บทที่ ๒

ทฤษฎีเกี่ยวกับไมโครเวฟ

๒.๑ คำนำ (1)

เนื่องจากไมโครเวฟเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า มีแถบของความถี่เริ่มจากค่าประมาณ ๑๐๙ เฮิทซ์ไปจนถึงค่าความถี่ประมาณ ๑๐๑๒ เฮิทซ์หรือถ้าเป็นความยาวคลื่นจะเริ่มจากค่าประมาณ ๓๐ ม.ม.ลงไปจนถึงความยาวคลื่น ๐.๓ ม.ม. ในแถบความถี่ดังกล่าวยังแบ่งออกเป็นส่วนย่อยๆอีก แต่ละส่วนหรือแถบมีชื่อเรียกเพื่อสะดวกในการใช้งาน เช่นแถบเอ็กซ์มีความถี่อยู่ระหว่าง ๘.๒ จิกะเฮิทซ์ถึง ๑๒.๔ จิกะเฮิทซ์

ในการส่งไมโครเวฟจากตำแหน่งหนึ่งไปสู่อีกตำแหน่งหนึ่ง เพื่อป้องกันการสูญเสียพลังงาน เราจึงนิยมส่งไปตามสายส่ง(TRANSMISSION LINE)ซึ่งทำด้วยโลหะ ที่มักใช้กันมีทองเหลือง ทองแดง อะลูมิเนียม ในบางครั้งผิวในของโลหะจะเคลือบเอาไว้ด้วยเงินหรือทองคำ สายส่งที่ใช้กันทั่วๆไปได้แก่ ท่อนำคลื่น(WAVEGUIDE) ท่อนำคลื่นซึ่งมีภาคตัดขวางเป็นวงกลม ขอเรียกว่าท่อกลม และท่อนำคลื่นซึ่งมีภาคตัดขวางเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ขอเรียกว่าท่อเหลี่ยมซึ่งจะได้อธิบายอย่างละเอียดในตอนต่อไป

ประโยชน์ของไมโครเวฟส่วนมากใช้ในการคมนาคม การคมนาคมที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่งคือการใช้ดาวเทียมเป็นสถานีถ่ายทอดไมโครเวฟ ดาวเทียมดวงแรกที่ใช้ในการนี้ชื่อเทลสตาร์(TELSTAR) ถูกปล่อยขึ้นไปในเดือนกรกฎาคมปี ๑๙๖๒ ในครั้งนั้นชาวยุโรปได้รับการถ่ายทอดรายการโทรทัศน์สดจากสหรัฐอเมริกาเป็นครั้งแรก วิชาดาราศาสตร์ก็ใช้ไมโคร

---

(1) Collin, R.E. 1966, Foundations for Microwave Engineering, New York: McGraw-Hill Book Co., Inc.

เวฟศึกษาดาวฤกษ์ต่างๆตลอดจนปลาสมา(PLASMA) เนื่องจากระบบของโมเลกุลหรืออะตอมหรือนิวเคลียส มีอยู่หลายระบบซึ่งเมื่อถูกกระทำโดยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าแล้ว จะแสดงการเกิดอภินาท การอภินาทต่างๆเหล่านี้เกิดขึ้นในพิกัดของไมโครเวฟ ดังนั้นนักวิทยาศาสตร์จึงได้นำเอาประโยชน์อันนี้มาศึกษาคุณสมบัติต่างๆของวัตถุ

๒.๒ สมการของแมกซ์เวลล์ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่น

เมื่อไม่คิดถึงต้นกำเนิดของสนามแล้ว สมการของแมกซ์เวลล์ในสูญญากาศเขียนได้เป็น

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \qquad (๒.๒.๑)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (๒.๒.๒)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (๒.๒.๓)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (๒.๒.๔)$$

โดยที่

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \qquad (๒.๒.๕)$$

และ

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \qquad (๒.๒.๖)$$

ในสมการบน $\vec{D}$ คือการขจัดทางไฟฟ้า(ELECTRIC DISPLACEMENT) $\vec{E}$ คือสนามไฟฟ้า $\vec{B}$ คือเส้นแรงแม่เหล็กต่อพื้นที่ $\vec{H}$ คือความเข้มของสนามแม่เหล็ก ϵ_0 คือเปอมิตติวิตีของสูญญากาศ มีค่าเป็น ๘.๘๕๔ × ๑๐$^{-๑๒}$ คูลอมบ์/(นิวตัน-เมตร^{๒}) และ μ_0 คือเปอมีอบิลิตีของสูญญากาศ มีค่าเป็น ๔π × ๑๐$^{-๗}$ เฮ็นรี่/เมตร จากสมการของแมกซ์เวลล์ข้างบนและเทคนิคทางคณิตศาสตร์เราจะได้สมการเฮล์มโฮลทซ์(HELMHOLTZ EQUATIONS)คือ

$$\nabla^2 \vec{E} + k_0^2 \vec{E} = 0 \qquad (๒.๒.๗ก)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k_0^2 \vec{H} = 0 \qquad (๒.๒.๗ข)$$

โดยที่

$$k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 2\pi f\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \qquad (๒.๒.๘)$$

ในสมการนี้ f คือความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

ถ้าเรากำหนดให้คลื่นแผ่(PROPAGATE)ออกไปตามทิศทางของแกน$+z$ สนาม$\vec{E}$ และ$\vec{H}$ จะเขียนได้ดังนี้

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_t(x,y,z,t) + \vec{E}_z(x,y,z,t)$$
$$= \vec{e}(x,y)e^{j(\omega t-\beta z)} + \vec{e}_z(x,y)e^{j(\omega t-\beta z)} \qquad (๒.๒.๙ก)$$

$$\vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}_t(x,y,z,t) + \vec{H}_z(x,y,z,t)$$
$$= \vec{h}(x,y)e^{j(\omega t-\beta z)} + \vec{h}_z(x,y)e^{j(\omega t-\beta z)} \qquad (๒.๒.๙ข)$$

ตามสมการตัวห้อย t หมายถึงองค์ประกอบตามขวางและ z หมายถึงองค์ประกอบตามแกนที่คลื่นแผ่ออกไป β คือตัวประกอบของการแผ่(PROPAGATION FACTOR) เพราะว่า

$$\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} = \vec{\nabla}_t + \vec{\nabla}_z \qquad (๒.๒.๑๐)$$

ดังนั้นจากสมการ(๒.๒.๑) (๒.๒.๕) (๒.๒.๙ก) และ (๒.๒.๑๐) เราจะได้

$$(\vec{\nabla}_t + \vec{\nabla}_z)\cdot(\vec{e}\,e^{j(\omega t-\beta z)} + \vec{e}_z e^{j(\omega t-\beta z)}) = 0$$
$$\vec{\nabla}_t\cdot\vec{e}\,e^{j(\omega t-\beta z)} + \vec{\nabla}_t\cdot\vec{e}_z e^{j(\omega t-\beta z)} + \vec{\nabla}_z\cdot\vec{e}\,e^{j(\omega t-\beta z)}$$
$$+ \vec{\nabla}_z\cdot\vec{e}_z e^{j(\omega t-\beta z)} = 0$$

แต่เพราะว่า

$$\vec{\nabla}_t\cdot\vec{e}_z = \vec{\nabla}_z\cdot\vec{e} = 0$$
$$\vec{\nabla}_z\cdot\vec{e}_z = \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{e}_z e^{j(\omega t-\beta z)}$$
$$= |\vec{e}_z|(-j\beta e^{j(\omega t-\beta z)})$$

เพราะฉะนั้นเราจึงได้

$$\vec{\nabla}_t\cdot\vec{e}\,e^{j(\omega t-\beta z)} - j\beta e_z e^{j(\omega t-\beta z)} = 0$$

หรือ

$$\vec{\nabla}_t\cdot\vec{e} = j\beta e_z \qquad (๒.๒.๑๑)$$

และจากสมการ(๒.๒.๓) (๒.๒.๖) (๒.๒.๙ข) และ (๒.๒.๑๐) เราจะได้

$$\vec{\nabla}_t\cdot\vec{h} = j\beta h_z \qquad (๒.๒.๑๒)$$

ในทำนองเดียวกัน เราอาจพิสูจน์ได้ว่า(๒.๒.๒) และ (๒.๒.๔) นำไปสู่

$$\vec{\nabla}_t\times\vec{e} = -j\omega\mu_0\vec{h}_z \qquad (๒.๒.๑๓)$$

$$\vec{\nabla}_t\times\vec{e}_z - j\beta\hat{a}_z\times\vec{e} = -\hat{a}_z\times\vec{\nabla}_t e_z - j\beta\hat{a}_z\times\vec{e}$$
$$= -j\omega\mu_0\vec{h} \qquad (๒.๒.๑๔)$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{h} = j\omega\epsilon_0 \vec{e}_z \qquad (๒.๒.๑๕)$$

$$\hat{a}_z \times \vec{\nabla}_t h_z + j\beta \hat{a}_z \times \vec{h} = -j\omega\epsilon_0 \vec{e} \qquad (๒.๒.๑๖)$$

จากสมการ (๒.๒.๑๑) จนถึงสมการ (๒.๒.๑๖) เป็นสมการที่ได้ทอนมาจากสมการแมกซ์เวลล์ เราสามารถนำสมการเหล่านี้ไปหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแบบต่างๆได้

๒.๓ สนามไฟฟ้าตามขวาง

สัญญาณไมโครเวฟที่ส่งไปตามท่อนำคลื่นอาจแยกออกได้เป็นสองแบบใหญ่ๆ กล่าวคือ แบบที่ไม่มีองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวการแผ่ของคลื่น (TE *mode*) และแบบที่ไม่มีองค์ประกอบของสนามแม่เหล็กในแนวการแผ่ของคลื่น (TM *mode*) ในการวิจัยนี้เราสนใจแต่คลื่นโมด TE และในหัวข้อนี้เราจะใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์และสมการแมกซ์เวลล์เพื่อหาสมการของคลื่นโมด TE ซึ่งแผ่ในท่อนำคลื่น

สำหรับคลื่นโมด TE จะได้ว่า

$$\vec{e}_z = 0, \quad \vec{h}_z \neq 0, \quad \vec{e} \neq 0 \text{ และ } \vec{h} \neq 0 \qquad (๒.๓.๑)$$

สนามแม่เหล็ก

$$\vec{H} = (\vec{h} + \vec{h}_z)e^{j(\omega t - \beta z)}$$

อาจหาได้จากสมการ (๒.๒.๗ข) เพราะว่า

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \nabla^2 = \nabla_t^2 + \nabla_z^2 \qquad (๒.๓.๒)$$

เมื่อเอา ∇^2 กระทำบนสนาม $\vec{H}$ จะได้

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{H} &= (\nabla_t^2 + \nabla_z^2)(\vec{h} + \vec{h}_z)e^{j(\omega t - \beta z)} \\ &= \nabla_t^2(\vec{h} + \vec{h}_z)e^{j(\omega t - \beta z)} - \beta^2(\vec{h} + \vec{h}_z)e^{j(\omega t - \beta z)} \end{aligned}$$

จากสมการ (๒.๒.๗ข) เราได้

$$(\nabla_t^2 - \beta^2)(\vec{h} + \vec{h}_z)e^{j(\omega t - \beta z)} + k_0^2(\vec{h} + \vec{h}_z)e^{j(\omega t - \beta z)} = 0$$

หรือ

$$(\nabla_t^2 - \beta^2)(\vec{h} + \vec{h}_z) + k_0^2(\vec{h} + \vec{h}_z) = 0$$

ซึ่งจะเป็นจริงได้เมื่อ

$$\nabla_t^2 \vec{h} + (k_0^2 - \beta^2)\vec{h} = 0 \qquad (๒.๓.๓ก)$$

$$\nabla_t^2 h_z + (k_o^2 - \beta^2) h_z = 0 \qquad (๒.๓.๓ข)$$

กำหนดให้

$$k_e^2 = k_o^2 - \beta^2 \qquad (๒.๓.๔)$$

ดังนั้นสมการ(๒.๓.๓)จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\nabla_t^2 \vec{h} + k_e^2 \vec{h} = 0 \qquad (๒.๓.๕)$$

$$\nabla_t^2 h_z + k_e^2 h_z = 0 \qquad (๒.๓.๖)$$

จาก $e_z = 0$ ทำให้สมการ(๒.๒.๑๑) (๒.๒.๑๔) และ (๒.๒.๑๕) กลายเป็น

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{e} = 0 \qquad (๒.๓.๗)$$

$$\beta(\hat{a}_z \times \vec{e}) = \omega\mu_o \vec{h} \qquad (๒.๓.๘)$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{h} = 0 \qquad (๒.๓.๙)$$

จาก ๕ สมการข้างบน พร้อมทั้งสมการ(๒.๒.๑๒) และ (๒.๒.๑๖) เราสามารถหาสมการของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโมดTE ในท่อนำคลื่นได้ดังต่อไปนี้ จากสมการ(๒.๓.๙)

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{\nabla}_t \times \vec{h} = 0$$

หรือ

$$\vec{\nabla}_t \cdot (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{h}) - \nabla_t^2 \vec{h} = 0 \qquad (๒.๓.๑๐)$$

แทนค่า $\vec{\nabla}_t \cdot \vec{h}$ จากสมการ(๒.๒.๑๒) ลงไปในสมการ(๒.๓.๑๐)เราจะได้

$$\nabla_t^2 \vec{h} = \vec{\nabla}_t (j\beta h_z) \qquad (๒.๓.๑๑)$$

โดยใช้สมการ(๒.๓.๕) สมการ(๒.๓.๑๑)จะกลายเป็น

$$\vec{h} = (-j\beta / k_e^2)\, \vec{\nabla}_t h_z \qquad (๒.๓.๑๒)$$

ในการหา $\vec{e}$ ในเทอมของ $\vec{h}$ เราเริ่มต้นจากสมการ(๒.๓.๘)จะได้

$$\hat{a}_z \times (\beta \hat{a}_z \times \vec{e}) = \omega\mu_o \hat{a}_z \times \vec{h}$$

หรือ

$$\beta\,[(\hat{a}_z \cdot \vec{e})\hat{a}_z - (\hat{a}_z \cdot \hat{a}_z)\vec{e}] = \omega\mu_o \hat{a}_z \times \vec{h}$$

แต่ $\hat{a}_z \cdot \vec{e} = 0, \quad \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1$

เพราะฉะนั้นจึงได้

$$\vec{e} = (-\omega\mu_o/\beta)\,\hat{a}_z \times \vec{h} = (-k_o Z_o/\beta)\,\hat{a}_z \times \vec{h}$$

$$= -Z_h\, \hat{a}_z \times \vec{h} \qquad (๒.๓.๑๓)$$

โดยที่ $Z_0 = \omega\mu_0 / k_0$

และ $Z_h = k_0 Z_0 / \beta$

เราเรียก Z_h ว่า เวฟอิมพิแดนซ์(WAVE IMPEDANCE)ของคลื่นไฟฟ้าตามขวาง จากสมการ(๒.๓.๑๓)เราพบว่า

$$Z_h = \frac{e_x}{h_y} = -\frac{e_y}{h_x} \qquad (๒.๓.๑๔)$$

ซึ่งเป็นอัตราส่วนของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวางที่แผ่อยู่ในท่อนำคลื่น

เราอาจสรุปการหาสมการของคลื่นโมดTE ได้ดังนี้ อันแรกเราใช้สมการ(๒.๓.๖) เพื่อหา h_z ต่อมาก็ใช้สมการ(๒.๓.๙)หา $\vec{h}$ โดยเลือก $\vec{h}$ ที่คล้องจองกับข้อแม้ที่ว่า ที่ผิวของท่อนำคลื่น องค์ประกอบของ $\vec{h}$ ในแนวตั้งฉากกับผิวจะต้องเป็นศูนย์ จากนั้นเราใช้สนาม $\vec{h}$ ที่ได้หา $\vec{e}$ จากสมการ(๒.๓.๑๓) สุดท้ายหลังจากได้ $h_z, \vec{h}, \vec{e}$ แล้ว เราอาจเขียนสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้ดังนี้

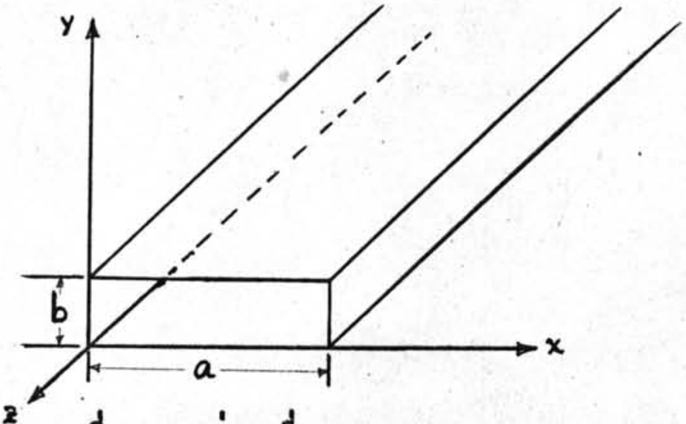
$$\vec{H} = \pm \vec{h} e^{j(\omega t \mp \beta z)} + \vec{h}_z e^{j(\omega t \mp \beta z)} \qquad (๒.๓.๑๕)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_t = \vec{e} e^{j(\omega t \mp \beta z)} \qquad (๒.๓.๑๖)$$

ตามสมการ(๒.๓.๑๕)เครื่องหมายอยู่หน้า $\vec{h}$ จะเป็น $\mp$ เพราะว่า $\vec{h}$ มีค่าตามสมการ(๒.๓.๑๒)

๒.๔ คลื่นไฟฟ้าตามขวางในท่อนำคลื่นรูปเหลี่ยม

ท่อนำคลื่นรูปเหลี่ยม(RECTANGULAR WAVEGUIDE)หรือท่อเหลี่ยม หมายถึงท่อกลวงซึ่งมีภาคตัดขวางเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูปที่ ๒.๑



รูปที่ ๒.๑ ท่อเหลี่ยม

คลื่นที่สามารถจะแผ่ไปได้ในท่อเหลี่ยมมีสองแบบคือ คลื่นสนามไฟฟ้าตามขวางและคลื่นสนามแม่เหล็กตามขวาง แต่ละแบบจะมีจำนวนอนันต์ซึ่งจะบอกไว้ด้วยตัวอักษรที่ใช้แทนตัวเลขจำนวนเต็มสองจำนวนคือ n และ m ตัวอย่างเช่นในกรณีของคลื่นสนามไฟฟ้าตามขวางจะเขียนเป็น TE_{nm} เลขจำนวนเต็ม n และ m เกี่ยวข้องถึงการเปลี่ยนแปลงของสนามไปตามโคออร์ดิเนตตามขวางทั้งสองอันคือแกน x และแกน y ในรูปที่ ๒.๑ แต่ละคลื่นหรือโมดจะมีความถี่ตัดขาด(CUT OFF FREQUENCY) $f_{c,nm}$ ถ้าคลื่นใดหรือโมดใดมีความถี่น้อยกว่าความถี่ตัดขาด คลื่นนั้นหรือโมดนั้นจะไม่สามารถแผ่ออกไปตามท่อนำคลื่น แต่ถ้ามีความถี่สูงกว่าความถี่ตัดขาด จะสามารถแผ่ออกไปตามท่อนำคลื่นได้ ความถี่ตัดขาดขึ้นอยู่กับการจัดขนาดของภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น เมื่อทราบความถี่ตัดขาดจะทำให้ทราบค่าของตัวประกอบของการแผ่ซึ่งกำหนดเอาไว้ว่า

$$\beta^2 = k_0^2 - k_c^2 \qquad (๒.๔.๑)$$

โดยที่ k_c คือเลขคลื่นตัดขาด(CUT OFF WAVE NUMBER)อาจหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตดังจะได้แสดงต่อไป

เนื่องจากว่าในเรื่องของคลื่นสนามไฟฟ้าตามขวางนั้น ค่าของสนามไฟฟ้าตามแกน $e_z = 0$ แต่สนามแม่เหล็กตามแกน $h_z \neq 0$ ดังนั้นสนามไฟฟ้าตามขวางจึงหาได้จาก h_z จากสมการ (๒.๓.๖) คือ

$$\nabla_t^2 h_z + k_c^2 h_z = 0$$

เมื่อ $k_c^2 = k_0^2 - \beta^2$

และ $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} + k_c^2 h_z = 0 \qquad (๒.๔.๒)$$

ซึ่งเป็นสมการดิฟเฟอร์เรนท์เชียลที่มีอันดับเป็นสองและเนื่องจาก $h_z(x,y)$ เป็นตัวแปรที่สามารถแยกได้เป็นผลคูณระหว่างฟังค์ชันของ x กับฟังค์ชันของ y นั่นคือเราให้

$$h_z(x,y) = f(x)g(y) \qquad (๒.๔.๓)$$

เมื่อแทนสมการ (๒.๔.๓)ลงไปในสมการ (๒.๔.๒)จะได้

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k_x^2 f = 0 \qquad (๒.๔.๔)$$

$$\frac{d^2 g}{dy^2} + k_y^2 g = 0 \qquad (๒.๔.๕)$$

โดยที่

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \qquad (๒.๔.๖)$$

คำตอบของสมการ (๒.๔.๔) และ (๒.๔.๕) เป็นไปตามลำดับคือ

$$f(x) = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x \qquad (๒.๔.๗)$$

$$g(y) = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y \qquad (๒.๔.๘)$$

เพราะฉะนั้นเมื่อเอาสมการ (๒.๔.๗) กับสมการ (๒.๔.๘) แทนลงไปในสมการ (๒.๔.๓) จึงได้

$$h_z(x,y) = (A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x)(B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y) \qquad (๒.๔.๙)$$

จาก $\bar{h}_z$ เราอาจหา $\bar{h}$ ได้จากสมการ (๒.๓.๑๒) โดยมีข้อแม้ว่า h_x และ h_y จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ที่ผนังในของท่อนำคลื่น เราจะได้

$$h_x = \frac{\partial h_z}{\partial x} = 0 \text{ ที่ } x = 0 \text{ และ } x = a \qquad (๒.๔.๑๐)$$

$$h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} = 0 \text{ ที่ } y = 0 \text{ และ } y = b \qquad (๒.๔.๑๑)$$

จากการดิฟเฟอร์เรนท์ชิเอทสมการ (๒.๔.๙) แล้วใช้สมการ (๒.๔.๑๐) และสมการ (๒.๔.๑๑) จะเป็นผลทำให้ได้

$$A_2 = B_2 = 0 \qquad (๒.๔.๑๒)$$

$$k_x = n\pi/a, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (๒.๔.๑๓)$$

$$k_y = m\pi/b, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (๒.๔.๑๔)$$

เพราะฉะนั้นเราจะได้

$$h_z = \left(A_1 \cos \frac{n\pi x}{a}\right)\left(B_1 \cos \frac{m\pi y}{b}\right)$$

หรือ

$$h_z = A_{nm} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \qquad (๒.๔.๑๕)$$

และเพราะฉะนั้น

$$k_{c,nm}^2 = (n\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2 \qquad (๒.๔.๑๖ก)$$

หรือจะได้ว่าเลขคลื่นตัดขาดของโมดที่ nm เป็น

$$k_{c,nm} = \left[(n\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2\right]^{1/2} \qquad (๒.๔.๑๖ข)$$

ซึ่งจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าเป็นค่าที่ขึ้นอยู่กับมิติของท่อนำคลื่นเท่านั้น ตัวคงที่ของการแผ่ของโมดที่ nm กำหนดโดย

$$\gamma_{nm} = j\beta_{nm} = j(k_0^2 - k_{c,nm}^2)^{1/2} \qquad (๒.๔.๑๗ก)$$

$$\gamma_{nm} = j\left[(2\pi/\lambda_o)^2 - (n\pi/a)^2 - (m\pi/b)^2\right]^{1/2} \qquad (๒.๔.๑๗ข)$$

จากสมการ (๒.๔.๑๗) พบว่า ถ้า k_o มากกว่า $k_{e,nm}$ จะได้ β_{nm} เป็นค่าจริง นั่นก็หมายความว่าคลื่นแผ่ออกไปตามท่อนำคลื่นได้ แต่ถ้า k_o น้อยกว่า $k_{e,nm}$ จะได้ β_{nm} เป็นจินตภาพและ γ_{nm} เป็นค่าจริง ดังนั้นตัวประกอบของการแผ่คือ $e^{-\gamma_{nm}|z|}$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าโมดมีการสลายตัวไปอย่างรวดเร็วตามระยะทาง $|z|$ จากจุดเริ่มต้น ความถี่ที่จะแบ่งแถบของการแผ่หรือไม่มีการแผ่ของคลื่นไปตามท่อนำคลื่นก็คือ ความถี่ตัดขาด $f_{e,nm}$ ซึ่งกำหนดขึ้นได้โดยอาศัยคำตอบของสมการ

$$k_o = k_{e,nm}$$

นั่นคือ

$$f_{e,nm} = c/\lambda_{e,nm} = (c/2\pi)k_{e,nm} = (c/2\pi)\left[(n\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2\right]^{1/2} \qquad (๒.๔.๑๘)$$

และเพราะฉะนั้นจากสมการ (๒.๔.๑๘) จึงทำให้ได้ความยาวคลื่นตัดขาดเป็น

$$\lambda_{e,nm} = 2ab/(n^2b^2 + m^2a^2)^{1/2} \qquad (๒.๔.๑๙)$$

ส่วนมากใช้ท่อเหลี่ยมที่มี a เป็นสองเท่าของ b ซึ่งในกรณีนี้จะได้

$$\lambda_{e,nm} = 2a/(n^2 + 4m^2)^{1/2} \qquad (๒.๔.๒๐)$$

และดังนั้น

$$\lambda_{e,10} = 2a,\ \lambda_{e,01} = a,\ \lambda_{e,11} = 2a/\sqrt{5}$$ เป็นต้น

เพราะฉะนั้นองค์ประกอบต่างๆของสนามไฟฟ้าตามขวางของโมดที่ nm คือ

$$H_z = A_{nm}\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}\, e^{\mp j\beta_{nm}z} \qquad (๒.๔.๒๑)$$

$$H_x = \pm j(\beta_{nm}/k^2_{e,nm})A_{nm}(n\pi/a)\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}\, e^{\mp j\beta_{nm}z} \qquad (๒.๔.๒๒)$$

$$H_y = \pm j(\beta_{nm}/k^2_{e,nm})A_{nm}(m\pi/b)\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\, e^{\mp j\beta_{nm}z} \qquad (๒.๔.๒๓)$$

$$E_x = Z_{h,nm}A_{nm}j(\beta_{nm}/k^2_{e,nm})(m\pi/b)\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} \qquad (๒.๔.๒๔)$$

$$E_y = -Z_{h,nm}A_{nm}j(\beta_{nm}/k^2_{e,nm})(n\pi/a)\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}\, e^{\mp j\beta_{nm}z} \qquad (๒.๔.๒๕)$$

โดยที่ $Z_{h,nm}$ คือเวฟอิมพิแดนซ์ของ TE_{nm} และกำหนดโดย

$$Z_{h,nm} = (k_o/\beta_{nm})Z_o \qquad (๒.๔.๒๖)$$

ลักษณะของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นอาจทราบได้จากสมการข้างบนนี้

๒.๕ โมดเด่น TE_{10} หรือ H_{10}

คลื่นไฟฟ้าตามขวางอันที่ ๑๐ (หนึ่งศูนย์) เป็นโมดที่ง่ายที่สุดและใช้งานกันมาก สมมติว่าคลื่นไฟฟ้าตามขวางกำลังแผ่ไปตามท่อเหลี่ยมในทิศทาง $+z$ องค์ประกอบของสนามเขียนได้เป็นดังนี้

$$H_z = A\cos(\pi x/a)e^{-j\beta z} \qquad (๒.๕.๑)$$

$$H_x = j(\beta/k_c^2)A\sin(\pi x/a)e^{-j\beta z} \qquad (๒.๕.๒)$$

$$E_y = -jAZ_h(\beta/k_c^2)\sin(\pi x/a)e^{-j\beta z} \qquad (๒.๕.๓)$$

$$H_y = E_x = E_z = 0 \qquad (๒.๕.๔)$$

มีเลขคลื่นตัดขาด

$$k_c = \pi/a \qquad (๒.๕.๕)$$

ตัวคงที่ของการแผ่

$$\beta = [k_o^2 - (\pi/a)^2]^{1/2} \qquad (๒.๕.๖)$$

เวฟอิมพีแดนซ์

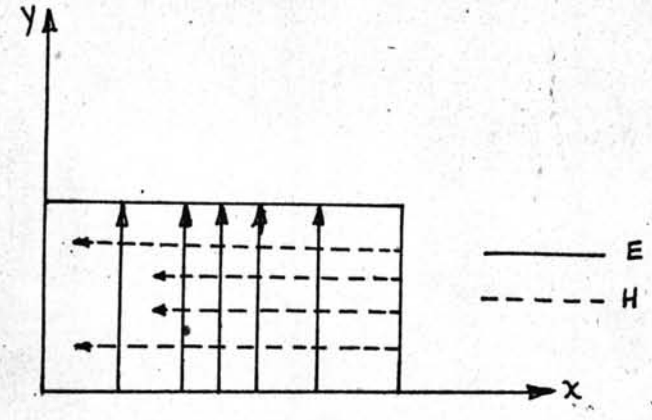
$$Z_h = -E_y/H_y = (k_o/\beta)Z_o \qquad (๒.๕.๗)$$

ความยาวคลื่นภายในท่อนำคลื่น

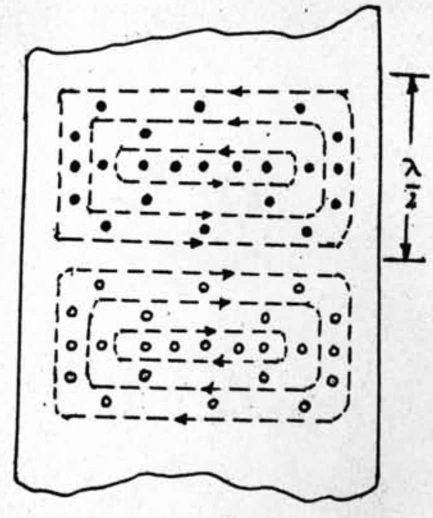
$$\lambda = 2\pi/\beta = \lambda_o/[1-(\lambda_o/2a)^2]^{1/2} \qquad (๒.๕.๘)$$

ทั้งนี้เพราะว่า ความยาวคลื่นตัดขาด $\lambda_c = 2a$

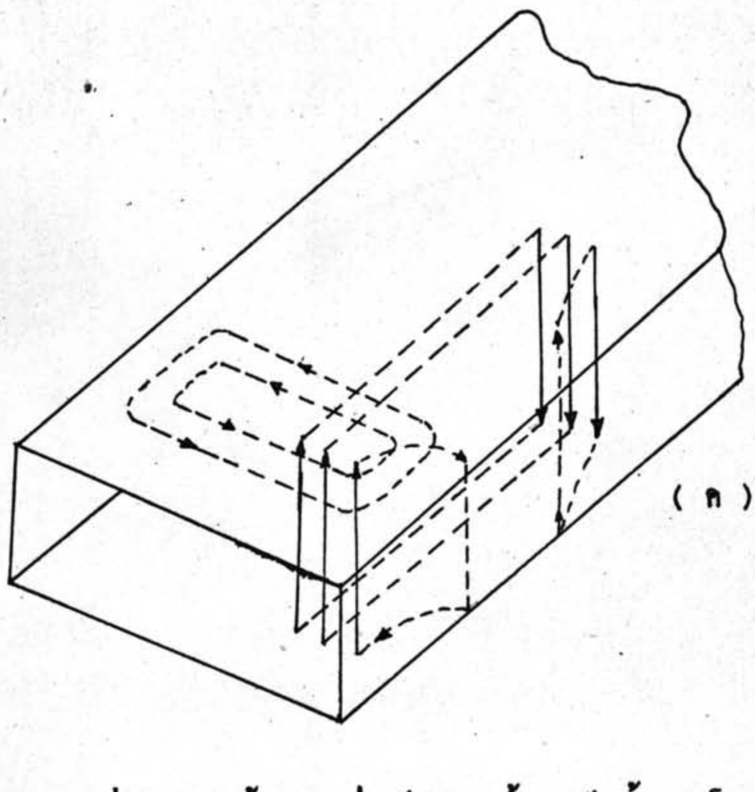
รูปร่างของสนามของโมด TE_{10} ในท่อนำคลื่นแสดงไว้ตามรูปที่ ๒.๒ จะสังเกตเห็นว่าเส้นแรงแม่เหล็กล้อมเส้นแรงไฟฟ้าหรืออีกนัยหนึ่งก็คือ เส้นแรงไฟฟ้าไปสิ้นสุดที่ประจุไฟฟ้าซึ่งกระจายอยู่บนผิวในของผนังอันล่างและผนังอันบนของท่อนำคลื่น เป็นสาเหตุทำให้ประจุไฟฟ้ามีการเคลื่อนที่ไปมาบนผิวในของผนังอันบนและผนังอันล่าง ดังนั้นจึงมีกระแสไฟฟ้าเกิดขึ้นซึ่งจะเหนี่ยวนำทำให้เกิดสนามแม่เหล็ก ดังแสดงไว้ในรูปที่ ๒.๒



(ก) มองในแนวของระนาบตามขวาง



(ก) มองจากด้านบน



(ค) แสดงการเชื่อมต่อกันของกระแส และสนามแม่เหล็ก

รูปที่ ๒.๒ เส้นแรงแม่เหล็กและเส้นแรงไฟฟ้าของโมด TE_{10} ในท่อเหลี่ยม

๒.๖ โพรงอภินาทกลมหรือโพรงกลม

ท่อกลมหมายถึงท่อนำคลื่นกลวงรูปทรงกระบอก มีภาคตัดขวางเป็นวงกลม รัศมี a โพรงอภินาทกลมหรือโพรงกลมคือส่วนหนึ่งของท่อกลมมีความยาว L และมีแผ่นตัวนำปิดหัวท้าย ดังรูป ๒.๓ สนามโมดTE ภายในโพรงกลมหาได้โดยเริ่มจากสมการ

$$\nabla_t^2 h_z + k_e^2 h_z = 0 \qquad (๒.๖.๑)$$

เพราะว่า ในแบบของรูปทรงกระบอก

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

คือ

$$\nabla_t^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อกระทำกับ h_z ดังสมการ (๒.๖.๑) จึงได้เป็น

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial h_z}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 h_z}{\partial \theta^2} + k_e^2 h_z = 0$$

ในกรณีที่ h_z ไม่ขึ้นกับ θ เราได้

$$\frac{\partial h_z}{\partial \theta} = 0$$

สมการจึงเหลือเป็น

$$\rho^2\frac{d^2 h_z}{d\rho^2} + \rho\frac{dh_z}{d\rho} + \rho^2 k_e^2 h_z = 0 \qquad (๒.๖.๒)$$

โดยการกำหนดให้

$$\rho k_e = x \qquad (๒.๖.๓)$$

ดังนั้นเราจะพบว่า

$$\frac{d}{d\rho} = \frac{d}{dx}\cdot\frac{dx}{d\rho} = k_e\frac{d}{dx} \qquad (๒.๖.๔)$$

และ

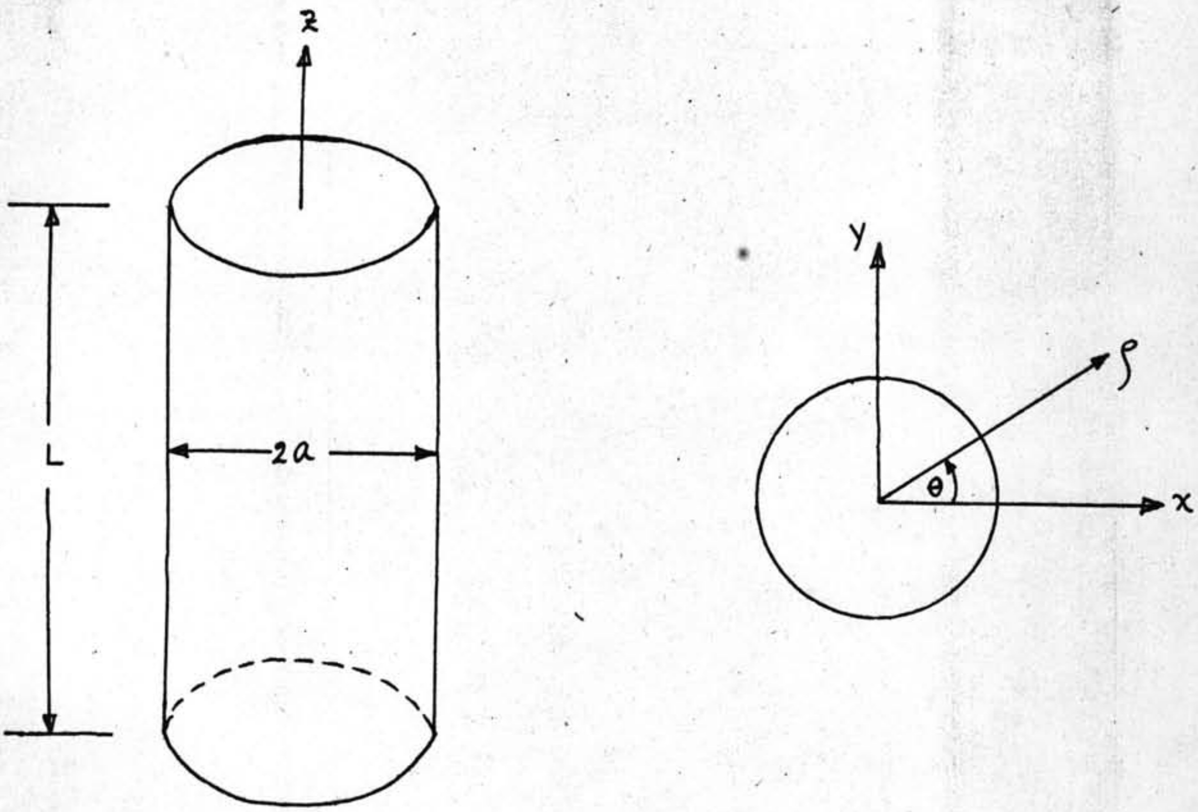
$$\frac{d^2}{d\rho^2} = k_e^2\frac{d^2}{dx^2} \qquad (๒.๖.๕)$$

ดังนั้นสมการ (๒.๖.๒) จึงเขียนได้เป็น

$$x^2\frac{d^2 h_z}{dx^2} + x\frac{dh_z}{dx} + x^2 h_z = 0 \qquad (๒.๖.๖)$$

ซึ่งเป็นสมการดิฟเฟอร์เรนท์เชียลของเบสเสล(BESSEL) มีอันดับเป็นศูนย์ จากสมการนี้คำตอบที่ได้เป็นเบสเสลฟังค์ชันคือ

$$h_z = J_0(x) \qquad (๒.๖.๗)$$



รูปที่ ๒.๓ โพรงกลม

หรือ

$$J_0(x) = J_0(k_e \rho) \qquad (๒.๖.๘)$$

ดังนั้นสนามแม่เหล็กตามแกน z จะเป็น

$$H_z = J_0(k_e \rho)(A^+ e^{-j\beta z} + A^- e^{j\beta z}) \qquad (๒.๖.๙)$$

โดยที่ A^+ และ A^- แทนอำพน(AMPLITUDE)ของคลื่นที่แผ่ในแนว+z และ-z ตามลำดับ

จาก H_z เราอาจหา H_ρ ได้โดยอาศัยสมการ (๒.๓.๑๒)

$$H_\rho = (-j\beta/k_e) J_0'(k_e \rho)(A^+ e^{-j\beta z} - A^- e^{j\beta z}) \qquad (๒.๖.๑๐)$$

โดยที่

$$J_0'(x) = \frac{d}{dx} J_0(x) \qquad (๒.๖.๑๑)$$

แต่โดยที่

$$J_0'(x) = -J_1(x) \qquad (๒.๖.๑๒)$$

ดังนั้นเราได้

$$H_\rho = (j\beta/k_e) J_1(k_e \rho)(A^+ e^{-j\beta z} - A^- e^{j\beta z}) \qquad (๒.๖.๑๓)$$

และโดยที่ H_ρ จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ที่ผิวโค้งด้านในของโพรง เราจึงได้

$$H_\rho(\rho = a) = 0 \qquad (๒.๖.๑๔)$$

หรือ

$$J_1(k_e a) = 0 \qquad (๒.๖.๑๕)$$

ค่า $k_e a$ ที่ทำให้สมการบนมีค่าเป็นศูนย์นั้นมีหลายค่า แต่ค่าแรกคือ 3.83 ในกรณีนี้จะได้

$$k_e = \frac{3.83}{a} \qquad (๒.๖.๑๖)$$

โดยอาศัยสมการ (๒.๓.๑๒) (๒.๓.๑๓) และค่า k_e ข้างบน เราได้

$$H_z = J_0(3.83\rho/a)(A^+ e^{-j\beta z} + A^- e^{j\beta z}) \qquad (๒.๖.๑๗ก)$$

$$H_\rho = (j\beta a/3.83) J_1(3.83\rho/a)(A^+ e^{-j\beta z} - A^- e^{j\beta z}) \qquad (๒.๖.๑๗ข)$$

$$E_\theta = (-\omega_0 \mu_0 a j/3.83) J_1(3.83\rho/a)(A^+ e^{-j\beta z} + A^- e^{j\beta z}) \qquad (๒.๖.๑๗ค)$$

สำหรับสนามในโพรงกลม H_z มีค่าเป็นศูนย์ที่ระยะทาง $z = 0$ และ $z = L$ เพราะฉะนั้นจากสมการ (๒.๖.๑๗) สนามตามแนวต่างๆของโมด TE_{101} จึงเขียนออกมาได้เป็น

$$H_z = A J_0(3.83\rho/a) \sin(\pi z/L) \qquad (๒.๖.๑๘ก)$$

$$H_\rho = (-j\pi a A/3.83L) J_1(3.83\rho/a) \cos(\pi z/L) \qquad (๒.๖.๑๘ข)$$

$$E_\theta = (-j\omega_0\mu_0 a/3.83)\,A\,J_1(3.83\rho/a)\sin(\pi z/L) \qquad (๒.๖.๑๘ค)$$

$$H_\theta = E_\rho = E_z = 0 \qquad (๒.๖.๑๘ง)$$

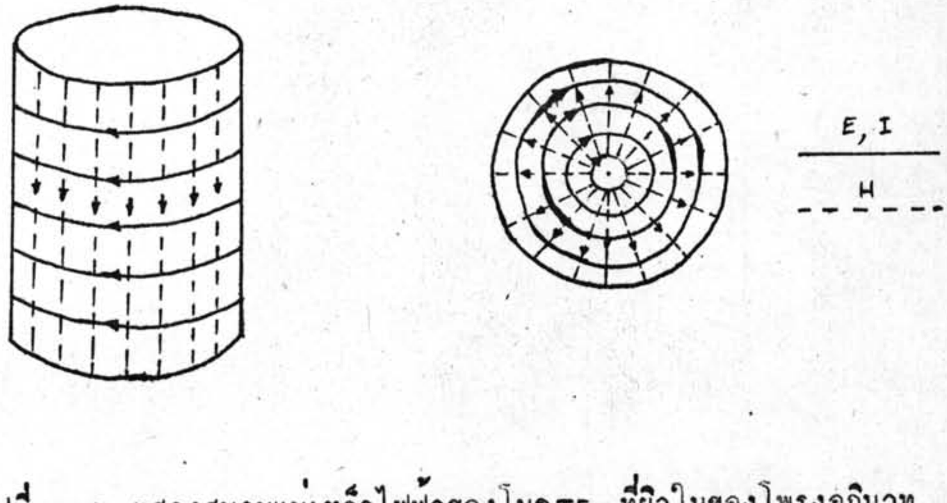
โดยที่ $\beta = \frac{n\pi}{L}$ สำหรับ $n = 1$ จากสมการ (๒.๓.๔) และสมการ (๒.๒.๘) ความถี่อภินาทจะเป็น

$$f_0 = (c/2\sqrt{\kappa})\left[(1/L)^2 + (3.83/\pi a)^2\right]^{1/2} \qquad (๒.๖.๑๙)$$

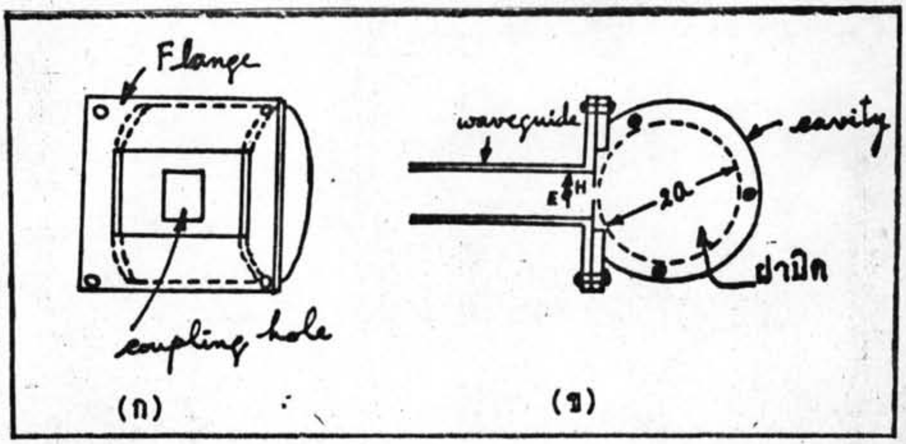
โดยที่ c คือความเร็วของแสง κ คือค่าคงที่ไดอิเลคตริก

จากสมการต่างๆที่ได้ สามารถนำมาเขียนเพื่อดูแบบของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่ผิวภายในของโพรง ดังแสดงไว้ตามรูปที่ ๒.๔ บนผนังส่วนบนและผนังส่วนล่าง H_z และ E_θ จะเป็นศูนย์แต่ H_ρ จะมีค่ามากที่สุด สนามไฟฟ้าหรือกระแสจะไหลในทิศทางที่ตั้งได้ฉากกับแนวของสนาม ซึ่งจะกลายเป็นวงกลมต่างๆอยู่รอบแกนของโพรง

เนื่องจากว่านอกจากจะมีโมด TE_{101} โลดเข้าไปในโพรงแล้วยังอาจมีโมด TM_{111} โลดเข้าไปในโพรงได้อีกด้วย เพื่อป้องกันไม่ให้มีโมด TM_{111} โลดเข้าไปในโพรง เขาจึงมักเจาะรูต่อ (COUPLING HOLE) ให้เป็นไปในลักษณะที่เป็นการชักนำให้โมด TE_{101} โลดเข้าไปในโพรงเพียงอย่างเดียว แต่เพราะว่าภาคตัดขวางของท่อเหลี่ยมเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนั้นในการเจาะรูต่อ เพื่อเลี่ยงไม่ให้โมด TM_{111} โลดเข้าไปในโพรง จึงเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเช่นเดียวกันกับภาคตัดขวางของท่อเหลี่ยมแต่มีขนาดเล็กกว่า ดังแสดงเอาไว้ตามรูปที่ ๒.๕



รูปที่ ๒.๔ แสดงสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของโมด TE_{101} ที่ผิวในของโพรงอภินาท

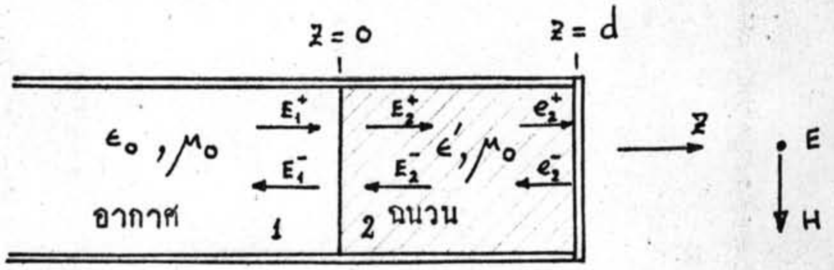


รูปที่ ๒.๕ (ก) แสดงโพรงอภินาทด้านหน้า
(ข) ด้านข้างของโพรงอภินาทและต่อเชื่อมอยู่กับท่อนำคลื่น

จากรูปที่ ๒.๕ ในการปิดโพรงด้วยฝาปิดทั้งสองข้าง ไม่จำเป็นต้องปิดให้มีการสัมผัสทาง - ไฟฟ้าดีนักก็ได้(BAD ELECTRICAL CONTACT) เพราะว่าโมด TE_{101} จะไม่ให้กระแสไหล- ข้ามจากฝามายังผิวโค้งของโพรง

๒.๗ การสะท้อนของคลื่นออกจากไดอิเลคตริกที่ปลายของท่อนำคลื่นสั้น

เมื่อเอาไดอิเลคตริกชนิดที่เป็นของแข็งใส่ลงไปในท่อนำคลื่น แล้วปิดด้วยแผ่นโลหะ จะมีลักษณะดังรูปที่ ๒.๖



รูปที่ ๒.๖ ไดอิเลคตริกบรรจุอยู่ที่ปลายท่อนำคลื่นซึ่งมีฝาปิด

สมมติว่าไดอิเลคตริกที่ใส่เข้าไปในท่อนำคลื่นยาว d E_1^+ E_1^- และ H_1^+ H_1^- เป็นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวางของโมด TE_{10} ที่ตกกระทบและสะท้อนจากผิวหน้าของไดอิเลคตริกซึ่งอยู่ที่ $z = 0$ E_2^+ E_2^- และ H_2^+ H_2^- เป็นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่ผิวในของไดอิเลคตริก ส่วน e_2^+ และ e_2^- เป็นสนามไฟฟ้าที่ผิวของโลหะปิดท้ายของท่อนำคลื่นซึ่งอยู่ที่ $z = d$ จากคุณสมบัติของสนามแม่เหล็กและไฟฟ้า เราจะได้

$$e_2^+ + e_2^- = 0 \qquad (๒.๗.๑)$$

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^- \qquad (๒.๗.๒)$$

$$H_1^+ - H_1^- = H_2^+ - H_2^- \qquad (๒.๗.๓)$$

สมการ (๒.๗.๑) เป็นการบอกให้ทราบถึงเงื่อนไขที่ว่า สนามไฟฟ้าในแนวขนานจะต้องมีค่าเป็นศูนย์ที่ผิวของโลหะ ส่วนสมการที่ (๒.๗.๒) และ (๒.๗.๓) เป็นการแสดงให้ทราบว่าสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่ผิวนอกและที่ผิวในของไดอิเลคตริกจะต้องมีค่าเท่ากันซึ่งอาจแสดงได้ว่าเงื่อนไขขอบเขตของ H_2 เหมือนกับของ E ในสมการ (๒.๗.๒) สำหรับโมด TE_{10} ที่เคลื่อนที่ไปทางขวาและทางซ้ายเราจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้คือ

$$E^+ = E_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \qquad (๒.๗.๔)$$

$$E^- = E_0 e^{j(\omega t + \beta z)} \qquad (๒.๗.๕)$$

โดยที่เครื่องหมาย + แสดงถึงการเคลื่อนที่ไปทางขวาและ − เคลื่อนที่ไปทางซ้าย $\omega = 2\pi f$ $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ เมื่อ λ คือความยาวคลื่น จากนี้เราได้

$$e_2^+ = E_2^+ e^{-j\beta_2 d + j\omega t} = E_2^+ e^{j(\omega t - \beta_2 d)} \quad (๒.๗.๖ก)$$

$$e_2^- = E_2^- e^{j(\omega t + \beta_2 d)} \quad (๒.๗.๖ข)$$

เมื่อ β_2 หมายถึง β ในไดอิเลคตริก เอาสมการ(๒.๗.๖)แทนลงไปในสมการ(๒.๗.๑) เราจะได้

$$E_2^- = -E_2^+ e^{-2j\beta_2 d} \quad (๒.๗.๗)$$

นำสมการที่(๒.๗.๗)แทนลงไปในสมการที่(๒.๗.๒) เราได้

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+(1 - e^{-2j\beta_2 d}) \quad (๒.๗.๘)$$

จากทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า พบว่า

$$E^+ / H^+ = E^- / H^- = \eta \quad (๒.๗.๙)$$

เมื่อ

$$\eta = \omega\mu / \beta \quad (๒.๗.๑๐)$$

โดยที่ μ คือเปอมีอบิลิตีของสาร สำหรับสารที่ศึกษานั้น $\mu = \mu_0$ แทนค่าสมการ(๒.๗.๙) ลงในสมการ(๒.๗.๓) เราได้

$$E_1^+/\eta_1 - E_1^-/\eta_1 = E_2^+/\eta_2 - E_2^-/\eta_2 \quad (๒.๗.๑๑)$$

แทน E_2^- จากสมการ(๒.๗.๗) ลงไปในสมการ(๒.๗.๑๑) ได้

$$E_1^+ - E_1^- = (\eta_1/\eta_2) E_2^+(1 + e^{-2j\beta_2 d}) \quad (๒.๗.๑๒)$$

เอาสมการ(๒.๗.๑๒)บวกกับสมการ(๒.๗.๒) จะได้

$$E_1^+ = (E_2^+/2)[(1 - e^{-2j\beta_2 d}) + (\eta_1/\eta_2)(1 + e^{-2j\beta_2 d})] \quad (๒.๗.๑๓)$$

และเอาสมการ(๒.๗.๑๒)ไปลบออกจากสมการ(๒.๗.๒) จะให้

$$E_1^- = (E_2^+/2)[(1 - e^{-2j\beta_2 d}) - (\eta_1/\eta_2)(1 + e^{-2j\beta_2 d})] \quad (๒.๗.๑๔)$$

สมการ(๒.๗.๑๔)หารด้วยสมการ(๒.๗.๑๓) เราได้

$$E_1^-/E_1^+ = [\eta_2(1 - e^{-2j\beta_2 d}) - \eta_1(1 + e^{-2j\beta_2 d})]/[\eta_2(1 - e^{-2j\beta_2 d}) + \eta_1(1 + e^{-2j\beta_2 d})]$$

เพราะว่า

$$\eta = \omega\mu/\beta$$

$$\beta = (k^2 - k_e^2)^{1/2} = [\mu\epsilon\omega^2 - (\pi/a)^2]^{1/2}$$

เพราะฉะนั้นเราจึงได้

$$\frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{\beta_1(1 - e^{-2j\beta_2 d}) - \beta_2(1 + e^{-2j\beta_2 d})}{\beta_1(1 - e^{-2j\beta_2 d}) + \beta_2(1 + e^{-2j\beta_2 d})} \quad (๒.๗.๑๕)$$

หรือ

$$\frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{(\beta_1-\beta_2)-(\beta_1+\beta_2)\cos 2\beta_2 d + j(\beta_1+\beta_2)\sin 2\beta_2 d}{(\beta_1+\beta_2)-(\beta_1-\beta_2)\cos 2\beta_2 d + j(\beta_1-\beta_2)\sin 2\beta_2 d} \qquad (๒.๗.๑๖)$$

โดยอาศัยสูตรที่ว่า

$$a + jb = (a^2+b^2)^{1/2} e^{j\tan^{-1}\frac{b}{a}}$$

ทำให้เราได้รูปสมการออกมาเป็นเอ็กซ์โปเนนเชียล เพราะฉะนั้น

$$\frac{E_1^-}{E_1^+} = \exp j\left[\tan^{-1}\frac{(\beta_1+\beta_2)\sin 2\beta_2 d}{(\beta_1-\beta_2)-(\beta_1+\beta_2)\cos 2\beta_2 d} - \tan^{-1}\frac{(\beta_1-\beta_2)\sin 2\beta_2 d}{(\beta_1+\beta_2)-(\beta_1-\beta_2)\cos 2\beta_2 d}\right]$$

พิจารณาค่าที่อยู่ในวงเล็บ [ ] คือ

$$\tan^{-1}\frac{(\beta_1+\beta_2)\sin 2\beta_2 d}{(\beta_1-\beta_2)-(\beta_1+\beta_2)\cos 2\beta_2 d} - \tan^{-1}\frac{(\beta_1-\beta_2)\sin 2\beta_2 d}{(\beta_1+\beta_2)-(\beta_1-\beta_2)\cos 2\beta_2 d}$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\dfrac{(\beta_1+\beta_2)\sin 2\beta_2 d}{(\beta_1-\beta_2)-(\beta_1+\beta_2)\cos 2\beta_2 d} - \dfrac{(\beta_1-\beta_2)\sin 2\beta_2 d}{(\beta_1+\beta_2)-(\beta_1-\beta_2)\cos 2\beta_2 d}}{1 + \dfrac{(\beta_1+\beta_2)\sin 2\beta_2 d}{(\beta_1-\beta_2)-(\beta_1+\beta_2)\cos 2\beta_2 d}\cdot\dfrac{(\beta_1-\beta_2)\sin 2\beta_2 d}{(\beta_1+\beta_2)-(\beta_1-\beta_2)\cos 2\beta_2 d}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\beta_1\beta_2\sin 2\beta_2 d}{(\beta_1^2-\beta_2^2)-(\beta_1^2+\beta_2^2)\cos 2\beta_2 d} = \theta$$

เพราะฉะนั้น

$$\tan\theta = \frac{2\beta_1\beta_2\sin 2\beta_2 d}{(\beta_1^2-\beta_2^2)+(\beta_1^2+\beta_2^2)\cos 2\beta_2 d} \qquad (๒.๗.๑๗)$$

และ

$$E_1^- / E_1^+ = \rho e^{j\theta} \qquad (๒.๗.๑๘)$$

สำหรับไดอิเลคตริกที่ไม่ดูดกลืนพลังงานคลื่น β_2 จะเป็นเลขจริง ส่วน $\beta_1 = 2\pi/\lambda_1$ เมื่อ λ_1 คือความยาวคลื่นในท่อนำคลื่นที่มีเฉพาะอากาศ จากสมการ (๒.๗.๑๘) พบว่า $\rho = 1$ เมื่อ $E_1^- = E_1^+$ ทั้งนี้เพราะว่าไม่มีการดูดกลืนพลังงานคลื่น

เนื่องจากตำแหน่งที่ให้ค่าความเข้มของสนามมากที่สุดที่อยู่ภายนอกไดอิเลคตริก สามารถทำการวัดได้ สนามไฟฟ้านี้เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} E &= E^+ + E^- \\ &= E_1^+ e^{-j\beta_1 z} + E_1^- e^{j\beta_1 z} \\ &= E_1^+ e^{-j\beta_1 z}\left(1 + \frac{E_1^-}{E_1^+} e^{2j\beta_1 z}\right) \end{aligned} \qquad (๒.๗.๑๙)$$

แต่เพราะว่า

$$E_1^- / E_1^+ = \rho e^{j\theta} = e^{j\theta}$$

ดังนั้นเราจึงได้

$$E = E_1^+ e^{-j\beta_1 z}(1 + e^{j(\theta + 2\beta_1 z)}) \qquad (๒.๗.๒๐)$$

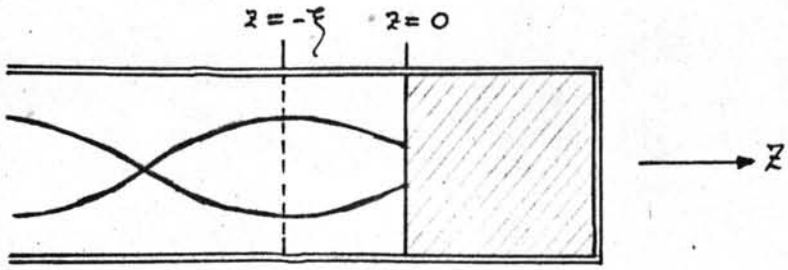
ความเข้มของสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่ง z ต่างๆคือ

$$|E| = |E_1^+||1 + e^{j(\theta + 2\beta_1 z)}|$$

จะพบว่า ค่ามากที่สุดของ $|E|$ สามารถมีได้เมื่อ

$$\theta + 2\beta_1 z = 0 \qquad (๒.๗.๒๑)$$

จากรูปที่ ๒.๗ แสดงถึงความเข้มของสนามไฟฟ้าที่มากที่สุดที่ตำแหน่ง z ต่างๆ



รูปที่ ๒.๗ ตำแหน่งความเข้มสนามไฟฟ้ามากที่สุดอันแรกที่ถัดจากไดอิเลคตริก

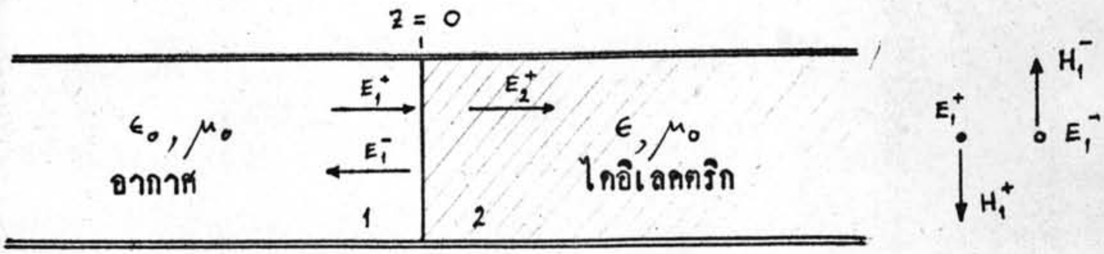
กำหนดให้ $z = -\xi$ เป็นตำแหน่งอันแรกซึ่งอยู่ถัดผิวหน้าของไดอิเลคตริกออกมาให้ค่าความเข้มของสนามไฟฟ้ามากที่สุด เพราะฉะนั้นเมื่อแทนค่า $z = -\xi$ ลงในสมการ (๒.๗.๒๑) จะทำให้เราได้ค่าของ θ เป็น

$$\theta = 2\beta_1\xi \qquad (๒.๗.๒๒)$$

สมการนี้เป็นสมการที่สำคัญอีกอันหนึ่งที่ใช้ในการวัด ซึ่งจะได้กล่าวในบทต่อไป

๒.๘ การสะท้อนที่ผิวหน้าของไดอิเลคตริกและไดอิเลคตริกมีการดูดกลืนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

ในกรณีที่ไมโครเวฟเคลื่อนที่ผ่านสารตัวอย่างที่ดูดกลืนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ความเข้มของสนามจะค่อยๆลดลงทีละน้อย ถ้าสารตัวอย่างนี้มีความยาวพอสมควร ไมโครเวฟจะถูกดูดกลืนหายไปในที่สุด



รูปที่ ๒.๘ การสะท้อนของไมโครเวฟที่ผิวของไดอิเลคตริกที่ยาวมาก

ถ้า H_1^+ H_1^- และ E_1^+ E_1^- เป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เคลื่อนที่เข้าหาและสะท้อนออกจากผิวของสารตามลำดับ และ E_2^+ H_2^+ เป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ผ่านเข้าไปในสาร เราจะได้

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ \qquad (๒.๘.๑)$$

$$H_1^+ - H_1^- = H_2^+ \qquad (๒.๘.๒)$$

เพราะว่า จากทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า เราได้ว่า

$$\frac{E_1^+}{H_1^+} = \frac{E_1^-}{H_1^-} = \eta_0 = \omega\mu_0/\beta_0 \qquad (๒.๘.๓)$$

$$\frac{E_2^+}{H_2^+} = \eta = \omega\mu_0/\beta \qquad (๒.๘.๔)$$

โดยอาศัยสมการ (๒.๘.๓) (๒.๘.๔) กับสมการ (๒.๘.๒) ทำให้ได้

$$E_1^+ - E_1^- = (\eta_0/\eta)\, E_2^+ \qquad (๒.๘.๕)$$

จากสมการ (๒.๘.๑) และสมการ (๒.๘.๕) ทำให้เราหาค่าของ E_1^+ และ E_1^- ออกมาในเทอมของ E_2^+ ได้เป็น

$$E_1^+ = (E_2^+/2)\,[1 + (\eta_0/\eta)] \qquad (๒.๘.๖)$$

$$E_1^- = (E_2^+/2)\,[1 - (\eta_0/\eta)] \qquad (๒.๘.๗)$$

เพราะว่าสัมประสิทธิ์ของการสะท้อนคืออัตราส่วนระหว่างคลื่นสะท้อนต่อคลื่นตกกระทบ ถ้า Γ คือสัมประสิทธิ์ของการสะท้อนดังนั้นเราจะได้

$$\Gamma = \frac{E_1^-}{E_1^+} = (1-\eta_0/\eta)/(1+\eta_0/\eta) = (\eta-\eta_0)/(\eta+\eta_0) = \frac{\beta_0-\beta}{\beta_0+\beta} \qquad (๒.๘.๘)$$

จากทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า เราเขียน β_0 และ β ได้เป็น

$$\beta_0 = (\omega^2\mu_0\epsilon_0 - \pi^2/a^2)^{1/2} = (\omega^2/c^2 - \pi^2/a^2)^{1/2} \qquad (๒.๘.๙)$$

$$\beta^2 = \omega^2\mu_0\epsilon' - \pi^2/a^2 - j\omega^2\mu_0\epsilon'' = \omega^2\mu_0\epsilon'(1-\pi^2/a^2\omega^2\mu_0\epsilon' - j\epsilon''/\epsilon') \qquad (๒.๘.๑๐)$$

โดยที่ a แทนความยาวของด้านยาวของท่อเหลี่ยม ดังแสดงเอาไว้ตามรูปที่ ๒.๑ ถ้าเรากำหนดให้

$$K^2 = \omega^2\mu_0\epsilon' \qquad (๒.๘.๑๑ก)$$

$$\alpha^2 = 1 - \pi^2/a^2\omega^2\mu_0\epsilon' \qquad (๒.๘.๑๑ข)$$

$$\tan\delta = \epsilon''/\epsilon' \qquad (๒.๘.๑๑ค)$$

ดังนั้นเราจะได้สมการ (๒.๘.๑๐) กลายเป็น

$$\beta^2 = K^2(\alpha^2 - j\tan\delta)$$

หรือ

$$\beta^2 = K^2\alpha^2(1 - j(\tan\delta)/\alpha^2) \qquad (๒.๘.๑๒)$$

กำหนดให้

$$K' = K\alpha \qquad (๒.๘.๑๓ก)$$

$$(\tan\delta)/\alpha^2 = \tan\delta' \qquad (๒.๘.๑๓ข)$$

เพราะฉะนั้น สมการ (๒.๘.๑๒) จึงเปลี่ยนเป็น

$$\beta^2 = K'^2(1 - j\tan\delta') \qquad (๒.๘.๑๔)$$

เพราะว่า

$$a + jb = (a^2+b^2)^{1/2} e^{j\tan^{-1}(b/a)} \qquad (๒.๘.๑๕)$$

เพราะฉะนั้นเราได้

$$\beta^2 = K'^2(1+\tan^2\delta')^{1/2} e^{j\tan^{-1}(-\tan\delta')} = (K'^2/\cos\delta')e^{-j\delta'}$$

นั่นคือเราได้

$$\beta = (K'/\cos^{1/2}\delta')e^{-j\delta'/2} \qquad (๒.๘.๑๖ก)$$

หรือ

$$\beta = (K'/\cos^{\frac{1}{2}}\delta')(\cos\tfrac{\delta'}{2} - j\sin\tfrac{\delta'}{2}) = \beta' - j\beta'' \qquad (๒.๘.๑๖ข)$$

โดยที่

$$\beta' = (\cos\tfrac{\delta'}{2} / \cos^{\frac{1}{2}}\delta')K' \qquad (๒.๘.๑๗ก)$$

$$\beta'' = (\sin\tfrac{\delta'}{2} / \cos^{\frac{1}{2}}\delta')K' \qquad (๒.๘.๑๗ข)$$

จากสมการ (๒.๘.๑๗) ทั้งสองอัน ทำให้เราได้

$$\beta''/\beta' = \tan\tfrac{\delta'}{2} \qquad (๒.๘.๑๘)$$

เอาค่าของ β ตามสมการ (๒.๘.๑๖) แทนลงไปในสมการ (๒.๘.๘) เราได้

$$\Gamma = \frac{\beta_0 - (\beta' - j\beta'')}{\beta_0 + (\beta' - j\beta'')}$$

หรือ

$$\Gamma = \frac{(\beta_0 - \beta') + j\beta''}{(\beta_0 + \beta') - j\beta''}$$

โดยการอาศัยสมการ (๒.๘.๑๕) ทำให้เราได้

$$\Gamma = \frac{[(\beta_0 - \beta')^2 + \beta''^2]^{\frac{1}{2}} e^{j\tan^{-1}\frac{\beta''}{\beta_0 - \beta'}}}{[(\beta_0 + \beta')^2 + \beta''^2]^{\frac{1}{2}} e^{j\tan^{-1}\frac{-\beta''}{\beta_0 + \beta'}}} \qquad (๒.๘.๑๙)$$

กำหนดให้

$$\rho^2 = [(\beta_0 - \beta')^2 + \beta''^2] / [(\beta_0 + \beta')^2 + \beta''^2] \qquad (๒.๘.๒๐)$$

เพราะฉะนั้นจึงได้สมการ (๒.๘.๑๙) ออกมาเป็น

$$\Gamma = \rho \exp j\left[\tan^{-1}\frac{\beta''}{\beta_0 - \beta'} - \tan^{-1}\frac{-\beta''}{\beta_0 + \beta'}\right] \qquad (๒.๘.๒๑)$$

เพราะว่า

$$\tan(A + B) = (\tan A + \tan B)/(1 - \tan A \tan B) \qquad (๒.๘.๒๒)$$

โดยการอาศัยสมการ (๒.๘.๒๒) และโดยการกำหนดให้

$$A = \tan^{-1}\frac{\beta''}{\beta_0 - \beta'}, \qquad B = \tan^{-1}\frac{-\beta''}{\beta_0 + \beta'}$$

จะทำให้เราได้

$$\tan^{-1}\frac{\beta''}{\beta_0 - \beta'} - \tan^{-1}\frac{-\beta''}{\beta_0 + \beta'} = \tan^{-1}\frac{2\beta_0\beta''}{\beta_0^2 - \beta'^2 - \beta''^2}$$

เพราะฉะนั้น สมการ (๒.๘.๒๑) จึงกลายเป็น

$$\Gamma = \rho\, e^{j\tan^{-1}\frac{2\beta_0\beta''}{\beta_0^2 - \beta'^2 - \beta''^2}} \qquad (๒.๘.๒๓)$$

โดยการกำหนดให้

$$\nu = \tan^{-1}\frac{2\beta_0\beta''}{\beta_0^2 - \beta'^2 - \beta''^2} \qquad (๒.๘.๒๔)$$

หรือจะได้

$$\vartheta = \tan\nu = \frac{2\beta_0\beta''}{\beta_0^2 - \beta'^2 - \beta''^2} \qquad (๒.๘.๒๕)$$

จากสมการ (๒.๘.๒๐) จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$2\beta_0\left(\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\right)\beta' = \beta''^2 + \beta'^2 + \beta_0^2$$

เมื่อยกกำลังสองทั้งสองข้าง เราได้

$$4\beta_0\left(\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\right)^2\beta'^2 = (\beta''^2 + \beta'^2 + \beta_0^2)^2 \qquad (๒.๘.๒๖)$$

กำหนดให้

$$\Omega = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \qquad (๒.๘.๒๗)$$

ดังนั้น สมการ (๒.๘.๒๖) เขียนใหม่ได้เป็น

$$4\beta_0^2\Omega^2\beta'^2 = (\beta''^2 + \beta'^2 + \beta_0^2)^2 \qquad (๒.๘.๒๘)$$

จากสมการ (๒.๘.๒๕) จัดรูปใหม่จะได้

$$\beta'^2 = \beta_0^2 - \beta''^2 - \frac{2\beta_0\beta''}{\vartheta} \qquad (๒.๘.๒๙)$$

แทนค่า β'^2 จากสมการ (๒.๘.๒๙) ลงในสมการ (๒.๘.๒๘) จะเป็นผลทำให้เราได้

$$\left(\frac{1}{\vartheta^2} + \Omega^2\right)\beta''^2 + \frac{2\beta_0}{\vartheta}(\Omega^2 - 1)\beta'' - (\Omega^2 - 1)\beta_0^2 = 0 \qquad (๒.๘.๓๐)$$

ในกรณีนี้เราถือว่า $\epsilon''/\epsilon' \neq 0$ หมายความว่า เมื่อไมโครเวฟเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางซึ่งเป็นไดอิเลคตริก จะถูกดูดกลืนไปเรื่อยๆ จนในที่สุดความเข้มของสนามจะหายไปหมด เมื่อความยาวของไดอิเลคตริกมากพอ ดังได้กล่าวมาแล้วในตอนต้น