บทที่ 3

Boolean Algebra

Boolean Algebra เป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่มีความสำคัญต่อการออกแบบวงจรคอมพิวเตอร์สมัยใหม่ Boolean Algebra คิดขึ้นโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษชื่อ จอร์จ บูน (George Boole) ซึ่งเขียนในหนังสือชื่อ "An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities" พิมพ์เมื่อปี ค.ศ. 1854 แต่ผู้ที่นำเอา Boolean Algebra มาใช้กับการออกแบบวงจรสวิทช์ (switching circuits) เป็นคนแรกในปี ค.ศ. 1938 คือ Claude E. Shannon Boolean Algebra สามารถช่วยให้ผู้ออกแบบลอจิก (logic designer) สร้างวงจรลอจิกที่ง่ายจากลอจิกที่ยุ่งยากโดยเสียค่าใช้จ่ายต่ำที่สุดและทำงานได้ดีที่สุด

Boolean Algebra คล้าย ๆ กับพีชคณิตทั่ว ๆ ไป คือมีทั้งตัวแปร (variable) และเครื่องหมาย (operator) แต่ตัวแปรใน Boolean Algebra มีได้เพียง 2 ค่า คือ 0 กับ 1 ส่วนเครื่องหมายคือ AND, OR และ NOT ซึ่งเราใช้แทนเกท หรือ binary switches ซึ่งเป็นพื้นฐานของวงจรลอจิก

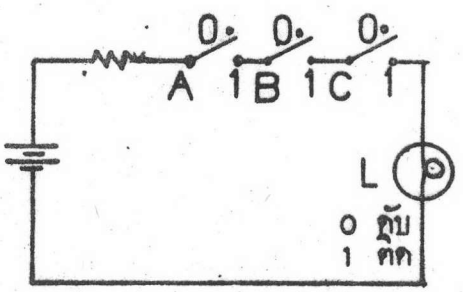
AND, OR, และ NOT

วงจร AND หมายความว่า

ก. input ทุกตัวของเกท AND ต้องมีค่าเป็น 1 output จึงเท่ากับ 1

ข. ถ้า input ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าเป็น 0 output ก็มีค่าเป็น 0

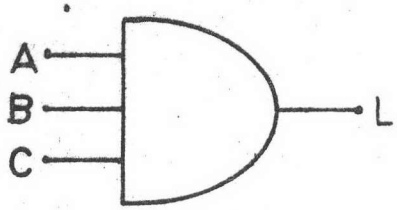
เราสามารถใช้อธิบายด้วยวงจรไฟฟ้าและ Truth Table ดังรูปที่ 10 จากรูป เมื่อ A, B และ C มีค่าเป็น 1 (วงจรปิด) หลอดไฟ L ก็จะติดคือมีค่าเป็น 1



ก

A	B	C	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

ข



ค

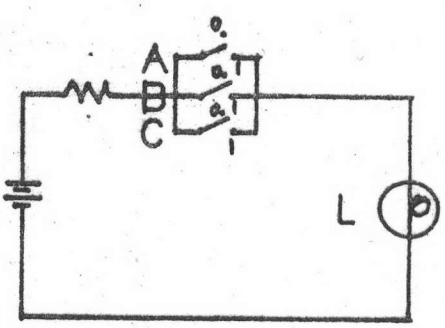
รูปที่ 10 วงจร AND (ก) วงจรที่ใช้อธิบาย (ข)Truth Table (ค) สัญญลักษณ์

ใน Boolean Algebra เราใช้ dot (.) หรือว่าไม่ใช้อะไรเลย แทน AND เช่น A.B หรือ AB อ่านว่า A AND B

<u>วงจร OR</u> หมายความว่า

ก. ถ้า input อันใดอันหนึ่งมีค่าเป็น 1 output ของเกท OR ก็มีค่าเป็น 1

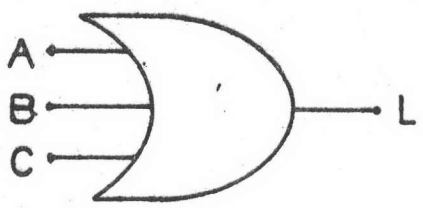
ข. ถ้าทุก input มีค่าเป็น 0 output ก็มีค่าเป็น 0



ก

A	B	C	L
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

ข



ค

รูปที่ 11 วงจร OR (ก) วงจรที่ใช้อธิบาย (ข) Truth Table (ค) สัญญลักษณ์

เราสามารถแทนได้ด้วยวงจรไฟฟ้า และ Truth Table ได้ดังรูปที่ 11 จากรูปเมื่อ A หรือ B หรือ C อันใดอันหนึ่งมีค่า 1 หลอดไฟ L ก็จะติด

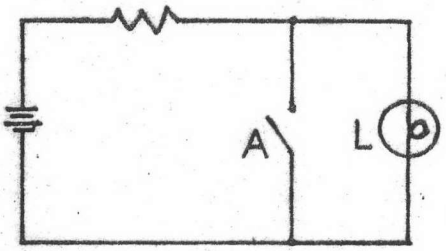
ใน Boolean Algebra เครื่องหมายที่ใช้แทน OR คือเครื่องหมายบวก (+) เช่น A + B อ่านว่า A OR B

<u>วงจร NOT</u> หมายความว่า

ก. ถ้า input มีค่าเป็น 1 output จะมีค่าเป็น 0

ข. ถ้า input มีค่าเป็น 0 output จะมีค่าเป็น 1

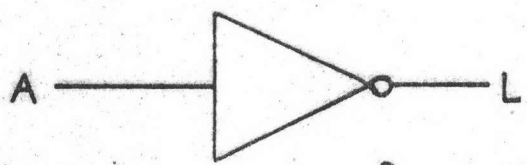
เขียนเป็นวงจรไฟฟ้าและ Truth Table ได้ดังรูปที่ 12. ถ้า A เป็น 1 หลอดไฟ L จะดับ เพราะกระแสจะผ่าน A ไปหมด



ก

A	L
0	1
1	0

ข



ค

รูปที่ 12 วงจร NOT (ก)วงจรที่ใช้อธิบาย (ข)Truth Table (ค) สัญญลักษณ์

ใน Boolean Algebra ใช้ขีดคร่อม ($\bar{}$) หรือว่า (') บนตัวอักษร เช่น $\bar{A}$ หรือ A' อ่านว่า NOT A

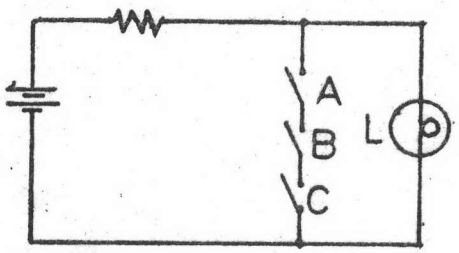
นอกจากนี้ยังมี gate ที่เกิดจากการรวมของที่กล่าวมาแล้ว เช่น NAND (AND แล้วตามด้วย NOT) และ NOR (OR ตามด้วย NOT)

<u>วงจร NAND</u> มีความหมายว่า

ก. ถ้าทุก input มีค่าเป็น 1 output ก็มีค่าเป็น 0

ข. ถ้าทุก input อันใดอันหนึ่งมีค่าเป็น 0 output มีค่าเป็น 1

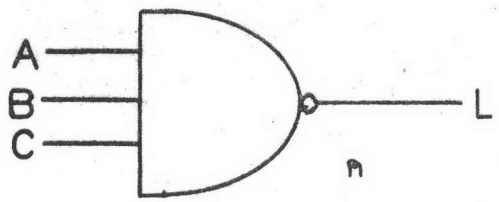
เขียนแทนด้วยวงจรไฟฟ้าและ Truth Table ได้ดังรูปที่ 13 จากรูปเมื่อ A, B และ C มีค่า 1, หมด หลอดไฟ L ก็จะดับ



ก

A	B	C	L
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

ข



ค

รูปที่ 13 วงจร NAND (ก) วงจรที่ใช้อธิบาย (ข) Truth Table (ค) สัญญลักษณ์

วงจร NOR มีความหมายว่า

ก. ถ้า input อันใดอันหนึ่งมีค่าเป็น 1 output ก็มีค่า 0

ข. ถ้าทุก input มีค่า 0 output มีค่า 1

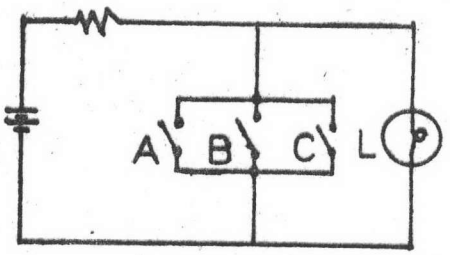
เราสามารถแทนด้วยวงจรไฟฟ้าและ Truth Table ได้ดังรูปที่ 14

กฎของ Boolean Algebra

กฎของ Boolean Algebra แบ่งออกได้เป็น 7 กฎ คือ

1. The Commulation Laws

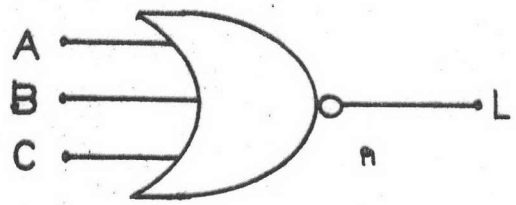
ลำดับของตัวแปรที่จะมา AND หรือ OR กันไม่สำคัญ คือ



ก

A	B	C	L
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

ข



ค

รูปที่ 14 วงจร NOR (ก) วงจรที่ใช้อธิบาย (ข) Truth Table (ค) สัญญลักษณ์

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

2. <u>The Association Laws</u>

ลำดับของตัวแปรตั้งแต 3 ตัว มา AND กันหมด หรือ OR กันหมด ไม่สำคัญ คือ

$$A + (B + C) = C + (A + B)$$

$$A \cdot (B \cdot C) = C \cdot (A \cdot B)$$

3. The Distribution Laws

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

4. The Laws of Tautology

$$A \cdot A = A$$

$$A + A = A$$

5. The Laws of Complementation

$$A = 0 \quad , \quad \bar{A} = 1$$

$$A = 1 \quad , \quad \bar{A} = 0$$

$$A \cdot \bar{A} = 0$$

$$A + \bar{A} = 1$$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

6. The Laws of Absorption

$$A \cdot (A + B) = A$$

$$A + (A \cdot B) = A$$

7. De Morgan's Theorem

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

กฎเหล่านี้จะช่วยให้ผู้ออกแบบลอจิก สามารถค้นหาสมการลอจิกที่ง่าย แทนสมการลอจิกที่ยุ่งยาก ทำให้ลดค่าใช้จ่ายในการสร้างวงจรลอจิกลงมาก

ตัวอย่างที่ 1

$$f = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot \bar{z}$$

จากส่วนกลับของกฎข้อ 3

$$f = \bar{x} \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z} + y \cdot \bar{z}) + x \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z} + y \cdot \bar{z})$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{z} \cdot (\bar{y} + y) + x \cdot \bar{z} \cdot (\bar{y} + y)$$

จาก $A + \bar{A} = 1$

$$f = \bar{x} \cdot \bar{z} \cdot 1 + x \cdot \bar{z} \cdot 1$$

$$= \bar{z} \cdot (\bar{x} + x)$$

$$= \bar{z}$$

ตัวอย่างที่ 2

$$f = \left[(A \cdot B) + C\right] \cdot (\bar{B} + \bar{C})$$

จากกฎข้อ 3

$$f = \left[(A \cdot B) + C\right] \cdot \bar{B} + \left[(A \cdot B) + C\right] \cdot \bar{C}$$

$$= (A \cdot B \cdot \bar{C}) + (A \cdot B \cdot \bar{B}) + C \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{C}$$

จากกฎข้อ 5 $A \cdot \bar{A} = 0$

$$f = (A \cdot B \cdot \bar{C}) + (A \cdot 0) + C \cdot \bar{B} + 0$$

$$= (A \cdot B \cdot \bar{C}) + C \cdot \bar{B}$$

จะเห็นว่าจากลอจิกที่ยุ่งยากของ f เมื่อใช้กฎของ Boolean Algebra จะทำให้เหลือลอจิกที่ง่ายขึ้น

บทที่ 4

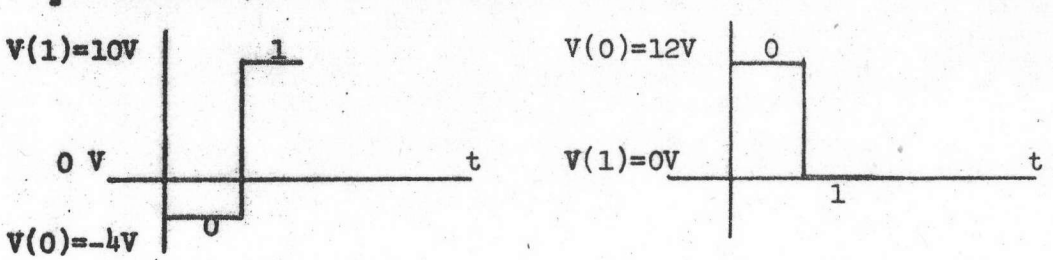
ลอจิก เกท (Logic Gates)

ลอจิก เกท (logic gates) เป็นวงจรพื้นฐานที่สำคัญใน เครื่องคอมพิว เตอร์ วงจรที่ใช้ในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่มีความรวด เร็วจะประกอบด้วยลอจิก เกทพวกนี้ ลอจิก เกท เป็นวงจรสวิทซ์ซึ่งจะให้ผลว่ามีหรือไม่มี (yes or no information) วงจรพื้นฐานพวกนี้มี เพียงไม่กี่วงจร แต่คอมพิว เตอร์ก็ใช้วงจรเหล่านี้ซ้ำ ๆ กัน เพื่อให้มันทำงานให้ได้ผลตามที่ต้องการ

ลอจิก เกทจะมี input ซึ่ง เป็นส่วนที่สัญญาณที่ เป็น pulse เข้าไปใน เกท ปกติ input ของ เกทจะมีมากกว่าหนึ่ง สำหรับส่วนที่สัญญาณจะออกจากวงจร เรียกว่า output ซึ่งปกติจะมี เพียงหนึ่ง output ทั้ง input และ output ของวงจร เกทจะมีค่าโวลต์ เตจอยู่ระดับใดระดับหนึ่งภายในสองระดับ เรียกว่าระดับ 0 กับระดับ 1 ระดับโวลต์ เตจของ output ขึ้นอยู่กับแบบของลอจิก เกทและระดับโวลต์ เตจของ input เราแบ่งลอจิก เกทออกได้ เป็น 2 แบบ คือ

1. <u>ลอจิกบวก</u> (positive logic) เรา เรียกระดับโวลต์ เตจที่มีค่าสูงว่าระดับ 1 ระดับโวลต์ เตจที่มีค่าต่ำ เรียกว่าระดับ 0

2. <u>ลอจิกลบ</u> (negative logic) เรา เรียกระดับโวลต์ เตจที่มีค่าสูงว่าระดับ 0 ระดับโวลต์ เตจที่มีค่าต่ำ เรียกว่าระดับ 1



จากรูป แสดงถึงลอจิกบวกและลอจิกลบ จะสัง เกต เห็นว่าระดับ 0 ไม่ได้หมายความว่าค่าโวลต์ เตจต้อง เป็น 0