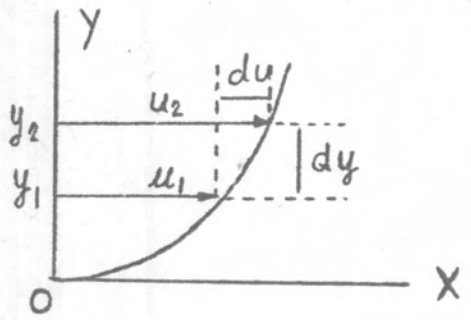
บทที่ 3

ของไหลจริง

หอสมุดกลาง จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

3.1 กฎความหนืดของนิวตัน (Newton's Law of viscosity)

เป็นที่ทราบมาแล้วว่าของไหลจะมีคุณสมบัติการเสียรูปต่อเนื่องกันไปเมื่อมีแรงเค้นเฉือนกระทำ จะเรียกของไหลที่ขนาดของความเค้นเฉือนแปรโดยตรงกับอัตราการเสียรูปเชิงมุมว่า "ของไหลนิวโตเนียน" (newtonian fluid) เช่น น้ำ , น้ำมันใส และอากาศเป็นต้น และจะเรียกของไหลที่ขนาดของความเค้นเฉือนไม่แปรโดยตรงกับอัตราการเสียรูปเชิงมุมว่า "ของไหลนอนนิวโตเนียน" (non-newtonian fluid) เช่น น้ำเชื่อมข้น , น้ำมันข้น และโลหิต เป็นต้น ในที่นี้จะศึกษาของไหลนิวโตเนียนเท่านั้น



รูปที่ 3.1 แสดงการไหลแบบราบเรียบในทิศทางเดียวของของไหลนิวโตเนียน

จากการทดลองพบว่า การไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) ในทิศทางเดียว ชั้นของเส้นกระแสจะมีความเร็วไม่เท่ากัน ดังรูปที่ 3.1 ความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นระหว่างชั้นของของไหลหรือชั้นของเส้นกระแส เป็นสัดส่วนกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในทิศตั้งฉากกับความเค้นเฉือน (τ) นั่นคือ

$$\tau \alpha \frac{du}{dy}$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad (3.1)$$

(3.1) เราเรียกว่า "กฎความหนืดของนิวตัน"

u เป็นความเร็วของชั้นของไหล

μ เป็นค่าคงที่

$\frac{\partial u}{\partial y}$ คือเกรเดียนต์ความเร็ว (velocity gradient) ในทิศ y

และจากการทดลองพบว่า ของไหลนิวโตเนียนต่างชนิดกันเมื่อให้เคลื่อนที่ด้วยเกรเดียนต์ความเร็วเดียวกัน จะเกิดความเค้นเฉือนไม่เท่ากัน ดังนั้นค่าคงที่ μ จึงเป็นคุณสมบัติทางกายภาพของของไหล เรียกว่า "สัมประสิทธิ์ของความหนืด" (coefficient of viscosity) หรือความหนืดสัมบูรณ์ (absolute viscosity) หรือความหนืดพลศาสตร์ (dynamic viscosity) ในทางกลศาสตร์ของไหลกำหนดให้ผลหารของความหนืดพลศาสตร์กับความหนาแน่นของของไหล ρ เป็นความหนืดจลนศาสตร์ (kinematic viscosity, ν)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad (3.2)$$

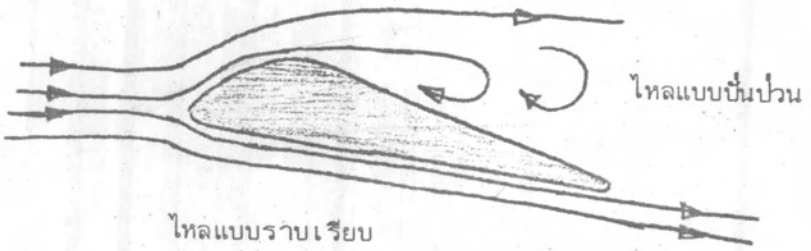
3.2 อิทธิพลของความหนืด (effect of viscosity)

ในการศึกษาการไหลของของไหลให้ได้ผลถูกต้องยิ่งขึ้นจะต้องคำนึงถึงคุณสมบัติประจำตัวของของไหลด้วย เช่น ความหนืด , แรงตึงผิว (surface tension) และความอัดได้ เป็นต้น ว่ามีอิทธิพลต่อการไหลอย่างไร ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะอิทธิพลเนื่องจากความหนืดเท่านั้น ซึ่งความหนืดเป็นคุณสมบัติอย่างหนึ่งของของไหลจริง

ลักษณะการไหลของของไหลจริงแบ่งออกเป็น 2 แบบคือ

1. การไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) เป็นการไหลที่เส้นกระแสของการไหลเรียงขนานกันอย่างเป็นระเบียบ การไหลแบบนี้ เช่น การไหลของน้ำใต้ดิน การไหลของโลหิต และการดูดน้ำของต้นไม้ เป็นต้น

2. การไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow) เป็นการไหลที่เส้นกระแสของการไหลไม่เรียงกันอย่างเป็นระเบียบ การไหลของของไหลเกือบทั่วไปจะเป็นการไหลแบบนี้ เช่น การไหลของน้ำตามแม่น้ำลำคลอง การไหลของอากาศเมื่อผ่านท่อลมหรือสิ่งกีดขวางเป็นต้น



รูปที่ 3.2 แสดงลักษณะการไหลของอากาศผ่านปีกเครื่องบิน

3.3 เลขเรย์โนลดส์[3] (Reynolds number)

เรย์โนลดส์เป็นผู้หนึ่งที่ได้ทำการทดลองศึกษาการไหลของของไหลที่มีความหนืด และได้กำหนดตัวเลขขึ้นมาตัวหนึ่งซึ่งไม่มีหน่วย เพื่อใช้ในการบอกลักษณะของการไหลของของไหล ตัวเลขนี้เรียกว่า "เลขเรย์โนลดส์" (R) โดยกำหนดให้

$$\text{เลขเรย์โนลดส์} = \frac{\text{แรงเฉื่อย}}{\text{แรงเสียดทาน}} \qquad (3.3)$$

แรงเฉื่อย (inertia force) ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร หมายถึง ผลคูณของมวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรกับความเร่ง

พิจารณาการไหลแบบสม่ำเสมอในระนาบ XY ไหลไปทางทิศ X จากสมการของยูเลอร์ (2.35.1)จะได้

$$\frac{du}{dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.4}$$

$$\text{แรงเฉื่อยต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร} = \rho u\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.5}$$

แรงเสียดทาน (frictional force)ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร หมายถึงแรงเสียดทานที่เกิดจากความหนืดคือแรงเค้นเฉือนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

จาก (3.1) จะได้แรงเสียดทานต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร คือ

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{3.6}$$

แทนค่าสมการ (3.5) และ (3.6) ใน (3.3) จะได้

$$R = \frac{\rho u\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \frac{u}{\nu}\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \tag{3.7}$$

u จะแทนความเร็วเฉลี่ยของการไหลในทิศ X

$\dfrac{\partial u/\partial y}{\partial^2 u/\partial y^2}$ มีหน่วยเป็นหน่วยของความยาว เรียกว่า "รัศมีธาราศาสตร์"

(hydraulic radius , r) โดย

$$r = \frac{A}{L} \tag{3.8}$$

A เป็นพื้นที่หน้าตัดของของการไหล

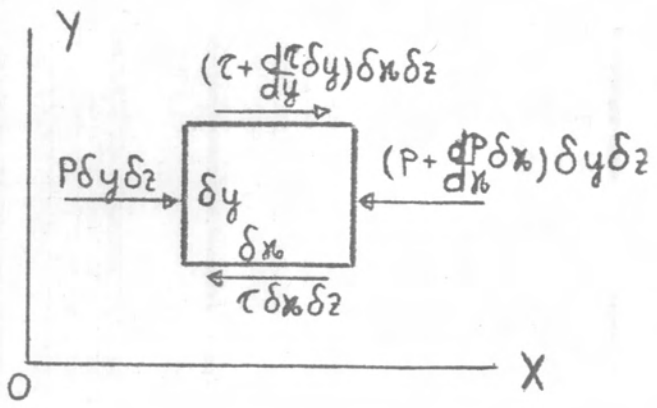
L เป็นเส้นรอบรูปของพื้นที่หน้าตัดของของการไหล

$$R = \frac{ur}{\nu} \tag{3.9}$$

จากการทดลองได้ว่า ค่า R น้อยกว่า 2000 การไหลจะเป็นการไหลแบบราบเรียบ ถ้า R มากกว่า 2000 การไหลจะเป็นแบบปั่นป่วน นอกจากนี้เลขเรย์โนลดส์ยังใช้หาแฟคเตอร์ของความเสียดทานของการไหลได้อีกด้วย

3.4 การไหลระหว่างแผ่นขนานอยู่นิ่ง 2 แผ่น[4] (flow at two stationary parallel plates)

พิจารณาส่วนย่อยของของไหลรูปกล่องสี่เหลี่ยมขนาด δx, δy, δz ซึ่งไหลสม่ำเสมอและเป็นแบบเอกรูป (uniform) ทางทิศ X ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 แสดงแรงเนื่องจากความดันและความเค้นเฉือนในทิศ X

เนื่องจากว่าไหลสม่ำเสมอและเป็นแบบเอกรูป ดังนั้นความเร่งในทิศ X จึงเป็นศูนย์ จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตันจะได้

$$\Sigma F_x = -\left(\frac{dP}{dx}\,\delta x\right)\,\delta y\delta z + \left(\frac{d\tau}{dy}\,\delta y\right)\,\delta x\,\delta z = 0$$

เมื่อ $\delta x\delta y\delta z \longrightarrow 0$ จะได้

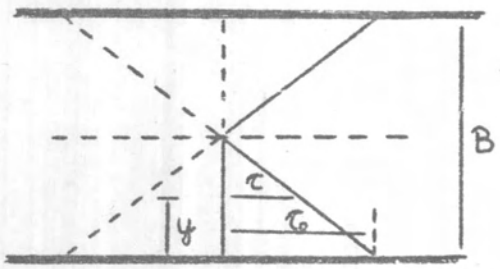
$$\frac{dP}{dx} = \frac{d\tau}{dy} \qquad (3.10)$$

เนื่องจากว่าการไหลนี้เป็นการไหลแบบเอกรูปสม่ำเสมอ และไหลอย่างขนาน ดังนั้นเกรเดียนต์ความดัน (pressure gradient) ตามทิศ X จะมีค่าเท่ากันทุก ๆ จุดในแต่ละเส้นกระแส เมื่ออินติเกรตสมการ (3.10) เทียบกับ y จะได้

$$\tau = \frac{dP}{dx}\,y + C_1 \qquad (3.11)$$

C_1 เป็นค่าคงที่

นั่นคือ ความเค้นเฉือนจะแปรผันตรงกับระยะห่างระหว่างแผ่นขนาน



รูปที่ 3.4 แสดงการแผ่กระจายความเค้นเฉือนระหว่างแผ่นขนานอยู่นิ่ง 2 แผ่น

จากเงื่อนไขของสมมาตร (symmetry) ดังรูปที่ 3.4 จะได้ว่า ขนาดของความเค้นเฉือนที่ผิวของแผ่นขนานทั้งสองจะต้องเท่ากัน นั่นคือ ความเค้นเฉือน ณ จุดกึ่งกลางระหว่างแผ่นทั้งสองจะเป็นศูนย์

ให้ B เป็นระยะห่างระหว่างแผ่นขนานทั้ง 2 ที่ตำแหน่ง $y = \frac{B}{2}$ จาก (3.11) จะได้

$$\tau = 0 = \frac{dP}{dx}\frac{B}{2} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{dP}{dx}\frac{B}{2}$$

แทนค่า C_1 ใน (3.11) จะได้

$$\tau = -\frac{dP}{dx}\left(\frac{B}{2} - y\right) \qquad (3.12)$$

จาก (3.1) และ (3.12) จะได้

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} = -\frac{dP}{dx}\left(\frac{B}{2} - y\right)$$

อินติเกรตเทียบกับ y จะได้

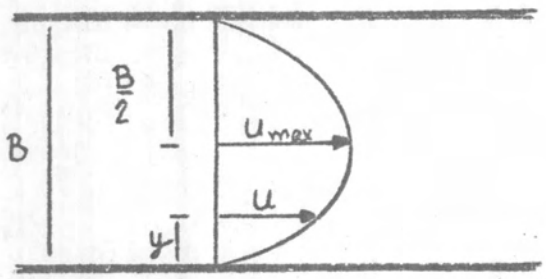
$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}(By - y^2) + C_2 \qquad (3.13)$$

จากเงื่อนไขขอบเขต $u = 0$ ที่ $y = 0$ จะได้ $C_2 = 0$

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}(By - y^2) \qquad (3.14)$$

(3.14) เป็นสมการของพาราโบลา (parabola) ซึ่งมีจุดยอด (vertex) อยู่ที่เส้นกึ่งกลาง (centerline) ของการเคลื่อนที่ และความเร็วจะมีค่ามากที่สุด ณ ตำแหน่ง $y = \frac{B}{2}$ คือ

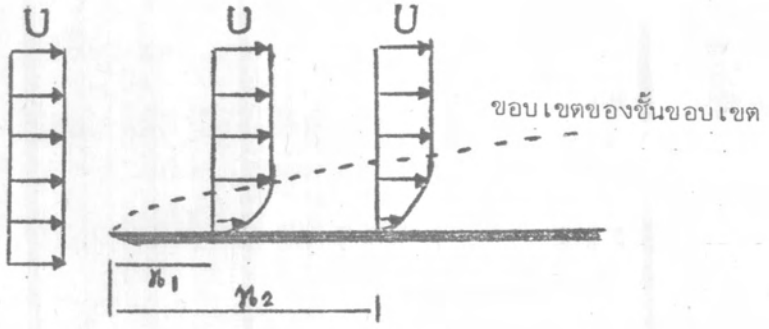
$$u_{max} = -\frac{B^2}{8\mu}\frac{dP}{dx} \qquad (3.15)$$



รูปที่ 3.5 แสดงการแผ่กระจายความเร็วระหว่างแผ่นขนานอยู่นิ่ง 2 แผ่น

3.5 ชั้นขอบเขต[1] (boundary layers)

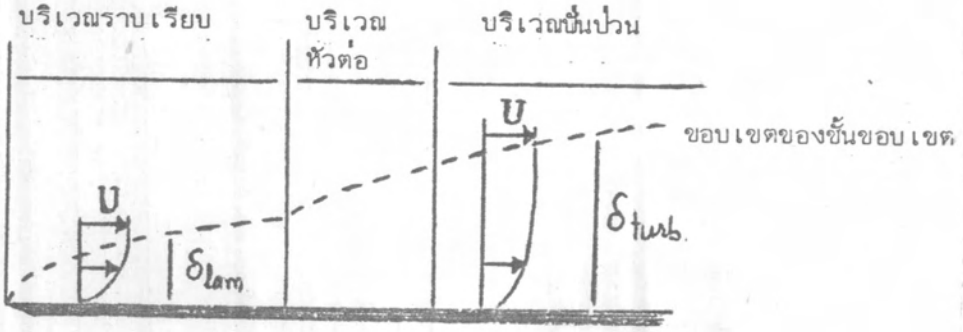
การไหลของของไหลที่มีความหนืด เช่น น้ำและอากาศเมื่อไถลไปตามยาวของระนาบแผ่นผนังเรียบ ของไหลที่ผนังจะอยู่นิ่งและจะมีความเร็วเพิ่มขึ้นเมื่อห่างจากผนังออกไปในแนวตั้งฉาก จนกระทั่งมีความเร็วคงที่ ช่วงที่เกิดเกรเดียนต์ความเร็วนี้เรียกว่า "ชั้นขอบเขต" ส่วนบริเวณที่อยู่นอกชั้นขอบเขตออกไปจะไม่เกิดเกรเดียนต์ความเร็ว ในทางทฤษฎีชั้นขอบเขต (boundary layer theory) คิดให้อิทธิพลของความหนืดถูกจำกัดขอบเขตด้วยชั้นขอบเขต ส่วนของไหลที่ไหลอยู่นอกชั้นขอบเขตจะคิดให้เป็นของไหลที่ไม่มีความหนืด (invicid fluid) ด้วยการใช้ข้อคิดนี้เองทำให้ได้แบบของการไหล ตัวอย่างที่ง่ายที่สุดคือการไหลอย่างขนานไปตามแผ่นระนาบบางที่อยู่นิ่ง ให้ด้านหัวของแผ่นระนาบบางเป็นปลายแหลมเพื่อเวลาของไหลไหลผ่านจะได้ไม่เกิดการหันเห (deflection) ไป ดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 แสดงการแผ่กระจายความเร็วของของไหลเมื่อไหลผ่านแผ่นระนาบบาง

ส่วนของของไหลที่สัมผัสกับแผ่นระนาบบางจะอยู่นิ่ง เพราะขอบเขตไม่มีการเลื่อนไหล และส่วนของของไหลที่อยู่ใกล้แผ่นระนาบบางก็จะถูกหน่วง (retarded) โดยความหนืด คือความเร็วจะน้อยกว่าของส่วนของไหลที่ผ่านห่างแผ่นระนาบบางออกไป ความกว้างของบริเวณที่มีความหน่วงจะเพิ่มขึ้นเมื่อยิ่งห่างจากด้านต้นของแผ่นระนาบบางไปตามทางเดินของการไหลไปเรื่อย ๆ บริเวณแรก ๆ จากด้านต้นของแผ่นระนาบบางจะเป็นการไหลแบบราบเรียบ ชั้นขอบเขตบริเวณนี้เรียกว่า "ชั้นขอบเขตราบเรียบ" (laminar boundary layer) และบริเวณถัดไปตามยาวของแผ่นระนาบบาง การไหลแบบราบเรียบจะไม่เสถียรภาพ (unstable) จะเป็นการไหลแบบปั่นป่วน ชั้นขอบเขตบริเวณนี้เรียกว่า "ชั้นขอบเขตปั่นป่วน (turbulent boundary layer) สำหรับขอบเขตที่ต่อระหว่างชั้นขอบเขตราบเรียบกับชั้นขอบเขตปั่นป่วน เรียกว่า "ชั้นขอบเขตหัวต่อ" (transition boundary layer)

ความหนาของชั้นขอบเขต (boundary layer thickness, δ) โดยทั่ว ๆ ไปจะกำหนดว่า เป็นระยะตั้งฉากจากผิวขอบเขตถึงจุดที่มีความเร็วลดลง 1 % ของความเร็วของการไหลแบบไม่หมุนก่อนที่จะผ่านขอบเขต



รูปที่ 3.7 แสดงชั้นขอบเขตของของไหลเมื่อไหลผ่านแผ่นระนาบบาง

การแผ่กระจายความเร็วในชั้นขอบเขต เนื่องจากเส้นโค้งของการแผ่กระจายความเร็วของชั้นขอบเขตราบเรียบมีลักษณะเป็นรูปพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $y = \delta_{lam}$ ดังรูปที่ 3.7 ดังนั้นจะได้สมการของความเร็วโดยประมาณว่า

$$(U - u) \quad \alpha \quad (\delta_{lam} - y)^2 \qquad (3.16)$$

ส่วนเส้นโค้งของการแผ่กระจายความเร็วของชั้นขอบเขตปั่นป่วนมีลักษณะคล้ายกราฟของลอก (logarithmic curve) ซึ่งจะไม่กล่าวในที่นี้