บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

2.1 การทดสอบ ไค-สแควร์

เป็นวิธีการของ คาร์ล เพียร์สัน[1] โดยตั้งขึ้นเพื่อใช้ในการทดสอบสารรูปสนิทสุด (Test of goodness of fit) โดยมุ่งเน้นในด้านการเปรียบเทียบระหว่างการแจกแจงจำนวนความถี่ที่หาได้กับการแจกแจงความถี่ที่น่าจะเป็นตามทฤษฎี และเน้นในการทดสอบว่าการแจกแจงที่หาได้นั้นเป็นลักษณะการแจกแจงของโค้งปกติหรือไม่ เพื่อนำผลที่ได้มาสรุปว่าถ้าการแจกแจงเป็นปกติ ทั้งมัชฌิมเลขคณิตและมาตราวัดการการกระจายของคะแนนที่หาได้จากตัวอย่างก็จะเป็นมัชฌิมเลขคณิตและมาตราวัดการกระจายของคะแนนที่มาจากประชากร หรือเป็นเครื่องสรุปว่า จำนวนตัวอย่างที่สุ่มมานั้น สามารถแทนประชากรทั้งหมดจริง ๆ ได้ ซึ่งต่อมาก็มีการนำเอาการทดสอบไค-สแควร์นี้มาใช้อย่างกว้างขวางขึ้น โดยใช้ทดสอบการแจกแจงในรูปอื่น ๆ ได้มากมาย ดังนั้นการทดสอบไคสแควร์จึงสามารถใช้ได้กับข้อมูลแทบทุกชนิด จนอาจเรียกได้ว่าเป็นค่าสถิติมวลปรารถนา[2] (General purpose statistic) และส่วนมากจะใช้กับข้อมูลที่อยู่ในรูปของความถี่หรือสามารถจัดให้อยู่ในรูปของความถี่ได้ รวมทั้งสัดส่วนและความน่าจะเป็นด้วย นอกจากนั้นยังใช้ในการทดสอบข้อมูลที่มีคุณสมบัติหลายประการพร้อม ๆ กันหรือข้อมูลที่ทดสอบด้วย t หรือ Z - test แล้วได้ค่าไม่สมบูรณ์ แต่อย่างไรก็ตามประโยชน์ที่สำคัญของไค-สแควร์ ก็ยังคือการใช้ทดสอบคุณสมบัติหลาย ๆ ประการของข้อมูลในคราวเดียวกัน และใช้ในการตรวจดูว่าการแจกแจงของตัวอย่างที่เก็บข้อมูลมาได้นั้นมีลักษณะการแจกแจงเป็นอย่างไร

---

[1] หม่อมหลวงตุ้ย ชุมสาย, สถิติศาสตร์และวิจัย, (พิมพ์ครั้งที่ 2; พระนคร : สำนักงานสถิติกลาง สภาเศรษฐกิจแห่งชาติ, 2499) หน้า 217.

[2] ประคอง กรรณสูต, สถิติประยุกต์สำหรับครู, (พิมพ์ครั้งที่ 4; พระนคร : สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช, 2517), หน้า 119.

การทดสอบไค-สแควร์จะมีสัญญาลักษณ์และสูตรที่ใช้ในการคำนวณดังนี้ สัญญาลักษณ์ที่ใช้แทนค่าไค-สแควร์ คือ $\chi^2_{(\alpha, d.f)}$

สูตรที่ใช้ในการคำนวณ[3] คือ

$$\chi^2_{(\alpha, d.f)} = \sum_{i=1}^{c} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

α = ระดับแห่งความมีนัยสำคัญ

d.f = ชั้นแห่งความเป็นอิสระ

C = จำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นทั้งหมด

O_i = ความถี่ที่ได้จากการปฏิบัติจะเริ่มจาก $O_1, O_2, O_3 .. O_c$ หรือ O_i โดย i = 1, 2, 3 C

E_i = ความถี่ที่ได้ตามทฤษฎีจะเริ่มจาก $E_1, E_2, E_3 ... E_c$ หรือ E_i โดย i = 1, 2, 3 C

จากสูตรจะต้องมีค่า α และค่า d.f เข้ามาเกี่ยวข้อง โดย

α หมายถึงระดับแห่งความมีนัยสำคัญ[4] (Level of Significance) คือ ค่าที่จะยอมให้ผิดไปได้กี่ครั้งใน 100 ครั้ง เช่น ในการสุ่มตัวอย่าง 100 ครั้ง ถ้ามีโอกาสผิด 2 ครั้ง และเชื่อมั่นว่าถูกต้อง 98 ครั้ง เช่นนี้เรียกว่ามีระดับแห่งความมีนัยสำคัญ .02 และระดับแห่งความเชื่อมั่น (Level of Confidence 98 % และที่นิยมใช้กันมาก จะใช้ที่ระดับแห่งความมีนัยสำคัญ .01 หรือ .05 ถ้าใช้

---

[3] Donald L. Harnett, Introduction to Statistical Methods, (London, Addison wesley Publishing Company, Inc., P. 530.

[4] ประคอง กรรณสูต, สถิติประยุกต์สำหรับครู, (พิมพ์ครั้งที่ 4 ; พระนคร: สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช, 2517), หน้า 82.

$\alpha = .01$ ก็หมายความว่ายอมให้เกิดความผิดพลาดได้ 1 ครั้ง

$\alpha = .05$ ก็หมายความว่ายอมให้เกิดความผิดพลาดได้ 5 ครั้ง

d.f. หมายถึง ชั้นแห่งความเป็นอิสระ (Degree of Freedom)โดยจะมีค่าและวิธีคิด ได้หลายแบบขึ้นกับลักษณะของข้อมูลแต่ละชุดแต่ละแบบไม่เหมือนกันแต่จะสรุปหลักในการหาชั้นแห่งความเป็นอิสระ[5] ได้ดังนี้

1. ถ้าคำนวณค่าไคสแควร์จากข้อมูลที่มี 1 มิติและมี n ประเภท (Categories) ได้แก่ข้อมูลในตารางแจกแจงความถี่ที่มี n ชั้น จำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระจะน้อยกว่า n อยู่ 1 นั่นคือ

$$d.f. = (n - 1)$$

2. ถ้าคำนวณค่าไคสแควร์จากข้อมูลที่เป็นตารางมี r แถวและ c สดมภ์ได้แก่ ตารางการณ์จร (Contingency Table) ซึ่งเป็นตารางที่มี 2 มิติ ใช้เปรียบเทียบคุณสมบัติของข้อมูล 2 ตัวแปร (Variables) ชั้นแห่งความเป็นอิสระคือผลคูณระหว่างจำนวนแถวลบด้วย 1 และ จำนวนสดมภ์ลบด้วย 1 นั่นคือ

$$d.f. = (r - 1)(c - 1)$$

3. ถ้ามีการจำกัด (Restriction) การคำนวณใด ๆ เพิ่มขึ้นจากการคำนวณค่าไคสแควร์ตามธรรมดา ชั้นแห่งความเป็นอิสระก็จะลดลงอีกตามจำนวนสิ่งที่จำกัดไว้ เช่น คำนวณค่าไคสแควร์ (χ^2) จากตารางแจกแจงความถี่ที่มี n ชั้น ตามธรรมดาแล้วชั้นแห่งความอิสระตามวิธีในข้อ 1 จะเป็น n - 1 แต่ถ้าจำกัดลงไปอีกว่า

---

[5] ประคอง กรรณสูต, สถิติประยุกต์สำหรับครู, (พิมพ์ครั้งที่ 4 : พระนคร : สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช, 2517), หน้า 120.

ในการคำนวณค่าไคสแควร์ เพื่อทดสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้ จะต้องคำนวณค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{X}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.E.) จากข้อมูลด้วย ชั้นแห่งความเป็นอิสระก็จะลดลงอีก 2 เหลือ (n-1)- 2 หรือ n - 3 เป็นต้น ซึ่งมีสูตรคือ

d.f. = no.of group - no fo parameter - 1

วิธีทดสอบค่าไคสแควร์

1. ตั้งสมมุติฐาน ขึ้นมาก่อนว่าเราต้องการจะใช้ X^2 ทดสอบอะไร โดยมากก็จะตั้งสมมุติฐานใน 2 ลักษณะดังนี้

H_o = ข้อมูลทั้ง 2 ไม่มีความแตกต่างกัน

หรือ

H_o = การแจกแจงของข้อมูลเป็นการแจกแจงลักษณะใด

2. บันทึกหรือหาความถี่ของข้อมูลที่ได้จากการปฏิบัติ (Observed Frequency) หรือ ค่า O_i ลงในสดมภ์ความถี่ของข้อมูลที่ได้จากการปฏิบัติ

3. คำนวณความถี่ที่หวังเป็นจริงหรือความถี่ที่ได้ตามทฤษฏี (Expected Frequency) คือค่า E_i

4. คำนวณค่าไคสแควร์โดยแทนค่าจากสูตร

$$\chi^2_{(\alpha, d.f.)} = \sum_{i=1}^{c} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

5. คำนวณชั้นแห่งความเป็นอิสระ แล้วเปรียบเทียบค่าไคสแควร์ที่คำนวณได้กับค่าไคสแควร์จากตารางที่ระดับความมีนัยสำคัญที่กำหนดให้และชั้นแห่งความเป็นอิสระตามที่คำนวณได้ (ตารางค่าไคสแควร์ดูได้จากภาคผนวก จ.)

ถ้าไคสแควร์ ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าไคสแควร์จากตารางในภาคผนวก จ. ที่ระดับความมีนัยสำคัญที่กำหนดให้ ก็กล่าวว่าค่าที่คำนวณได้มีนัยสำหรับ (Significant) ที่ระดับความมีนัยสำคัญนั้นจึง ไม่รับสมมติฐานที่ตั้งไว้ แต่ถ้าไคสแควร์ที่คำนวณได้มีค่าน้อย

กว่าไคสแควร์จากตารางในภาคผนวก จ. ที่ระดับความมีนัยสำคัญที่กำหนดให้ ก็กล่าวว่าค่าที่คำนวณได้ไม่มีนัยสำคัญ (Non Significant) ที่ระดับความมีนัยสำคัญนั้น จึงยอมรับสมมติฐานที่ตั้งไว้

การทดสอบภาวะสารูปสนิทสุด (Test of goodness of fit)

การใช้การทดสอบไคสแควร์มาทดสอบภาวะสารูปสนิทสุด (Test of goodness of fit) ก็เนื่องมาจากการแจกแจงความถี่อาจสร้างขึ้นได้ทั้งจากในทางปฏิบัติ และทางทฤษฎีค่าความถี่ที่ได้จะผิดเพี้ยนไปบ้างไม่มากก็น้อย เราจึงจะได้ใช้การทดสอบไคสแควร์มาทดสอบความผิดเพี้ยนนี้ว่ามากพอจนมีนัยสำคัญหรือไม่ แล้วเราจะได้สรุปว่าการปฏิบัติและทฤษฎีตรงกันหรือไม่ การแจกแจงความถี่ตามทฤษฎีบางกรณีก็หาได้เลย โดยไม่ต้องอาศัยการปฏิบัติ แต่บางกรณีต้องอาศัยสถิติบางตัวจากการปฏิบัติ เช่น การทดสอบว่าการแจกแจงของข้อมูลที่ได้มีลักษณะการแจกแจงเป็นแบบปัวซอง หรือ มีลักษณะการแจกแจงแบบเอ็กโพเนนเชียล และการแจกแจงความถี่จากทฤษฎีที่นำมาเปรียบเทียบกับการแจกแจงจากการปฏิบัติ เราเรียกว่า การปรับ (fit) เส้นโค้ง[6]

ในการทำการวิจัยทางสถิติบ่อยครั้งที่เราไม่ทราบว่าข้อมูลที่เราเก็บรวบรวมได้นั้นมีการแจกแจงในรูปใด และเมื่อไม่ทราบรูปของการแจกแจง ก็อาจเป็นเหตุให้การทดลองต่อไปเกิดการผิดพลาดได้ง่าย ทั้งนี้เพราะการทดสอบหาค่าสถิติของการแจกแจงที่ต่างกัน แม้จะมีวิธีการที่คล้ายกัน แต่ค่าสถิติที่จะนำมาเปรียบเทียบ เพื่อเป็นหลักการตัดสินใจนั้นต่างกัน จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทำการทดสอบดูว่าข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้นั้น มีการแจกแจงลักษณะใด ซึ่งสามารถใช้ไคสแควร์ช่วยทดสอบได้ และผลการทดสอบในลักษณะนี้เราเรียกกว่า การทดสอบภาวะสารูปสนิทสุด

---

[6]ปราณีต สรสุชาติ, <u>สถิติเบื้องต้น</u> (พระนคร , สมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทย 2499), หน้า 193.

2.2 การแจกแจงปัวซอง (Poisson Distribution)

การแจกแจงปัวซอง เป็นลักษณะการแจกแจงที่ไม่ต่อเนื่อง (Discrete Distribution) ที่สำคัญอันหนึ่งเพราะสามารถใช้ประโยชน์ได้อย่างกว้างขวางโดยเฉพาะในด้านที่เกี่ยวกับการวิจัยทางการปฏิบัติ (Operation research) การแจกแจงปัวซองได้ถูกค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์ ชาวฝรั่งเศส ชื่อ S.D. Poisson[7] ซึ่งมีชีวิตอยู่ในช่วงปี ค.ศ. 1781-1840 เขาได้เป็นคนแรกที่พยายามอธิบายลักษณะการแจกแจงปัวซองนี้ ลงในบทความของเขาในปี ค.ศ. 1837 ในครั้งแรกมีความลำบากมากในการที่จะพยายามอธิบายถึงประโยชน์ของการแจกแจงปัวซอง แต่ต่อ ๆ มาก็มีผู้เห็นด้วยและใช้ลักษณะการแจกแจงปัวซองนี้อย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะมักจะนิยมนำมาใช้ในเรื่องที่เกี่ยวกับการมาถึง การมาขอรับบริการหรือรวมไปถึงกระทั่งอัตราในการให้บริการ เช่น การตรวจสอบ counters ในร้าน supermarket พนักงานต้อนรับในธนาคาร, ทางวิ่งในทางอากาศยาน, คนที่ทำหน้าที่รักษาซ่อมแซมร้าน, เครื่องจักรที่ต้องการซ่อมแซม, จำนวนความผิดพลาดที่เกี่ยวกับการพิมพ์บนหน้ากระดาษหนึ่ง ๆ[8] จำนวนเม็ดเลือดขาวในเลือดหรือ จำนวนความไม่สมบูรณ์ของผิวไม้ เหล็ก หรือสี

ซึ่งตัวอย่างเหล่านี้ล้วนแต่เป็นลักษณะเหตุการณ์ที่มีการแจกแจงเป็นแบบปัวซองทั้งสิ้น ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นปัญหาเกี่ยวกับจำนวนเหตุการณ์ของตัวแปรสุ่ม (Random Variable) ภายใต้พื้นที่ที่กำหนดให้ 1 หน่วย หรือการมาถึง การมาขอรับบริการต่อ 1 หน่วยเวลานั่นเอง

[7] Donald L. Harnett, Introduction to Statistical methods (Second edition; Addison-Wesley Publishing Company Inc.) p. 145.

[8] Loc.Cit.

ดังนั้น ลักษณะของการแจกแจงปัวซองที่สามารถใช้กำหนดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น x เหตุการณ์ต่อ 1 หน่วยเวลา จึงพอจะสรุปเป็นสมมุติฐานเบื้องต้นได้[9] คือ

1. ภายในหน่วยวัดหนึ่ง ๆ จุดที่อาจเป็นไปของการเกิดเหตุการณ์ที่อยู่มากมายและความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ ณ จุดใดจุดหนึ่งมีค่าต่ำมาก นอกจากนี้ตัวแปรผันเชิงสุ่ม x จะต้องเป็นจำนวนเต็ม 0 , 1 , 2 ..ภายในหน่วยวัดนั้น ๆ

2. ความเป็นอิสระ หมายความว่าการเกิดเหตุการที่อาจเกิดขึ้นได้ภายในหน่วยวัดหนึ่ง ๆ จะเป็นจำนวนมากน้อยเพียงใดก็ได้ และจะไม่มีผลจะหบกระเทือนต่อจำนวนของการเกิดเหตุการณ์ของหน่วยวัดอื่น ๆ เช่น การพ่นสีประตูตู้เย็นมีการตรวจพบว่ามีจุดตำหนิ 4 จุดในพื้นที่ตารางฟุตใดตารางฟุตหนึ่ง จะไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อความน่าจะเป็นของการตรวจพบว่ามีจุดตำหนิจำนวนต่าง ๆ ในพื้นที่ต่อหนึ่งตารางฟุตอื่น ๆ

3. การไม่เปลี่ยนแปลง หมายความว่าค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์แต่ละอันในช่วงเวลาเล็ก ๆ จะต้องเป็นค่าคงที่ตลอดคาบของเวลาที่พิจารณาเช่น จำนวนจุดตำหนิของการพ่นสีที่ตรวจพบโดยเฉลี่ยแล้วจะต้องมีจำนวนเกือบเท่ากัน

พิจารณาถึงการเข้ามาของลูกค้าในธนาคารต่อชั่วโมง สมมุติเราสามารถแบ่งชั่วโมงที่กำหนดนั้นออกเป็นช่วงเวลาช่วงละ 1 นาที ความน่าจะเป็นที่ลูกค้ามาถึงในระหว่างแต่ละวินาทีจะมีขนาดเล็ก และมีค่าคงที่ตลอดคาบของเวลา 1 ชั่วโมง นอกจากนั้นถ้ากำหนดให้ประตูกว้างพอที่จะมีคนเข้ามาเพียงคนเดียว ก็จะมีลูกค้าเพียงคนเดียวที่มาถึง

---

[9]Donald L. Harnett, Introduction to Statistical methods (Second edition; Addision-Wesley Publishing Company Inc.) p. 145.

ในช่วงวินาทีที่กำหนดให้ และการมาถึงในคาบของเวลาที่กำหนดให้นี้จะเป็นอิสระ จากจำนวนผู้มาถึงในคาบเวลาอื่น ๆ ภายในเหตุการณ์อย่างนี้ จำนวนของผู้มาถึงในคาบเวลา 1 ชั่วโมง จะต้องพบกับสมมติฐานเบื้องต้นของการแจกแจงปัวซอง ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า การเข้ามาของลูกค้าในธนาคารมีการแจกแจงเป็นปัวซอง

ตัวอย่างของการแจกแจงปัวซองที่กล่าวมาจะเกี่ยวข้องกับความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ X เหตุการณ์ต่อ 1 หน่วยเวลา โดยมีพารามิเตอร์ (Parameter) ที่จำเป็นในการใช้อธิบายลักษณะของประชากรคือ ค่าอัตราค่าเฉลี่ย (Mean Rate) ของเหตุการณ์ที่กระทำในแต่ละหน่วยเวลา เราจะใช้อักษรกรีก[10] λ (Lambda)

Lambda สามารถจะอธิบายได้ว่าเป็นอัตราค่าเฉลี่ย (Mean Rate) ของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นตามกฎเกณฑ์ที่ได้ตั้งเอาไว้ ซึ่งโดยทั่วไป λ จะรู้ค่าก่อนเสมอ และจะเป็นค่าความถี่ของฟังค์ชั่น (Function) ของการแจกแจงปัวซอง ซึ่งสามารถที่จะกำหนดความน่าจะเป็นที่แน่นอนของเหตุการณ์ X เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลานั้นๆ ได้ ดังนั้น

การแจกแจงปัวซองจะมีสูตร[11] คือ

$$P_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{X!} & X = 0, 1, 2 \ldots\ldots \\ & \lambda > 0 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

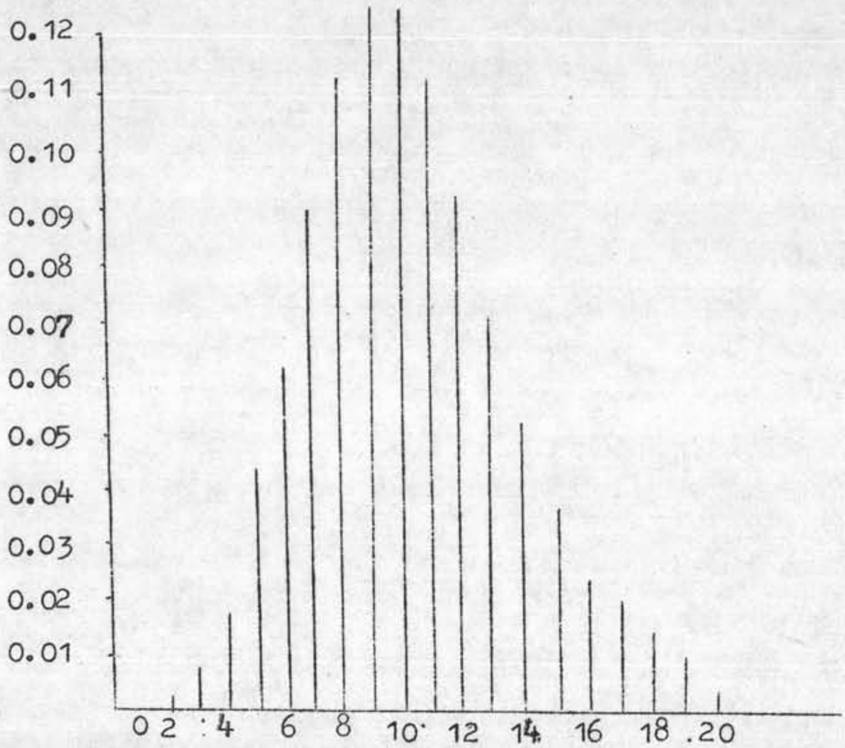
---

[10] Donald L. Harnett, Introduction to Statistical methods (Second edition; Addison-Wesley Publishing Company Inc.) p. 145.

[11] Ibid., p. 147.

ลักษณะประจำของการแจกแจงปัวซอง (Poisson Distribution)

การแจกแจงปัวซองเป็นขนาดของฟังก์ชั่นที่ไม่ต่อเนื่อง ซึ่งจะมีความลาดไปทางขวาโดยเริ่มตั้งแต่ X ไม่ต่ำกว่า o แต่มีค่าเป็นจำนวนเต็มบวก และ λ ไม่เท่ากับ o โดยรูปร่างของการแจกแจงปัวซองจะมีลักษณะสมมาตรกันเสมอ ดังรูป



รูปที่ 2.1

ที่กล่าวมา λ เป็นเพียงค่าพารามิเตอร์ (Parameter) ของการแจกแจงปัวซองเท่านั้น แต่ความจริงทั้งค่ามัชฌิมเลขคณิตหรือค่าเฉลี่ย (MEAN) และค่าความแปรปรวน (VARIANCE) ของการแจกแจงปัวซอง ก็จะมีค่าเป็นฟังก์ชั่นของ λ ด้วย โดย

ค่ามัชฌิมเลขคณิตของการแจกแจงปัวซอง $\mu = \lambda$

ค่าความแปรปรวนของการแจกแจงปัวซอง $\sigma^2 = \lambda$

เช่นค่าของ $\lambda = 1$ แสดงว่ามีลูกค้ามารับบริการจากธนาคารโดยเฉลี่ย 1 คนต่อนาที ดังนั้น ค่าความแปรปรวนของจำนวนการมาขอรับบริการในแต่ละนาทีก็จะต้องเป็น 1 ด้วย

การใช้การแจกแจงปัวซองกะประมาณการแจกแจงทวินาม[12] (Binonial Distribution)

ประโยชน์อีกอันหนึ่งของการแจงแจงปัวซองคือ การใช้กะประมาณการแจกแจงทวินามถ้า n มีค่าสูงมาก ๆ และ p มีค่าต่ำมาก ๆ การแจกแจงทวินามจะเปลี่ยนมาเป็นการแจกแจงปัวซอง คือ เมื่อ $p \to o$ และ $n \longrightarrow \infty$ ดังนั้น $np \longrightarrow \lambda > o$

$$P\{X = K\} = \left(\frac{n}{k}\right)\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

ถ้า $n \to \infty$

$$\frac{n!}{(n-k)!} \longrightarrow n^{k}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \longrightarrow 1$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \longrightarrow e^{\lambda}$$

$$\therefore \quad P\{x = k\} = \frac{\lambda^{k} e^{-\lambda}}{k!} \qquad k = o, 1, 2 \ldots$$

นั่นคือ ทุกครั้งที่ n มีค่ามาก และ p มีค่าน้อย เราอาจใช้การแจกแจงปัวซองประเมินค่าของการแจกแจงทวินามได้

---

[12] Hamdy, Atha, Operations research an Introduction, (New York, MaCmillan Publishing Co, Inc.,1971) p. 482.

2.3 การแจกแจงเอ็กโพเนนเชียล (Exponential Distribution)

การแจกแจงเอ็กโพเนนเชียล เป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่อง (Continuous Distribution) ที่มีความสัมพันธ์อย่างใกล้ชิดการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Distribution) ที่กล่าวมาแล้วคือ การแจกแจงปัวซอง ทั้งการแจกแจงปัวซองและการแจกแจงเอ็กโพเนนเชียล ใช้กันอย่างมากในการวิจัยทางปฏิบัติ (Operation research) โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีแถวรอคอย[13] (Queueing Theory) การแจกแจงทั้ง 2 นี้ มีความสัมพันธ์กันในทางประโยชน์ที่ว่า ถ้าเหตุการณ์หมายถึง การมาหรือการมาของรับบริการเป็นเหตุการณ์ที่มีความน่าจะเป็นเป็นไปตามกฎของการแจกแจงปัวซองแล้ว การแจกแจงแบบเอ็กโพเนนเชียลก็สามารถที่จะใช้กำหนดการแจกแจงที่น่าจะเป็นของเวลาที่ผ่านไประหว่างเหตุการณ์เหล่านั้น เช่น ถ้าลูกค้ามาขอรับบริการที่ธนาคารในลักษณะที่มีการแจกแจงเป็นแบบปัวซองแล้ว ก็จะใช้การแจกแจงเอ็กโพเนนเชียล . กำหนดการแจกแจงที่น่าจะเป็น (Probability Distribution) ของเวลาระหว่างการมารอรับบริการเหล่านั้น เวลาที่ถูกใช้ไปในการให้บริการเราเรียกว่า เวลาบริการ[14] (Service Time)

การแจกแจงเอ็กโพเนนเชียล เป็นลักษณะของฟังชั่นแบบต่อเนื่อง (Continuous Function) ซึ่งมีพารามิเตอร์ (Parameter) เป็นแลมด้า (Lambda คือ λ) เหมือนกับการแจกแจงปัวซองเช่น สมมติค่า $\lambda = 3.0$ อาจหมายความว่า เหตุการณ์ที่เกี่ยวกับการรับบริการได้เสร็จสมบูรณ์โดยมีอัตราความเร็วเฉลี่ย 3.0 ต่อนาที หรือถ้ามีผู้ใช้โทรศัพท์โดยเฉลี่ย 20 คน ต่อชั่วโมงแล้ว จะหมายถึง ค่าเฉลี่ยของจำนวนผู้มาขอรับ

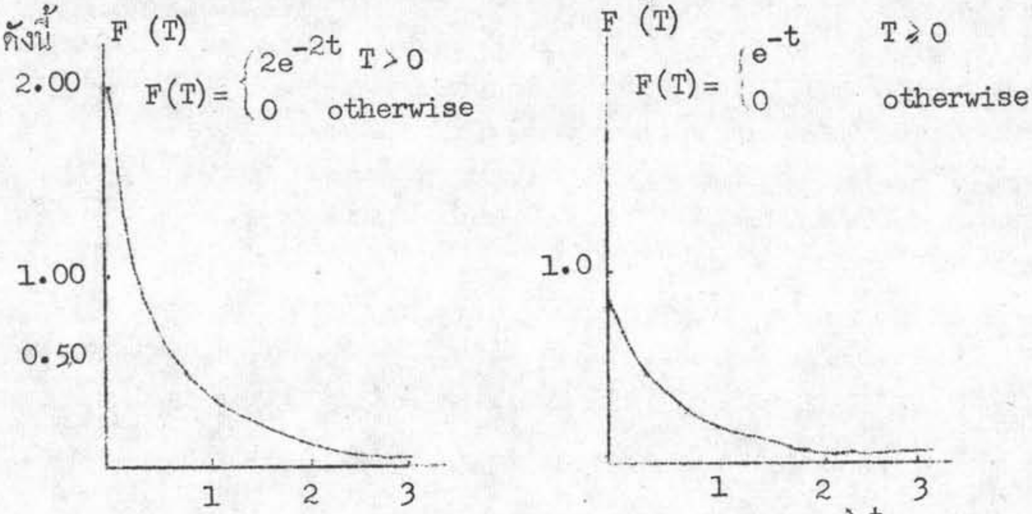
---

[13] Donald L. Harnett, Introduction to Statistical methods, Addison-Wesley Publishing Company, Second Edition) p. 175.

[14] Loc. cit.

บริการในการใช้โทรศัพท์นั้นคือ $\lambda = 20$ ต่อชั่วโมง หรือ $\lambda = \frac{1}{3}$ ต่อนาที หรือ λ ก็คือ อัตราค่าเฉลี่ย (Mean rate) ของเหตุการณ์นั้นเอง

สมมุติฐานหลักที่จำเป็นอันหนึ่งที่ใช้สำหรับการนำเอาการแจกแจงเอ็กโพเนนเชียลมาใช้ให้เป็นประโยชน์แก่การบริการมากที่สุดคือ เวลาระหว่างการมาถึง(Arrivals) หรือ λ คือ อัตราการมาถึงหรือเวลาที่ให้การบริการเสร็จสิ้นแล้ว สมมติว่าตัวแปรเชิงสุ่ม (Random Variable) ถ้าใช้สัญญาลักษณ์ว่า T ค่า T นี้จะแทนเวลาทั้งหมดที่ใช้ในระหว่างการบริการหรือการมาถึง ถ้าค่า T มากขึ้น ๆ ค่าของ f(T) สำหรับการแจกแจงเอ็กโพเนนเชียลจะเล็กลงเล็กลง [15] ซึ่งจะมีลักษณะตามรูปกราฟของการแจกแจงเอ็กโพเนนเชียล ดังนี้



The exponential distribution $F(T) = e^{-\lambda t}$

รูปที่ 2.2 รูปแสดงการแจกแจงเอ็กโพเนนเชียล

จากรูปจะปรากฏว่ายิ่ง F(T) เข้าใกล้ 0 ถ้า T เข้าใกล้ค่าอนันต์ (Infinity)

---

[15] Donald L. Harnett, Introduction to Statistical methods, (Addison-wesley Publishing Conpany, Second Edition) p. 176.

ดังนั้นถ้าค่าอื่น ๆ เป็นศูนย์หมดมีเพียงแต่ค่า T ที่ใหญ่กว่าหรือเท่ากับศูนย์ และเมื่อพิจารณาถึง λ ที่มีค่ามากกว่า 0 จะได้ว่าฟังค์ชั่นที่ตัดเส้นแนวตั้งตามรูปที่แสดงการแจกแจงเอ็กโพเนนเชียรจะมีค่าเท่ากับ λ นั่นคือ

$$f(0) = \lambda$$

จากลักษณะนี้ทำให้ได้รูปฟังค์ชั่นของการแจกแจงเอ็กโพเนนเชียล[16] เป็น

$$f(T) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda T} & \text{เมื่อ } 0 \leq T \leq \infty,\ \lambda > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

โดยมีค่ามัชฌิมเลขคณิต (Mean) และค่าความแปรปรวน (Variance) เป็น

ค่ามัชฌิมเลขคณิตของการแจกแจงเอ็กโพเนนเชียล เป็น

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

ค่าความแปรปรวนของการแจกแจงเอ็กโพเนนเชียล เป็น

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

การแจกแจงของ Inter-Arrival Time[17]

Inter-Arrival Time หมายถึง ช่วงเวลาระหว่างความสำเร็จในการมาถึง 2 ค่า โดยให้การมาถึงมีการแจกแจงเป็นปัวซอง เราจะได้ว่า Inter-Arrival Time เป็นดังนี้

---

[16] Donald L. Harnett, Introduction to Statistical Methods, (Second Edition, Addison-Wesley publishing Company, p. 176.

ถ้าให้ $f(t)$ หรือ $t > o$ = Probability Density function ของ Inter-Arrival Time

$F(t)$ = Cummulative Density function ของ Inter-Arrival Time

ดังนั้น $F(t) = \int_{o}^{t} f(t)\, dt$

ถ้าไม่มีการมาระหว่างช่วง o ถึง t จะถือว่ามี Inter-Arrival Time ใหญ่กว่า t นั่นคือ $P_o(t) = \int_{t}^{\infty} f(t)\, dt$

$$= 1 - \int_{o}^{t} f(t)\, dt$$

$$= 1 - F(t)$$

เนื่องจาก $P_o(t) = e^{-\lambda t}$

ดังนั้น $e^{-\lambda t} = 1 - F(t)$

หรือ $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

เมื่อเรา Differentiate เทียบกับ t

จะได้ $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad t > o$

$$= o \qquad t \ngtr o$$

ถ้าการมาขอรับบริการในแต่ละช่วงของ Inter Arrival Time มีลักษณะเป็นเอ็กซโพเนนเชียลแล้ว เราจะสามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการ[18]

---

[17] Hamdy A. Taha, Operations research an introduction, (Macmillan publishing Co. Inc. New York) p. 512.

[18] Ibid. p. 509.

$$P_o(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

และจากทฤษฎีของ Pure Birth Process[19] จะได้

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad n = o, 1, 2 \ldots\ldots$$

ซึ่งเป็นการแจกแจงแบบปัวซอง

เส้นโค้งของการเรียนรู้
(Learning Curve)

ปรากฏการณ์ของการเรียนรู้ต่าง ๆ สามารถอธิบายและชี้ให้เห็นได้ด้วยแนวความคิดของการเรียนจะขึ้นกับเงื่อนไขที่จะทำให้เกิดการเรียนรู้และเงื่อนไขที่ได้ตั้งไว้ก่อนที่จะเกิดการเรียนรู้ การแสดงให้เห็นถึงลักษณะการเรียนรู้ที่ง่ายและสะดวกวิธีหนึ่ง คือการใช้เส้นโค้งของการเรียนรู้

เส้นโค้งของการเรียนรู้[20] (Learning Curve) คือ วิถีทางที่ใช้แทนขบวนการเรียนรู้ ซึ่งโดยทั่วไปจะแทนผลรวมของเงื่อนไขต่าง ๆ ที่จะทำให้เกิดทักษะในการเรียนรู้แต่ไม่แสดงให้รู้ว่าได้รับทักษะเหล่านั้นมาได้อย่างไร นอกจากนั้นเส้นโค้งของการเรียนรู้ยังใช้เป็นเครื่องกำหนดขอบเขตของการเรียนรู้บางอย่างได้ เพื่อที่จะเตรียมเอาไว้ใช้สำหรับวัดการเรียนรู้ที่ได้จากเหตุการณ์ต่าง ๆ เป็นจำนวนมาก เส้นโค้งของการ

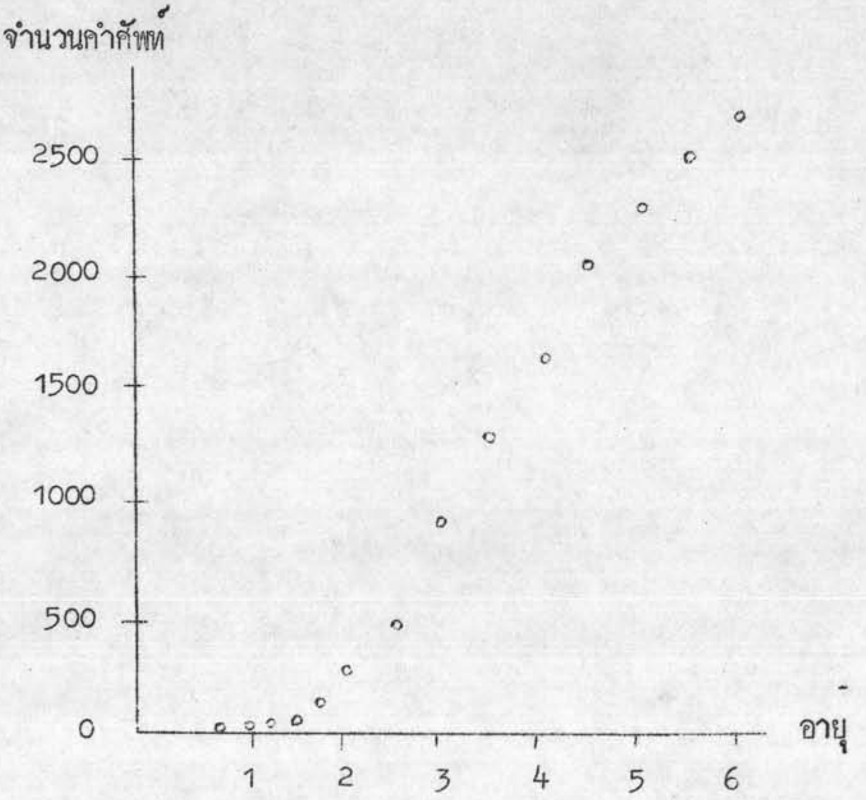
---

[19] Hamdy A. Taha, Operation research an introduction, (Macmillan publishing Co. Inc. New York) p. 512.

[20] Robert M.W. Travers, essentials of learning an overview for students of education (2 nd ed. New York: The Macmillan Company, 1967) p. 298.

เรียนรู้ที่ได้จากเหตุการณ์ต่าง ๆ เป็นจำนวนมาก เส้นโค้งของการเรียนรู้จะแทนตำแหน่งที่คนได้เริ่มต้นเรียน และตำแหน่งที่เรียนเสร็จภายในช่วงเวลาที่กำหนดนั้น ๆ แต่จะไม่แสดงช่วงเวลาที่การเรียนรู้สามารถเพิ่มขึ้นได้อย่างรวดเร็วกว่าช่วงเวลาอื่น และความจริงแล้วเส้นโค้งของการเรียนรู้ก็ไม่สามารถจะแทนการเรียนรู้ได้ทั้งหมด แต่แทนได้เพียงขอบเขตที่เป็นรูปร่างของการเรียนและลักษณะของฟังค์ชั่นของการเรียนรู้แต่ละแบบที่ได้ผลออกมาแตกต่างกัน

สมมุติว่ามีนักเรียนเรียนคำศัพท์ภาษาฝรั่งเศส และทุก ๆ วันสุดสัปดาห์จะมีการทดสอบ การเรียนรู้คำศัพท์ของนักเรียนเหล่านี้โดยใช้แบบทดสอบแบบปรนัย ซึ่งแบบทดสอบนี้จะมีความยากโดยประกอบด้วยคำศัพท์ 100 คำที่จะให้นักเรียนแปล แล้วสามารถมีผลเท่ากัน วัดความรู้คำศัพท์ภาษาฝรั่งเศสถึง 5000 คำ ดังนั้นคะแนนของนักเรียนขึ้นอยู่กับการแปลคำศัพท์ถูกของเขา และเราสามารถจะแสดงถึงการเรียนรู้คำศัพท์ของเขาที่เพิ่มขึ้นในแต่ละสัปดาห์ได้โดยใช้การกำหนดด้วยรูปกราฟที่เรียกว่าเส้นโค้งของการเรียนรู้ เส้นโค้งของการเรียนรู้นี้จะเป็นการแทนถึงการเรียนรู้คำศัพท์ภาษาฝรั่งเศสที่เพิ่มขึ้นโดยมันจะแทนเพียงฟังค์ชั่นเดียวจากจำนวนฟังค์ชั่นหลาย ๆ อันที่เกิดขึ้นระหว่างการเรียนดังนั้น เส้นโค้งนี้จะใช้บันทึกขอบเขตของรูปร่างของการเรียนรู้ แต่ไม่สามารถแทนการเรียนรู้ คำศัพท์ได้ทุกคำและไม่สามารถแสดงได้ว่าการเรียนรู้คำศัพท์ได้ดีขึ้นนั้นดีขึ้นได้อย่างไร นอกจากนั้นมันยังไม่แสดงถึงลำดับขั้นของการเรียนรู้คำศัพท์ที่สามารถเรียนได้ดีที่สุดว่าเป็นอย่างไร มันจะไม่บอกว่าจะมีคำศัพท์อีกเท่าไรที่ยังเหลืออยู่ภายในเดือน และคำศัพท์ใดที่สามารถหาได้เร็วที่สุด ผลของการแสดงด้วยกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 2.3 ภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุกับจำนวนศัพท์

กราฟจะแทนการได้รับคำศัพท์ตั้งแต่เริ่มได้รับการเรียน โดยเป็นค่าประมาณรูปตัว S

หรืออย่างการพิมพ์ดีดของนักเรียนพิมพ์ดีด จะมีการทดสอบภายหลังการเรียนทุกครั้ง การฝึกฝนและการบันทึกผลซึ่งโดยทั่วไปจะเป็นคำตอบที่ก็จะได้กราฟในลักษณะรูปตัว S เช่นกัน หรือการแสดงจำนวนสะสมของคะแนนที่นักกีฬาแต่ละคนทำไว้ในระหว่างฤดูร้อน ครูก็สามารถแสดงด้วยกราฟตัว S เช่นกัน

ดังนั้น วิธีโดยทั่ว ๆ ไปที่ใช้แสดงขบวนการเรียนรู้ จะใช้การกำหนดคะแนนลงบนกระดาษกราฟ ซึ่งจะเป็นค่าประมาณที่เป็นรูปตัว S

ต่อมานักจิตวิทยาก็ได้อธิบายการใช้เส้นโค้งของการเรียนรู้ที่ใช้แทนนั้น ที่ว่าควรจะวาดได้ดังรูปที่ 2.4 ซึ่งจะเป็นลักษณะของผลของการเรียนที่มุ่งการฝึกทักษะที่ซับซ้อน โดยจะได้ว่าในตอนแรกจะเรียนรู้ได้เร็วต่อมาอัตราการเรียนรู้จะมีความเร็วน้อยลงน้อยลง

ในปี 1956 Spence[21] ได้นำข้อมูลที่น่าสนใจบางอย่างมารวมเข้ากับรูปร่างของของการเรียนรู้ภายหลังจากมีการถกเถียงกันอย่างมาก เขาก็พบว่าการแบ่งชั้นของเงื่อนไขของการเรียนรู้จะทำให้ได้เส้นโค้งของการเรียนรู้ออกมามีรูปร่างคล้ายตัว S และเขายังพยายามหาข้อมูลมาสนับสนุนลักษณะรูปร่างของเส้นโค้งของการเรียนรู้ที่จะใช้เป็นเครื่องมือของการเรียนรู้ที่ฟังค์ชั่นของการเรียนรู้นั้นสามารถวัดออกมาในรูปของความถี่ของการตอบสนองได้ ว่าเส้นโค้งนั้นควรมีลักษณะเป็นรูปตัว S ด้วย อีกอันหนึ่งที่น่าสนใจจากการค้นพบของเขาคือ นิสัยใหม่ ๆ หรือทักษะที่ได้รับจากการเรียนในตอนเริ่มต้น ตามลักษณะของรูปตัว S เมื่อมีความถี่ของการตอบสนองเข้าไปเกี่ยวข้องว่าเมื่อนักเรียนเรียนได้มากขึ้น ความสามารถของเขาจะเคลื่อนที่ช้าลง[22]

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าลักษณะของเส้นโค้งของการเรียนรู้ที่ตรงตามสถานะของการเรียนในโรงเรียนอันหนึ่งคือ ลักษณะที่สามารถแทนได้ด้วยส่วนของเส้นโค้งรูปตัว S ที่ตัดมาเฉพาะทางด้านขวาของรูปเท่านั้น ส่วนโค้งอันนี้จะมีลักษณะตรงกันอย่างดีทีเดียวกับเส้นโค้งที่เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและเมื่อมันแสดงถึงวิธีดำเนินการเรียนที่มีความเร่งไปในทางลบ และเส้นโค้งของการเรียนรู้บางอันจะแสดงช่วงของการเรียนในช่วงเวลาซึ่งไม่สามารถบันทึกการเรียนได้เช่น โค้งในการศึกษาเรื่อง Morse Code โดย Bryan และ Harter (1897) ส่วนของกราฟที่เกือบจะเป็นเส้นตรงซึ่งไม่สามารถเห็นความก้าวหน้าด้วยตาเราเรียกว่าที่ราบ (Plateans) และที่ราบนี้จะกล่าวได้ว่าคือเหตุการณ์ของการเรียนที่แผ่ไปคลุมช่วงเวลาที่เราไม่สามารถจะทำนายได้ในช่วงเวลานั้น ๆ แต่ก็ยังเป็นที่ถกเถียงกันอยู่ที่ราบปรากฏนั้น เป็นแบบของทักษะของการเรียนที่สมบูรณ์ ซึ่งจะแสดงขอบเขต

---

[21] Robert M.W. Travers, <u>Essentials of learning an overview for student of education</u> (2 nd ed. New York : The Macmillan Company, 1967) p. 300.

[22] Ibid., p. 301.

สุดท้ายของการเรียนหรือจะเป็นเพียงขอบเขตชั่วคราวของความสามารถที่ไม่สามารถจะทำให้ก้าวหน้าได้ไกลกว่านี้จนกว่าเขาจะได้รับงานใหม่

ในเรื่องของ Morse Code เส้นโค้งของการเรียนรู้ในส่วนที่เกือบเป็นเส้นตรงนั้นจะเป็นการแทนเวลาในการเรียนเมื่อผู้เรียนได้ถึงขอบเขตที่เขาสามารถทำงานได้อย่างประสบความสำเร็จ ส่วนเรื่องอื่น ๆ จะหมายความว่าผู้เรียนจะได้รับส่วนประกอบของทักษะอย่างแน่นอนและรวมทั้งส่วนประกอบที่เขาเรียนด้วย เช่น การเรียนขับรถแข่งแม้ว่าเขาจะมีความสามารถในการขับรถและใช้เกียร์เป็นอย่างดีแล้วก็ตาม เขาก็ยังต้องการสอนให้รู้จักกับลำดับขั้นของการเรียนต่าง ๆ ซึ่งต้องอาศัยจากประสพการณ์ของครูเป็นสำคัญ

สิ่งที่น่าสนใจอีกประการหนึ่งของเส้นโค้งของการเรียนรู้คือ เส้นโค้งของการเรียนรู้จะมีระดับเอียงเบนออกภายหลังจากการได้รับการฝึกหัดแบบต่อเนื่องในช่วงเวลาระดับที่เบนออกไปนี้จะถือขอบเขตโดยธรรมชาติของการเรียนรู้แต่ก็ไม่ใช่ขอบเขตของการเรียนรู้ที่สมบูรณ์ แต่จะเป็นขอบเขตของการเรียนรู้เมื่อการเรียนรู้นั้นได้ถูกกำหนดขึ้นด้วยการวางเงื่อนที่ถูกเปลี่ยนแปลงได้

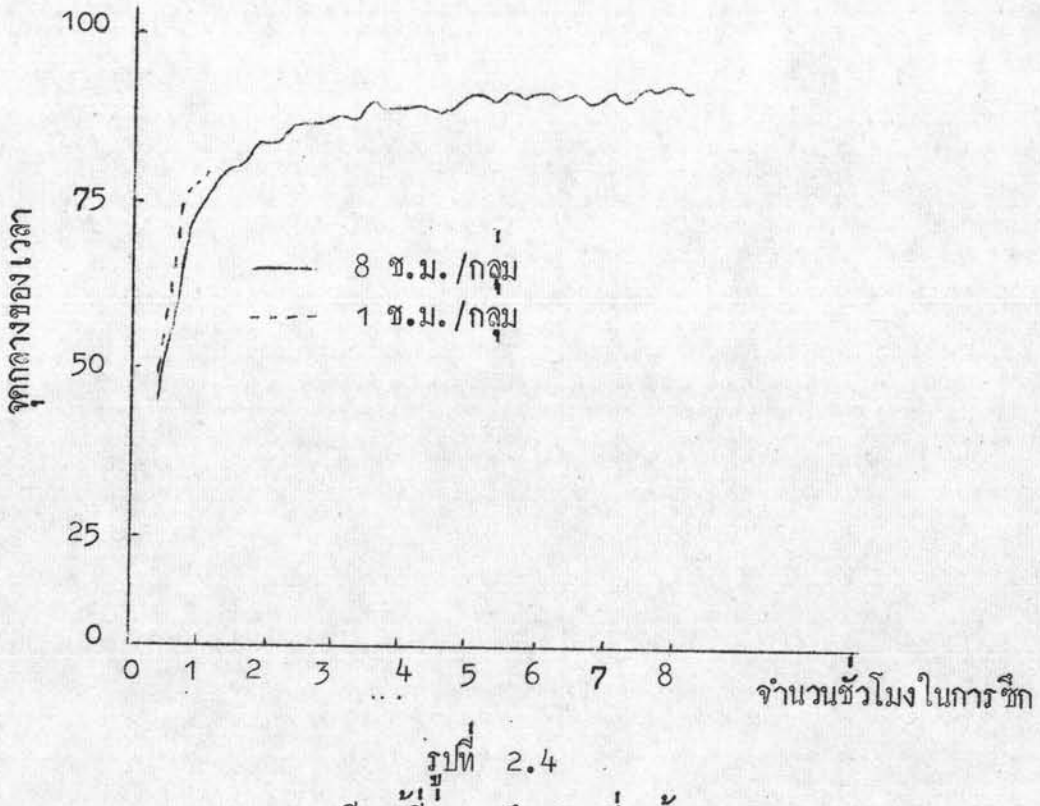
ดังนั้นจากที่กล่าวมาจึงเห็นได้ว่าประโยชน์ที่สำคัญของเส้นโค้งของการเรียนรู้[23] คือ การนำไปทำนายความก้าวหน้าของแนวความคิดของการเรียนในแต่ละอัน โดยเส้นโค้งของการเรียนรู้แต่ละอันก็จะสามารถทำนายแนวความคิดของการเรียนแต่ละอันได้อย่างแน่นอน และสามารถรู้ขอบเขตของการเรียนอย่างละเอียดแต่ละตลอดจนอัตราที่เขาคาดหวังที่จะใช้ในการเรียนแต่ละอัน ดังนั้นถ้าครูมีเครื่องมือประกอบกับข้อมูลที่ถูกต้องแล้ว

---

[23] Robert M.W. Travers, <u>Essentials of learning an overview for Student of Education</u> (2 nd. ed. New York; The Macmilian Company, 1967) p. 306.

มันจะเป็นสิ่งที่ช่วยเขาอย่างมากในการวางแผนการในการเรียนให้กับเด็กแต่ละคนและสามารถแก้ไขตามความแตกต่างของเด็กแต่ละคนได้ ซึ่งในปัจจุบันนี้จะเป็นเพียงการทำนายหยาบ ๆ ที่เป็นไปได้เกี่ยวกับแนวความคิดของการเรียนในอนาคต ซึ่งยังมีความผิดพลาดเป็นจำนวนมากในการทำแผนโปรแกรมการเรียนของแต่ละคน

และจุดที่น่าสนใจอื่น ๆ เกี่ยวกับเส้นโค้งของการเรียนคือ ขอบเขตของการเรียนอย่างหยาบจะหมายถึงการที่ครูใช้แบบทดสอบความถนัดทดสอบเด็กมาช่วยในการให้คำแนะนำและทำนาย โดยแบบทดสอบความถนัดนี้จะเป็นวิธีดำเนินการบางอย่างที่จะเอามาแสดงความคาดหวังของนักเรียนว่าจะไปได้ไกลมากน้อยเพียงไร นอกจากนั้นครูยังรู้ดีว่าชนิดของโปรแกรมการเรียนและการสอนจะมีผลมากกับการเรียนของนักเรียน ซึ่งอาจจะทำให้ไปได้ไกลกว่าแบบทดสอบที่ได้ทำนายไว้ แต่ถึงกระนั้นมันก็ยังสามารถทำนายความสำเร็จในอนาคตและชนิดของระดับของนักเรียนที่จะสำเร็จภายใต้ชนิดของเงื่อนไขของการเรียนที่เป็นอยู่ในปัจจุบัน



รูปที่ 2.4

แสดงผลการเรียนรู้ที่มุ่งการฝึกทักษะที่ซับซ้อน

การหาเส้นโค้งของการเรียนรู้ในทางคณิตศาสตร์

ในเวลา 10 ปีที่ผ่านมาความสนใจที่สำคัญคือ การพยายามหาที่มาของเส้นโค้งของการเรียนรู้โดยใช้วิธีการ เริ่มตั้งข้อสันนิษฐานที่ตั้งขึ้นมาเกี่ยวกับการดำเนินงานของการเรียน เช่น สมมุติว่าตั้งข้อสันนิษฐานไว้ว่า "ผลของการฝึกส่วนใหญ่จะเท่ากับการเพิ่มลักษณะการแก้การตอบสนอง" ดังนั้น การเรียนรู้ก็จะสามารถแทนได้ด้วยเส้นตรงบนกราฟที่มีความเกี่ยวพันกันระหว่างร้อยละของการแก้การตอบสนองกับจำนวนเวลาในการฝึก ซึ่งข้อสันนิษฐานอาจจะใช้ไม่ได้หมด เพราะผลของเส้นโค้งของการเรียนรู้อาจจะไม่ตรงกับผลจากข้อมูลจริง ๆ ที่เป็นอยู่ ปัญหาจึงเป็นว่าเราจะตั้งข้อสมมติฐานอย่างไรจึงจะทำให้เส้นโค้งนั้นได้ผลออกมาตรงตามผลของการวิเคราะห์ข้อมูลจริง ๆ ประกอบกับการรู้ว่ารูปร่างที่แน่นอนของเส้นโค้งของการเรียนรู้สิ่งหนึ่งจะเกี่ยวข้องกับจำนวนการตอบสนองจะเพิ่มตามจำนวนของแรงเสริม (Reinforce) ในการปฏิบัติการทดลอง ดังนั้น จึงมีผู้ตั้งทฤษฎีทางจิตวิทยาขึ้นมาอย่างมากมาย เพื่อจะเอามาหารูปร่างของเส้นโค้งของการเรียนรู้ในทางคณิตศาสตร์ เราจะกล่าวถึงความน่าจะเป็นพื้นฐานที่เป็นไปได้ของเส้นโค้งของการเรียนรู้โดยพิจารณาจากสัดส่วน 3 อัน[24] คือ

1. ผลที่สะท้อนกลับโดยตรงจะเพิ่มขึ้นเท่ากับจำนวนตัวเลขของแรงเสริมที่เพิ่มขึ้นในการทดลอง การกำหนดเงื่อนไขขึ้นอย่างน้อยต้องสมมติว่าผลสะท้อนกลับโดยตรงจะต้องไม่เป็น 0 หรือผลของการตอบสนองจะไม่เกิดขึ้นนั่นเอง ดังนั้น เราสามารถจะให้แรงเสริมแก่มันและตั้งความน่าจะเป็นของมันขึ้นได้

---

[24]James Deese Andstewart H. <u>The Psychology of Learning</u> (3 rd, MCgraw-Hill Kogakusha Ltd. 1967) pp. 32-33.

2. มีขอบเขตด้านบนบางอันที่เกี่ยวกับผลสะท้อน โดยตรงซึ่งไม่สามารถจะเพิ่มขึ้นได้อีก ขอบเขตของนี้จะเป็นแอสซิมโทต (Asymptote) ของผลสะท้อนของมันนั่นเอง ทำให้สามารถคำนวณได้จากข้อมูลบางอย่าง เช่น ลักษณะเฉพาะบางอันของผลสะท้อนนี้จะถูกศึกษาและปฏิบัติตามเงื่อนไขของแรงเสริม แรงกระตุ้น และสิ่งที่คล้าย ๆ กันนี้ที่เราเก็บไว้ดังนั้นขอบเขตด้านบนของผลสะท้อนนี้จะขึ้นกับว่าเราเก็บได้อย่างไรถ้าเก็บไว้คงที่ขอบเขตด้านบนของผลสะท้อนก็จะคงที่ด้วย

3. ประสบการณ์ที่ได้จากการตอบสนองหลาย ๆ อย่างในสถานการณ์ของการเรียนหลาย ๆ อย่างจะแสดงว่าการเพิ่มขึ้นอย่างมากของการตอบสนองที่สนับสนุนเหตุการในการเริ่มต้นของการเรียน จำนวนของการปฏิบัติการทดลองที่เพิ่มขึ้น การเพิ่มขึ้นที่จะเล็กละน้อยของการตอบสนองจะสนับสนุนการเพิ่มขึ้นของผลรวมทั้งหมดของการตอบสนองที่น่าสนใจ

จากสัดส่วนทั้ง 3 จะหารูปคณิตศาสตร์ของเส้นโค้งของการเรียนรู้โดยให้

R = สิ่งสนับสนุน

R_n = สิ่งตอบสนองที่ได้ ภายหลังจากการให้การฝึกในห้องทดลอง n ครั้ง

เราต้องการสมการที่จะบอกว่าสิ่งที่สนับสนุนการตอบสนองนั้นจะเพิ่มขึ้นเท่าไรจากการปฏิบัติการทดลองอันหนึ่งกับอันต่อ ๆ ไป โดยจะดูจากการทดลอง (n) กับการทดลอง $n + 1$ สิ่งที่ต้องการหาคือ ความสัมพันธ์ระหว่าง R_n กับ $R(n+1)$ จากกฎข้อแรกเราจะได้ว่า $R_{(n+1)}$ จะใหญ่กว่า R_n ดังนั้น

$$R_{(n+1)} = R_n + \Delta R_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

โดยมี ΔR_n เป็นค่าที่เพิ่มขึ้น

จากกฎข้อ 2 เราได้ว่าการตอบสนองจะเข้าใกล้ขอบเขตบางอันซึ่งจะเป็นค่าคงที่เป็นไปตามกลุ่มการทดลองเราจะให้เป็นค่า M

จากกฎข้อ 3 เราได้ว่า จำนวนของการทดลองที่เพิ่มขึ้น จะทำให้การตอบสนองเพิ่มขึ้นต่อหน่วยการทดลองลดลงนั่นคือ R_n ที่ใกล้ที่สุดคือขอบเขตของ M และ R_n เล็ก ๆ ที่เกิดขึ้น เราสามารถทำตามเงื่อนไขนี้ได้เป็นข้อสันนิฐานว่าขนาดของ ΔR_n ซึ่งถูกสร้าง โดยการปฏิบัติการทดลองให้เป็นฟังค์ชั่นที่คงที่ของ K ผลรวมทั้งหมดของการตอบสนองที่ยังคงได้รับจนกระทั่งการเรียนเสร็จสิ้นสมบูรณ์ที่เริ่มจากการทดลอง (n + 1) ผลรวมทั้งหมดของการตอบสนองที่ยังเหลืออยู่ สามารถหาได้จากการลบของผลรวมของการตอบสนองทั้งหมดที่ได้รับ (R_n) กับผลรวมของการตอบสนองที่สามารถรับไว้ได้ (M) คือ อยู่ในรูป $M-R_n$ ดังนั้นการเพิ่มขึ้นของการตอบสนองในการปฏิบัติการทดลอง (n+1) คือ

$$\Delta R_n = K(M - R_n) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 2$$

ถ้าเอา 2 แทนใน 1 เราสามารถหาผลรวมของจำนวนทั้งหมดของการตอบสนองจะเท่ากับ

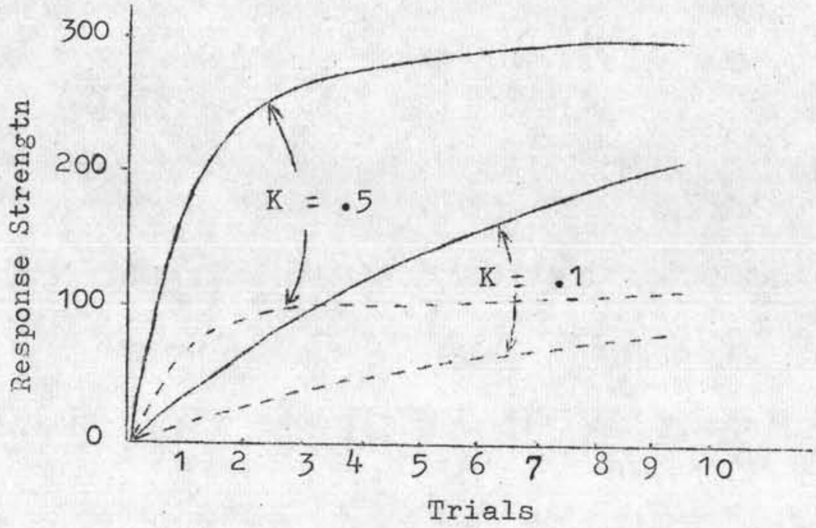
$$n + 1 = R_n + K(M - R_n)$$

ถ้าเพิ่มการปฏิบัติการทดลองขึ้นก็จะได้ผลรวมของการตอบสนองเป็น

$$R_{(n+2)} = R_{(n+1)} + K(M - R_{(n+1)})$$

สมการนี้เมื่อการปฏิบัติการทดลองเป็นจำนวนมากขึ้นเราก็จะยังใช้อยู่ ซึ่งผลจะได้ดังรูปข้างล่างนี้ ที่แสดงถึงการหาเส้นโค้งของการเรียนรู้ 4 เส้น โดยใช้วิธีดังข้างบน 2 เส้น โดยได้มาจากข้อสันนิฐานที่ว่าขอบเขตของการตอบสนองเป็น 100 ส่วน ค่า k = .10 และ K = .50 ส่วนอีก 2 เส้นจะมาจากค่า K ที่เหมือนกัน แต่เมื่อเราให้ค่า M = 300 มันจะเป็นการง่ายที่จะดูจากรูปว่าจำนวนการตอบสนองจะเพิ่มขึ้น

อย่างมากในการปฏิบัติการทดลองตอนต้น ๆ และจะเพิ่มขึ้นน้อยลงเมื่อการทดลองเพิ่มมาก ขึ้นดังนั้นเมื่อค่า K = .50 จะได้ค่าการตอบสนองเข้าใกล้ขอบเขตมากกว่าและเพิ่มขึ้นเร็วกว่าเมื่อใช้ K = .10



รูปที่ 2.5 แสดงลักษณะเส้นโค้งของการเรียนรู้

เส้นโค้งของการเรียนรู้ที่กล่าวนี้จะตั้งอยู่บนข้อสันนิฐานเบื้องต้นของทฤษฎีทางจิตวิทยา ดังนั้นบางทีข้อสันนิฐานก็มีความละเอียดถูกต้องในการนำไปสู่ความจริงในการทดลอง และในการทดลองครั้งแรกอาจนำบางสิ่งบางอย่างมาเกี่ยวข้องกับช่วงเวลาที่สอดคล้องกัน จึงทำให้การเพิ่มขึ้นอย่างมากของการตอบสนองจะเกิดขึ้นหลังจากได้ทำการทดลองไปแล้ว 2-3 ครั้ง ซึ่งผลอันนี้จึงทำให้เส้นโค้งของการเรียนรู้มีรูปร่างเป็น S - Shaped และจะใช้แนะนำเมื่อพฤติกรรมนั้นถูกวัดเกี่ยวกับตัวเลือกระหว่าง 1 อย่างหรือมากกว่าของการตอบสนอง

ในที่นี้พื้นฐานของสมการจะหมายถึงการพัฒนาที่แสดงไว้ในรูปของความน่าจะเป็นของการตอบสนองอันหนึ่งที่สามารถกับอันอื่น ๆ ได้และการคงทนของการตอบสนองจะแสดงอยู่ในรูปของโอกาสของความน่าจะเป็นนั้น ๆ

เราจะใช้ผลของเส้นโค้งของการเรียนรู้ ช่วยในการแยกกลุ่มที่ได้รับการเรียนอย่างสมบูรณ์ และกลุ่มที่ไม่ได้เรียนได้[25] ซึ่งจะช่วยแยกวิธีดำเนินงานที่เห็นได้แตกต่างกันอย่างแน่นอน

ถ้าจะพิจารณาถึงผลของเส้นโค้งของการเรียนรู้เมื่อเราแสดงด้วยรูปกราฟนั้น บางอันก็จะวัดการปฏิบัติงานในรูปของฟังค์ชั่นของเวลาหรือบางอันก็วัดการปฏิบัติการทดลอง โดยกราฟที่แสดงเหล่านี้ก็จะเป็นเส้นโค้งเรียบสม่ำเสมอ ซึ่งมันจะแสดงถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างการปฏิบัติและเวลาในการปฏิบัติ ดังนั้นจึงไม่แปลกในการที่จะวิเคราะห์วิธีดำเนินการของการเรียนด้วยคณิตศาสตร์แล้วจะต้องหาสมการบางอันที่จะอธิบายถึงเส้นโค้งของการเรียนรู้ (Learning Curve)

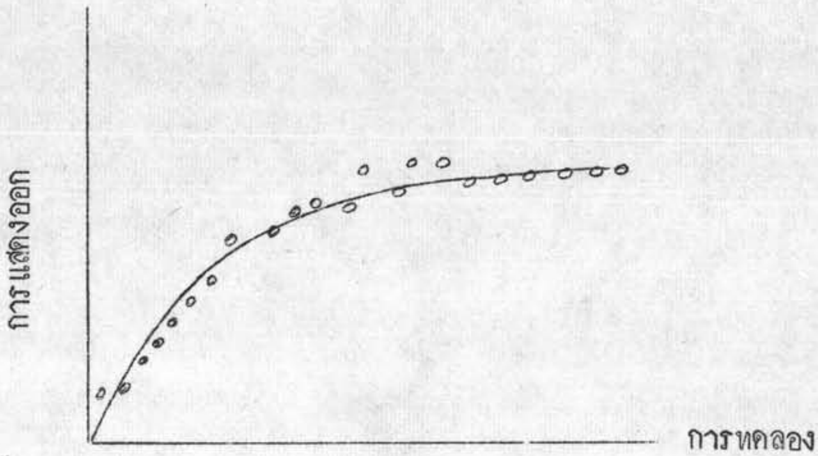
มีบางเวลาเหมือนกันที่เส้นโค้งของการเรียนรู้ไม่มีรูปร่างเป็นไปตามแบบแผนที่ควรจะเป็นดังนั้น จึงเป็นธรรมดาที่ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ในการเรียนเป็นจำนวนมากที่จะได้มาจากความคิดในแง่ของความน่าจะเป็นและทฤษฎีความน่าจะเป็นหลายทฤษฎีสันนิฐานว่าวิธีดำเนินการที่แท้จริงจะเป็นเรื่องของความเป็นอิสระหรือที่เกี่ยวกับสถิติ ถ้าทำการสังเกตหลาย ๆ ครั้งอาจเป็นไปได้ที่จะพบปัญหาของอิทธิพลของความเป็นอิสระที่เกิดขึ้น แต่อย่างไรก็ตามผลเฉลี่ย วิธีดำเนินการที่ได้ก็จะเรียบสม่ำเสมอ จากความจริงอันนี้ จึงได้ว่าเส้นโค้งของการเรียนรู้แต่ละอันจะไม่เรียบสม่ำเสมอ แต่ค่าเฉลี่ยของเส้นโค้งสำหรับจำนวนปัญหานั้นก็จะยังเรียบและสม่ำเสมอ

จากที่กล่าวมาเส้นโค้งของการเรียนรู้จึงสามารถอธิบายได้ด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ 2 ทาง คือ ทางหนึ่งจะดูได้ง่าย ๆ จากเส้นโค้งและอธิบายว่าเส้นโค้งนั้นสามารถ

---

[25]James Deese and stewart H. Hulse, <u>The Psychology of learning</u> (3 rd. MCgraw-Hill Kogakusha Ltd., 1967) p. 76.

ทำให้เหมาะสมตามทฤษฎีของการปฏิบัติบางทฤษฎีได้ เราจะไม่กล่าวถึงสมการที่ใช้หาค่าของตัวกลาง (Mean) แต่จะใช้บอกความแน่นอนของผลรวมของความเกี่ยวพันระหว่างการปฏิบัติและการฝึกหัดซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีที่ตั้งไว้ดังรูปข้างล่างโดยจุดแต่ละจุดจะแทนสิ่งที่ได้จากการสังเกตที่ได้มาจากการทดลอง ส่วนเส้นดำจะเป็นโค้งที่อธิบายได้โดยใช้สมการ ซึ่งดูจะสอดคล้องกับข้อมูลพอดี



รูปที่ 2.6 แสดงลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างเส้นโค้งของการเรียนรู้ที่ได้จากทฤษฎีกับเส้นโค้งของการเรียนรู้ที่ได้จากการปฏิบัติ

อีกทางหนึ่งของการอธิบายข้อมูลของการเรียนโดยใช้ตัวของสมการทางคณิตศาสตร์มาช่วยเป็นตัวอธิบาย และนับว่ามีผลอย่างมาก เพราะได้มาจากสมการที่ตั้งขึ้นตามข้อสันนิษฐานของวิธีดำเนินการในการเรียนที่ได้มาจากแหล่งต่าง ๆ และทุก ๆ ความถี่ของทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ทั่ว ๆ ไปอาจจะไม่อธิบายเพียงเส้นโค้งของการเรียนรู้แต่อาจอธิบายถึงจำนวนของความจริงอื่น ๆ ที่เกี่ยวกับการเรียนด้วย ซึ่งสมการทางคณิตศาสตร์แบบนี้ได้แก่ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ของ Thurstone[26]

---

[26] James Deese and Stewart H. Hulse, <u>The Psychology of Learning</u> (3 ed. Mcgraw-Hill Kogakusha Ltd, 1967) p. 332.