(B_2\omega_2) \cdots\cdots I_{\gamma_n}(B_n\omega_2)$$

$$\cdot \sum_{b_1=0}^{\infty} \sum_{b_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{b_n=0}^{\infty} J_{b_1}^2(\gamma_1\beta_1)\, J_{b_2}^2(\gamma_2\beta_2) \cdots\cdots J_{b_n}^2(\gamma_n\beta_n)$$

$$\cdot \sum_{+,-}^{2^{2n}} \mathrm{EXP}\Big[\, j(\pm\gamma_1\omega_1 \pm \gamma_2\omega_2 \pm \cdots \pm \gamma_n\omega_n \pm b_1\omega_{m2} \pm \cdots \pm b_n\omega_{mn})\,\tau\Big]$$

(๓-๓๘)

<u>Autocorrelation Function ของสัญญาณขาออกของเครื่องขยายกำลัง</u>

ในหัวข้อที่ผ่านมาได้กล่าวถึงการหา Joint Characteristic Function ของส่วนที่เป็นสัญญาณจริง แทนผลลัพธ์ดังกล่าวลงในสมการ (๓-๗) ซึ่งเป็นสมการของ Autocorrelation Function ของสัญญาณที่ขาออกของเครื่องขยายกำลัง เมื่อสัญญาณเป็น stationary process ทำให้สามารถเขียน Autocorrelation Function อยู่ในรูปของฟังก์ชั่นที่ไม่ขึ้นกับเวลา t_1 และ t_2 ได้แต่จะเป็นฟังก์ชั่นของความแตกต่างระหว่างเวลา t_1 และ t_2 แทนดังนี้

$$R_y(\tau) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{R_N^{\kappa}(\tau)}{\kappa!} h^2_{\kappa\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n} \sum_{\gamma_1=0}^{\infty} \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\gamma_n=0}^{\infty} \sum_{b_1=0}^{\infty} \sum_{b_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{b_n=0}^{\infty}$$

$$\cdot J^2_{b_1}(\gamma_1\beta_1)\, J^2_{b_2}(\gamma_2\beta_2) \cdots J^2_{b_n}(\gamma_n\beta_n) \sum_{+,-}^{2^{2n}} \mathrm{EXP}\,(j\omega_B\tau) \qquad (๓-๓๙)$$

เมื่อกำหนดให้

$$h_{\kappa\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n} = \frac{1}{2\pi j} \int_c f(\omega)\omega^{\kappa} d\omega\, I_{\gamma_1}(B_1\omega) \cdots I_{\gamma_n}(B_n\omega)\ \mathrm{EXP}\left[\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right] \qquad (๓-๔๐)$$

โดยที่ B_n เป็นค่าคงที่ทำให้ $h_{\kappa\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n}$ ไม่เป็นฟังก์ชั่นของเวลา ดังนั้น

$$h(t_1)_{\kappa\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n} = h(t_2)_{\kappa\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n}$$

$$\omega_B = \pm\gamma_1\omega_1 \pm \gamma_2\omega_2 \pm \cdots \pm \gamma_n\omega_n \pm b_1\omega_{m_1} \pm b_2\omega_{m_2} \pm \cdots \pm b_n\omega_{mn}$$

<u>การหาค่าสัมประสิทธิ์</u> $h_{\kappa\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n}$ <u>ในกรณีที่เป็น linear piecewise soft limiter</u>

จากสมการ (๓-๔๐) จะพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ $h_{\kappa\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n}$ นอกจากจะมีค่าขึ้นอยู่กับค่าลำดับต่าง ๆ ที่ประกอบกันของฟังก์ชั่น Bessel แล้ว Transfer Function ของเครื่องทวนสัญญาณยังเป็นฟังก์ชั่นสำคัญที่แสดงผลกระทบโดยตรงต่อขนาดของสัมประสิทธิ์ $h_{\kappa\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n}$ ดังนั้นในการที่จะหาค่าสัมประสิทธิ์ $h_{\kappa\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n}$

จะต้องทราบ Transfer Function เครื่องขยายกำลังที่มีฟังก์ชั่นคุณลักษณะเป็น Soft limiter ที่มีส่วนหนึ่งเป็นเชิงเส้น ดังในรูปที่ ๓-๑ ซึ่งเขียน Transfer Characteristic ได้ดังนี้

$$g(x) = \begin{cases} ab & a < x \\ bx & -a \leq x \leq a \\ -ab & x < -a \end{cases} \qquad (๓\text{-}๔๑)$$

Davenport และ Root[๑๖] ได้พิสูจน์ให้เห็นว่า ในกรณีที่ Transfer Characteristic $g(x)$ มีลักษณะที่ทำให้ไม่สามารถทำการอินทิเกรทได้ เมื่อ $g(x)$ อยู่ภายในเครื่องหมายสัมบูรณ์ (abosolutely integrable) ซึ่งจะส่งผลให้ไม่สามารถหา Fourier Transform ของ Transfer Characteristic ได้ สามารถขยายขอบของความหมายของ Transfer Function ให้อยู่ในรูปของ bilateral Laplace Transform ได้คือ

$$f(\omega) = f_+(\omega) + f_-(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-\omega x}\, dx \qquad (๓\text{-}๔๒)$$

เมื่อ $\omega = u + jv$

ดังนั้น Transfer Function ของ Soft limiter นี้จะเขียนได้ดังนี้

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{-a} g(x)e^{-\omega x}\, dx + \int_{-a}^{a} g(x)e^{-\omega x}\, dx + \int_{a}^{\infty} g(x)e^{-\omega x}\, dx \qquad (๓\text{-}๔๓)$$

ซึ่งสมการ (๓-๔๓) จะมีค่าเข้าหาจุดคงที่ (converge) เมื่อ $R(\omega) > 0$ และทำให้ได้

$$f(\omega) = \frac{2b}{\omega^2}\, \mathrm{SINH}(\omega a) \qquad (๓\text{-}๔๔)$$

หรือเขียนอยู่ในรูปของ Transfer Characteristic ที่ถูกปรับขนาดให้อยู่ในแบบปกติ (normalized)

$$f(\omega) = \frac{2\,\mathrm{SINH}(\omega)}{\omega^2} \qquad (๓\text{-}๔๕)$$

แทน $f(\omega)$ ลงในสมการ (๓-๔๐) จะได้

$$h_{\kappa\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n} = \frac{1}{\pi j} \int_c \mathrm{SINH}(\omega)\, \omega^{\kappa-2}\, d\omega$$

$$\cdot\ I_{\gamma_1}(B_1\omega)\, I_{\gamma_2}(B_2\omega) \ldots I_{\gamma_n}(B_n\omega)\, \mathrm{EXP}\left[\frac{(\sigma^2\omega^2)}{2}\right] \qquad (๓\text{-}๔๖)$$

*Davenport และ Root [(๑๖)] ได้ใช้ Cauchy Theorem ในการประเมินผลของอินทิกัล (Integral) ในสมการ (๓-๔๖) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าค่าของอินทิกัลในสมการ (๓-๔๖) จะมีค่าเท่ากับการทำอินทิเกรชั่นซึ่งมีทางเดินของการทำอินทิเกรชั่นจาก $j\infty$ ถึง $-j\infty$ ดังนั้นเมื่อแทน $\omega = j\nu$ ลงใน (๓-๔๖) และใช้คุณสมบัติที่เท่ากัน (Identity) $I_m(j_n) = j^m J_m(n)$ จะได้

$$h_{\kappa\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n} = \frac{j}{\pi}^{(\kappa+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\nu)\, \nu^{\kappa-2}\, \mathrm{EXP}\left[-\frac{\sigma^2\nu^2}{2}\right] d\nu$$

$$\cdot\ J_{\gamma_1}(\nu B_1)\, J_{\gamma_2}(\nu B_2) \ldots J_{\gamma_n}(\nu B_n) \qquad (๓\text{-}๔๗)$$

$$= \frac{(-1)}{\pi}^{(\kappa+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n-1)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{SIN}(\nu)\, \nu^{\kappa-2}\, \mathrm{EXP}\left[\frac{-\sigma^2\nu^2}{2}\right] d\nu$$

$$\cdot\ J_{\gamma_1}(\nu B_1)\, J_{\gamma_2}(\nu B_2) \ldots J_{\gamma_n}(\nu B_n) \qquad (๓\text{-}๔๘)$$

ฟังก์ชั่น Bessel เป็นฟังก์ชั่นคู่เมื่อมีลำดับเป็นคู่และเป็นฟังก์ชั่นคี่เมื่อลำดับเป็นคี่ ดังนั้นค่าของอินทิกัลจะไม่เป็นศูนย์ต่อเมื่อ $\kappa + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ มีค่าเป็นจำนวนคี่ และประกอบกับค่าสัมประสิทธิ์ $h_{\kappa\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n}$ ที่ปรากฏอยู่ใน Autocorrelation Function

---

*Davenport และ Root แสดงให้เห็นในกรณีที่ $n = 1$ แต่อย่างไรก็ตามกรณีที่มีการคูณกันหลาย ๆ ฟังก์ชั่นก็ยังคงใช้ได้ [(๑๖), p ๓๐๔]

เป็นรูปของกำลัง 2 จึงสามารถที่จะละพจน์ $(-1)^{(\kappa+\gamma_1+\gamma_2+\ldots\ldots+\gamma_n-1)/2}$ ในการพิจารณาได้

$$h_{\kappa\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(\nu)\,\nu^{\kappa-2}\,\mathrm{EXP}\left[-\frac{\sigma^2\nu^2}{2}\right] d\nu J_{\gamma_1}(\nu B_1)\,J_{\gamma_2}(\nu B_2)\ldots J_{\gamma_n}(\nu B_n) \quad (๓-๔๙)$$

<u>อัตราส่วนของกำลังสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนที่ขาออกของเครื่องขยาย</u>

สมการ Autocorrelation Function ในสมการ (๓-๓๙) สามารถที่จะเขียนแยกออกเป็นส่วนประกอบที่สามารถให้ความหมายทางฟิสิกส์ได้เป็น ๓ ส่วนสำคัญ

$$R_y(\tau) = h_{000\ldots 0} + R_s(\tau) + R_\eta(\tau) \quad (๓-๕๐)$$

พจน์แรกของสมการ (๓-๕๐) คือค่าเฉลี่ยคงที่ (DC component) ของสัญญาณที่ขาออกของเครื่องขยายกำลัง

พจน์ที่ ๒ คือ Autocorrelation Function ของสัญญาณจริงซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$R_s(\tau) = \sum_{i=1}^{n}\left[h^2_{00..1_i....0}\sum_{b_i=0}^{\infty} J^2_{b_i}(\beta_i)\sum_{+,-}^{4}\mathrm{EXP}\ j(\pm\omega_i \pm b_i\omega_{mi})\right] \quad (๓-๕๑)$$

i มีความหมายเท่ากับช่องสัญญาณที่ i

ดังนั้นกำลังทั้งหมดของสัญญาณจริงที่ขาออกของเครื่องขยาย[๑๗] จะมีค่าเท่ากับแทน $\tau=0$ ลงในสมการ (๓-๕๑) และกำลังของสัญญาณในช่องสัญญาณที่ i จะมีค่าเท่ากับ

$$R_{si}(0) = 4h^2_{000\ldots 1_i\ldots .0}\sum_{b_i=0}^{\infty} J^2_{b_i}(\beta_i) \quad (๓-๕๒)$$

พจน์สุดท้ายของสมการ (๓-๕๐) ตรงกับส่วนที่เป็นเสมือนสัญญารบกวน ซึ่งประกอบด้วยส่วนที่เกิดจากการผสมผสานกันระหว่างเสียงรบกวน (noise), NXN , สัญญาณกับสัญญาณ (SXS) และสัญญาณกับเสียงรบกวน (NXS) ดังนี้

$$R_{\eta}(\tau) = R_{NXN}(\tau) + R_{SXS}(\tau) + R_{NXS}(\tau) \qquad (๓-๕๓)$$

เมื่อ

$$R_{NXN}(\tau) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{R_N^{\kappa}(\tau)}{\kappa!} h^2_{\kappa 000\ldots0} \qquad (๓-๕๔)$$

$$R_{SXS}(\tau) = h^2_{0\gamma_1\gamma_2\cdot\cdot\gamma_n} \sum_{\gamma_1=0}^{\infty} \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} \cdots\cdots \sum_{\gamma_n=0}^{\infty} \sum_{b_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{b_n=0}^{\infty} J^2_{b_1}(\gamma_1\beta_1) J^2_{b_2}(\gamma_2\beta_2)\cdot\cdot$$

$$\cdot\cdot J^2_{b_n}(\gamma_n\beta_n) \cdot \sum_{+,-}^{2^{2n}} EXP(j\omega_B\tau)$$

(๓-๕๕)

โดยยกเว้นพจน์ที่ $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = 0$

และ $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_i = 0,\ \gamma_j = 1$ เมื่อ $j \neq i$

$$R_{NXS}(\tau) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{R_N^{\kappa}(\tau)}{\kappa!} h^2_{\kappa\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n} \sum_{\gamma_1=0}^{\infty} \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\gamma_n=0}^{\infty} \sum_{b_1=0}^{\infty} \cdots\cdots \sum_{b_n=0}^{\infty} J^2_{b_1}(\gamma_1\beta_1)$$

$$\cdot J^2_{b_2}(\gamma_2\beta_2)\cdots\cdots J^2_{b_n}(\gamma_n\beta_n)$$

$$\cdot \sum_{+,-}^{2^{2n}} EXP(j\omega_B\tau)$$

(๓-๕๖)

กำลังงานทั้งหมด [๑๗] ของส่วนที่เป็นสัญญาณรบกวนที่ขาออกของเครื่องขยายจะมีค่าเท่ากับการแทนค่า $\tau = 0$ ในสมการของ $R_{\eta}(\tau)$

ถ้าให้ ω_1 เป็นความถี่เชิงมุมของคลื่นพาหะที่อยู่ในช่องความถี่ต่ำสุดของแถบความถี่ของเครื่องขยายกำลัง และให้ความถี่กลางของแต่ละช่องสัญญาณมีระยะห่างระหว่างความถี่เท่ากันด้วย $\Delta\omega$ ดังนั้นค่าความถี่กลางของช่องที่ κ จะเขียนในรูปคณิตศาสตร์ได้เป็น

$$\omega_\kappa = \omega_1 + (\kappa - 1)\,\Delta\omega \qquad (๓-๕๗)$$

ดังนั้นจะเขียน ω_B ในสมการ (๓-๓๙) ได้ใหม่

$$\omega_B = (\pm\gamma_1 \pm\gamma_2 \pm\cdots\pm\gamma_n)\omega_1 + (\pm\gamma_2 \pm 2\gamma_3 \pm\cdots\pm (n-1)\gamma_n)\Delta\omega$$

$$+ (\pm b_1\omega_{m_1} \pm b_2\omega_{m_2} \pm\cdots \pm b_n\omega_{mn}) \qquad (๓-๕๘)$$

เนื่องจากส่วนของสัญญาณที่ต้องการจะอยู่รอบ ๆ ความถี่กลางหรือที่ตกอยู่ในแถบความถี่ของสัญญาณขาเข้าเท่านั้น ดังนั้นจะได้ข้อกำหนดสำหรับสมการ (๓-๕๘) ดังนี้

$$\pm\gamma_1 \pm \gamma_2 \pm\cdots\pm\gamma_n = 1 \qquad (๓-๕๙)$$

และ $$(\pm\gamma_1 \pm 2\gamma_3 \pm\cdots\pm(n-1)\gamma_n)\,\Delta\omega + (\pm b_1\omega_{m_1} \pm\cdots\pm b_b\omega_{mn}) \leq 2\pi B \qquad (๓-๖๐)$$

เมื่อ B = ความกว้างของแถบความถี่ของเครื่องขยายกำลัง

โดย Carson's Rule ความกว้างของแถบความถี่สำหรับช่องสัญญาณ FM มีค่าประมาณ

$$\Delta f = 2(\beta + 1)\, f_m \qquad (๓-๖๑)$$

เมื่อ β คือ modulation index

f_m คือ ความถี่สูงสุดของสัญญาณพื้นฐาน

เมื่อพิจารณาสมการ (๓-๖๐) จะพบว่าพจน์ $b_i\omega_{mi}$ ที่ปรากฏในสมการเกิดจากการที่คลื่นพาหะถูกโมดูเลทด้วยความถี่ ω_{mi} ซึ่งเป็นผลให้มีการกระจายของกำลังรอบ ๆ ความถี่คลื่นพาหะของช่องสัญญาณที่ i ที่ความถี่ที่เป็นจำนวนเท่าของความถี่เชิงมุม ω_{mi} เท่ากับ b_i เนื่องจาก b_i เป็นลำดับของฟังก์ชั่น Bessel ซึ่งยกกำลังสอง ดังนั้นขนาดของกำลังที่ความถี่ที่เกิดจากค่า b_i สูง ๆจะหมดความสำคัญเมื่อเทียบกับส่วนที่เกิดจากลำดับต่ำ ๆ ดังนั้นเพื่อที่จะทำให้การคำนวณค่า $R_s(0)$ และ $R_\eta(0)$ ตามสมการ (๓-๕๑) และ (๓-๕๓) ตามข้อกำหนด (๓-๖๐) ได้สะดวกขึ้น อาจจะประมาณข้อกำหนด (๓-๖๐)ใหม่ดังนี้

$$(\pm\gamma_2 \pm 2\gamma_3 \pm \ldots\ldots\ldots \pm (n-1)\ \gamma_n) \leq n-1 \qquad (๓\text{-}๖๒)$$

หรือในกรณีที่ต้องการทราบเฉพาะส่วนที่ตกอยู่ในช่องสัญญาณ , n , จะสามารถเขียนข้อกำหนดได้เป็น

$$\pm \gamma_2 \pm 2\gamma_3 \pm \ldots\ldots\ldots\pm(n-1)\quad \gamma_n = n-1 \qquad (๓\text{-}๖๓)$$

โดยสมการ (๓-๕๐), (๓-๕๑), (๓-๕๒) และ (๓-๕๓) อัตราส่วนของกำลังของสัญญาณรวมที่ขาออกของเครื่องขยายต่อสัญญาณรบกวนทั้งหมด (S_o/N_o) และอัตราส่วนเฉพาะในแต่ละช่อง (S_{oi}/N_{oi}) จะเขียนได้ดังนี้

$$S_o/N_o = \frac{R_s(o)}{R_\eta(o)} \quad \text{โดยมีข้อกำหนดตาม (๓-๕๙) และ (๓-๖๒)} \qquad (๓\text{-}๖๔)$$

$$S_{oi}/N_{oi} = \frac{R_{si}(o)}{R_\eta(o)} \quad \text{โดยมีข้อกำหนดตาม (๓-๕๙) และ (๓-๖๓)} \qquad (๓\text{-}๖๕)$$

สำหรับค่าของพจน์ $R_N^K(o)$ ที่ยังติดอยู่ในการหาค่าของกำลังงานในสมการ (๓-๕๓) สามารถหาได้จากความสัมพันธ์

$$R_N^K(o) = \sigma^{2K}(N) \qquad (๓\text{-}๖๖)$$

เมื่อ $\sigma^2(N)$ คือกำลังของเสียงรบกวนขาขึ้นที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์

อัตราส่วนของสัญญาณจริงในช่องที่ i ต่อเสียงรบกวนเขียนได้ดังนี้

$$\left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{B_i^2/2}{\sigma^2(N)} \qquad (๓\text{-}๖๗)$$

แทนสมการ (๓-๖๗) ลงในสมการ (๓-๖๖) จะได้ความสัมพันธ์ของ $R_N^K(o)$ ต่ออัตราส่วนของกำลังสัญญาณต่อเสียงรบกวนดังในสมการ (๓-๖๘)

$$ {}^{\kappa}R_N(o) = \left[\frac{B_i^2}{2\left(\frac{S}{N}\right)_i} \right]^2 \qquad (๓\text{-}๖๘) $$

<u>การกระจายกำลังในเชิงความถี่ (Spectral Density) ของสัญญาณที่ขาออกของเครื่องขยายกำลัง</u>

การกระจายกำลังในเชิงความถี่ที่ขาออกของเครื่องขยายจะได้จากการทำ Fourier Transform ของ Autocorrelation Function ของสัญญาณที่ขาออกเครื่องขยายในสมการ (๓-๓๙) และเมื่อเขียนแยกส่วนประกอบ ดังในสมการ (๓-๔๐) จะเขียนการกระจายกำลังในเชิงความถี่ที่ขาออกของเครื่องขยายได้ดังในสมการ (๓-๖๙) ข้างล่างนี้

$$
\begin{aligned}
S_y(f) = {} & h^2_{00\ldots0}\ \delta(f) + \sum_{i=1}^{n} \Big[h^2_{00\ldots1_i\ldots0} \sum_{b_i=0}^{\infty} J^2_{b_i}(\beta_i) \\
& \cdot \frac{4}{} \sum_{+,-} \big[\delta(f + f_i \pm b_i f_{mi}) + \delta(f - f_i \pm b_i f_{mi}) \big] \Big] \\
& + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{h^2_{\kappa 000\ldots0}}{\kappa\,!}\ {}_{\kappa}S_N(f) \\
& + \Big[h^2_{o\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n} \sum_{\gamma_1=0}^{\infty} \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\gamma_n=0}^{\infty} \sum_{b_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{b_n=0}^{\infty} \frac{J^2_{b_1}(\gamma_1\beta_1)}{2^{2n}} \\
& \quad J^2_{b_2}(\gamma_2\beta_2) \ldots J^2_{b_n}(\gamma_n\beta_n) \cdot \sum_{+,-} \big[\delta(f+f_B) + \delta(f-f_B) \big] \Big] \\
& + \Big[\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{h^2_{\kappa\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}}{\kappa\,!} \sum_{\gamma_1=0}^{\infty} \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\gamma_n=0}^{\infty} \sum_{b_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{b_n=0}^{\infty} \frac{J^2_{b_1}(\gamma_1\beta_1)}{2^{2n}} \\
& \quad \cdot J^2_{b_2}(\gamma_2\beta_2) \ldots J^2_{b_n}(\gamma_n\beta_n) \cdot \sum_{+,-} \big[{}_{\kappa}S_N(f+f_B) + {}_{\kappa}S_N(f-f_B) \big] \Big] \qquad (๓\text{-}๖๙)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $f_B = \gamma_1 f_1 \pm \gamma_2 f_2 \pm \ldots \pm \gamma_n f_n \pm b_1 f_{m1} \pm b_2 f_{m2} \pm \ldots \pm b_n f_{mn}$ (๓-๗๐)

$\delta(f)$ = Impulse Function

$_{K}S_N$ = Fourier Transform ของ $R_N^K(\tau)$ คือการทำ convolution กับตัวเอง (n-1) ครั้ง

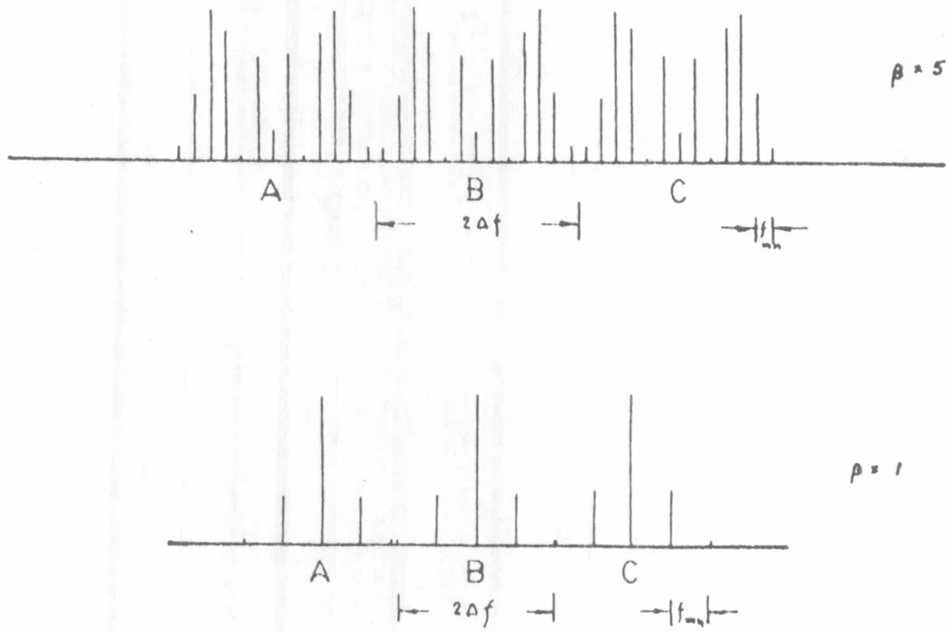
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f_{n-1})\, S_N(f_{n-2} - f_{n-1}) \ldots S_N(f - f_1)\, df_{n-1} \ldots df_1 \qquad (๓\text{-}๗๑)$$

พจน์แรกของสมการ (๓-๖๙) เป็นอิมพัลส์ที่เกิดขึ้นที่ความถี่เท่าศูนย์ ซึ่งตรงกับค่าเฉลี่ยของสัญญาณขาออกของเครื่องขยาย (D.C. component)

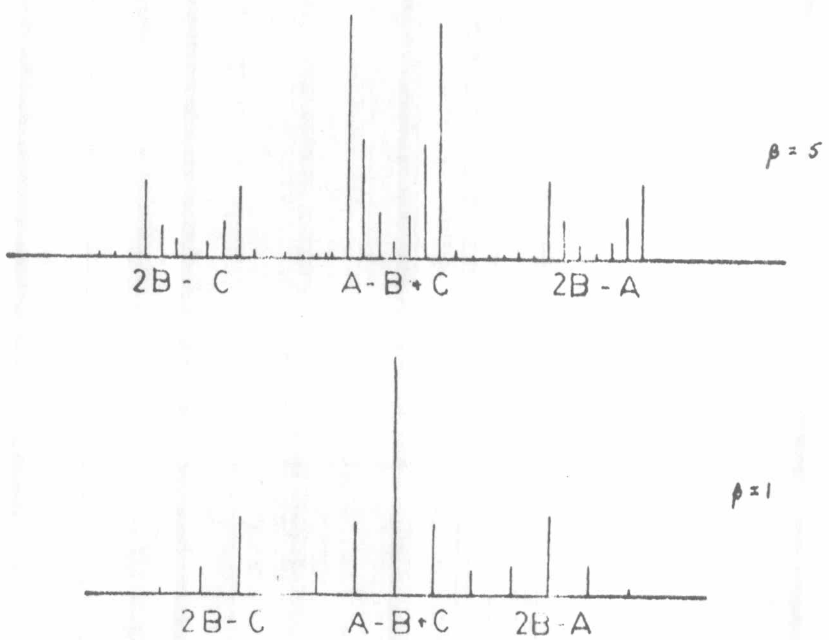
รูป ๓-๔ และ ๓-๕ เป็นภาพที่ร่างขึ้นจากสมการ (๓-๖๙) แสดงการกระจายกำลังเชิงความถี่ของสัญญาณและอินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัค ในบริเวณแถบความถี่ของเครื่องขยายกำลัง ซึ่งเป็นกรณีที่มี ๓ คลื่นพาหะ A,B,C และแต่ละคลื่นพาหะมีการจัดระยะห่างระหว่างความถี่กลางเท่ากันและขนาดของกำลังเท่ากัน

รูปที่ ๓-๔ เป็นภาพร่างการกระจายกำลังของสัญญาณในเชิงความถี่ที่ขาออกของเครื่องขยายกำลัง ซึ่งตรงกับพจน์ที่ ๒ ในสมการ (๓-๖๙) กลุ่มของอิมพัลส์ (impulse) ที่อยู่รอบ ๆ ความถี่ของคลื่นพาหะเกิดจากการโมดูเลทความถี่ของคลื่นพาหะด้วยสัญญาณโคซายน์ อิมพัลส์เหล่านี้จะมีระยะห่างจากความถี่ของคลื่นพาหะเป็นจำนวนเท่าของความถี่สัญญาณโคซายน์ที่ใช้โมดูเลท และมีลักษณะการกระจายกำลังขึ้นอยู่กับ modulation index ยิ่ง modulation index สูงขึ้น ขนาดของกำลังที่ความถี่ที่ห่างจากความถี่ของคลื่นพาหะจะเพิ่มขนาดความสำคัญมากขึ้นต่อกำลังรวมของสัญญาณซึ่งเป็นลักษณะปกติของระบบ FM [๑๘]

รูปที่ ๓-๕ เป็นภาพร่างการกระจายกำลังของอินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัคที่มีลำดับเท่ากับ ๓ (third order intermodulation) ซึ่งเกิดจากการผสมผสานกันของสัญญาณในพจน์ที่ ๔ ของสมการ (๓-๖๙) ในกรณีที่มีจำนวนคลื่นพาหะเท่ากับ ๓ จำนวนของอินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัคลำดับ ๓ ในแต่ละช่องสัญญาณ มีจำนวนเท่ากัน คือเท่ากับ ๑ ผลผลิต (Product) แต่อินเตอร์โมดูเลชั่นที่เกิดในช่องสัญญาณกลางเป็นแบบ A + B + C ซึ่งจะให้ค่าผลคูณของฟังก์ชั่น Bessel สูงกว่าการเกิดแบบ 2B - A หรือ 2B - C จึงทำให้ระดับของกำลังของอินเตอร์โมดูเลชั่น



รูปที่ ๓.๔ ภาพร่างของการกระจายกำลังเชิงความถี่ของสัญญาณ
ที่ขาออกของเครื่องขยายกำลัง



รูปที่ ๓.๕ ภาพร่างของการกระจายกำลังเชิงความถี่ของ
อินเตอร์โมดูเลชั่นลำดับที่ ๓

โปรดัคในช่องสัญญาณกลางสูงกว่าในช่องสัญญาณข้างเคียง เมื่อจำนวนคลื่นพาหะเพิ่มขึ้น ลักษณะการเกิดอินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัคลำดับ ๓ ทั้ง ๒ ชนิด จะกระจายการเกิดในช่องสัญญาณต่าง ๆ มากขึ้น ดังนั้นในกรณีที่จำนวนคลื่นพาหะมากขึ้นระดับของอินเตอร์โมดูเลชั่นในแต่ละช่องสัญญาณจะขึ้นอยู่กับชนิดการเกิดและจำนวนผลผลิตที่มาตกอยู่ในช่องสัญญาณนั้น

การกระจายกำลังของอินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัคลำดับ ๓ มีลักษณะคล้ายคลึงกับการกระจายกำลังของสัญญาณ เมื่อ modulation index สูงขึ้น กำลังของอินเตอร์โมดูเลชั่นจะมีการกระจายออกตามความถี่มากขึ้น

พจน์ที่ ๓ และพจน์สุดท้ายของสมการ (๓-๖๙) เป็นการกระจายกำลังของส่วนที่เกิดจากเสียงรบกวนขาขึ้น ซึ่งมีการกระจายกำลังแบบคงที่ในแกนความถี่ (white gaussian noise) ดังนั้นผลรวมของการกระจายกำลังของเสียงรบกวนจากพจน์ดังกล่าวที่ขาออกของเครื่องขยายกำลังจะยังคงมีระดับเกือบคงที่ตลอดแถบความถี่

<u>อัตราส่วนของกำลังสัญญาณกับสัญญาณรบกวนที่ขาออกของเครื่องรับ FM</u>

ในการศึกษาหากำลังออกของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนรวมที่ขาออกของเครื่องรับ FM จำเป็นที่จะต้องทราบค่าความน่าจะเป็น (Probability Density) ของความถี่ของสัญญาณและของสัญญาณรบกวน HAMER [๑๙] ได้ศึกษาผลของสัญญาณรบกวนความถี่วิทยุ (r.f. Interfering signal) ต่อการทำงานในระบบของเครื่องรับ FM แบบ Discriminator ด้วยการตั้งเงื่อนไขให้เป็นกรณี Quasi - Stationary [๒๐] (ตรงกับกรณีที่ modulation Index มีค่าสูง) ซึ่งจะทำให้สามารถประมาณความน่าจะเป็นของความถี่ด้วย Power Spectrum ของสัญญาณนั้น โดยที่ความน่าจะเป็นของความถี่จะมีค่าเท่ากับ Power Spectrum ซึ่งถูกปรับค่าให้อยู่ในรูปปกติ (normalized) โดยมีค่าที่ความถี่ของคลื่นพาหะเท่ากับหนึ่ง

SPOOR [๒๑] ได้นำวิธีของ HAMMER มาใช้ในการศึกษาการทำงานในระบบ FM กรณีที่แทนสัญญาณรบกวนที่ HAMMER ศึกษาด้วยอินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัค เฉพาะส่วนที่เกิดจากการผสมผสานกันระหว่างสัญญาณในสมการ (๓-๖๙) โดยมีแนวทางการศึกษาด้วยการแยกพิจารณาผล

จากแต่ละอินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัค ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็น

$$N_{CI}(f) = \frac{\kappa^2}{2} f^2 a_{CI}^2 P_{CI}(f) \qquad (๓-๗๒)$$

เมื่อ $N_{CI}(f)$ เป็นกำลังงานของสัญญาณรบกวนรอบ ๆ คลื่นพาหะ c ที่เกิดจากอินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัคที่ I

κ เท่ากับค่าคงที่ของ Discriminator $\left(\frac{V}{H_Z}\right)$

a_{CI}^2 เป็นอัตราส่วนของกำลังของอินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัคที่ I ต่อกำลังของคลื่นพาหะ $(a_{CI}^2 << 1)$

$P_{CI}(f)$ คือความน่าจะเป็น (Probability Density) ของค่าความแตกต่างระหว่างความถี่ของคลื่นพาหะขณะเวลาใดๆ (Instantaneous frequencies of carrier) กับความถี่ของอินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัคที่ I

ดังนั้นกำลังของสัญญาณรบกวนรอบ ๆ คลื่นพาหะ C ที่เกิดจากอินเตอร์โมดูเลชั่น ทั้งหมด จะเท่ากับผลรวมของอินเตอร์โมดูเลชั่นที่เกิดขึ้นทั้งหมด

$$N_c(f) = \frac{(\kappa f)^2}{2} \sum_{I=1}^{\infty} a_{CI}^2 P_{CI}(f) \qquad (๓-๗๓)$$

เนื่องจากความน่าจะเป็นของความถี่ของแต่ละสัญญาณขาเข้าของเครื่องขยายมีคุณสมบัติไม่ขึ้นต่อกัน (Statistically Independent) และอินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัคเกิดจากการรวมกันอย่างเชิงเส้นระหว่างจำนวนเท่าของสัญญาณขาเข้า ดังนั้นความน่าจะเป็นของค่าความแตกต่างระหว่างความถี่ , $P_{CI}(f)$, จะสามารถหาได้จากการทำ convolution ระหว่างความน่าจะเป็นของความถี่ของสัญญาณที่ทำให้เกิดอินเตอร์โมดูเลชั่นโปรดัคนั้น กับความน่าจะเป็นของความถี่คลื่นพาหะ

ด้วยวิธีดังกล่าวข้างต้น เมื่อจะนำมาพิจารณาศึกษารวมถึงผลของ เสียงรบกวนขาขึ้นและลง (up link noise & Down. link noise) จะทำให้มีความยุ่งยากในการศึกษามาก สำหรับกรณีที่อัตราส่วนของกำลังสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนรวม (Signal-To-noise-ratio) ที่ขาเข้าของ เครื่องรับมีค่าสูงพอ SUNDE (๔) ได้เสนอแนะการหาอัตราส่วนดังกล่าวจากสูตร

$$\eta_o^2 \ (f) \ = \ \frac{\eta_1^2}{\underline{D}^2} \left(\frac{f}{B_o} \right)^2 \qquad (๓-๗๔)$$

เมื่อ η_o^2 (f) คืออัตราส่วนของสัญญาณรบกวนต่อกำลังสัญญาณที่ขาออกของ เครื่องรับ FM

B_o คือความกว้างของแถบความถี่ของสัญญาณพื้นฐาน

$\underline{D}$ คือรากที่สองของค่า เฉลี่ยกำลังสองของอัตราส่วนการ เบี่ยง เบน (γms deviation ratio = $\underline{\Delta}$ / B_o)

$\underline{\Delta}$ คือรากที่สองของค่า เฉลี่ยกำลังสองของการ เบี่ยง เบนของความถี่ (γms frequency deviation)

η_1 คืออัตราส่วนของค่า เฉลี่ยของกำลังสัญญาณรบกวนรวมที่อยู่ในแถบความถี่ B_o ที่ขา เข้าของ เครื่องรับ FM ต่อค่า เฉลี่ยของกำลังของคลื่นพาหะ

และมีข้อกำหนดการใช้สูตร (๓-๗๔) ว่า η_1 จะต้องมีค่าน้อยกว่า $๑๐^{-๑}$

สำหรับกรณีที่คลื่นพาหะถูกโมดูเลทด้วยสัญญาณพื้นฐานที่ เป็นโคซายน์ ค่ารากที่สองของค่า เฉลี่ยกำลังสองของการ เบี่ยง เบนของความถี่จะ เท่ากับ

$$\underline{\Delta} \ = \ \frac{\beta}{\sqrt{2}} \qquad (๗-๗๕)$$

จากสมการที่ (๖๘) และ (๗๒) ของ SUNDE จะเขียนพจน์ η_1^2 ได้ดังนี้

$$\eta_1^2 = \eta^2 \cdot B_o/B \qquad (๗-๗๖)$$

เมื่อ $\eta^2 = \gamma^2 + N/C$ (๗-๗๗)

B = ความกว้างของแถบความถี่ของช่องสัญญาณ FM โดย Carson's rule $B = 2(\beta+1)\ f_m$

γ^2 = อัตราส่วนของสัญญาณรบกวนต่อสัญญาณที่อยู่ในแถบความถี่ B ที่ขาออกของเครื่องขยาย โดยสมการ (๓-๖๕) $\gamma^2 = \frac{R_{n_i}(o)}{R_{Si}(o)}$

N = ค่าเฉลี่ยของกำลังของเสียงรบกวนขาลงในแถบความถี่ B

C = กำลังของคลื่นพาหะที่ได้รับ

ดังนั้นเขียนสมการ (๓-๗๔) ได้ใหม่ดังนี้

$$\eta_o^2(f) = \frac{2\eta^2}{\beta^2(\beta+1)}\ f^2$$

ค่าเฉลี่ยของ $\eta_o^2(f)$ ที่ขาออกของเครื่องรับ FM คือ

$$\eta_{av}^2 = \frac{2\eta^2}{\beta^2(\beta+1)} \cdot \frac{1}{2f_m} \int_{-f_m}^{f_m} f^2 df \qquad (๗-๗๙)$$

$$= \frac{2\eta^2}{3\beta^2(\beta+1)} \cdot f_m^2 \qquad (๗-๘๐)$$